ТЕЗИСЫ ЛЕКЦИИ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

АРНОЛЬД В.И.

Большая часть задач, о которых я буду говорить - общего характера. Однако в конце я сформулирую также несколько отдельных изолированных проблем.

I. Внутренне неустойчивые предельные режимы.

За последние IO-15 лет в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений наблюдается существенный прогресс, сравнимый с бурным развитием этой теории в работах Пуанкаре. Как известно, предельные циклы Пуанкаре в течение нескольких десятков лет оставались без приложений, когда же потребности радиотехники сделали необходимой математическую теорию нелинейных автоколебаний то оказалось, что нужный аппарат уже имеется у Пуанкаре в готовом виде.

Современные достижения качественной теории находятся в таком же положении, как теория предельных циклов до развития радиотехники: математический аппарат уже создан и ждет своего приложения. Я собираюсь коротко обсудить здесь в чем состоят указанные достижения и какого рода приложения они могут иметь.

Хорошо известно, такое значение имеют для исследования траекторий динамической системы в фазовом пространстве некоторые простейшие траектории - положения равновесия и предельные циклы. Простейшие положения равновесия и предельные циклы структурного устойчивы в том смысле, что при малом изменении дифференциального уравнения они не исчезают, а лишь слегка деформируются.

Аналогичным свойством структурной устойчивости обладают все системы " общего положения" с двумерным фазовым пространством(как это доказали Андронов, Понтрягин, Де Баггис, Пейксото).

Господствовавшая со времен Пуанкаре до начала 60-х годов точка зрения на общие свойства траекторий дифференциальных уравнений с многомерным фазовым пространством состояла в том, что и здесь выделяется конечное число достаточно простых движений (равновесий и циклов) так, что при малом изменении векторного поля вся картина фазовых кривых качественно не меняется, а лишь немного деформируется; если же в данной системе реализуется более сложное движение, то оно может быть разрушено малым шевелением системы, так что оно распадается на простые движения и получится структурно устойчивая система.

Точнее эта точка зрения выражается так называемой гипотезой структурной устойчивости (структурно устойчивые системы плотны) и гипотезой о строении структурно устойчивых систем (конечность числа циклов и т.д. Обе эти гипотезы доказаны в двумерном случае. Однако, как выяснилось в начале 60-х годов в работах Смейла, Аносова и других в многомерном случае обе эти гипотезы неверны.

Вначале была опровергнута вторая гипотеза, а именно были построены структурно устойчивые системы с конечным фазовым пространством, имеющие бесконечное (и даже всюду плотное) множество замкнутых орбит.

Важным примером сложных структурно устойчивых систем являются системы с экспоненциальным разбеганием траекторий, (которые Смейл предложил называть системами Аносова). Сами примеры систем с экспоненциальным разбеганием были известны ещё во времена Пуанкаре (принцип малые причины - большие следствия). Например, свойством экспоненциального разбегания траекторий обладает движение материальной точки по инерции по гладкой поверхности отрицательной кривизны (Адамар). Как показал Синай, аналогичными свойствами обладают простейшие двумерные системы статистической механики: в системе твердых шариков в плоском ящике малое изменение начальных условий приводит к экспоненциальному расхождению траекторий после нескольких соударений. В последнее время Бунимович доказал экспоненциальное разбегание бильярдных траекторий для целого ряда бильярдов.

Траектории описанных выше систем, ввиду свойства экспоненциальной неустойчивости, весьма запутаны в фазовом пространстве. Некоторые из них замкнуты, и даже вблизи любой точки фазового пространства есть замкнутая траектория (очень большой длины). Другие траектории, напротив, заполняют пространство всюду плотно, возвращаясь по многу раз в любую его область.

И вот оказалось, что вся эта сложная и запутанная картина с быстро удаляющимися друг от друга траекториями структурно устойчива, то есть сохраняется при любом малом шевелении векторного поля или дифференциального уравнения, задающего траектории (на каждой поверхности уровня энергии).

В "физических" терминах предыдущие выводы означают, что в колебательных системах со многими степенями свободы возможны такие предельные режимы, которые притягивают к себе все близкие движения, но сами обладают свойством внутренней неустойчивости: "фазы" колебаний предельного режима сильно зависят от начальных условий, так что небольшое изменение начального условия приводит к экспоненциально быстрому расхождению фаз невозмущенного и возмущенного движений.

При этом подобные внутренне неустойчивые режимы сохраняются при любом малом изменении параметров системы, подобно тому, как сохраняются предельные циклы.

Теперь можно следующим образом сформулировать проблему о внутренне неустойчивых предельных режимах: найти механические (физические, химические ...) явления, описываемые системами с экспоненциальным разбеганием траекторий, притягивающими соседние движения.

Обсуждаемое с начала 60-х годов гипотетическое решение этой проблемы связано с проблемой турбулентности. В этом случае роль фазового пространства играет бесконечномерное функциональное пространство начальных условий (т.е. полей скоростей) несжимаемой вязкой жидкости, динамическая система определяется уравнениями Навье-Стокса (предположительно, ввиду отсутствия теорем существования и единственности). Предполагается, что при любом конечном значении числа Рейнольдса в фазовом пространстве имеется конечномерное притягивающее множество (т.к. вязкость гасит высокие гармоники) так что предельные режим движения описывается конечным числом параметров. Как известно, при большой вязкости это притягивающее множество - точка (стационарное течение); с уменьшением вязкости (т.е. с увеличением числа Рейнольдса), стационарное течение теряет устойчивость, причем может возникнуть периодическое вторичное течение (т.е. притягивающее множество становится циклом).

Можно думать, что при еще больших числах Рейнольдса притягивающее множество будет иметь большую размерность, и на нем может реализоваться сложное внутреннее экспоненциально неустойчивое движение. Соответствующее течение жидкости было бы не только не периодично, но и не почти периодично (появляется сплошной спектр), и наблюдатель мог бы назвать его турбулентным.

Справедливость приведенной здесь гипотезы отчасти может быть подтверждена с помощью машинного эксперимента с галеркинскими приближениями для уравнений Навье-Стокса.

Проведение такого эксперимента ставит, однако, ряд интересных вычислительных задач.

2. Вычислительные аспекты качественной и эргодической теории.

Для описания поведения динамических систем в качественной теории дифференциальных уравнений и эргодической теории разработан ряд понятий: инвариантные многообразия, инвариантные меры, эргоди-

ность, перемешивание, спектр, энтропия.
Онако при экспериментальном машинном исследовании системы прямолинейная постановка вопроса, скажем "найти все инвариантные меры" или "найти все замкнутые траектории" или "найти спектр" приводит к реально невыполненным вычислениям, сложность которых не окупается ценностью полученной информации.

Так например, отыскание неустойчивой периодической траектории или точное прослеживание какой-либо сепаратрисы, необходимое для такого определения полной топологической картины траектории, может быть очень трудоемким; между тем на свойства основной массы траекторий детали поведения изучаемой сепаратрисы могут и не влиять.

Точно также практически трудно различать эргодические системы и не эргодические и медленно перемещивающие от неперемешивающих; дискретный спектр с большим числом частот практические сливается с непрерывным и т.д.

Следовательно, чтобы заставить машину проводить качественное или эргодическое исследование динамической системы надо научиться задавать реалистические вопросы, далекие от обычно рассматриваемых в абстрактных классификационных теоремах, и не требовать слишком точного ответа.

Первоочередные вопросы здесь:

1. научить машину узнать вышла ли траектория в окрестность притягивающего инвариантного множества;

2. если да, то научить машину определять размерность этого множества (0 для равновесия, 1 для цикла и т.д.), а возможно и его топологию;

3. научитьмашину вычислять эргодические характеристики движения на этом множестве; прежде всего - узнавать имеется ли экспоненциальная неустойчивость траектории на рассматриваемом предельном множестве (положительна ли энтропия).

Умение отвечать на эти вопросы позволило бы экспериментально исследовать предельные режимы многомерных динамических систем.

3. Метод усреднения.

В теории неконсервативных возмущений многочастотных систем до сих пор почти нет строгих результатов. Стандартный метод усреднения состоит в том, что для определения медленной эволюции траекторий возмущение усредняется по фазам быстрых колебаний. Получающиеся "эволюционные" или "вековые" уравнения призваны описывать средний дрейф величин, сохраняющихся в быстром движении под действием возмущений. Обоснование этого весьма продуктивного метода, связано, однако, с большими трудностями. Дело в том, что в процессе эволюции траектории частоты быстрых движений сами (медленно) меняются, и в некоторые моменты времени возникает резонанс (соизмеримость частот). В этом случае при некоторых соотношениях между фазами возможно застревание на резонансе, захват траектории резонансным движением, имеющим меньшее число частот. Для описания эволюции таких захваченных резонансом траекторий метод усреднения по всему набору фаз явно неприменим.

Проблема оценки доли захватываемых резонансами траекторий, а также определения вероятной судьбы этих траекторий не решена даже для простейшего случая двухчастотных систем

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(I) + \varepsilon f_1(I,\varphi),$$
$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(I) + \varepsilon f_2(I,\varphi)$$
$$\dot{I} = \varepsilon g(I,\varphi).$$

В теории консервативных возмущений гамильтоновых систем за последние годы получены экспоненциально малые оценки скорости эволюции медленных переменных сверху (Н.Н.Нехорошев).

Однако оценки снизу получены лишь в отдельных примерах. Открыт также вопрос о распределении вероятностей для величины ухода медленных переменных от их начальных значений при малых консервативных возмущениях интегрируемой гамильтоновой системы общего положения

4. Теория устойчивости положений равновесия.

Много усилий было потрачено на разыскание критериев устойчивости положения равновесия в случае, когда некоторые из корней характеристического уравнения чисто мнимые . Однако в настоящее время доказано, что алгебраические критерии такого рода не существуют (А.Д.Брюно, Ю.С.Ильяшенко).

Открытым остается вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы устойчивости: существует ли алгоритм, выясняющий устойчиво или нет положение равновесия системы дифференциальных уравнений, правые части которой - полиномы с рациональными коэффициентами.

Близкий вопрос - о существовании предельного цикла у полиномиального векторного поля на плоскости - также, вероятно, алгоритмически неразрешим.

Модельная задача - о положительности периода абелева интеграла (интегрируемая форма и кривая задаются полиномами с рациональными коэффициентами).

Еще более простая модель - задача о положительности суммы квазиполиномов (т.е. произведений экспонент на полиномы). Но здесь алгоритм существует: это вытекает из положительного решения проблемы Гильберта о трансцендентных числах (как мне объяснил Ю.Матиясевич).

Я упомяну здесь же еще классическую задачу об обращении теоремы Лагранжа-Дирихле: доказать неустойчивость положения равновесия системы $\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ с аналитической потенциальной энергией в случае, когда положение равновесия - не точка локального минимума.

Опубликованное Н.Г.Четаевым доказательство неустойчивости ошибочно; для случая 2 степеней свободы имеется еще доказательство В.П.Паламодова, но оно не опубликовано.

5. Оценка числа предельных циклов.

Один из вопросов 16-й проблемы Гильберта-сколько предельных циклов может иметь система

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y),$$

где P и Q - многочлены 2-й степени.

Известны примеры с 3 циклами, но не известно, может ли их быть больше трех. Глубокие идеи И.Г.Петровского о связи этой задачи с топологией слоения комплексной проективной плоскости, определенного комплексными интегральными кривыми, к сожалению до сих пор не реализованы.

6. Неподвижные точки симплексных диффеоморфизмов.

Теория периодических орбит гамильтоновых уравнений проводит, как это известно со времен Пуанкаре, к интересным топологическим вопросам.

В следующей задаче речь идет обо обобщении т.н. "последней геометрической теоремы" Пуанкаре, доказательство которой было дано Биркгофом.

Пусть $A: T^2 \to T^2$ - отображение двумерного тора на себя, заданное периодическим на плоскости векторным полем f по формуле

$$A(x) = x + f(x).$$

Предположим, что 1) отображение A сохраняет площади (т.е. что $\det(DA(x)/Dx) \equiv 1$) и что 2) A оставляет на месте центр тяжести тора. (т.е. среднее значение f равно 0).

Верно ли, что при этих условиях A имеет по меньшей мере 1 неподвижную точку?

Гипотетические минимально возможное число неподвижных точек 4 (если считать точки алгебраически, с кратностями), в том числе не менее 3 геометрически различных.

Более общим образом, вместо тора можно рассматривать компактное симплектическое многообразие (т.е. многообразие с выбранной невырожденной замкнутой дифференциальной 2-формой на нем). Диффеоморфизм симплектического многообразия называется симплектическим, если он переводит в себя 2-форму. Симплектический диффеоморфизм называется гомологичным тождественному, если он принадлежит коммутатору группы гомотопных тождественному симплектических диффеоморфизмов. Гомологичный тождественному симплектический диффеоморфизм можно получить из тождественного диффеоморфизма при помощи преобразований за время t неавтономной системы канонических дифференциальных уравнений с однозначным (но зависящим от времени) гамильтонианом.

Предполагается, что число неподвижных точек симплектического диффеоморфизма, гомологичного тождественному, оценивается снизу числом критических точек гладких функций на рассматриваемом многообразии (считая критические точки алгебраически или геометрически, в зависимости от того, алгебраически или геометрически мы считатем неподвижные точки).

Однако доказано это только для случая кольца (Пуанкаре, Биркгоф) и двумерной сферы; как недавно заметил А.Шнирельман и доказал Н.Никишин, всякий сохраняющий площади диффеоморфизм двумерной сферы на себя имеет не менее двух геометрически различных неподвижных точек.