A-градуированные алгебры и непрерывные дроби

В.И.Арнольд
АН СССР

Простейший пример A-градуированной алгебры — это алгебра полиномов от одной переменной (или усеченных полиномов) с естественной градуировкой $\deg x^a = a$ (для усеченных полиномов $a \leq n$, $x^{n+1} = 0$).

Определение. *A-градуированной алгеброй* называется градуированная алгебра, изоморфная, как градуированное линейное пространство, градуированному линейному пространству алгебры полиномов (или усеченных полиномов) от одной переменной. Иными словами, в каждой степени существует ровно одна аддитивная образующая $a \leq n$ $(< \infty)$. Следовательно, ряд Пуанкаре A-градуированной алгебры равен $1 + t + t^2 + \ldots + t^n$, $n \leq \infty$. A-градуированная алгебра с двумя мультипликативными образующими определяется соотношениями $a^u = 0$, $\deg b = u$, $b^k a^r = 0$, $r < u$.

1. Классификация (ассоциативных, коммутативных) A-градуированных алгебр над $\mathbf{C}$ с тремя мультипликативными образующими

Существует только конечное число $N(n)$ таких алгебр $\mathbf{C}$-размерности n. Последовательность $N(n)$ возрастает. Например, существует ровно 5 A-градуированных алгебр произвольной размерности $n+1$, $n \geq 6$ с тремя мультипликативными образующими степеней $(1, 2, 3)$, а также ровно 5 бесконечномерных A-градуированных алгебр с такими образующими.

Обозначим через $N_{u,v}(n)$ число различных A-градуированных алгебр размерности $n + 1$ с тремя мультипликативными образующими степеней $1, u, v$.

Стабилизированные числа $N_{u,v}(\infty)$ приведены в следующей таблице (существует ровно $N_{u,v}(\infty)$ бесконечномерных A-градуированных алгебр с образующими таких степеней).

$u \backslash v$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
3		7	7	1	7	7	1	7	7	1	7	7	1	7
4			9	5	9	1	9	5	9	1	9	5	9	1
5				11	9	9	11	1	11	9	9	11	1	11
6					13	7	5	7	13	1	13	7	5	7
7						15	11	11	11	11	15	1	15	11

Я приведу формулу для этих чисел и для чисел $N_{u,v}(n)$ $(n + 1)$-мерных A-градуированных алгебр с образующими степеней $1 < u < v$.

Теорема. *Пусть*
$$\frac{v}{u} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$
разложение v/u в непрерывную дробь. Тогда число $N_{u,v}(\infty)$ бесконечномерных (или достаточно большой размерности) A-градуированных алгебр с тремя мультипликативными образующими степеней $1, u, v$ равно
$$N_{u,v}(\infty) = 2(a_1 + a_2 + \ldots) + 1.$$

Пример. $8/5 = 1 + 1/(1 + 1/(1 + \frac{1}{2}))$. Следовательно, $N_{5,8}(\infty) = 2(1+1+2)+1 = 9$.

Эта теорема объясняет, почему строки предыдущей таблицы суть периодические повторения строк треугольника:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1\\
&&&&&&1&&1\\
&&&&&1&&5&&1\\
&&&&1&&7&&7&&1\\
&&&1&&9&&5&&9&&1\\
&&1&&11&&9&&9&&11&&1\\
&1&&13&&7&&5&&7&&13&&1\\
1&&15&&11&&11&&11&&11&&15&&1
\end{array}
= 1 + 2 \cdot
\begin{array}{cccccccccccc}
&&&&&&&&&&2&\\
&&&&&&&&&3&&3\\
&&&&&&&&4&&2&\\
&&&&&&&5&&4&&4\\
&&&&&&6&&3&&2&\\
&&&&&7&&5&&5&&5\\
&&&&8&&4&&5&&2&\\
&&&9&&6&&3&&6&&6\\
&&10&&5&&6&&4&&2&\\
&11&&7&&6&&6&&7&&7\\
12&&6&&4&&3&&6&&2&
\end{array}$$

Симметрии этих треугольников и другие очевидные свойства их сторон и средних сечений являются простейшими следствиями этой теоремы и элементарных фактов о непрерывных дробях. К примеру

Лемма. *Суммы a_i в разложениях в непрерывные дроби p/q и $(q-p)/q$, $0 < p < q$, равны.*

Доказательство: Пусть $p < q/2$. Тогда
$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{q-p}{p}}\,, \qquad \frac{q-p}{q} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{q-p}{p}}}\,.$$

Это доказывает лемму.

Числа $N_{u,v}(n)$ $(n+1)$-мерных A-градуированных алгебр с тремя мультипликативными образующими степеней $1, u, v$ приведены в следующей таблице:

u,	v;	$N_{u,v}(\infty)$	n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	3	5		1	3	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	4	7			1	1	3	3	3	5	5	5	5	5	7	7	7	7	7
2	4	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	5	9				1	1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	7	7	7
3	5	7				1	3	3	3	3	5	5	5	5	5	7	7	7	7
2	5	5				1	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	6	11					1	1	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	5
4	6	5					1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	6	1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	6	1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	7	13						1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	5
5	7	9						1	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	5
4	7	9						1	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5
3	7	7						1	1	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5
2	7	5						1	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5
7	8	15							1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3
6	8	7							1	1	1	1	3	3	3	3	3	5	5
5	8	9							1	1	3	3	3	3	3	3	5	5	5
4	8	1							1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	8	7							1	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5
2	8	1							1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			$\sum(n)$	1	5	8	20	25	39	52									

Стабилизация наступает при $n \geq$ наименьшему общему кратному u и v.

Замечание. Все предыдущие и последующие результаты справедливы как над $\mathbf{C}$, так и над $\mathbf{R}$. Для простоты я здесь классифицирую A-градуированные алгебры с точносью до градуированных изоморфизмов алгебр. По-видимому, классификация с точностью до $\mathbf{C}$-изоморфизмов алгебр приводит к такому же ответу. Другими словами, A-градуировка данной алгебры по существу единственна (A-градуировка определяется структурой $\mathbf{C}$-алгебры с точностью до $\mathbf{C}$-изоморфизма). Но я проверил это только для малых n.

2. Стандартные мономы

Рассмотрим A-градуированную конечнопорожденную $\mathbf{C}$-алгебру $\mathbf{C}$-размерности $1+n$. Существует ненулевой элемент a степени 1 (если $n > 0$). Последовательность $a^2, \ldots, a^{u-1} \neq 0$ определяет аддитивный базис вплоть до $\deg = u$. Если $a^u = 0$ и $n \geq u$, то существует $b \neq 0$ такой, что $\deg b = u$. Выберем b как вторую мультипликативную образующую и будем рассматривать слова вида $a^p b^q$, как это описано ниже в более общей ситуации.

Предположим, что мы уже выбрали мультипликативные образующие $a, b, \ldots, y$, такие, что существуют ненулевые слова из $a, b, \ldots, x$ всех степеней от 1 до $\deg y$.

Рассмотрим множество степеней слов из $a, b, \ldots, y$. Пусть v — первый пропуск в множестве целых чисел $1, \ldots, \deg y, \ldots$. Если $v \leq n$, то существует ненулевой элемент z степени v, и мы его выбираем в качестве следующего мултипликативного образующего.

Продолжая этот процесс мы получаем каноническую конечную последовательность однородных образующих $a, b, \ldots$ степеней $1, u, v, \ldots$. Эти образующие определены однозначно с точностью до умножения на ненулевые числа. Множество их степеней не зависит от их выбора и является инвариантом A-градуированной алгебры (возможно, также $\mathbf{C}$-алгебры, $\mathbf{C}$-изоморфной нашей A-градуированной алгебре).

Тем самым мы получили по крайней мере один аддитивный однородный базис, образованный некоторыми мономами из образующих: $1, a, a^2, \ldots, a^{u-1}, b, \ldots$.

В случае двух образующих этими мономами будут $a^r b^k$, где $r < u$. Если все они отличны от нуля, то алгебра бесконечномерна и однозначно определена числом $u = \deg b$. Если $a^r b^k = 0$ — первый нуль в последовательности $1, a, \ldots, a^{u-1}$, $b, ba, \ldots, ba^{u-1}$, $b^2, b^2 a, \ldots$, тогда размерность алгебры равна $1 + n = uk + r$, $r < u$, и алгебра однозначно определяется двумя числами $\deg b = u$ и $n + 1 = \dim A$.

Поэтому классификация A-градуированных алгебр с двумя мултипликативными образующими тривиальна.

3. Что происходит при трех образующих?

Начнем с примера, в котором стандартные мультипликативные образующие a, b, c имеют степени 1,2,3.

Так же, как и в параграфе 2, имеем соотношения $a^2 = 0$, $ab = 0$. Рассмотрим пространство степени $\deg = 4$. У нас есть два монома — ac и b^2 степени 4. Будем называть их критическими мономами. Следовательно, у нас есть три возможности:

(i) $ac = 0$.

В этом случае $b^2 \neq 0$, и мы можем выбрать его в качестве базисного вектора степени 4.

(ii) $ac \neq 0 \neq b^2$.

В этом случае $ac = \lambda b^2$, $\lambda \neq 0$. Можно нормализовать c таким образом, что $ac = b^2$. Мы выбираем ac в качестве базисного вектора степени 4 (и будем заменять b^2 на ac всюду, где это только возможно).

(iii) $b^2 = 0$.

В этом случае $ac \neq 0$, и мы выбираем его в качестве базисного вектора степени 4.

В последнем случае, (iii), ненулевые мономы образуют цепь $(1, a, b)$, (c, ac, bc), (c^2, ac^2, bc^2), $\ldots$, содержащую в точности один моном в каждой степени. Следовательно, алгебра однозначно определяется своей размерностью $1 + n \leq \infty$.

Тоже самое остается верным и в случае (ii), поскольку все другие мономы канонически равны этим (к примеру, $b^2 = ac$, $b^3 = 0$, $abc = 0$, $\ldots$).

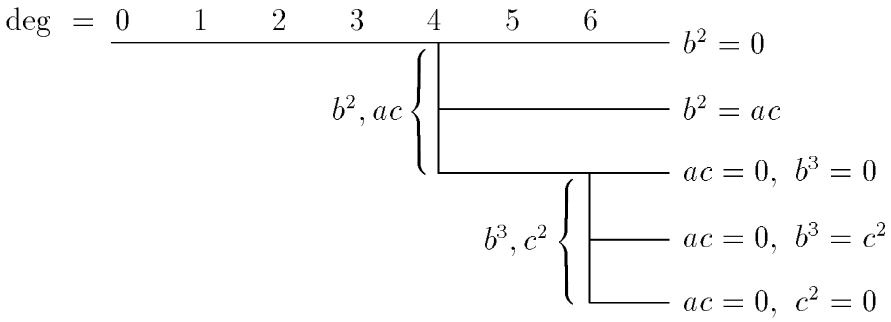
В случае (i) рассмотрим пространство степени $\deg = 5$. Единственный нетривиальный моном – это bc, следовательно, он ненулевой (если $1 + n > 5$). Мы выбираем его в качестве базисного вектора и рассмотрим пространство степени $\deg = 6$. Находим в точности два критических монома степени 6 — b^3 и c^2.

Существуют три возможности: 1) $b^3 = 0$; 2) $b^3 \neq 0 \neq c^2$; 3) $c^2 = 0$. Алгебры этих трех типов не изоморфны.

В случаях 1) и 3) получаем единственные цепи мономов, образующие канонические базисы $(1, a, b, c, b^2, bc)$, $(c^2, c^2a, c^2b, c^3, c^2b^2, c^3b)$, $\dots$ и $(1, a, b, c, b^2, bc)$, $(b^3, b^3a, b^4, b^3c, b^5, b^4c)$, $\dots$.

В случае 2) имеем $b^3 = \lambda c^2$ с $\lambda \neq 0$. Нормализуем b так, чтобы выполнялось условие $\lambda = 1$. Подставляя c^2 вместо b^3 редуцируем все ненулевые мономы из (a, b, c) к виду первого канонического базиса выше.

Следовательно, во всех трех случаях алгебра однозначно определяется своей размерностью $1 + n$. Так мы получаем полную классификацию A-градуированных алгебр с мультипликативными образующими степеней 1,2,3:



(во всех случаях $a^2 = ab = 0$). Каждой вертикальной линии соответствуют два критических монома (такая линия представляет вершину нашего дерева).

Для других значений u и v классификация A-алгебр с образующими степеней $(1, u, v)$ полностью аналогична. Всегда получается дерево с тремя возможностями в некоторых вершинах (степени 4 и 6 в предыдущем примере).

Каждой такой вершине соответствует два критических монома — $(b^k, c^l a^r)$ или $(b^k a^r, c^l)$, $0 < r < u$.

Тремя возможностями являются:

1) $b^k = 0$, 2) $b^k \neq 0 \neq c^l a^r$, 3) $c^l a^r = 0$,

или, соответственно,

1) $c^l = 0$, 2) $c^l \neq 0 \neq b^k a^r$, 3) $b^k a^r = 0$.

В случае 1 ненулевые мономы образуют стандартную цепь, и алгебра однозначно определяется своей размерностью.

Случаи 2 редуцируются к $b^k = c^l a^r$ (соответственно $c^l = b^k a^r$). Все ненулевые мономы равны мономам стандартной цепи, соответствующей случаю 1.

В случаях 3 надо продолжить такие же рассуждения увеличивая размерность.

Так как мы используем нормализацию только однажды для каждой конкретной ветви нашего дерева, то можно нормализовать все коэффициенты в наших соотношениях.

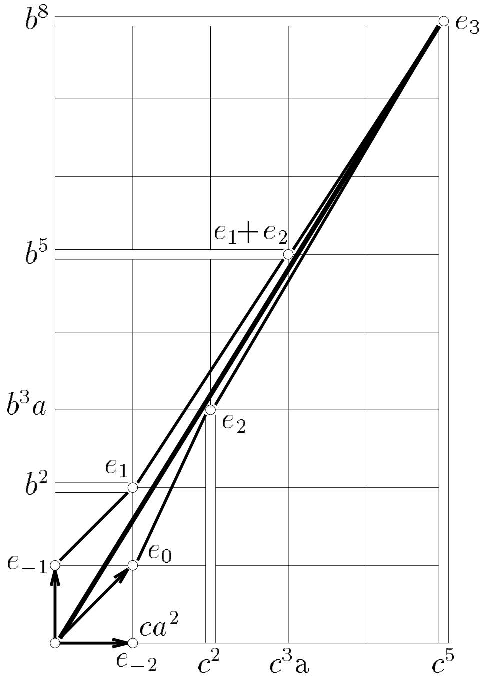


Рис. 1.

4. Описание критических мономов в терминах непрерывных дробей

Рассмотрим алгоритм вытягивания носов, определяющий разложение v/u в непрерывную дробь. (Мы будем изучать A-градуированные алгебры с мультипликативными образующими степеней $1, u, v$.) Рис.1 представляет случай $u = 5$, $v = 8$. Целые точки на плоскости (k, l) представляют мономы $c^k b^l$.

Рассмотрим прямую, соединяющую $(0, 0)$ с (u, v), и два базисных вектора $e_{-2} = (1, 0)$ и $e_{-1} = (0, 1)$. Они лежат по разные стороны от прямой, площадь определяемого ими параллелограмма равна 1.

Алгоритм работает следующим образом: прибавим вектор e_{k+1} к точке e_k столько раз, сколько это будет возможно без пересечения прямой. Результат этой суммы есть e_{k+2}. Ясно, что все точки $e_{\text{четное}}$ ($e_{\text{нечетное}}$) лежат ниже (выше) прямой. Эти точки являются вершинами выпуклой оболочки всех целых точек с неотрицательными координатами отличными от $(0, 0)$ и лежащими ниже (выше) нашей прямой. Алгоритм кончает работу, как только очередная точка попадает на прямую.

По определению, $e_{k+2} = e_k + a_{k+2}e_{k+1}$ ($e_3 = e_1 + 2e_2$), где числа a_k образуют непрерывную дробь

$$\frac{v}{u} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}\,, \qquad \frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}\,.$$

Последовательные критические мономы соответствуют последовательным шагам алгоритма. А именно, рассмотрим произвольную целую точку $e_k + se_{k+1}$ (где $0 < s < a_{k+2}$). Так задаются все целые точки на границе выпуклых оболочек, определенных выше, лежащие между e_{-1} и $e_{\text{последним}}$ и между e_0 и $e_{\text{последним}}$ (исключая начальные точки e_{-1} и e_0).

Двумя критическими мономами ассоциированными с такой точкой (p, q) являются $c^p, a^r b^q$ для точек ниже прямой и $b^q, a^r c^p$ для точек выше прямой. Здесь r определяется условием равенства весов, $vp = uq + r$ – в первом случае, $uq = vp + r$ – во втором.

Пример. Для $u = 5$, $v = 8$ (Рис.1) последовательные точки и критические пары мономов приведены в таблице

	e_1	e_2	$e_1 + e_2$	e_3
p q	1 2	2 3	3 5	5 8
кр. мон.	b^2 a^2c	c^2 ab^3	b^5 ac^3	b^8 c^5
deg	10	16	25	40

Следовательно, дерево A-алгебр соответствующих весам $(5, 8)$ имеет вид

10	16	25	40
$b^2 = 0$			
$b^2 = a^2c$			
$a^2c = 0$	$c^2 = 0$		
	$c^2 = ab^3$		
	$ab^3 = 0$	$b^5 = 0$	
		$b^5 = ac^3$	
		$ac^3 = 0$	$b^8 = 0$
			$b^8 = c^5$
			$c^5 = 0$

$N_{1,5,8}(n \geq 40) = 9$

Заключительные замечания

Я надеюсь, что проблема классификации A-градуированных алгебр с большим числом образующих приведет к алгебраически естественному обобщению непрерывных дробей.

Эти исследования мотивированы вычислением когомологий пространства вещественных полиномов $x^{n+1}+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, не имеющих корней кратности выше $k+1$. Полином Пуанкаре такого пространства всегда имеет вид $1+t^k+t^{2k}+\ldots$ (одна аддитивная образующая в каждой не слишком большой размерности, делящейся на k).

Описанные здесь исседования соответствуют четному k. В случае нечетных k также возникают интересные проблемы, такие как классификация антикоммутативных A-градуированных алгебр; это должно вести к "супернепрерывным дробям".

Однако, все эти алгебраические игры не используются в первоначальной топологической задаче: структура кольца когомологий, вычисленная В. А. Васильевым, определяется соотношениями $e_pe_q = C^q_{p+q}e_{p+q}$ (в четном случае), а пространства полиномов слабо гомотопически эквивалентны пространству петель сфер (увеличивающейся размерности с ростом степени полиномов n). Пространство всех функций (не только полиномов), не имеющих корней кратности выше m, (по крайней мере, слабо) гомотопически эквивалентно пространству петель S^m.