О задачах, разрешимых и неразрешимых аналитически и геометрически

Владимир Арнольд

Только французам удается объяснять другим то, чего они сами не понимают.

Н.Лесков. Несмертельный Голован.

В еретических текстах Р. Тома более всего завораживает его умение освобождать свою мысль от оков логики и не бояться фраз, лишенных всякого точного смысла. Я горжусь тем, что могу считать себя частично учеником Тома, поскольку я многому научился, будучи участником его семинара в IHES[1] в течение всего 1965 года. Быть может, главное, что я там воспринял, была следующая идея (приписываемая самому Тому, а не его ученикам): “всегда найдутся дураки, чтобы доказывать теоремы”. Эта революционная мысль сильно повлияла на мой математический кругозор: я понял, что можно “перепрыгивать через теории”, а не только “через вычисления”, по выражению Галуа. Хотя мне никогда не удавалось избавиться от власти теорем и вкусить вытекающей из этого интеллектуальной свободы, мечта о возможности безответственных математических фантазий глубоко поразила сознание.

Ниже я излагаю — в честь юбилея великого Учителя – несколько таких фантазий в виде довольно расплывчатых гипотез.

Точных формулировок я не даю по следующим причинам:

1) они чересчур длинны,

2) читатель сможет восстановить их самостоятельно,

3) существует множество неэквивалентных вариантов этих гипотез.

1 Задачи, неразрешимые геометрически

В гипотезах, которые будут приведены, используются понятия разрешимых и неразрешимых аналитических задач. Типичными примерами аналитических задач являются: а) проблема устойчивости движения в окрестности стационарной точки динамической системы, б) проблема интегрируемости системы дифференциальных уравнений, в) проблема полной интегрируемости системы канонических уравнений Гамильтона.

Самая расплывчатая формулировка моих гипотез состоит в утверждении, что все эти задачи неразрешимы.

[1]Институт Высших Научных Исследований в Бюр-сюр-Иветт под Парижем.

Неразрешимость, о которой идет речь, сильнее, чем неразрешимость в теории алгоритмов, ибо, например, всякое уравнение в нашем смысле разрешимо. Таким образом, гипотеза подразумевает не только отсутствие алгоритма в смысле логиков, но отсутствие даже более общей процедуры (а именно, "аналитического алгоритма", см. ниже).

С точки зрения геометрии многообразий, разрешимость задачи не должна зависеть от системы координат, в которых записаны соответствующие данные (правые части дифференциальных уравнений, компоненты векторных полей, функции Гамильтона). Поэтому я предлагаю

Определение. *Задача* неразрешима геометрически*, если среди задач, которые получаются из данной диффеоморфными заменами в пространстве параметров, нет задач, разрешимых аналитически.*

Понятие аналитической разрешимости описывается ниже.

Пример. Проблема устойчивости стационарного решения системы дифференциальных уравнений, зависящей от параметров, геометрически неразрешима, если она аналитически неразрешина для всякого семейства, эквивалентного данному посредством локальных диффеоморфизмов, зависящих от параметров.

Замечание. Задача интегрирования дифференциального уравнения геометрически разрешима в окрестности неособой точки соответствующего векторного поля, хотя она может быть аналитически неразрешима. В окрестности особой точки эта же задача, по видимому, геометрически неразрешима даже для полиномиальных векторных полей.

2 Аналитическая разрешимость

Опишем теперь аналитическую разрешимость. В этой теории система координат предполагается фиксированной. *Данные* задачи — это набор функций, ее определяющих (компоненты векторных полей, функции Гамильтона и т.п.). Все эти функции фиксированы как функции координат и параметров. Задача (определения устойчивости, интегрируемости и т.д.) *аналитически разрешима*, если ее решение (множество значений параметров, для которых система устойчива, интегрируема и т.д.) выражается через данные посредством аналитических операций, в число которых входят:

1) все арифметические операции,
2) дифференцирование,
3) интегрирование,
4) подстановки,
5) обращение.

Более точно, следует ввести в рассмотрение множество "допустимых многообразий" и "допустимых отображений" со следующими свойствами:

1. Для любого n арифметические пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ суть допустимые многообразия.

2. Всякое рациональное отображение допустимо.

3. Образ и прообраз допустимого многообразия при допустимом отображении — допустимое многообразие.

4. Пересечение, объединение и взаимные дополнения двух допустимых многообразий — допустимые многообразия.

5. Суперпозиция двух допустимых отображений — допустимое отображение.

6. Если $f(x, y)$ — допустимая функция, то ее производная по x, а также первообразная, ветвь которой фиксирована значением в некоторой допустимой точке, суть допустимые функции.

Замечание. Первообразная, о которой идет речь, понимается в смысле комплексного анализа; график полученной многозначной функции представляет собой допустимое многообразие. Заметим также, что аналитическое продолжение также является допустимой операцией в нашей теории.

Можно построить понятие разрешимости, основанное на интегрировании в вещественном смысле. Эта теория будет отличаться от обсуждаемой здесь. Например, функция синус на вещественной прямой допустима, если разрешается комплексное интегрирование, но она не попадает в минимальное множество допустимых функций, если использовать только вещественный интеграл (хотя ограничение этой функции на любой конечный отрезок действительной прямой всегда представляет собой допустимую функцию).

Поскольку функция синус допустима, множество всех целых чисел также допустимо. Отсюда вытекает, что множество целых значений параметра y, для которых многочлен с целыми коэффициентами $f(x, y)$ имеет целый корень x, является допустимым, каков бы ни был данный многочлен f.

3 Почти разрешимые задачи; гипотезы

Вернемся к аналитической задаче, заданной каким-то выбором функций (компонент векторных полей, функций Гамильтона и т.п.), которые могут зависеть от параметров. Эти функции суть *данные* задачи.

Определение. Допустимое множество задачи — *это минимальное допустимое множество, содержащее данные задачи. Задача называется* аналитически разрешимой, *если ее решение есть допустимая функция параметров.*

Пример. Проблема устойчивости стационарного решения O динамической системы, зависящей от параметров, аналитически разрешима, если множество значений параметров, для которых стационарное решение O устойчиво, есть допустимое многообразие.

Гипотеза 1. Существует число M и две функции N и D такие, что проблема устойчивости положения равновесия O векторного поля в $\mathbf{R}^n$, компоненты которого суть многочлены степени d, аналитически неразрешима,

а) если n и d больше, чем M,

б) если $d > 1$ и n превосходит $N(d)$,

в) если $n > 2$ и d превосходит $D(n)$.

Гипотеза о том, что эта проблема не допускает алгоритмического решения в смысле математической логики, если рассматривать только многочлены с целыми коэффициентами, была уже опубликована в моей работе [Arn74].

Гипотеза 2. Проблема интегрируемости дифференциального уравнения, заданного векторным полем в пространстве размерности $n > 1$, компоненты которого являются многочленами степени $d > 1$, аналитически неразрешима.

Гипотеза 3. Проблема полной интегрируемости системы канонических уравнений Гамильтона, заданной полиномиальным гамильтонианом степени $d > 2$ в пространстве размерности $2n > 2$, аналитически неразрешима.

Гипотеза 4. Задачи, упомянутые в гипотезах 1–3, неразрешимы также геометрически.

Замечание 1. Проблемы *интегрирования*, по всей вероятности, также неразрешимы. Не исключено, однако, что семейство систем может оказаться интегрируемым (в том смысле, что интеграл существует), хотя проблема в целом неразрешима (этот интеграл не является допустимой функцией).

Например, набор интегралов в инволюции, доставляющий решение гамильтоновой системы, интегрируемой по Лиувиллю, может представляться недопустимыми функциями, т.е. не выразимыми через функцию Гамильтона и допустимые операции.

Замечание 2. В гипотезах 1–4 имеются в виду полиномиальные системы. Это ограничение неестественно; необходимо определение, в котором роль параметров будут играть функции (например, компоненты векторного поля). Такое определение легко сформулировать; оно позволяет выразить ответ задачи (об устойчивости, интегрируемости и т.д.) в терминах действия допустимых операций на функции-данные.

Однако в этом случае даже задача распознавания, является ли локальным минимумом данная критическая точка аналитической функции одной переменной, неразрешима (ибо порядок производных, необходимых для этого, a priori неограничен).

Поэтому я предлагаю следующее определение [Arn70]:

Определение. Задача, содержащая как параметр функцию, *почти разрешима*, если в пространстве функций существует убывающая последовательность исключительных подмногообразий возрастающей коразмерности таких, что задача разрешима вне каждого из этих подмногообразий.

(Ответ допускает представление, допустимое в терминах функций-данных, при условии, что эти функции не принадлежат одному из исключительных подмногообразий; зависимость этого представления от исключительного подмногообразия может быть произвольной.)

Класс разрешимых задач можно еще более ограничить. Можно, например, добавить требование, что исключительные подмногообразия сами должны быть допустимыми; можно наложить условия на зависимость этого подмногообразия и соответствующей разрешающей процедуры от номера подмногообразия в последовательности.

Мне, однако, кажется, что все эти ограничения не нужны:

Гипотеза 5. Среди задач, которые фигурируют в гипотезах 1–4, нет почти разрешимых задач.

Я надеюсь, что будут найдены доказательства приведенных гипотез, основанные на понимании динамических систем, а не на ухищрениях формальной логики, и мы узнаем много нового о структуре дискриминантных многообразий и бифуркационных диаграмм динамических систем — объектов, изучение которых было начато Р. Томом [Th71].

Список литературы

[Th71] R. Thom, 1971, The bifurcation subset of a space of maps, in *Manifolds, Amsterdam 1970, Springer Lecture Notes in Mathematics*, Berlin–Heidelberg–New-York, 1971, **197**, pp. 202–208.

[Arn70] В. Арнольд, 1970, Локальные задачи анализа, *Вестник Моск. Унив. Сер. 1, Мат. Мех.*, 1970, **25**, 2, стр. 52–56.

[Arn74] V. Arnold, 1974, Mathematical developments arising from Hilbert problems, in *Proc. of Symp. in Pure Math.*, AMS, Providence, 1974, **28**, p. 59.