Простые особенности кривых *

В.И.Арнольд

Посвящается Л.Д.Фаддееву

1. Введение

Под *особенностью кривой* ниже понимается росток голоморфного отображения комплексной прямой в комплексное пространство в особой точке (где производная отображения обращается в нуль), рассматриваемый с точностью до биголоморфизма пространства-образа.

Особенность называется *простой*, если все близкие особенности принадлежат конечному набору классов эквивалентности (т.е. не имеют модулей). Простые особенности плоских кривых расклассифицированны В.Брюсом и Т.Гафни в [1].

Особенность называется *стабильно простой*, если она остается простой при вложении содержащего кривую пространства в любое большее. Кривые, полученные из данной такими вложениями, будем называть *стабильно эквивалентными.*

Ниже приведена классификация простых особенностей кривых в пространстве любого числа измерений с точностью до стабильной эквивалентности.

Оказывается, просты почти все особенности отображений, ряды Тейлора которых начинаются с членов степени два или три, или имеют вид

$$x = t^4, \quad y = t^6, \quad z_i = 0 \quad (\text{modd } t^7),$$

и ещё особенности тридцати двух *спорадических кривых*, список которых приведен ниже.

Почти все здесь и ниже означает "все, за исключением бесконечно-вырожденных кривых, образующих множество коразмерности бесконечность в пространстве всех кривых". *Коразмерность* здесь и далее означает "коразмерность в пространстве рядов без свободного члена".

Коразмерность множества всех не простых особенностей ростков кривых, лежащих в N-мерном пространстве, равна $6N-6$. Это означает, что *не простые особенности не встречаются на кривых типичных* $(6N-8)$*-параметрических семейств кривых, но становятся неустранимыми малыми шевелениями, когда число параметров семейства достигает* $6N-7$.

Все простые особенности, ряды Тейлора которых начинаются с членов степени n, реализуются в пространстве не более n измерений. Из тридцати двух спорадических кривых одна требует шестимерного пространства, четыре — пятимерного, девять — четырёхмерного, тринадцать — трёхмерного, а пять умещаются на плоскости.

С алгебраической точки зрения наша задача состоит в классификации "коартиновых" подалгебр (конечной коразмерности в алгебре степенных рядов от одной переменной). Основными инструментами исследования являются *полугруппа особенности*, образованная показателями степеней главных членов входящих в подалгебру рядов (ср. [2, 3, 4]), и *спектральная последовательность* квазиоднородной фильтрации, подобная используемой в теории критических точек функций (см. [5]).

Две естественных фильтрации в подалгебре и возникающие наборы коммутирующих нильпотентных матриц, связанные с нашей подалгеброй, позволяют надеяться, что классификация простых (в смысле отсутствия модулей, то есть непрерывных инвариантов) коартиновых подалгебр может быть включена в теорию типа теории колчанов. Но пока я не нашел связей

* Частично поддержано РФФИ, грант 96-01-01104. Автор благодарен Институту Миттаг-Леффлера, где эта работа была написана, за поддержку, Р.Фрёбергу и Б.Шапиро за обсуждения и указание литературы, О.Виро и А.Соловьёву — за помощь в печатании текста.

полученной классификации ни с одной из известных мне задач этого типа (с классификацией простых алгебр Ли, простых категорий векторных пространств, простых каустик и волновых фронтов, правильных многогранников, групп Кокстера, с классификацией простых мероморфных функций и с другими “A, D, E-классификациями”).

Особая роль числа 6, разграничивающего простые и не простые особенности, подсказывает всё же, что какую-то роль обычные E_6, E_7, E_8 тут играют. Эта шестёрка — та самая, которая определяет тангенс 7/6 угла наклона верхней границы области “хороших размерностей” Мазера [6].

К классификации простых особенностей кривых меня привела попытка построения локальной алгебраической (или, лучше сказать, аналитической) симплектической геометрии при помощи комбинации операций скобок Пуассона и умножения в алгебре функций на фазовом пространстве. Я надеюсь изложить симплектические следствия описанных здесь результатов в другом месте.

2. Список стабильно простых и огораживающих особенностей кривых

Мономиальную кривую в $\mathbb{C}^N$, заданную параметрически уравнениями

$$x_1 = t^{a_1}, \quad \ldots, \quad x_N = t^{a_N} \quad (a_1 < \cdots < a_N),$$

будем обозначать символом $(a_1, \ldots, a_N)$. Если в одной из компонент вместо монома t^{a_i} стоит бином $t^a + t^b$, то в символе элемент a_i заменяется на (a, b). Например, символ $(4, (6, 7))$ означает плоскую кривую $x_1 = t^4$, $x_2 = t^6 + t^7$.

Теорема 1. *Стабильно простые особенности кривых стабильно эквивалентны особенностям следующего списка (которые все просты):*

1. *Почти все кривые с ненулевой квадратичной частью ряда Тейлора;*
2. *Почти все кривые с нулевой квадратичной и ненулевой кубической частью ряда Тейлора;*
3. *Почти все кривые с 6-струёй* $(t^4, t^6, 0, \ldots, 0)$ *;*
4. *Тридцать две спорадические кривые, список которых приведен ниже.*

Замечание. Бесконечно-вырожденные кривые, исключённые словами “почти все”, топологически не вложены (“проходят по себе дважды”, как, скажем, кривая с символом $(2, 6)$). Для формальных рядов и для гладких вещественных кривых бесконечно-вырожденность определяется той же системой бесконечного числа уравнений на коэффициенты ряда Тейлора, что и для голоморфных, но уже не имеет столь простого топологического описания.

Список спорадических кривых. Этот список состоит из пяти частей.

1. *Семь кривых с начальной частью символа* $(4, 5)$:

$$\begin{tikzcd}
(4,5,6,7)^{3N} & & & \\
(4,5,6)^{4N-3} \arrow[u] & (4,5,7)^{4N-2} \arrow[l] & (4,(5,7),11)^{5N-4} \arrow[l] & (4,5,11)^{5N-3} \arrow[l] \\
 & & (4,(5,7))^{6N-6} \arrow[u] & (4,5)^{6N-5} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Эта часть исчерпывает кривые, символы которых начинаются с $(4, 5)$. Все такие особенности просты.

Верхние индексы обозначают коразмерности, а стрелки — примыкания.

2. *Пятнадцать кривых с начальной частью символа* $(4,7)$:

$$\begin{tikzcd}
(4,7,9,10)^{5N-2} & & \\
(4,7,(9,10))^{6N-5} \arrow[u] & (4,7,9)^{6N-4} \arrow[l] & \\
(4,(7,9),10,13)^{6N-4} \arrow[u] & (4,7,10,13)^{6N-3} \arrow[l] & \\
(4,(7,9),10)^{7N-7} \arrow[u] & (4,7,10)^{7N-6} \arrow[l] \arrow[u] & \\
(4,(7,9),13)^{7N-6} \arrow[u] & (4,7,13)^{7N-5} \arrow[l] \arrow[u] & \\
(4,(7,9),17)^{8N-8} \arrow[u] & (4,(7,13),17)^{8N-7} \arrow[l] & (4,7,17)^{8N-6} \arrow[l] \\
(4,(7,9))^{9N-10} \arrow[u] & (4,(7,13))^{9N-9} \arrow[l] \arrow[u] & (4,7)^{9N-8}. \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Эта часть исчерпывает кривые, символы которых начинаются с $(4,7)$. Все такие особенности просты.

3. *Кривая* $(4,9,10,11)^{6N-3}$.
4. *Шесть кривых с начальной частью символа* (5):

$$\begin{tikzcd}
(5,6,7,8,9)^{4N} & (5,6,7,8)^{5N-4} \arrow[l] & (5,6,7,9)^{5N-3} \arrow[l] \\
(5,7,8,9)^{6N-5} \arrow[r] & (5,7,8,9,11)^{5N-1} \arrow[r] & (5,6,8,9)^{5N-2} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

5. *Три кривые с начальной частью символа* (6):

$$(6,7,8,9,10,11)^{5N} \longleftarrow (6,7,8,9,10)^{6N-5} \longleftarrow (6,7,8,9,11)^{6N-4}$$

Теорема 2. *Всякая не простая особенность кривой либо принадлежит одному из трёх бесконечно-вырожденных предельных классов семейств 1, 2 и 3 теоремы 1, либо примыкает к одному из следующих трёх классов огораживающих особенностей:*

$$\begin{gathered}
(t^4+t^5+at^6, t^9, t^{10}, t^{15}), \\
(t^5, t^6+t^8+at^9, t^7), \\
(t^6, t^7+t^{10}+at^{11}, t^8+bt^{10}, t^9).
\end{gathered}$$

Коразмерности этих трёх классов равны, соответственно, $7N-6$, $6N-6$, $7N-8$.

В частности, коразмерность множества не простых особенностей ростков кривых в $\mathbb{C}^N$ равна $6N-6$, если $N \geq 3$. Эта шестёрка определяет тангенс угла наклона $7/6$ на бесконечности верхней границы области хороших размерностей Мазера.

3. Классификация кривых с ненулевой 3-струёй

Все такие кривые, исключая бесконечно-вырожденные, просты и стабильно эквивалентны либо плоским кривым, либо кривым трехмерного пространства.

Теорема 3. *Особые кривые с ненулевой 2-струёй (исключая бесконечно-вырожденные) образуют одну бесконечную серию A_{2k} стабильно плоских кривых:*

$$(2,3)^N \longleftarrow (2,5)^{2N-1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow (2,2k+1)^{kN-(k-1)} \longleftarrow \cdots$$

Предположим теперь, что квадратичня часть ряда Тейлора особой кривой нулевая, но кубическая — не нулевая.

Теорема 4. *Особые кривые с нулевой 2-струёй и ненулевой 3-струёй (исключая бесконечно-вырожденные) образуют две трёхиндексные серии кривых, стабильно эквивалентных следующим кривым в трёхмерном пространстве:*

$$\begin{aligned} E_{6k,p,i} &= (3,(3k+1,3k+2+3i),3k+2+3p)^{(2k+p)N-(2k+2p-2-i)}, \\ E_{6k+2,p,i} &= (3,(3k+2,3k+4+3i),3k+4+3p)^{(2k+p+1)N-(2k+2p-1-i)}, \end{aligned}$$

где $k \geq 1$, $0 \leq p \leq k$, $0 \leq i \leq k-1$.

Замечание. При граничных значениях индексов нормальную форму можно упростить, а именно можно выбрать

$$\begin{aligned} E_{6k,k,i} &= (3,(3k+1,3k+2+3i))^{3kN-(4k-2-i)}, \\ E_{6k+2,k,i} &= (3,(3k+2,3k+4+3i))^{(3k+1)N-(4k-1-i)}, \\ E_{6k,p,p} &= (3,3k+1,3k+2+3p)^{(2k+p)N-(2k+p-2)}, \\ E_{6k+2,p,p} &= (3,3k+2,3k+4+3p)^{(2k+p+1)N-(2k+p-1)}, \\ E_{6k,k,k-1} &= (3,3k+1)^{3kN-(3k-1)}, \\ E_{6k+2,k,k-1} &= (3,3k+2)^{(3k+1)N-3k}. \end{aligned}$$

Имеют место примыкания

$$E_{\cdot,p,i} \longrightarrow E_{\cdot,p,i-1} \longrightarrow E_{\cdot,p-1,i-1}$$

Начало иерархии этих особенностей E таково:

$$\begin{tikzcd} (3,4,5)^{2N} & (3,4)^{3N-2} \arrow[l] & (3,5,7)^{3N-1} \arrow[l] & (3,5)^{4N-3} \arrow[l] & \\ & & (3,7,8)^{4N-2} \arrow[u] & (3,(7,8),11)^{5N-4} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\ & & (3,8,10)^{5N-3} \arrow[u] & (3,7,11)^{5N-3} \arrow[u] & \cdots \arrow[l] \\ & & \vdots \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

4. Классификация кривых с 6-струёй $(t^4, t^6, \dots)$

Все такие кривые, исключая бесконечно вырожденные, просты.

Теорема 5. *Кривые с 6-струёй $(t^4,t^6,\dots)$ (не бесконечно-вырожденные) образуют семь однопараметрических серий:*

$$\begin{aligned} a_k &= (4,(6,2k+1))^{(5+k)N-(6+k)}, && k \geq 3; \\ b_k &= (4,(6,2k+3),2k+11)^{(5+k)N-(5+k)}, && k \geq 2; \\ c_k &= (4,(6,2k+5),2k+9)^{(5+k)N-(4+k)}, && k \geq 1; \\ d_k &= (4,(6,2k+7),2k+9,2k+11)^{(5+k)N-(3+k)}, && k \geq 0; \\ e_k &= (4,6,2k+9,2k+11)^{(5+k)N-(2+k)}, && k \geq -1; \\ f_k &= (4,6,2k+5,2k+7)^{(5+k)N-(5+k)}, && k \geq 1; \\ g_k &= (4,6,2k+7)^{(5+k)N-(4+k)}, && k \geq 0. \end{aligned}$$

Эти семь серий примыкают друг к другу так:

$$
\begin{tikzcd}
b_{k-1} & c_{k-1} \arrow[l] & d_{k-1} \arrow[l] & e_{k-1} \arrow[l] & \\
 & & f_k \arrow[u] & g_k \arrow[l] \arrow[u] & \\
a_k \arrow[uu] & b_k \arrow[l] \arrow[uu] & c_k \arrow[l] \arrow[u] & d_k \arrow[l] \arrow[u] & e_k \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Начало иерархии этих особенностей имеет вид

$$
\begin{tikzcd}
e_{-1} & & & & & \\
g_0 \arrow[u] & & & & & \\
d_0 \arrow[u] & e_0 \arrow[l] & & & & \\
f_1 \arrow[u] & g_1 \arrow[l] \arrow[u] & & & & \\
c_1 \arrow[u] & d_1 \arrow[l] \arrow[u] & e_1 \arrow[l] & & & \\
 & f_2 \arrow[u] & g_2 \arrow[l] \arrow[u] & & & \\
b_2 \arrow[uu] & c_2 \arrow[l] \arrow[u] & d_2 \arrow[l] \arrow[u] & e_2 \arrow[l] & & \\
 & & f_3 \arrow[u] & g_3 \arrow[l] \arrow[u] & & \\
a_3 \arrow[uu] & b_3 \arrow[l] \arrow[uu] & c_3 \arrow[l] \arrow[u] & d_3 \arrow[l] \arrow[u] & e_3 \arrow[l] & \\
 & & & f_4 \arrow[u] & g_4 \arrow[l] \arrow[u] & \\
 & a_4 \arrow[uu] & b_4 \arrow[l] \arrow[uu] & c_4 \arrow[l] \arrow[u] & d_4 \arrow[l] \arrow[u] & e_4 \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

5. Коартинова алгебра и полугруппа особенности кривой

Классификацию особенностей кривых можно истолковывать в двойственных терминах как перечисление “коартиновых” подалгебр конечной коразмерности в алгебре степенных рядов от одной переменной (рассматривая подалгебры с точностью до автоморфизмов объемлющей алгебры рядов, то есть до формальных диффеоморфизмов прямой).

Определение. *Локальной алгеброй* A_f кривой $x_i = f_i(t)$ в $\mathbb{C}^N$ называется подалгебра алгебры степенных рядов от t, порожденная (после замыкания по модулю степеней максимального идеала) мультипликативными образующими f_i, т.е. алгебра

$$A_f = f^*\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_N]] \subset \mathbb{C}[[t]].$$

Фильтрации алгебр рядов от t и от x по порядкам нулей порождают в алгебре A_f две фильтрации. Обозначим через M^i идеал в алгебре $\mathbb{C}[[t]]$, образованный рядами, делящимися на t^i. Фильтрация

$$A_f = {A_f}^0 \supset {A_f}^1 \supset \cdots, \quad {A_f}^s = A_f \cap M^s,$$

совпадает с $M^i \supset M^{i+1} \supset \cdots$, начиная с некоторого места i, так как коразмерность A_f в $\mathbb{C}[[t]]$ конечна (для не бесконечно-вырожденных особенностей).

Мы получаем конечномерную коммутативную алгебру A_f/M^i (с фильтрацией), представленную коммутирующими нильпотентными линейными операторами в конечномерном векторном пространстве M^1/A_f.

Размерность $a = \dim_{\mathbb{C}} M^1/A_f$ этого векторного пространства появляется в формуле для коразмерности $aN - b$ класса простой особенности f кривой, лежащей в пространстве $\mathbb{C}^N$. Поправка b равна размерности фактор-пространства $(M^1 df/dt + {A_f}^N)/{A_f}^N$, как это следует из вида касательного пространства к орбите ростка f.

Определение. *Полугруппой* P_f особенности кривой $x_i = f_i(t)$ называется подполугруппа аддитивной полугруппы натуральных чисел, образованная порядками нулей всевозможных линейных комбинаций произведений функций f_i.

Иными словами, полугруппа P_f состоит из степеней однородных составляющих размерности единица (а не нуль) в градуированной алгебре G_f, ассоциированной с фильтрованной алгеброй $A_f \supset {A_f}^1 \supset \cdots$:

$${G_f}^i = {A_f}^i/{A_f}^{i+1}, \quad G_f = \bigoplus {G_f}^i.$$

В этих терминах можно сказать, что *градуированная алгебра G_f, соответствующая кривой f, есть полугрупповая алгебра полугруппы P_f этой кривой* (образованная линейными комбинациями одночленов t^i, показатели i которых принадлежат полугруппе).

Пример. Полугруппа плоской кривой $x = t^3$, $y = \sin^3 t$ описывается строкой

$$P_f = ([1], [2], \mathbf{3}, [4], \mathbf{5}, 6, [7], 8.).$$

Здесь в квадратных скобках стоят *пробелы* $[i]$, (для которых $\dim {G_f}^i = 0$), а выделены полужирным шрифтом степени мультипликативных образующих градуированной алгебры G_f. Точка после восьмерки означает, что полугруппа содержит и все последующие числа $(9, 10, \dots)$.

Иерархия особенностей, описанная в наших теоремах, отражает арифметику полугрупп P_f. Для полугрупп с двумя образующими имеет место чрезвычайно полезная *двойственность Сильвестра* между полугруппой и её дополнением. Пусть u и v — взаимно простые натуральные числа. Обозначим через K четное число $(u-1)(v-1)$.

Сильвестр опубликовал в нематематичской газете (см. [3]) следующее

Предложение. *Целое число c представимо в виде линейной комбинации $mu + nv$ с целыми неотрицательными коэффициентами, если и только если число $K - 1 - c$, симметричное числу c относительно середины отрзка* $[0, K-1]$, *не представимо в таком виде.*

В частности, все целые числа, начиная с K включительно, представимы, а $K - 1$ не представимо в виде $mu + nv$, $m \geq 0$, $n \geq 0$. На отрезке же $[0, K-1]$ представима ровно половина чисел.

Пример. При $u = 3$, $v = 5$ полугруппа комбинаций имеет вид

$$(0, [1], [2], \mathbf{3}, [4], \mathbf{5}, 6, [7], 8.).$$

Последовательность длин пробелов $(2, 1, 1)$ двойственна последовательности $(1, 1, 2)$ длин антипробелов. Из восьми целых точек отрезка $[0, 7]$ четыре входят, а четыре не входят в полугруппу представимых точек.

6. Техника вычислений с полугруппами

Доказательства приведенных выше теорем состоят из длинных вычислений, которые приобретают легко обозримый вид на языке полугрупп. Покажем, как работает полугрупповая техника на примере доказательства достаточности полиномиальной нормальной формы $(3, 7, 8)$. Мы опишем способ уничтожения высших членов рядов Тейлора $(t^3 + \cdots, t^7 + \cdots, t^8 + \cdots)$ посредством замен зависимых и независимой переменных.

Замена зависимых переменных x_i называется *левой*, а замена независимой переменной t — *правой*.

При правой замене $t = T(1 + aT^r)$ моном t^m получает приращение $t^m \sum c_k t^{kr}, \quad k \geq 1$.

При левой замене $X_i = x_i + g(x)$ компонента x_i получает приращение в виде ряда, носитель которого принадлежит полугруппе P_f. При этом, выбирая g, можно получить поправку с любым младшим членом t^i, где i принадлежит полугруппе P_f, надо только следить за тем, чтобы выполнялось условие теоремы о неявной функции (достаточно, чтобы i было больше порядка младшего члена ряда f_i).

Будем обозначать ряды вроде $t^3 + at^5 + o(t^5)$ символами вроде $(3 \& 5.)$. (Точка внутри скобок существенна — она указывает на возможное присутствие ряда $o(t^5)$).

Предложение. *Всякая кривая* $(3., 7., 8.)$ *эквивалентна мономиальной кривой* $(3, 7, 8)$.

Доказательство. Полугруппа имеет описание

$$([1], [2], 3, [4], [5], 6.).$$

Последовательно убивая в каждой компоненте слагаемые, порядки которых принадлежат полугруппе, мы получаем левую эквивалентность

$$(3., 7., 8.) \sim (3 \& 4 \& 5, 7, 8)$$

исходной кривой с кривой, каждая компонента которой имеет носителем возмущения те пробелы полугруппы, которые следуют за показателем главного члена этой компоненты (например, пробелы [4], [5] следуют за показателем главного члена 3 в первой компоненте).

Теперь убиваем t^4 в первой компоненте правой эквивалентностью с $r = 1$. Убивая затем левой эквивалентностью возникшие лишние слагаемые (степеней 6 и выше в первой компоненте, 8 и выше во второй, 9 и выше в третьей), мы получаем эквивалентность

$$(3 \& 4 \& 5, 7, 8) \sim (3 \& 5, 7, 8).$$

Оставшееся возмущение t^5 в первой компоненте убиваем правой эквивалентностью с $r = 2$. Теперь возникают лишние слагаемые степеней ≥ 7 в первой компоненте, ≥ 9 во второй и ≥ 10 в третьей. Все их показатели принадлежат полугруппе. Поэтому все такие лишние слагаемые можно убить левой заменой:

$$(3 \& 5, 7, 8) \sim (3, 7, 8).$$

Это доказывает искомую эквивалентность.

Замечание. Строго говоря, все эти кровожадные рассуждения проведены выше лишь на уровне формальных рядов. Однако в случае голоморфных (или даже лишь вещественно-гладких) кривых замены можно сделать тоже голоморфными или вещественно-гладкими соответственно, как это хорошо известно из теории особенностей гладких отображений (используя "подготовительную теорему" Вейерштрасса и Мальгранжа).

Доказательства остальных теорем проводятся по той же схеме, хотя вычисление полугруппы иногда бывает более сложным (полугруппа кривой *не* определяется показателями степеней *главных* членов компонент). Например, кривой с символом $(4, (6, 7+2k))$ соответствует полугруппа, в которую входит $13+2k$.

Кроме того, при исследовании кривых с 6-струёй $(t^4, t^6, 0, \dots, 0)$ очень полезна стационарная группа плоской кривой $x^3 = y^2$. Её алгебра Ли порождена эйлеровым полем $2x\partial_x + 3y\partial_y$ и гамильтоновым полем $2y\partial_x + 3x^2\partial_y$ (как модуль над алгеброй функций).

Спектральная последовательность соответствующей квазиоднородной фильтрации позволяет, например, сразу убедиться в эквивалентности

$$(t^4, t^6 + t^{7+2k} + o(t^{7+2k})) \sim (t^4, t^6 + t^{7+2k}),$$

а также привести в порядок другие компоненты соответствующей пространственной кривой, как это указано в теореме 5. Например, так доказывается не вполне очевидная эквивалентность

$$(t^4, t^6 + t^{7+2k}, t^{9+2k} + at^{11+2k}) \sim (t^4, t^6 + t^{7+2k}, t^{9+2k}).$$

Цитированная литература

[1] J. W. Bruce, T. Gaffney. *Simple singularities of maps* $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. Journal of London Mathematical Society, II ser., vol. **26** (1982), 464–474.

[2] E. Kunz. *The value semigroup of a one-dimension Gorenstein ring.* Proc. Amer. Math. Soc., vol. **25** (1970), 748–751.

[3] J. J. Sylvester. *Mathematical questions with their solutions.* Educational Times, vol. **41** (1884), 21.

[4] R. -O. Buchweitz, G. -M. Greuel. *The Milnor number and deformations of complex curves singularities.* Inventiones Mathematicae, vol. **58** (1980), 241–281.

[5] В.И.Арнольд. *Спектральные последовательности для приведения функций к нормальной форме.* В книге: Проблемы механики и математической физики, М., Наука, 1976, стр. 7–20. (Английский перевод: V. I. Arnold. *Spectral sequences for the reduction of functions to a normal form.* Selecta Math. Sov., vol. **1** (1981), 3–18).

[6] J. Mather. *Stability of C^∞ mappings, VI.* Proceedings of the Liverpool Conference on Singularities, vol. **1**. Lecture Notes in Mathematics, vol. **192**, 207–253, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971. (Русский перевод: Успехи Математических Наук, том **29**, вып. 1, (1974) с. 99–158).

Математический Институт им.В.А.Стеклова
Российской Академии Наук
и
CEREMADE, Université Paris-Dauphine