# О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

В. И. Арнольд

Математика — часть физики. Физика — экспериментальная, естественная наука, часть естествознания. Математика — это та часть физики, в которой эксперименты дешевы.

Тождество Якоби (вынуждающее высоты треугольника пересекаться в одной точке) — такой же экспериментальный факт, как то, что Земля кругла (т.е. гомеоморфна шару). Но обнаружить его можно с меньшими затратами.

В середине двадцатого века была предпринята попытка разделить математику и физику. Последствия оказались катастрофическими. Выросли целые поколения математиков, незнакомых с половиной своей науки и, естественно, не имеющих никакого представления ни о каких других науках. Они начали учить своей уродливой схоластической псевдоматематике сначала студентов, а потом и школьников (забыв о предупреждении Харди, что для уродливой математики нет постоянного места под Солнцем).

Поскольку ни для преподавания, ни для приложений в каких-либо других науках схоластическая, отрезанная от физики, математика не приспособлена, результатом оказалась всеобщая ненависть к математикам — и со стороны несчастных школьников (некоторые из которых со временем стали министрами), и со стороны пользователей.

Уродливое здание, построенное замученными комплексом неполноценности математиками-недоучками, не сумевшими своевременно познакомиться с физикой, напоминает стройную аксиоматическую теорию нечетных чисел. Ясно, что такую теорию можно создать и заставить учеников восхищаться совершенством и внутренней непротиворечивостью возникающей структуры (в которой определена, например, сумма нечетного числа слагаемых и произведение любого числа сомножителей). Четные же числа с этой сектантской точки зрения можно либо объявить ересью, либо со временем ввести в теорию, пополнив ее (уступая потребностям физики и реального мира) некоторыми “идеальными” объектами.

К сожалению, именно подобное уродливое извращенное построение математики господствовало в преподавании математики в течение десятилетий. Возникнув первоначально во Франции, это извращение быстро распространилось на обучение основам

Расширенный текст выступления на дискуссии о преподавании математики в Palais de Découverte в Париже 7 марта 1997 г.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

математики сперва студентов, а потом и школьников всех специальностей (сперва во Франции, а потом и в других странах, включая Россию).

Ученик французской начальной школы на вопрос “сколько будет 2+3” ответил: “3+2, так как сложение коммутативно”. Он не знал, чему равна эта сумма, и даже не понимал, о чем его спрашивают!

Другой французский школьник (на мой взгляд, вполне разумный) определил математику так: “там есть квадрат, но это нужно еще доказать”.

По моему преподавательскому опыту во Франции, представление о математике у студентов (вплоть даже до обучающихся математике в École Normale Supérieure — этих явно неглупых, но изуродованных ребят мне жалко больше всего) — столь же убого, как у этого школьника.

Например, эти студенты никогда не видели параболоида, а вопрос о форме поверхности, заданной уравнением $xy = z^2$, вызывает у математиков, обучающихся в ENS, ступор. Нарисовать на плоскости кривую, заданную параметрическими уравнениями (вроде $x = t^3 - 3t$, $y = t^4 - 2t^2$) — задача совершенно невыполнимая для студентов (и, вероятно, даже для большинства французских профессоров математики).

Начиная с первого учебника анализа Лопиталя (“анализ для понимания кривых линий”) и примерно до учебника Гурса, умение решать подобные задачи считалось (наряду со знанием таблицы умножения) необходимой частью ремесла каждого математика.

Обиженные Богом ревнители “абстрактной математики” выбросили из преподавания всю геометрию (через которую в математике чаще всего осуществляется связь с физикой и реальностью). Учебники анализа Гурса, Эрмита, Пикара недавно были выброшены на свалку студенческой библиотекой Университетов Париж 6 и 7 (Жюсье) как устаревшие и потому вредные (только благодаря моему вмешательству удалось их спасти).

Студенты ENS, прослушавшие курсы дифференциальной и алгебраической геометрии (прочитанные уважаемыми математиками), оказались незнакомыми ни с римановой поверхностью эллиптической кривой $y^2 = x^3 + ax + b$, ни вообще с топологической классификацией поверхностей (не говоря уже об эллиптических интегралах первого рода и о групповом свойстве эллиптической кривой, т.е. о теореме сложения Эйлера–Абеля) — их учили лишь структурам Ходжа и якобиевым многообразиям!

Как могло сложиться такое положение во Франции, давшей миру Лагранжа и Лапласа, Коши и Пуанкаре, Лере и Тома? Мне кажется, разумное объяснение дал И. Г. Петровский, учивший меня в 1966 году: настоящие математики не сбиваются в шайки, но слабым шайки необходимы, чтобы выжить. Они могут объединяться по разным принципам (будь то сверхабстрактность, антисемитизм или “прикладная и индустриальная” проблематика), но сущностью всегда остается решение социальной проблемы — самосохранение в условиях более грамотного окружения.

Напомню, кстати, предостережение Л. Пастера — никогда не существовало и не будет существовать никаких “прикладных наук”, есть лишь *приложения наук* (весьма полезные!).

В те времена я относился к словам Петровского с некоторым сомнением, но теперь я все более и более убеждаюсь, насколько он был прав. Значительная часть сверхабстрактной деятельности сводится просто к индустриализации беззастенчивого отнимания открытий у первооткрывателей и их систематическому приписыванию эпигонам–обобщателям. Подобно тому, как Америка не носит имя Колумба, математические результаты почти никогда не называются именами их открывателей.

Во избежание кривотолков должен заметить, что мои собственные достижения почему-то никогда не подвергались подобной экспроприации, хотя это постоянно случалось и с моими учителями (Колмогоровым, Петровским, Понтрягиным, Рохлиным) и с учениками. Проф. М. Берри сформулировал однажды следующие два принципа:

*Принцип Арнольда.* Если какое-либо понятие имеет персональное имя, то это — не имя первооткрывателя.

*Принцип Берри.* Принцип Арнольда применим к самому себе.

Вернусь, однако, к преподаванию математики во Франции.

Когда я учился на первом курсе мех.-мата МГУ, лекции по анализу читал теоретико-множественный тополог Л. А. Тумаркин, добросовестно пересказывающий старый классический курс анализа французского образца, типа Гурса. Он сообщил нам, что интегралы от рациональных функций вдоль алгебраической кривой берутся, если соответствующая риманова поверхность — сфера, и, вообще говоря, не берутся, если род ее выше, и что для сферичности достаточно существования на кривой данной степени достаточно большого числа двойных точек (вынуждающих кривую быть уникурсальной: ее вещественные точки можно нарисовать на проективной плоскости единым росчерком пера).

Эти факты настолько поражают воображение, что (даже сообщенные без всяких доказательств) дают большее и более правильное понятие о современной математике, чем целые тома трактата Бурбаки. Ведь мы узнаем здесь о существовании замечательной связи между вещами на вид совершенно различными: существованием явного выражения для интегралов и топологией соответствующей римановой поверхности, с одной стороны, а с другой стороны — между числом двойных точек и родом соответствующей римановой поверхности, проявляющемся вдобавок в вещественной области в виде уникурсальности.

Уже Якоби заметил, как самое восхитительное свойство математики, что в ней одна и та же функция управляет и представлениями целого числа в виде суммы четырех квадратов, и истинным движением маятника.

Эти открытия связей между разнородными математическими объектами можно сравнить с открытием связи электричества и магнетизма в физике или сходства восточного берега Америки с западным берегом Африки в геологии.

Эмоциональное значение таких открытий для преподавания трудно переоценить. Именно они учат нас искать и находить подобные замечательные явления единства всего сущего.

Дегеометризация математического образования и развод с физикой разрывает эти связи. Например, не только студенты, но и современные алгебраические геометры в большинстве своем не знают об упомянутом здесь Якоби факте: эллиптический интеграл первого рода выражает время движения вдоль эллиптической фазовой кривой в соответствующей гамильтоновой динамической системе.

Перефразируя известные слова об электроне и атоме, можно сказать, что гипоциклоида столь же неисчерпаема, как идеал в кольце многочленов. Но учить идеалам студентов, никогда не видевших гипоциклоиды, столь же нелепо, как учить складывать дроби детей, никогда не разрезавших (хотя бы мысленно) на равные доли ни яблоко, ни пирог. Неудивительно, что дети предпочтут складывать числитель с числителем и знаменатель со знаменателем.

От моих французских друзей я слышал, что склонность к сверхабстрактным обобщениям является их традиционной национальной чертой. Я не исключаю, что здесь действительно идет речь о наследственной болезни, но все же хотел бы подчеркнуть, что пример с яблоком и пирогом я заимствовал у Пуанкаре.

Схема построения математической теории совершенно такая же, как в любой естественной науке. Сначала мы рассматриваем какие-либо объекты и делаем в частных случаях какие-то наблюдения. Потом мы пытаемся найти пределы применимости своих наблюдений, ищем контрпримеры, предохраняющие от неоправданного распространения наших наблюдений на слишком широкий круг явлений (пример: числа разбиений последовательных нечетных чисел 1, 3, 5, 7, 9 на нечетное число натуральных слагаемых образуют последовательность 1, 2, 4, 8, 16, но за этими числами следует 29).

В результате мы по возможности четко формулируем сделанное эмпирическое открытие (например, гипотезу Ферма или гипотезу Пуанкаре). После этого наступает трудный период проверки того, насколько надежны полученные заключения.

Здесь в математике разработана специальная технология, которая, в применении к реальному миру, иногда полезна, а иногда может приводить и к самообману. Эта технология называется моделированием. При построении модели происходит следующая идеализация: некоторые факты, известные лишь с некоторой долей вероятия или лишь с некоторой точностью, признаются "абсолютно" верными и принимаются за "аксиомы". Смысл этой "абсолютности" состоит ровно в том, что мы позволяем себе оперировать с этими "фактами" по правилам формальной логики, объявляя "теоремами" все то, что из них можно вывести.

Понятное дело, что ни в какой реальной деятельности полностью полагаться на подобные дедукции невозможно. Причиной является хотя бы то, что параметры изучаемых явлений никогда не бывает известными нам абсолютно точно, а небольшое изменение параметров (например, начальных условий процесса) может совершенно изменить результат. Скажем, по этой причине надежный долгосрочный динамический прогноз погоды невозможен и останется невозможным, сколь бы ни совершенствовались компьютеры и регистрирующие начальные условия датчики.

Совершенно таким же образом небольшое изменение аксиом (в которых ведь мы точно уверены быть не можем) способно, вообще говоря, привести к иным выводам, чем дают выведенные из принятых аксиом теоремы. И чем длиннее и искуснее цепь выводов ("доказательств"), тем менее надежен окончательный результат.

Сложные модели редко бывают полезными (разве что для диссертантов).

Математическая технология моделирования состоит в том, чтобы от этой неприятности отвлечься и говорить о своей дедуктивной модели так, как если бы она совпадала с реальностью. Тот факт, что этот — явно неправильный с точки зрения естествознания — путь часто приводит к полезным результатам в физике, называют “непостижимой эффективностью математики в естественных науках” (или “принципом Вигнера”).

Здесь можно добавить замечание, принадлежащее И. М. Гельфанду: существует еще один феномен, сравнимый по непостижимости с отмеченной Вигнером непостижимой эффективностью математики в физике — это столь же непостижимая неэффективность математики в биологии.

“Тонкий яд математического образования” (по выражению Ф. Клейна) для физика состоит именно в том, что абсолютизируемая модель отрывается от реальности и перестает с нею сравниваться. Вот самый простой пример: математика учит нас, что решение уравнения Мальтуса $dx/dt = x$ однозначно определяется начальными условиями (т.е. что соответствующие интегральные кривые на плоскости $(t, x)$ не пересекают друг друга). Этот вывод математической модели имеет мало отношения к реальности. Компьютерный эксперимент показывает, что все эти интегральные кривые имеют общие точки на отрицательной полуоси $t$. И действительно, скажем, кривые с начальными условиями $x(0) = 0$ и $x(0) = 1$ при $t = -10$ практически пересекаются, а при $t = -100$ между ними нельзя вставить и атома. Свойства пространства на столь малых расстояниях вовсе не описываются евклидовой геометрией. Применение теоремы единственности в этой ситуации — явное превышение точности модели. При практическом применении модели это надо иметь в виду, иначе можно столкнуться с серьезными неприятностями.

Замечу, впрочем, что та же теорема единственности объясняет, почему заключительный этап швартовки корабля к пристани проводится вручную: при управлении, когда скорость причаливания определяется как гладкая (линейная) функция от расстояния, для причаливания потребовалось бы бесконечное время. Альтернативой является удар о причал (демпфируемый надлежащими неидеально упругими телами). Между прочим, с этой проблемой пришлось всерьез столкнуться при посадке первых же спускаемых аппаратов на Луну и Марс, а также при причаливании к космическим станциям — здесь теорема единственности работает против нас.

К сожалению, ни подобные примеры, ни обсуждение опасности фетишизирования теорем не встречаются в современных учебниках математики, даже лучших. У меня даже создалось впечатление, что математики-схоласты (мало знакомые с физикой) верят в принципиальное отличие аксиоматической математики от обычного в естествознании моделирования (всегда нуждающегося в последующем контроле выводов экспериментом).

Не говоря уже об относительном характере исходных аксиом, нельзя забывать о неизбежности логических ошибок в длинных рассуждениях (скажем, в виде сбоя в компьютере, вызванного космическими лучами или квантовыми осцилляциями). Каждый работающий математик знает, что если не контролировать себя (лучше всего — примерами), то уже через какой-нибудь десяток страниц половина знаков в формулах будет переврана, а двойки из знаменателей проникнут в числители.

Технология борьбы с подобными ошибками — такой же внешний контроль экспериментами или наблюдениями, как и в любой экспериментальной науке, и ему следует с самого начала учить школьников младших классов.

Попытки создания “чистой” дедуктивно-аксиоматической математики привели к отказу от обычной в физике схемы (наблюдение — модель — исследование модели — выводы — проверка наблюдениями) и замена ее схемой: определение — теорема — доказательство. Понять немотивированное определение невозможно, но это не останавливает преступных алгебраистов-аксиоматизаторов. Например, они были бы готовы определить произведение натуральных чисел при помощи правила умножения “столбиком”. Коммутативность умножения становится при этом трудно доказываемой, но все же выводимой из аксиом теоремой. Эту теорему и ее доказательство можно затем заставить учить несчастных студентов (с целью повысить авторитет как самой науки, так и обучающих ей лиц). Понятно, что ни такие определения, ни такие доказательства, ни для целей преподавания, ни для практической деятельности, ничего, кроме вреда, принести не могут.

Понять коммутативность умножения можно, только либо пересчитывая выстроенных солдат по рядам и по шеренгам, либо вычисляя двумя способами площадь прямоугольника. Попытки обойтись без этого вмешательства физики и реальности в математику — сектанство и изоляционизм, разрушающие образ математики как полезной человеческой деятельности в глазах всех разумных людей.

Раскрою еще несколько подобных секретов (в интересах несчастных студентов).

*Определитель* матрицы — это (ориентированный) объем параллелепипеда, ребра которого — ее столбцы. Если сообщить студентам эту тайну (тщательно скрываемую в выхолощенном алгебраическом преподавании), то вся теория детерминантов становится понятной главой теории полилинейных форм. Если же определять детерминанты иначе, то у каждого разумного человека на всю жизнь останется отвращение и к определителям, и к якобианам, и к теореме о неявной функции.

Что такое *группа*? Алгебраисты учат, будто это множество с двумя операциями, удовлетворяющими куче легко забываемых аксиом. Это определение вызывает естественный протест: зачем разумному человеку такие пары операций? “Да пропади она пропадом, эта математика” — заключает студент (делающийся в будущем, возможно, министром науки).

Положение становится совершенно иным, если начать не с группы, а с понятия преобразования (взаимно-однозначного отображения множества в себя), как это и было исторически. Набор преобразований какого-либо множества называется группой, если вместе с любыми двумя преобразованиями он содержит результат их последовательного применения, а вместе с каждым преобразованием — обратное преобразование.

Вот и все определение — так называемые “аксиомы” — это на самом деле (очевидные) *свойства* групп преобразований. То, что аксиоматизаторы называют “абстрактными группами” — это просто группы преобразований различных множеств, рассматриваемые с точностью до изоморфизма (взаимно-однозначного отображения, сохраняющего операции). Никаких “более абстрактных” групп в природе не существует, как это доказал Кэли. Зачем же алгебраисты до сих пор мучают студентов абстрактным определением?

Между прочим, в 1960-е годы я преподавал теорию групп московским *школьникам*. Избегая аксиоматики и оставаясь возможно ближе к физике, я за полгода дошел до теоремы Абеля о неразрешимости общего уравнения пятой степени в радикалах (научив школьников попутно комплексным числам, римановым поверхностям, фундаментальным группам и группам монодромии алгебраических функций). Этот курс впоследствии был опубликован одним из слушателей, В. Алексеевым, в виде книги “Теорема Абеля в задачах”.

Что такое *гладкое многообразие*? В недавней американской книге я прочел, что Пуанкаре не был знаком с этим (введенным в математику им самим) понятием, и что “современное” определение дано лишь в конце 1920-х годов Вебленом: многообразие — это топологические пространство, удовлетворяющее длинному ряду аксиом.

За какие грехи вынуждены студенты продираться через все эти ухищрения? На самом деле в Analysis Situs Пуанкаре имеется совершенно явное определение гладкого многообразия, которое гораздо полезнее “абстрактного”.

Гладкое $k$-мерное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ — это его подмножество, которое в окрестности каждой своей точки представляет собой график гладкого отображения $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{N-k}$ (где $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^{N-k}$ — координатные подпространства). Это — прямое обобщение самых обычных гладких кривых на плоскости (скажем, окружности $x^2 + y^2 = 1$) или кривых и поверхностей в трехмерном пространстве.

Между гладкими многообразиями естественно определяются гладкие отображения. Диффеоморфизмы — это отображения, гладкие вместе со своими обратными.

“Абстрактное” гладкое многообразие — это гладкое подмногообразие какого-либо евклидова пространства, рассматриваемое с точностью до диффеоморфизма. Никаких “более абстрактных” конечномерных гладких многообразий в природе не существует (теорема Уитни). Зачем же мы до сих пор мучаем студентов абстрактным определениям? Не лучше ли доказать им теорему о явной классификации двумерных замкнутых многообразий (поверхностей)?

Именно эта замечательная теорема (утверждающая, например, что всякая компактная связная ориентируемая поверхность — это сфера с некоторым числом ручек) дает правильное представление о том, что такое современная математика, а вовсе не сверхабстрактные обобщения наивных подмногообразий евклидова пространства, не дающие на самом деле ничего нового и выдаваемые аксиоматизаторами за достижения.

Теорема о классификации поверхностей — математическое достижение высшего класса, сравнимое с открытием Америки или рентгеновских лучей. Это настоящее открытие математического естествознания, и даже трудно сказать, принадлежит ли сам факт математике или физике. По своему значению и для приложений, и для выработки правильного мировоззрения он далеко превосходит такие “достижения” математики, как решение проблемы Ферма или доказательство того, что всякое достаточно большое целое число представляется в виде суммы трех простых чисел.

Ради рекламы современные математики иногда выдают подобные спортивные достижения за последнее слово своей науки. Понятно, что это не только не способствует высокой оценке математики обществом, а, напротив, вызывает здоровое недоверие к необходимости затраты усилий на занятия (типа скалолазания) этими экзотическими и неизвестно зачем и кому нужными вопросами.

Теорема о классификации поверхностей должна была бы входить в курсы математики средней школы (вероятно, без доказательства), но не входит почему-то даже в университетские курсы математики (из которых во Франции, впрочем, за последние десятилетия изгнана вообще вся геометрия).

Возвращение преподавания математики на всех уровнях от схоластической болтовни к изложению важной естественнонаучной области — особенно насущная задача для Франции. Для меня было удивительным, что студентам здесь практически неизвестны (и, кажется, не переводились на французский язык) все самые лучшие и важные в методическом отношении математические книги: "Числа и фигуры" Радемахера и Теплица, "Наглядная геометрия" Гильберта и Кон-Фоссена, "Что такое математика" Куранта и Роббинса, "Как решать задачу" и "Математика и правдоподобные рассуждения" Полиа, "Лекции о развитии математики в девятнадцатом столетии" Ф. Клейна.

Я хорошо помню, какое сильное впечатление произвел на меня в школьные годы курс анализа Эрмита (существующий, между прочим, в русском переводе!).

Римановы поверхности появлялись в нем, кажется, в одной из первых лекций (весь анализ был, конечно, комплексным, как это и должно быть). Асимптотики интегралов исследовались при помощи деформаций путей на римановых поверхностях при движении точек ветвления (теперь мы это назвали бы теорией Пикара–Лефшеца; Пикар, кстати, был зятем Эрмита — математические способности часто передаются зятьям: династия Адамар — П. Леви — Л. Шварц — У. Фриш — еще один знаменитый пример в Парижской Академии наук).

"Устарелый" курс Эрмита столетней давности (вероятно, выкинутый ныне из студенческих библиотек французских университетов) был гораздо современнее, чем те скучнейшие учебники анализа, которыми теперь мучают студентов.

Если математики не образумятся сами, то потребители, сохранившие как нужду в современной в лучшем смысле слова математической теории, так и свойственный каждому здравомыслящему человеку иммунитет к бесполезной аксиоматической болтовне, в конце концов откажутся от услуг схоластов-недоучек и в университетах, и в школах.

Преподаватель математики, не одолевший хотя бы части томов курса Ландау и Лифшица, станет тогда таким же ископаемым, как сейчас — не знающий разницы между открытым и замкнутым множеством.