Родственники фактора комплексной проективной плоскости по комплексному сопряжению.

В.И. Арнольд*

Аннотация

Доказывается, что фактор-пространство кватернионного проективного четырехмерного пространства по группе автоморфизмов тела кватернионов превращается при дальнейшей факторизации по кватернионной инволюции в тринадцатимерную сферу.

Этот факт и различные его обобщения доказываются при помощи теории гиперболических уравнений в частных производных, доставляющей также доказательство теоремы (впервые установленной, видимо, Л.С. Понтрягиным еще в тридцатые годы), по которой фактор комплексной проективной плоскости по комплексному сопряжению есть четырехмерная сфера.

1. Введение.

В работе 1971 г. о топологии вещественных алгебраических кривых [1] я использовал тот факт, что фактор комплексной проективной плоскости по инволюции комплексного сопряжения представляет собой четырехмерную сферу. Попытки найти доказательство этого факта в литературе не были тогда успешными,[1] но В.А. Рохлин сообщил мне, что этот результат был известен Л.С.Понтрягину еще в тридцатые годы.

Я не знаю, каким было доказательство Л.С.Понтрягина. Мое доказательство (опубликованное позже в [2]) основывалось на теории гиперболических уравнений с частными производными. Продумывая недавно это доказательство с точки зрения последовательной комплексификации и кватернионизации (работы [3])(в связи с попыткой дать кватернионный аналог фазы Берри и квантового эффекта Холла, см. [4], [5]), я обнаружил, что это доказательство, использующее комплексные числа, непосредственно переносится и на кватернионный, и на вещественный случаи, приводя к следующей странной троице теорем с общим доказательством (первая из которых очевидна, а третья, кажется, нова):

Теорема R. *Одномерное вещественное проективное пространство гомеоморфно окружности:*

$$\mathbf{R}\mathrm{P}^1 \approx S^1.$$

*частично поддержано грантом РФФИ 96-02-02204 и Institut Universitaire de France.

[1]в частности, я спрашивал у Н. Кейпера, не знает ли он такую ссылку

Теорема C. *Фактор-пространство двумерной комплексной проективной плоскости по инволюции комплексного сопряжения гомеоморфно четырехмерной сфере:*

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^2/\mathrm{conj} \approx S^4.$$

Теорема H. *Фактор-пространство четырехмерного кватернионного проективного пространства по группе автоморфизмов тела кватернионов, профакторизованное по инволюции кватернионного сопряжения, гомеоморфно тринадцатимерной сфере:*

$$(\mathbf{H}\mathrm{P}^4/\mathrm{Aut}\mathbf{H})/\mathrm{Conj} \approx S^{13}.$$

Замечание. Построенные ниже гомеоморфизмы становятся диффеоморфизмами, если снабдить факторы их естественными гладкими структурами. Но описание этих структур факторов слишком длинно и диффеоморфность ниже доказываться на будет (ср., впрочем, [6]-[9]).

2. Геометрия гиперболических конусов.

Определение. Вещественная алгебраическая гиперповерхность в вещественном проективном пространстве называется *гиперболической* относительно некоторой точки P своего дополнения, если всякая вещественная прямая, проходящая через точку P, пересекает гиперповерхность лишь в вещественных точках (число которых, с учетом кратностей, равно степени гиперповерхности).

Точка P называется в этом случае *времяподобной точкой.*

В векторном пространстве $\mathbf{R}^N$, координаты точек которого являются однородными координатами проективного пространства $\mathbf{R}\mathrm{P}^{N-1}$, гиперболические гиперповерхности этого проективного пространства изображаются алгебраическими гиперболическими конусами с вершиной в начале координат, а времяподобным точкам соответствуют *времяподобные векторы.* Условие гиперболичности принимает при этом следующий вид: всякая прямая в $\mathbf{R}^N$, параллельная времяподобному вектору, пересекает гиперболический конус в стольких вещественных точках (с учетом кратностей), какова его степень.

Пример 1. Рассмотрим пространство *квадратичных форм* в $\mathbf{R}^n$. Это вещественное векторное пространство размерности $N = n(n+1)/2$ содержит конус вырожденных форм. Этот конус гиперболичен относительно времяподобного вектора, которым может служить любая положительно-определенная квадратичная форма (т.е. любая евклидова структура в $\mathbf{R}^n$). В этом состоит теория собственных чисел квадратичных форм. Особые точки конуса составляют множество коразмерности 3 в объемлющем пространстве $\mathbf{R}^N$.

Пример 2. Рассмотрим пространство *эрмитовых квадратичных форм* в $\mathbf{C}^n$ (вещественных квадратичных форм в соответствующем $\mathbf{R}^{2n}$, инвариантных относительно действия группы окружности S^1 комплексных чисел, по модулю равных единице, на которые можно умножить векторы из $\mathbf{C}^n$).

Это вещественное векторное пространство размерности $N = n^2$ содержит конус вырожденных форм. Этот конус гиперболичен относительно времяподобного вектора, которым может служить любая положительно-определенная эрмитова форма (т.е. любая эрмитова структура в $\mathbf{C}^n$). В этом состоит теория собственных чисел эрмитовых форм. Особые точки конуса составляют множество коразмерности 4 в объемлющем пространстве $\mathbf{R}^N$.

Пример 3. Рассмотрим пространство *гиперэрмитовых квадратичных форм* в кватернионном n-мерном векторном пространстве $\mathbf{H}^n$. Речь идет о вещественных квадратичных формах в соответствующем пространстве $\mathbf{R}^{4n}$, инвариантных относительно естественного действия группы трехмерной сферы S^3, состоящей из равных по модулю единице кватернионов, действующих на векторы кватернионного пространства одновременным умножением всех компонент вектора на кватернион (с какой-либо, раз навсегда выбранной, стороны).

Это вещественное векторное пространство размерности $N = n(2n-1)$ содержит конус вырожденных форм. Этот конус гиперболичен относительно времениподобного вектора, которым может служить любая положительно-определенная гиперэрмитова форма (т.е. любая гиперэрмитова структура в $\mathbf{H}^n$). В этом состоит теория собственных чисел гиперэрмитовых форм. Особые точки конуса составляют множество коразмерности 6 в объемлющем пространстве $\mathbf{R}^N$).

Основной факт геометрии гиперболических конусов, который мы используем, состоит в следующем (ср. [2]).

Рассмотрим пересечение гиперболического конуса степени k в $\mathbf{R}^N$ со сферой S^{N-1} с центром в нуле. Фиксируем времяподобную точку P (полюс) на сфере и систему соединяющих P с $-P$ меридианов. Отметим на каждом меридиане первую (считая от P) точку конуса, вторую, ..., k-ую.

Теорема. *Точки с одинаковым номером i, расположенные на всех меридианах, образуют полуалгебраическое многообразие V_i, гомеоморфное сфере S^{N-2}.*

Действительно, гомеоморфизм многообразия V_i на экватор задается проектированием вдоль меридианов.

Доказательства сформулированных во введении теорем получаются из этого общего факта при его применении к многообразиям V_1 неотрицательно полуопределенных квадратичных форм от подходящего числа переменных.

3. Матрица Грама системы векторов.

Рассмотрим n векторов $v_1, \ldots, v_n$ в евклидовом пространстве. *Матрицей Грама* этой системы называется матрица из их скалярных произведений $a_{i,j} = (v_i, v_j)$.

Лемма. *Матрица Грама системы вектором является матрицей неотрицательной квадратичной формы, ранг которой равен размерности линейной оболочки векторов.*

Каждая матрица неотрицательной квадратичной формы ранга r реализуется как матрица Грама системы n векторов в r-мерном евклидовом пространстве.

Эта упорядоченная система n векторов определяется своей матрицей Грама однозначно, с точностью до ортогональных преобразований пространства $\mathbf{R}^r$.

Доказательство этого хорошо известного факта основано на том, что процесс ортогонализации заданного базиса евклидова пространства позволяет выразить ортонормированный базис через заданный базис и его матрицу Грама. Квадратичная форма, соответствующая системе векторов, дается формулой $f(c) = (\sum c_i v_i, \sum c_i v_i)$.

Из леммы вытекает

Следствие. *Многообразие V_1 неотрицательных вырожденных квадратичных форм в $\mathbf{R}^n$ (нормированных условием "сумма квадратов элементов матрицы формы в фиксированном базисе равна 1") гомеоморфно многообразию упорядоченных наборов n векторов в $\mathbf{R}^{n-1}$ (нормированных условием "сумма квадратов скалярных произведений векторов равна 1"), рассматриваемых с точностью до ортогональных преобразований пространства $\mathbf{R}^{n-1}$.*

В частности, применение к V_1 теоремы §2 приводит к следующему выводу.

Теорема. *Многообразие упорядоченных нормированных наборов n векторов в $\mathbf{R}^{n-1}$, рассматриваемых с точностью до ортогональных преобразований этого евклидова пространства, естественно отождествляются со сферой S^M, $M = n(n+1)/2 - 2$.*

Теоремы из §1 получаются из этой теоремы при $n = 2, 3, 5$ (когда $\mathbf{R}^{n-1}$ есть, соответственно, $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$).

4. Доказательство теоремы о факторе кватернионного пространства.

По пятерке кватернионов $q_0, \dots, q_4 \in \mathbf{H}^5$ построим неотрицательную вырожденную квадратичную форму от пяти вещественных переменных, $f(c) = (\sum c_i q_i, \sum c_i q_i)$ — скалярный квадрат кватерниона-комбинации.

По теореме §3, многообразие нормированных (и, следовательно, ненулевых) пятерок, профакторизованное по действию ортогональной группы $O(4)$ на $\mathbf{H}$, представляет собой сферу S^{13}. Факторизацию по действию $O(4)$ можно провести в три этапа.

Лемма. *Фактор-пространство $S^{4m+3}/O(4)$ сферы в $\mathbf{H}^{m+1}$ по действию $O(4)$ на $\mathbf{H}$ получается из кватернионного проективного пространства $\mathbf{H}\mathrm{P}^m$ факторизацией сначала по автоморфизмам тела кватернионов, а затем по действующей на полученном факторе инволюции кватернионного сопряжения:*

$$S^{4m+3}/O(4) \approx (\mathbf{H}\mathrm{P}^m/\mathrm{Aut}\mathbf{H})/\mathrm{Conj}.$$

Доказательство. Обозначим через $S^3 (= SU(2))$ группу кватернионов единичной нормы. Прямое произведение $S^3 \times S^3$ ортогонально действует на пространстве кватернионов $\mathbf{H}$ левыми и правыми умножениями $q \mapsto uqv^{-1}$. Построенное отображение

$S^3 \times S^3 \to SO(4)$ является универсальным двулистным накрытием $Spin(4) \to SO(4)$, его ядро состоит из двух элементов $(1,1)$ and $(-1,-1)$.

Кватернионное проективное пространство $\mathbf{H}\mathrm{P}^m$ состоит из классов эквивалентности ненулевых наборов $m+1$ кватерниона $(uq_0, \ldots, uq_m) \in \mathbf{H}^{m+1} \setminus 0$. Автоморфизмы тела кватернионов — внутренние, вида $q \mapsto uqu^{-1}, u \in S^3$). Такой автоморфизм переводит класс эквивалентности вектора $q \in \mathbf{H}^{m+1} \setminus 0$ в класс эквивалентности (вектора qu^{-1}), так как левые сдвиги коммутируют с правыми. Итак, $S^{4m+3}/SO(4) \approx \mathbf{H}\mathrm{P}^m/\mathrm{Aut}\mathbf{H}$.

Кватернионное сопряжение Conj не действует на $\mathbf{H}\mathrm{P}^m$, но действует на построенном пространстве двусторонних классов смежности: элемент $\mathrm{Conj}(uqv^{-1}) = \mathrm{Conj}(v^{-1})\mathrm{Conj}(q)\mathrm{Conj}(u)$ принадлежит классу $\mathrm{Conj}(q)$.

Ортогональное преобразование $\mathrm{Conj} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ меняет ориентацию этого вещественно-четырехмерного пространства. Поэтому

$$(\mathbf{H}\mathrm{P}^m/\mathrm{Aut}\mathbf{H})/\mathrm{Conj} \approx S^{4m+3}/O(4),$$

что и доказывает лемму.

Применяя лемму в случае $m = 4$, мы получаем из теоремы §3

$$S^{13} \approx S^{19}/O(4) \approx (\mathbf{H}\mathrm{P}^4/\mathrm{Aut}\mathbf{H})/\mathrm{Conj},$$

что и доказывает теорему **H**.

Теоремы **R** и **C** доказываются так же, только кватернионы нужно заменить вещественными или комплексными числами, а четырехмерное проективное пространство - одномерным или двумерным соответственно. Факторизация по $O(4)$ заменяется на факторизацию по действию $O(1)$ и $O(2)$ соответственно. Вещественное (комплексное) проективное пространство остается профакторизовать еще по действию $O(1)/S^0 = 1$ в вещественном случае и $O(2)/S^1 = S^0$ в комплексном (нетривиальный элемент этой группы из двух элементов действует как комплексное сопряжение на $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$).

5. Гиперэрмитова геометрия.

Заменяя в теореме §3 квадратичные формы эрмитовыми или гиперэрмитовыми, можно получить обобщение полученных выше результатов.

Определение. *Эрмитовой формой* в комплексном векторном пространстве называется вещественная квадратичная форма на этом пространстве, инвариантная относительно умножения векторов на комплексные числа, по модулю равные единице. Размерность вещественного векторного пространства эрмитовых форм в $\mathbf{C}^m$ равна m^2.

Положительно определенная эрмитова форма называется *эрмитовой структурой.* Комплексные линейные преобразования, сохраняющие эрмитову структуру, образуют *унитарную группу* $U(m)$ размерности m^2. Комплексное векторное пространство с эрмитовой структурой называется *эрмитовым пространством.*

Теорема. *Многообразие упорядоченных нормированных наборов n векторов в эрмитовом пространстве $\mathbf{C}^{n-1}$, рассматриваемых с точностью до унитарных преобразований этого пространства, естественно отождествляется со сферой $S^M, M = n^2 - 2$.*

Пример. При $n = 2$ получается расслоение Хопфа, $S^2 = S^3/S^1$. При $n = 3$ получаем фактор-пространство (но уже не базу расслоения)

$$S^7 \approx S^{11}/U(2) = \mathbf{C}\mathrm{P}^5/SU(2) = \mathbf{H}\mathrm{P}^2/S^1.$$

Определение. *Гиперэрмитовой формой* в кватернионном векторном пространстве называется вещественная квадратичная форма, инвариантная относительно умножения всех компонент вектора *слева* на любой кватернион единичной нормы.

Замечание. Инвариантность относительно умножения справа отсюда не следует.

Положительно определенная гиперэрмитова форма называется *гиперэрмитовой структурой,* а кватернионное пространство с такой формой — *гиперэрмитовым пространством.*

Пример. Функция $F(q) = q_1\bar{q}_1 + \ldots + q_m\bar{q}_m$ задает в $\mathbf{H}^m$ *стандартную гиперэрмитову структуру.* Всякая гиперэрмитова структура задается таким образом через компоненты в подходящем базисе. Фиксируя базис, мы получаем следующее описание гиперэрмитовых форм.

Теорема. *Всякая гиперэрмитова форма в $\mathbf{H}^m$ однозначно определяется кватернионной матрицей $f_{i,j}$, удовлетворяющей условию гиперэрмитовости $f_{j,i} = \bar{f}_{i,j}$, по формуле*

$$f(q) = \sum_{i,j=1}^{m} q_i f_{i,j} \bar{q}_j. \qquad (1)$$

Доказательство. 1^o. *Формула задает вещественную форму.* Действительно, $\bar{f}(q) = \sum q_j \bar{f}_{i,j}\bar{q}_i = f(q)$.

2^o. *Форма инвариантна относительно умножения q слева на кватернион u единичной нормы.* Действительно,

$$f(uq) = \sum uq_i f_{i,j}\bar{q}_j\bar{u} = uf(q)\bar{u} = f(q),$$

поскольку вещественное число $f(q)$ коммутирует с u.

3^o. Итак, формула (1) доставляет гиперэрмитову форму. Докажем, что *всякая гиперэрмитова форма записывается в виде* (1).

С этой целью мы введем в $\mathbf{H}$ и в $\mathbf{H}^m = \oplus \mathbf{H}^1_i$ обычное евклидово скалярное произведение $(p,q) = \mathrm{Re}(p\bar{q})$. Тогда наша квадратичная форма запишется в виде

$$f(q) = \sum (A_{i,j}(q_i), q_j), \qquad A^*_{i,j} = A_{j,i}\ ,$$

где $A_{i,j} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ - вещественно-линейный оператор, $*$ — евклидово сопряжение. Условие инвариантности f принимает вид

$$(A_{i,j}(ux), uy) = (A_{i,j}(x), y)$$

для любых кватернионов x и y. Следовательно, $u^{-1}A_{i,j}u = A_{i,j}$ (поскольку $u^* = u^{-1}$), т.е. оператор $A_{i,j}$ коммутирует с умножением кватернионов на u слева.

Лемма. *Всякий вещественно-линейный оператор A в $\mathbf{H}$, коммутирующий с умножением слева на любой кватернион и нормы единица, есть оператор умножения на некоторый кватернион справа.*

Доказательство. По условию $A(u) = A(u \cdot 1) = uA(1)$. Поэтому A действует на любой кватернион q по формуле $A(q) = qa$, где $a = A(1)$.

По доказанной лемме $A_{i,j}(q_i) = q_i f_{i,j}$, где $f_{i,j}$ - кватернион. Из симметричности A следует гиперэрмитовость построенной кватернионной матрицы $f_{i,j}$, $f_{j,i} = \bar{f_{i,j}}$. В частности, ее диагональные элементы вещественны. Мы получаем формулу (1):

$$f(q) = \mathrm{Re} \sum q_i f_{i,j} \bar{q}_j = \sum q_i f_{i,j} \bar{q}_j.$$

4^o. *Гиперэрмитова матрица определена формой f однозначно.* Действительно, если $f = 0$, то и ограничение f на $\mathbf{H}^1_i \oplus \mathbf{H}^1_j$ равно нулю. Поэтому равны нулю операторы $A_{i,j}$, а значит и кватернионы $f_{i,j}$. Теорема доказана.

Следствие. *Размерность вещественного векторного пространства гиперэрмитовых форм в $\mathbf{H}^m$ равна $m + 4m(m-1)/2 = m(2m-1)$.*

Определение. *Гиперунитарные преобразования* эрмитова пространства — это кватернионно-линейные операторы, сохраняющие гиперэрмитову структуру. Кватернионно-линейный оператор — это линейный оператор A, для которого $A(qx) = qA(x)$ для любого кватерниона q.

Размерность гиперунитарной группы гиперэрмитова пространства $\mathbf{H}^m$ равна $m(2m+1)$. Эта группа обозначается (к сожалению) $Sp(m)$.

Гиперунитарные преобразования задаются матрицами, элементы которых следует ставить справа от компонент векторов:

$$A(q_1, q_2) = (q_1 a_{1,1} + q_2 a_{2,1}, q_1 a_{1,2} + q_2 a_{2,2}) \qquad \text{и т.п.}$$

Условие гиперунитарности матрицы (по отношению к стандартной гиперэрмитовой структуре $F(q) = \sum q_i \bar{q}_i$ in $\mathbf{H}$) имеет вид

$$\sum_j a_{i,j} \bar{a}_{k,j} = \delta_{i,k}.$$

Поэтому гиперэрмитово скалярное произведение (с кватернионными значениями) в $\mathbf{H}^m$, заданное формулой

$$\langle q, r \rangle = \sum q_i \bar{r}_i,$$

инвариантно относительно действия гиперунитарных преобразований:

$$\langle Aq, Ar \rangle = \langle q, r \rangle.$$

Замечание. Это, конечно, следует и из кватернионной поляризационной формулы, которая слишком длинна, чтобы тут ее выписывать.

Теорема. *Многообразие упорядоченных нормированных наборов n векторов в гиперэрмитовом пространстве $\mathbf{H}^{n-1}$, рассматриваемых с точностью до гиперунитарных преобразований этого пространства, естественно отождествляется со сферой $S^M, M = n(2n-1)-2$.*

Пример. При $n = 2$ получается кватернионное расслоение Хопфа, $S^4 = S^7/S^3$. При $n = 3$ получаем $S^{13} = S^{23}/Sp(2)$. Это наводит на мысль о кэлиевской проективной плоскости.

Доказательство как этой теоремы, так и ее эрмитова аналога, — такая же редукция к теории гиперболических конусов, как в разобранном в §3 вещественном евклидовом случае.

Определение. *Матрицей Грама* системы n векторов q_i в стандартном гиперэрмитовом (эрмитовом) пространстве $\mathbf{H}^m$ ($\mathbf{C}^m$) называется матрица гиперэрмитовой (эрмитовой) формы

$$f(c) = F(c_1q_1 + \ldots + c_nq_n), \qquad c \in \mathbf{H}^n(\mathbf{C}^n).$$

Эта форма гиперэрмитова (эрмитова), так как при умножении всех c_i на u слева аргумент F умножается на u слева. По определению стандартной гиперэрмитовой (эрмитовой) структуры F,

$$f(c) = \sum c_i\langle q_i, q_j\rangle\bar{c}_j, \quad \text{откуда} \quad f_{i,j} = \langle q_i, q_j\rangle.$$

Поэтому форма f инвариантна относительно гиперунитарных (унитарных) преобразований пространства $\mathbf{H}^m$ ($\mathbf{C}^m$).

Гиперэрмитова (эрмитова) матрица $f_{i,j}$ определяет весь процесс ортогонализации набора векторов q_i. Поэтому эта матрица определяет этот набор векторов с точностью до гиперунитарного (унитарного) преобразования пространства $\mathbf{H}^m$ ($\mathbf{C}^m$).

6. Эквивариантная теорема Неймана-Вигнера о пересечении электронных уровней.

Как мы видели, теории собственных чисел квадратичных, эрмитовых и гиперэрмитовых форм являются теориями гиперболических конусов в пространствах квадратичных форм, инвариантных относительно некоторого представления (группы $U(1)$ в эрмитовом и $SU(2)$ в гиперэрмитовом случае), кратного неприводимому. Соответствующие обобщения теоремы Неймана-Вигнера (ср. [6], [3]) утверждают, в наших обозначениях, что коразмерности многообразия особенностей на конусах вырожденных форм равны, соответственно, 2, 3 и 5 (это — коразмерности одномерных пространств диагональных форм от двух переменных в пространствах всех квадратичных, эрмитовых или гиперэрмитовых форм от двух переменных).

Можно заменить здесь стандартные неприводимые представления групп $U(1)$ и $SU(2)$ на произвольные неприводимые представления произвольных компактных групп Ли. Из сообщаемых ниже результатов вытекает, что *никаких новых гиперболических конусов при этом не получится:* все пространства квадратичных форм, инвариантных относительно кратных неприводимым вещественных представлений компактных групп Ли, сводятся либо к пространству всех квадратичных форм, либо к пространству всех эрмитовых форм, либо к пространству всех гиперэрмитовых форм.

Зафиксируем вещественное неприводимое представление компактной группы Ли G ортогональными преобразованиями евклидова пространства $\mathbf{R}^n$.

Определение. *Симметрией* представления называется вещественный линейный оператор, коммутирующий со всеми операторами представления: $Ag = gA$ (оператор, сплетающий представление с самим собой).

Все симметрии данного представления очевидно образуют (ассоциативную) алгебру (подалгебру алгебры всех линейных операторов из $\mathbf{R}^n$ в себя). Нам понадобится следующий вещественный аналог леммы Шура:

Теорема. *Алгебра симметрий любого неприводимого вещественного представления компактной группы Ли изоморфна (как алгебра линейных преобразований евклидова пространства) одной из следующих трех алгебр:*
1) *алгебра* $\mathbf{R}$ *вещественных чисел, действующих как скалярные матрицы в* $\mathbf{R}^n$*;*
2) *алгебра* $\mathbf{C}$ *комплексных чисел, действующих как скалярные матрицы в* $\mathbf{C}^m$ *($n = 2m$);*
3) *алгебра* $\mathbf{H}$ *кватернионов, действующих как умножение справа на кватернион компонент вектора в* $\mathbf{H}^k$ *($n = 4k$).*

Замечание. Эта классическая теорема доставляет царский путь к теории кватернионов, которые появляются здесь не в виде неполного аксиоматического обобщения теории комплексных чисел, а в виде решения естественной задачи вещественной евклидовой геометрии. Все "аксиомы" теории кватернионов оказываются вынужденными свойствами решений этой естественной задачи, и их обнаружение не требует использования винных паров, употребленных с этой целью Гамильтоном. Одновременно получается и классификация ассоциативных алгебр с делением (причем не только как абстрактных объектов но и как алгебр линейных операторов). Доказательство столь просто, что приведено ниже.

Доказательство. Комплексифицируем $\mathbf{R}^n$ до $\mathbf{C}^n \approx \mathbf{R}^{2n}$. Комплексифицированные операторы представления g и симметрии A действуют на $\mathbf{C}^n$ как комплексные линейные операторы. Возникающее представление G в $\mathbf{R}^{2n}$ приводимо: это прямая сумма двух копий исходного представления.

Лемма 1. *Комплексифицированный оператор симметрии A или есть умножение на вещественное число, либо имеет два комплексно-сопряженных собственных числа $\lambda = \alpha \pm i\omega$ кратности $m = n/2$ каждое (так что число n четно).*

Доказательство. В противном случае A имел бы собственное подпространство комплексной размерности либо больше, либо меньше, чем m. Первое невозможно, так как оно пересекалось бы с $\mathbf{R}^n$ вопреки неприводимости представления (собственные пространства A инвариантны относительно представления). Во втором случае ортогональное дополнение к собственному подпространству (также инвариантное относительно представления) нетривиально пересекалось бы с $\mathbf{R}^n$, вопреки неприводимости.

Положим $I = (A - \alpha\mathbf{1})/\omega$. Очевидна

Лемма 2. *Оператор симметрии I - комплексная структура в $\mathbf{R}^n$, т.е. $I^2 = -\mathbf{1}$.*

Лемма 3. *Каждая комплексная структура, являющаяся оператором симметрии неприводимого представления в $\mathbf{R}^n$, сохраняет евклидову структуру.*

Действительно, неотрицательная форма (Ix, Ix) инвариантна, так как $(Igx, Igx) = (gIx, gIx) = (Ix, Ix)$, так как форма (y, y) g-инвариантна. Поэтому $(Ix, Ix) = \lambda(x, x)$ (иначе собственное подпространство этой формы было бы G-инвариантным). Значит $(x, x) = (I^2x, I^2x) = \lambda^2(x, x)$, $\lambda^2 = 1$. Из неотрицательности формы (Ix, Ix) следует, что $\lambda = 1$, так что любая симметрия, являющаяся комплексной структурой, ортогональна.

Если вещественные линейные комбинации $\mathbf{1}$ и I исчерпывают всю алгебру симметрий, то мы получаем случай 2 теоремы. Предположим, что алгебра содержит еще одну симметрию. Заменяя ее линейной комбинацией с $\mathbf{1}$, мы превращаем ее в комплексную структуру B. Оператор симметрии $IB + BI$ симметрический. Из неприводимости исходного представления следует, что он скалярный: $IB + BI = 2\varepsilon \in \mathbf{R}$. Положим $J = (B + \varepsilon I)/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. ($\varepsilon^2 \leq 1$, так как ортогональный оператор $C = IB$ не равен $\pm\mathbf{1}$ ввиду независимости B от I.)

Лемма 4. *Оператор J — комплексная структура, антикоммутирующая с I.*

Действительно,

$$J^2 = (B + \varepsilon I)^2/(1 - \varepsilon^2) = -\mathbf{1}, \;\; IJ + JI = (IB + BI + 2\varepsilon I^2)/\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0.$$

Лемма 5. *Оператор $K = IJ$ тоже комплексная структура, причем все три оператора (I, J, K) попарно антикоммутируют.*

Действительно,

$$K^2 = (IJ)(IJ) = IJ(-JI) = I^2 = -\mathbf{1},$$
$$IK = I^2J, KI = -JI^2, JK = -J^2I, KJ = IJ^2.$$

Мы заключаем, что векторы (a, Ia, Ja, Ka), где a орт, попарно ортогональны и порождают $\mathbf{R}^4$, на котором операторы (I, J, K) действуют как кватернионы (i, j, k). В ортогональном дополнении выбираем еще один орт и строим еще одно $\mathbf{R}^4$. Продолжая, мы отождествляем исходное евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ с $\mathbf{H}^k, n = 4k$.

Лемма 6. *Никаких других симметрий, кроме вещественных линейных комбинаций построенных операторов $(\mathbf{1}, I, J, K)$, неприводимое представление иметь не может.*

Если бы была еще одна симметрия, то мы нашли бы, как выше, ее линейную комбинацию L с и $\mathbf{1}$, независимую с $(\mathbf{1}, I, J, K)$, которая была бы, как и J, антикоммутирующей с I комплексной структурой: $IL + LJ = 0, L^* = -L$.

Оператор $JL + LJ$ симметрический. Вследствие неприводимости, $JL + LJ = 2\xi\mathbf{1}$ (ξ — вещественное число). Оператор $X = K(L + \xi J)$ самосопряжен

$$X^* = LK + \xi JK = LIJ + \xi I = -ILJ + \xi I = -I(2\xi - JL) + \xi I = -\xi I + KL.$$

Вследствие неприводимости, $X = \mu \in \mathbf{R}$, откуда $L = -\xi J - \mu K$. Лемма, а с ней и теорема, доказана.

Пусть теперь в $\mathbf{R}^{Nn}$ действует N-кратное неприводимое в $\mathbf{R}^n$ представление компактной группы Ли, имеющее в $\mathbf{R}^n$ алгебру симметрий $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ вещественной размерности $d = 1, 2$ или 4.

Теорема. *Квадратичные формы в $\mathbf{R}^{Nn}$, инвариантные относительно этого представления, образуют вещественное $N + dN(N-1)/2$-мерное векторное пространство, изоморфное пространству квадратичных (эрмитовых, гиперэрмитовых) форм в $\mathbf{R}^N$ (в $\mathbf{C}^N$, в $\mathbf{H}^N$).*

Определитель квадратичной формы, рассматриваемый как многочлен от коэффициентов формы в $\mathbf{R}^{Nn}$, переходит при этом изоморфизме в $\frac{n}{d}$-ю степень определителя соответствующей формы в $\mathbf{R}^N$ (в $\mathbf{R}^{2N}$, в $\mathbf{R}^{4N}$).

Следствие. *Конус вырожденных инвариантных квадратичных форм на пространстве $\mathbf{R}^{Nn}$ переходит при указанном в теореме изоморфизме в конус вырожденных квадратичных форм в $\mathbf{R}^N$ (эрмитовых в $\mathbf{R}^{2N}$, гиперэрмитовых в $\mathbf{R}^{4N}$).*

В частности, коразмерности многообразий особенностей этих конусов (а значит и коразмерности многообразий форм с характеристическими корнями неминимальной кратности) зависят не от неприводимого представления и не от группы, а только от его алгебры симметрий (и равны $d+1$ на конусе вырожденных форм и $d+2$ в пространстве форм).

Таким образом, явление расталкивания уровней Неймана-Вигнера имеет всего три варианта: вещественный, эрмитов и гиперэрмитов, причем *для столкновения уровней требуется, соответственно, $2, 3$ или 5 независимых параметров, каковы бы ни были компактная группа и ее представление, кратное неприводимому вещественному представлению.*

Доказательство. Разложим представление на ортогональные неприводимые слагаемые $\mathbf{R}_i^n, i = 1, \ldots, N$. Квадратичная форма представится, как в §5, в виде суммы $n \times n$-блоков,

$$f(x) = \sum (A_{i,j} x_i, x_j), \qquad A_{i,j}^* = A_{j,i}.$$

Условие инвариантности относительно преобразования g группы принимает вид $g^{-1} A_{i,j} g = A_{i,j}$, (поскольку g ортогонально и $(A_{i,j}x, y) = (x, A_{j,i}y)$). Поэтому $A_{i,j}$ коммутирует с g. По (вещественной) лемме Шура оператор $A_{i,j} : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ действует либо как умножение на вещественный скаляр, либо как умножение в $\mathbf{C}^{n/2}$ на комплексный скаляр, либо как умножение в $\mathbf{H}^{n/4}$ на кватернион (справа).

Представим $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^{n/2}, \mathbf{H}^{n/4})$ в виде ортогональной суммы пространств $\mathbf{R}_i(\mathbf{C}_i, \mathbf{H}_i)$. Мы приведем тогда матрицу нашей квадратичной формы к блочно-диагональному виду из $n(n/2, n/4)$ одинаковых блоков, каждый из которых является матрицей квадратичной (эрмитовой, гиперэрмитовой) формы в пространстве $\mathbf{R}^N(\mathbf{C}^N, \mathbf{H}^N)$. Это доказывает теорему.

Замечание. Характеристические многочлены наших форм в $\mathbf{R}^{Nn}$ являются $\frac{n}{d}$-ми степенями многочленов, почти никогда не имеющих кратных корней. Формы, для которых кратные корни есть, образуют алгебраическое подмногообразие вещественной коразмерности $d+1 = 2, 3$ или 5 в пространстве квадратичных (эрмитовых, гиперэрмитовых) форм.

Дискриминанты этих многочленов с вещественными корнями не меняют знака. Вероятно, эти многочлены от коэффициентов форм являются суммами квадратов нескольких многочленов[2].

Пример. При $N = 2$ этих слагаемых 2 — в евклидовом, 3 — в эрмитовом и 5 — в гиперэрмитовом случаях.

Замечание. Быть может, более простой, но также важный пример положительного почти всюду многочлена получается при попытке комплексификации и кватернионизации определителя линейного оператора.

Комплексный линейный оператор $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ определяет вещественный линейный оператор ${}^{\mathbf{R}}A : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, для которого $\det({}^{\mathbf{R}}A) = |\det A|^2$. Следовательно, определитель овеществленного оператора ${}^{\mathbf{R}}A$ есть сумма квадратов двух многочленов от элементов его матрицы (как это и должно быть, так как многообразие комплексных вырожденных операторов имеет вещественную коразмерность 2).

Многообразие кватернионно-вырожденных операторов $A : \mathbf{H}^n \to \mathbf{H}^n$ имеет в пространстве кватернионных операторов вещественную коразмерность четыре. Поэтому естественно рассмотреть не меняющий знака многочлен $\det\left({}^{\mathbf{R}}A : \mathbf{R}^{4n} \to \mathbf{R}^{4n}\right)$ от компонент кватернионных элементов матрицы оператора A и попытаться представить его как сумму (не менее чем четырех) квадратов.

Кватернион можно представить комплексной 2×2 матрицей $\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$. Это превращает кватернионный оператор в комплексный, ${}^{\mathbf{C}}A : \mathbf{C}^{2n} \to \mathbf{C}^{2n}$. Очевидно, ${}^{\mathbf{R}}A = {}^{\mathbf{RC}}A$, поэтому

$$\det({}^{\mathbf{R}}A) = |H|^2, \quad \text{где} \quad H = \det({}^{\mathbf{C}}A).$$

Комплексное в принципе число H в случае комплексификации кватернионного оператора оказывается (неотрицательным) вещественным многочленом от элементов кватернионов, составляющих матрицу A. Поэтому $\det({}^{\mathbf{R}}A) = H^2$ оказывается не суммой квадратов, а просто квадратом неотрицательного многочлена, нули которого по-прежнему образуют подмногообразие вещественной коразмерности 4 в пространстве кватернионных матриц.

[2] Я уже предлагал эту гипотезу несколько лет назад на лекции в Курантовском институте о преобразовании волн определенных гиперболическими вариационными принципами. Как мне кажется, у П. Лакса были тогда некоторые соображения как это доказать.

В случае $n = 1$ этот многочлен H есть просто сумма квадратов четырех компонентов кватерниона. Вероятно, он является суммой квадратов нескольких многочленов и в общем случае. При n = 2 многочлен H допускает простое выражение через миноры 2×4 комплексной матрицы (z, w):

$$H = |M_{12}|^2 + |M_{14}|^2 + |M_{34}|^2 + |M_{23}|^2 - 2\mathrm{Re} M_{13} \bar{M}_{24},$$

где $M_{12}M_{34} + M_{14}M_{23} = M_{13}M_{24}$.

Эти формулы удивительным образом напоминают (отличающуюся лишь отсутствием комплексных сопряжений) формулу представления Клейна пространства прямых в $\mathbf{C}P^3$, указанную Атьей [10] при описании твисторного пространства Пенроуза.

Литература

[1] В.И.Арнольд. *О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм.* Функц. анализ и его прилож., 1971, т. **5**, в. 3, с. 1-9.

[2] В.И.Арнольд. *Разветвленное накрытие* $\mathbf{C}\mathrm{P}^2 \to S^4$, *гиперболичность и проективная топология.* Сиб. матем. журнал 1988, т. **29**, в. 5, с. 36-47.

[3] V.I.Arnold. *Моды и квазимоды.* Функц. анализ и его прилож.,, 1972, т. **6**, в. 2, с. 12-20.

[4] V.Arnold. *Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matricies, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect.* Selecta Math., 1995, V. **1**, N 1, P. 1-19.

[5] V.Arnold. *Symplectization, complexification and mathematical trinities.* CEREMADE(UMR 7534), Université Paris-Dauphine, N^o 9815, 04/03/98, P. 1-20.

[6] V.Arnold. *Topological content of the Maxwell theorem on multipole representation of spherical functions.* Topological methods in nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center, Vol. **7,** 1996, p. 205-217.

[7] W.Massey.*The quotient space of the complex projective plane under the conjugation is a 4-sphere.* Geometria Dedicata, V.**2**,(1973), p.371-374.

[8] N.H.Kuiper. *The Quotient Space of* $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ *by Complex Conjugation is the 4-sphere.* Math. Ann., v. **208** (1974), p. 175-177.

[9] A.Marin. $\mathbf{C}\mathrm{P}^2/\sigma$ *or Kuiper and Massey in the land of conics.* In: A.Marin, L.Guillou, A la recherche de la topologie perdue. Progress in Math., V.**62**, Birkhäuser, Boston, 1986, p. 141-152.

[10] M.F.Atiyah. *Geometry of Yang-Mills Fields.* Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Lezioni Fermiane, Pisa, 1979 (section III — 1).

Математический институт Стеклова и Университет Париж-Дафин