Задачи Арнольда

Март 1999

1999-1. Составить *полный* список примыканий простых особенностей кривых в $\mathbb{C}^N$.

В этой задаче и в шести последующих речь идет о комплексных кривых, т. е. о ростках $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^N,0)$, *однако те же вопросы имеют смысл и для вещественных кривых — ростков* $(\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^N,0)$.

1999-2. Составить список *полугрупп* простых особенностей кривых в $\mathbb{C}^N$.

a) Определяет ли полугруппа тип (простой) особенности?

b) Какие пары полугрупп исключают примыкание соответствующих особенностей (вероятно, простота здесь не существенна)?

c) Реализуются ли остальные примыкания какой-либо парой (простых? не простых?) особенностей с данными полугруппами?

1999-3. Верно ли, что *простые* особенности кривых в $\mathbb{C}^N$ — это в точности те *стабильно простые*, которые реализуются в $\mathbb{C}^N$?

1999-4. Составить список фильтрованных *артиновых алгебр* простых особенностей кривых $f : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^N,0)$.

a) Определяет ли тип простой особенности (или ее полугруппу) эта фильтрованная алгебра (или ее действие операторами на $\mathfrak{m}^1/\mathcal{A}_f$)? Здесь $\mathfrak{m}^1$ — максимальный идеал в пространстве ростков функций $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$, а $\mathcal{A}_f$ — идеал, порожденный компонентами отображения f.

b) Определяет ли полугруппа особенности эту алгебру? фильтрацию?

1999-5. *Разрешение особенностей* простых кривых в $\mathbb{C}^N$.

a) Составить список графов разрешений. Как они связаны с вопросом a) задачи **1999-2**?

b) Верно ли, что модули кривых появляются в точности тогда, когда

появляются модули разрешений (4 точки на P^1 и т. п.)?

1999-6. *Стабилизация кривых.* Рассмотрим базу версальной деформации $\mathbb{C}^{M(N)}$ более сложной особенности и в ней страт Σ менее сложной.

a) Сколько (локально) неприводимых компонент имеет страт Σ?

b) В каком смысле стабилизируются топологические (гомологические? гомотопические?) свойства дополнения $\mathbb{C}^{M(N)} \setminus \Sigma$ при $N \to \infty$?

c) В каком смысле стабилизируются эти свойства дополнения (стабилизированные при $N \to \infty$ или нет), когда тип менее сложной особенности фиксирован, а тип исходной более сложной (простой? любой?) усложняется?

1999-7. *Страт $\mu = \mathrm{const}$ для кривых.* Рассмотрим "многообразие" особенностей с данной коразмерностью μ орбиты в функциональном пространстве как подмногообразие в базе $\mathbb{C}^\mu$ ее версальной деформации.

a) Гладко ли это "многообразие"? Неприводимо ли?

b) Как вычислить (через полугруппу? алгебру? разрешение?) или хотя бы оценить его размерность m в $\mathbb{C}^\mu$ ("число внутренних модулей")?

c) Верно ли, что m полунепрерывно по отношению к выбору исходной особенности, т. е. совпадает с обычной ее модальностью?