Trivium Mathématique

V.I. Arnold

25 juillet 2001

Le niveau de la culture mathématique baisse. Les étudiants de tous niveaux sortant de nos universités, y compris du département de mathématique et de mécanique de l'université d'état de Moscou, deviennent aussi ignorants que leurs enseignants.

Quelle est la raison de ce phénomène anormal? Dans des conditions normales, les étudiants connaissent mieux leur sujet que leurs professeurs, en application du principe général de diffusion de la connaissance : la nouveauté ne triomphe pas parce que des vieillards l'enseignent, mais parce qu'arrivent de nouvelles générations qui la connaissent.

Parmi les causes de cette situation anormale, je voudrais mettre en évidence celles dont nous sommes nous-mêmes responsables, afin que nous essayons de corriger ce qui est en notre pouvoir. Une des causes est, je crois, notre système d'examens, spécialement destiné à la fabrication de rebut, c'est-à-dire de pseudo-élèves qui apprennent les mathématiques comme le marxisme : ils potassent des formules et apprennent par coeur des réponses aux questions les plus fréquemment posées aux examens.

Comment peut-on mesurer le niveau d'entraînement d'un mathématicien? Ni par la liste, ni par les programmes des cours suivis. La seule façon de déterminer ce que nous avons effectivement appris à nos étudiants est de faire une liste des problèmes qu'ils devraient savoir résoudre à la suite de notre enseignement.

Je ne parle pas de problèmes difficiles, mais de questions qui forment le strict minimum essentiel. Il ne doit pas forcément y avoir beaucoup de problèmes, mais nous devons exiger que les étudiants sachent les résoudre. I.E. Tamm[1] racontait que, tombé entre les mains des bandits pendant la

1. Un des grands physiciens théoriciens russes et un des pères de la bombe H

guerre civile, il répondit pendant un interrogatoire qu'il avait étudié à la faculté de mathématique et physique. Il eut la vie sauve parce qu'il sut résoudre un exercice de la théorie des séries qu'on lui avait posé pour vérifier ses dires. Nos étudiants devraient être préparés à de telles épreuves.

Partout dans le monde, un examen mathématique consiste à résoudre des problèmes par écrit. Le caractère écrit de l'épreuve est partout un signe de démocratie aussi nécessaire que des élections pluralistes. En fait dans un examen oral, un étudiant est absolument sans défense. Pendant que je faisais passer des examens pour la chaire d'équations différentielles de la faculté de mathématiques et de mécanique de l'université de Moscou, j'ai entendu des examinateurs, à la table voisine, coller des étudiants qui donnaient des réponses irréprochables (dépassant peut-être le niveau de compréhension de l'enseignant). On connaît aussi des cas où on a collé l'étudiant exprès (on pouvait parfois sauver la situation en entrant dans la salle).

Un travail écrit est un document, et un examinateur est forcément plus objectif (en particulier si la copie est anonyme comme elle devrait l'être).

Les examens écrits ont encore un avantage qui n'est pas sans importance : on peut conserver les sujets pour les publier ou les donner aux étudiants pour préparer l'examen de l'année suivante. En plus, ces sujets déterminent le niveau du cours et celui du professeur qui les a composés. Ses points forts et ses points faibles s'y voient d'emblée, et les spécialistes peuvent immédiatement évaluer à la fois l'enseignant, ce qu'il souhaite enseigner aux étudiants et ce qu'il a réussi à leur apprendre.

A propos, en France, les sujets du concours général, communs au pays tout entier et plus ou moins équivalents à nos Olympiades sont composées par des professeurs qui envoient leurs problèmes à Paris, où l'on choisit les meilleurs. Le Ministère a ainsi des données objectives sur le niveau des professeurs en comparant d'abord l'ensemble des problèmes et ensuite les résultats des élèves. Chez nous, cependant, les professeurs sont évalués, comme vous le savez, sur des critères tels que leurs apparence extérieure, vitesse de parole et «correction» idéologique.

Il n'est pas étonnant que les autres pays ne veuillent pas reconnaître nos diplômes (je pense que dans l'avenir, ça s'étendra même aux diplômes mathématiques). Des évaluations obtenues par des examens oraux dont on ne garde aucune trace ne peuvent se comparer objectivement à quoi que ce soit d'autre et ont un poids extrêmement vague et relatif, dépendant complètement du niveau réel de l'enseignement et des questions dans tel ou tel département. Avec le même programme et les mêmes notes, la connaissance et les capacités d'un étudiant peuvent varier (dans un certain sens) d'un facteur 10. En plus, il est bien plus facile de falsifier un examen oral; c'est même arrivé chez nous, à la faculté de mathématiques et de mécanique de l'université Lomonossov de Moscou, où, un professeur aveugle a été obligé de donner une bonne note à un étudiant dont la réponse était «très proche du manuel», et qui n'avait pas su résoudre un seul problème.

L'essence et les insuffisances de notre système d'éducation mathématique ont été décrits brillamment par Richard Feynman dans ses mémoires (Surely you are joking, Mr Feynman (Norton, New York, 1984) dans le chapitre sur l'enseignement de la physique au Brésil).

Dans les termes de Feynman, ces étudiants ne comprennent rien, mais ne posent jamais de questions, ce qui fait qu'ils ont l'air de tout comprendre. Si quelqu'un commence à poser des questions, il est rapidement remis à sa place, puisqu'il fait perdre leur temps à l'orateur qui lit sa conférence et aux étudiants qui la copient. Le résultat est que nul n'est capable d'appliquer l'enseignement à un seul exemple. Les examens aussi (dogmatiques comme les nôtres : énoncez la définition, énoncez le théorème) sont toujours passés avec succès. Les étudiants atteignent un état de «pseudo-éducation auto-propagée» et peuvent enseigner de la même façon aux générations suivantes. Mais toute cette activité n'a aucun sens et en fait, notre production de spécialistes est, de façon significative, une fraude, une illusion et une tricherie : ces soi-disant spécialistes ne sont pas capables de résoudre les problèmes les plus simples et ne possèdent pas les rudiments de leur art.

Ainsi, *pour mettre fin à cette tricherie, il nous faut spécifier, non pas une liste de théorèmes, mais une collection de problèmes que les étudiants devraient savoir résoudre. Ces listes de problèmes doivent être publiées chaque année (je pense qu'il devrait y avoir 10 problèmes pour chaque cours semestriel)* . Ainsi nous verrons ce que nous apprenons réellement aux étudiants et à quel point nous avons réussi. Pour que les étudiants apprennent à appliquer leurs connaissances, *tous les examens doivent être écrits.*

Naturellement, les problèmes varieront d'un département à l'autre et d'année en année. Ainsi on pourra comparer le niveau des différents enseignants et la production des différentes années. Un étudiant qui met plus de cinq minutes à calculer la moyenne de $\sin^{100} x$ avec une précision de 10% n'a aucune maîtrise des mathématiques, même s'il a étudié l'analyse non standard, l'algèbre universelle, les super-variétés ou les théorèmes de plongements.

La fabrication de problèmes-types est un gros travail, mais je pense qu'il faut le faire. A titre d'essai, je donne ci-dessous une liste de cent problèmes formant un minimum mathématique pour un étudiant en physique. Les problèmes-types (contrairement aux programmes) ne sont pas uniquement définis, et beaucoup seront probablement en désaccord avec moi. Cependant je crois qu'il est nécessaire de commencer à déterminer le niveau mathématique au moyen d'examens écrits et de problèmes-types. On peut espérer que dans l'avenir on donnera aux étudiants les problèmes-types de chaque cours au début du semestre et que les examens oraux où les étudiants récitent par cœur deviendront une chose du passé.

1. Dessiner le graphe de la dérivée et le graphe de l'intégrale d'une fonction donnée par son graphe.
2. Trouver la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\tan x - \tan\sin x}{\arcsin\arctan x - \arctan\arcsin x}$$
3. Trouver les valeurs critiques et les points critiques de l'application $z \to z^2 + 2\bar{z}$ (dessiner la réponse).
4. Calculer la dérivée 100$^{\mathrm{e}}$ de la fonction
$$\frac{x^2+1}{x^3-x}.$$
5. Calculer à 10% près la dérivée de la fonction
$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$
à l'origine.
6. Dans le plan des (x, y), dessiner la courbe donnée par les équations paramétriques
$$x = 2t - 4t^3 \quad y = t^2 - 3t^4.$$
7. Combien de normales peut-on mener d'un point du plan à une ellipse? Trouver la région où ce nombre de normales est maximal.
8. Combien la fonction $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4$ possède-t-elle de maxima, minima, cols sur la surface
$$x + \cdots + v = a, \quad x^2 + \cdots + v^2 = b, \quad x^3 + \cdots + v^3 = c?$$
9. Tout polynôme positif de deux variables réelles atteint-il sa borne inférieure dans le plan?
10. Etudier le comportement asymptotique des solutions y de l'équation $x^5 + x^2y^2 = y^6$ qui tendent vers 0 quand $x \to 0$.
11. Etudier la convergence de l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\ dy}{1 + x^4y^4}.$$

12. Trouver le flux du champs de vecteurs $\overrightarrow{r}/r^3$ à travers la surface

$$(x-1)^2+y^2+z^2=2.$$

13. Calculer à 5% près

$$\int_1^{10} x^x dx.$$

14. Calculer avec une erreur relative inférieure à 10%

$$\int_{\infty}^{\infty} (x^4+4x+4)^{-100}.$$

15. Calculer à 10% près

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(100(x^4-x))dx.$$

16. Quelle fraction du volume d'un cube de dimension 5 le volume de la sphère inscrite représente-t-elle? Même question avec un cube de dimension 10.
17. Trouver à 10% près la distance du centre de gravité d'une demi-sphère solide de dimension 100 et de rayon 1 aua centre de la sphère.
18. Calculer

$$\int \exp(-\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_i x_j) dx_1 \ldots dx_n.$$

19. Déterminer la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice de réfraction $n(y)=y^4-y^2+1$, en utilisant la loi de Snell $n(y)\sin\alpha = \mathsf{cste}$ où α est l'angle que le rayon fait avec l'axe des y.
20. Trouver la dérivée par rapport à A en $A=0$ de la solution de l'équation $\ddot{x}=x+A\dot{x}^2$ qui vérifie les conditions initiales $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$.
21. Etudier la frontière du domaine de stabilité ($\max \Re\lambda_j < 0$) dans l'espace des coefficients de l'équation $x'''+ax''+bx'+cx=0$.
22. Résoudre l'équation quasi-homogène

$$\frac{dy}{dx}=x+\frac{x^3}{y}.$$

23. Résoudre l'équation quasi-homogène

$$\ddot{x}=x^5+x^2\dot{x}.$$

24. Est-ce qu'une position d'équilibre asymptotiquement stable peut devenir instable au sens de Lyapunov par linéarisation?
25. Etudier le comportement quand $t \to +\infty$ des solutions des systèmes

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2\sin y - y - x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2x - x^3 - x^2 - \varepsilon y \end{cases}$$

où $\varepsilon \ll 1$.
26. Dessiner les images des solutions de l'équation

$$\ddot{x} = F(x) - k\dot{x}, \quad F = -dU/dx,$$

dans le plan des (x, E) où $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$, près des points critiques non-dégénérés du potentiel U.
27. Dessiner le portrait de phase et étudier ses variations en fonction du paramètre ε :

$$\dot{x} = \varepsilon x - (1 + i)z|z|^2 + \overline{z}^4.$$

28. Une charge se meut dans un plan, avec une vitesse 1 sous l'action d'un champ électromagnétique fort $B(x, y)$ perpendiculaire au plan. Trouver la direction dans laquelle le centre du cercle de Larmor va dériver. Calculer la vitesse de cette dérivée (au premier ordre non nul). [Mathématiquement il s'agit des courbes de courbures NB quand $N \to \infty$.]
29. Trouver la somme des indices des points singuliers autres que l'origine du champs de vecteurs $z\overline{z}^2 + z^4 + 2\overline{z}^4$.
30. Trouver l'indice du point singulier à l'origine du champs de vecteurs de composantes

$$(x^4 + y^4 + z^4, x^3y - xy^3, xyz^2).$$

31. Trouver l'indice du point singulier à l'origine du champs de vecteurs

$$\operatorname{grad}(xy + yz + xz).$$

32. Trouver les coefficients d'enlacements des trajectoires de phase de l'équation des petittes oscillations $\ddot{x} = -4x, \ddot{y} = -9y$ sur une surface d'énergie totale.
33. Chercher les points singuliers de la courbe $y = x^3$ dans le plan projectif.
34. Dessiner les géodésiques de la surface

$$(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1.$$

35. Dessiner la développante de la parabole cubique $y = x^3$ (la développante est le lieu des points $\overrightarrow{r}(s) + (c - s)\dot{\overrightarrow{r}}(s)$ où s est la longueure de l'arc de la courbe $\overrightarrow{r}(s)$ et c est une constante).
36. Montrer que dans l'espace euclidien, les surfaces

$$((A - \lambda E)^{-1}x, x) = 1$$

passant par x et correspondant à des valeurs de λ distinctes sont orthogonales deux à deux (A est un opérateur symétrique sans valeur propre multiple).
37. Calculer l'intégrale de la courbbure de Gauss de la surface

$$x^4 + (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 3y^2 - 1) = 0.$$

38. Calculer l'intégrale de Gauss

$$\int \frac{(d\overrightarrow{A}, d\overrightarrow{B}, \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B})}{|\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}|^3},$$

où $\overrightarrow{A}$ parcourt la courbe $x = \cos\alpha, y = \sin\alpha, x = 0$ et $\overrightarrow{B}$ la courbe $x = 2\cos^2\beta, y = 1/2\sin\beta, x = \sin 2\beta$.
39. Trouver l'image par transport parallèle d'ouest en est le long d'un parallèle fermé dd'un vecteur situé à Saint-Petersbourg (Léningrad, latitude 60^0) et dirigé vers le nord.
40. Trouver la courbure géodésique de la droite $y = 1$ dans le demi-plan supérieur muni de la métrique de Lobatchevski-Poincaré

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

41. Les médianes d'un triangle du plan de Lobatchevski sont-elles concourrantes? Et les hauteurs?
42. Trouver les nombres de Betti de la surface $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - y_1^2 - \cdots y_l^2 = 1$ et de l'ensemble $x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1 + y_1^2 + \cdots + y_l^2$ dans un espace vectoriel de dimension $k + l$.
43. Trouver les nombres de Betti de la surface $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ dans l'espace projectif de dimension 3. Même question pour les surfaces $z = xy$, $z = x^2, z^2 = x^2 + y^2$.

44. Trouver l'indice d'auto-intersection de la surface $x^4 + y^4 = 1$ dans le plan projectif $\mathbb{C}P^2$.
45. Trouver une représentation conforme de l'intérieur du disque unité sur le premier quadrant.
46. Trouver une représentation conforme de l'extérieur du disque sur l'extérieur d'une ellipse donnée.
47. Trouver une représentation conforme du demi-plan privé d'un segment perpendiculaire au bord sur le demi-plan.
48. Calculer
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1+z^10}}.$$
49. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx.$$
50. Calculer l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx.$$
51. Calculer le premier terme du développement asymptotique, quand $k \to \infty$ de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} dx}{\sqrt{1+x^{2n}}}.$$
52. Etudier les points singuliers de la frome différentielle $dt = dx/y$ sur la surface de Riemann compacte $y^2/2 + U(x) = E$ où U est un polynôme et E une valeur régulière.
53. $\ddot{x} = 3x - x^3 - 1$. Dans lequel des puits de potentiel (le plus profond ou le moins profond) la période des oscillations à énergie totale fixée est-elle la plus grande.
54. Etudier la topologie de la surface de Riemann de la fonction
$$w = \arctan z.$$
55. Combien d'anses la surface de Riemann
$$w = \sqrt{1+z^n}$$
possède-t-elle?

56. Etudier l'existence et l'unicité de la solution du problème $yu_x = xu_y$, $u|_{x=1} = \cos y$ au voisinage du point $(1, y_O)$.
57. Le problème de Cauchy

$$x(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$$

a-t-il une solution au voisinage du point $(x_0, 0)$ de l'axe des x? Celle-ci est-elle unique?
58. Quelle est la plus grande valeur de t pour laquelle la solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x, \quad u|_{t=0} = 0$$

peut se prolonger à l'intervalle de $[0, t[$?
59. Trouver toutes les solutions de l'équation $y\partial u/\partial x - \sin x \partial u/\partial y = u^2$ au voisinage du point $(0, 0)$.
60. Le problème de Cauchy

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + \sin x\frac{\partial u}{\partial y}, \quad u|_{x=0} = y^4$$

a-t-il une solution dans tout le plan (x, y)? Est-elle unique?
61. Le problème de Cauchy

$$u|_{y=x^2} = 1, \quad (\nabla u)^2 = 1$$

a-t-il une solution C^∞ dans le domaine $y \geq x^2$? Dans le domaine $y \leq x^2$?
62. Trouver la valeur moyenne de la fonction $\log r$ sur le cercle $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (de la fonction $1/r$ sur une sphère).
63. Résoudre le problème de Dirichlet

$$\begin{array}{lll} \Delta u = 0 & \text{pour} & x^2+y^2 < 1; \\ u = 1 & \text{pour} & x^2+y^2 = 1,\ y > 0; \\ u = -1 & \text{pour} & x^2+y^2 = 1,\ y < 0. \end{array}$$

64. Quelle est la dimension de l'espace des solutions continues sur $x^2+y^2 \geq 1$ du problème

$$\Delta u = 0 \text{ pour } x^2+y^2 > 1, \quad \partial u/\partial n = 0 \text{ pour } x^2+y^2 = 1?$$

65. Trouver

$$\inf \int_{x^2+y^2\leq 1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

pour toutes les fonctions C^∞ u nulles en 0 et égales à 1 sur $x^2+y^2=1$.

66. Montrer que l'angle solide déterminé par un contour fermé fixé est une fonction du sommet de l'angle qui est harmonique en dehors du contour.

67. Calculer la valeur moyenne de l'angle solide sous lequel le disque $x^2+y^2\leq 1$ du plan $z=0$ est vu des points de la sphère $x^2+y^2+(z-2)^2=1$.

68. Calculer la densité de charge sur la frontière conductrice $x^2+y^2+z^2=1$ d'une cavité dans laquelle on a placé une charge $q=1$ à la distance r du centre.

69. Calculer, au premier ordre non nul en ε, l'effet de l'influence sur le champs gravitationnel terrestre de l'applatissement de la Terre ($\varepsilon = 1/300$, on supposera la Terre homogène) sur la distance de la Terre à laquelle la Lune se trouve[2].

70. Trouver (au premier ordre en ε) l'influence de l'imperfection d'un condensateur presque sphérique $R = 1+\varepsilon f(\varphi,\theta)$ sur sa capacité.

71. Dessiner le graphe de $u(x,1)$ pour $0\leq x\leq 1$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u|_{x^2=x} = x^2.$$

72. A cause des variations annuelles de la température, le sol de la ville N gèle jusqu'à une profondeur de 2 mètres. Jusqu'à quelle profondeur gèlerait-t-il si des variations de la même amplitude étaient quotidiennes?

73. Etudier le comportement pour $t\to\infty$ de la solution du problème

$$u_t + (u\sin x)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u|_{t=0} = 1, \quad \varepsilon \ll 1.$$

74. Trouver les valeurs propres (avec multiplicités) du laplacien $\Delta = \div \text{grad}$ sur une sphère de rayon R dans l'espace euclidien de dimension n.

75. Résoudre le problème de Cauchy

$$\tfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 9\tfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2B, \quad \tfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 6\tfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 2Q,$$

$$A|_{t=0} = \cos x, \quad B|_{t=0} = 0, \quad \tfrac{\partial A}{\partial t}|_{t=0} = \tfrac{\partial B}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

2. à peu près 60 fois le rayon de la Terre (note suggérée par l'auteur pour les mathématiciens ignorants)

76. Combien de solutions le problème

$$u_{xx} + \lambda u = \sin x, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

possède-t-il ?

77. Résoudre l'équation

$$\int_0^1 (x+y)^2 u(x)\,dx = \lambda u(y) + 1.$$

78. Trouver la fonction de Green de l'opérateur $d^2/dx^2 - 1$ et résoudre l'équation

$$\int_{-\infty}^{infty} \exp(-|x-y|)u(y)\,dy = \exp(-x^2).$$

79. Pour quelles valeurs de la vitesse c l'équation $u_t = u - u^2 + u_{xx}$ admet-t-elle une solution de la forme d'une onde « courante » $u = \varphi(x - ct)$, $\varphi(-\infty) = 1$, $\varphi(-\infty) = 0$, $0 \leq u \leq 1$?

80. Trouver les solutions de l'équation $u_t = u_{xxx} + uu_x$ qui sont de la forme d'une onde courante $u = \varphi(x - ct)$, $\varphi(\pm\infty) = 1$.

81. Trouver le nombre de carrés positifs et négatifs dans la frome canonique de la forme quadratique de n variables $\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2$. Même question avec $\sum_{i<j} x_i x_j$.

82. Trouver les longueurs des axes de l'ellipsoïde

$$\sum_{i<j} x_i x_j = 1.$$

83. Tracer une droite passant par le centre d'un cube (tétraèdre, icosaèdre) de façon que la somme des carrés de ses distances aux sommets soit maximale, minimale.

84. Trouver les dérivées par rapport à ε en $\varepsilon = 0$ des longueurs des demi-axes de l'ellipsoide

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy.$$

85. Quelles figures différentes obtient-on en coupant le cube de dimension finie $|x_k| \leq 1$, $k = 1, \ldots, n$ par un plan de dimension 2.

86. Calculer la somme des produits vectoriels $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$.

87. Calculer la somme des commutateurs de matrices

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$$

où $[A, B] = AB - BA$.

88. Trouver la forme de Jordan de l'opérateur exp d/dt agissant sur l'espace des quasi-polynômes $\{\exp(\lambda t)p(t)\}$, où p est un polynôme de degré inférieur à 5, et de l'opérateur ad_A, $B \to [A, B]$ agissant sur l'espace des matrices carrées d'ordre n, où A est une matrice diagonale.

89. Trouver les ordres des sous-groupes du groupe des rotations du cube, et en trouver les sous-groupes distingués.

90. Décomposer l'espace des fonctions définies sur l'ensemble des sommets d'un cube en somme de sous-espaces invariants irréductibles pour l'opération du groupe des symmétries du cube, de ses rotations.

91. Décomposer un espace vectoriel réel de dimension 5 en somme de sous-espaces invariants irréductibles pour le groupe engendré par les permutations cicrculaires des vecteurs de base.

92. Décomposer l'espace des polynômes homogènes de degré 5 en (x, y, z) en somme de sous-espaces invariants irréductibles sous l'opération du groupe des rotations $SO(3)$.

93. Chacun des 3600 abonnés d'un central téléphonique appelle en moyenne une fois par heure. Quelle est la probabilité que 5 (ou plus) appels soient reçus dans une seconde donnée? Estimer l'intervalle de temps moyen entre deux telles secondes.

94. Une particule se déplaçant aléatoirement sur les points entiers du demi-axe $w \geq 0$ bouge vers la droite (à la distance 1) avec la probabilité a, vers la gauche avec la probabilité b et reste à sa place dans les autres cas (si $x = 0$ elle reste à sa place au lieu d'aller à gauche). Déterminer la distribution limite de probabilité et l'espérance mathématique de x et x^2 au bout d'un temps assez long si la particule part du point 0.

95. Les joueurs d'un jeu sont disposés en cercle et montrent simultanément leur main droite avec un certain nombre de doigts levés (les choix des joueurs sont indépendants et les nombres choisis entre 0 et 5 équiprobables). On additionne ces nombres de doigts et on compte le long du cercle des joueurs à partir dud meneur de jeu jusqu'à ce nombre. Le joueur auquel le compte s'arrête est le gagnant. Quel est le plus petit nombre de joueurs N à partir duquel un groupe bien choisi de

$N/10$ joueurs contient un gagnant avec la probabilité 0.97? Quel est le comportement de la probabilité que le meneur gagne quand $N \to \infty$.

96. Un joueur chcoisit une pièce de 10 ou 20 kopecks, et l'autre devine sa valeur. S'il a trouvé juste, il gagne la pièce, s'il s'est trompé, il paie 15 kopeckcs. Est-ce un jeu équitable? Quelles sont les stratégies optimales pour chacun des joueurs.
97. Trouver l'espérance de l'aire de la projection d'un cube de coté 1 sur un plan avec une direction de projection aléatoire uniformément distribuée.