О высшем аналоге коэффициента зацепления пары бездивергентных векторных полей

П.М.Ахметьев

Работа написана при финансовой поддержке грантов РФФИ NN 99-01-00009, 00-05-64015.

1 Основные определения и результаты

Пусть $B, \tilde{B}$ – два бездивергентных векторных поля в трехмерном евклидовом пространстве, имеющие компактный носитель. Говорят, что пара $(B_1, \tilde{B}_1)$ эквивалентна паре $(B_2, \tilde{B}_2)$, если существует диффеоморфизм $D : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ такой, что $D(B_1) = B_2$, $D(\tilde{B}_1) = \tilde{B}_2$, при этом D сохраняет ориентированный объем (записывают $(B_1, \tilde{B}_1) \simeq (B_2, \tilde{B}_2)$, $D \in SDiff$) и имеет компактный носитель, т.е. неподвижен вне некоторого шара, размеры которого не фиксируются.

Пусть $\mu_n(x_1, \dots, x_n, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n; V_1, \dots, V_n, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n)$ полилинейная форма, которая определена для произвольного невырожденного набора $2n$ точек $(x_1, \dots, x_n, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ (невырожденность означает, что точки в наборе попарно различные) аргументами которой являются $2n$ векторов $(V_1, \dots, V_n, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n)$, приложенных к соответствующим точкам набора. Рассматривается значение формы μ_n для набора векторов $(V_1 = B(x_1), \dots, V_n = B(x_n), \tilde{V}_1 = \tilde{B}(\tilde{x}_1), \dots, \tilde{V}_n = \tilde{B}(\tilde{x}_n))$, (которое далее будет для краткости обозначаться через $\mu_n(x_1, \dots, x_n, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, предполагая при этом что поля $B, \tilde{B}$ зафиксированы). При этом предполагается, что коэффициенты этой полилинейной формы могут иметь особенности, если набор точек вырождается, т.е. некоторые точки из предельного набора совпадают.

Определение

Скажем, что вещественнозначная функция $I_n(B, \tilde{B})$ определенная на паре векторных полей, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, удовлетворяет условию Соколова, если

(i) ее значения на двух эквивалентных парах полей совпадает, $I_n(B_1, \tilde{B}_1) = I_n(B_2, \tilde{B}_2)$, если $(B_1, \tilde{B}_1) \simeq (B_2, \tilde{B}_2)$.

(ii) эта функция получена как среднее (интегральное) значение формы μ_n по всем невырожденным наборам точек, интегрирование ведется по стандартной мере на пространстве невырожденных наборов как подпространства в R^{6n}.

Автору известно всего два содержательных примера инвариантов, удовлетворяющих условию Соколова. Первый пример был, фактически, построен Гауссом в середине позапрошлого столетия, построение второго примера является предметом работы.

Пример 1. Интеграл спиральности, $n = 1$.

Определим функцию

$$h(x, \tilde{x}; B(x), \tilde{B}(\tilde{x})) = \frac{\langle B(x), \tilde{B}(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle}{||x - \tilde{x}||^3}, \qquad (1)$$

где $\langle a, b, c \rangle$ – ориентированный объем параллелепипеда, построенного по упорядоченной тройке векторов. Определим интеграл спиральности $I_1(B, \tilde{B}) = H(B, \tilde{B})$ по формуле $H(B, \tilde{B}) = \int h(x, \tilde{x}; B(x), \tilde{B}(\tilde{x})) dx d\tilde{x}$.

Инвариантность интеграла спиральности была, фактически, установлена Гауссом исходя из топологических соображений. На современном языке эти соображения можно сформулировать так. Если пара полей $(B, \tilde{B})$ моделирует зацепление $L = L_1 \cup \tilde{L}_1$ (по поводу этого см. разделы 4,5), то значение $H(B, \tilde{B})$ пропорционально коэффициенту зацепления $lk(L, \tilde{L})$ (с коэффициентом $F\tilde{F}$, где F и $\tilde{F}$ – потоки векторов B и $\tilde{B}$ через трансверсальное сечение соответствующей компоненты носителя поля). При топологическом подходе случай произвольной пары полей сложен, необходимы более тонкие рассуждения об асимптотическом усреднении, которые были проведены В.И.Арнольдом для наиболее сложного случая $\tilde{B} = B$, см. [Arn],[A-Kh]. Аналитическое доказательство того, что H является инвариантом значительно проще, см. [M],[A-Kh].

Пример 2. Высший аналог интеграла спиральности, $n = 2$.

Ниже строится 4-линейная форма $\mu_2(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2; V_1, V_2, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$ с абсолютно сходящимся средним интегральным значением $I_2(B, \tilde{B})$, которое обозначается через $M(B, \tilde{B})$,

$$M(B, \tilde{B}) = \int \mu(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2; B(x_1), B(x_2), \tilde{B}(\tilde{x}_1), \tilde{B}(\tilde{x}_2)) d\mathbf{R}^{12}. \qquad (2)$$

Далее проверяется, что $M(B,\tilde{B})$ не зависит от выбора представителя в классе пар бездивергентных векторных полей.

2 Построение высшего аналога интеграла спиральности

В этом разделе мы предполагаем, что векторные поля B, $\tilde{B}$ фиксированы. Ниже строятся семейства векторов $C(x,y;B)$, $C(x,y;\tilde{B})$, $A(x,y;B)$, $A(x,y;\tilde{B})$, зависящие от точки $x \in R^3$ и параметризованные точкой $y \in R^3$. Удобно отождествить пространство параметров и область определения векторов, поскольку при этом оказывается, что соответствующий вектор имеет особенность в точке x, равной значению параметра y при отождествлении. Параметр иногда будет удобно обозначать той же буквой, что и переменную из области значений, помечая при этом параметр нижним индексом и знаком "тильда". Будут также определены семейства скалярных функций $\varphi(x,y;B)$, $\varphi(x,y;\tilde{B})$. Все определенные ниже и перечисленные выше объекты зависят от выбора полей B и $\tilde{B}$, тем не менее, чтобы не усложнять обозначения, эта зависимость будет лишь подразумеваться. При этом вектора $C(x,y;B)$, $C(x,y;\tilde{B})$ будут переобозначены через $C(x,y)$, $\tilde{C}(x,y)$ соответственно.

Определим семейство вектор-функций $C(x;x_i)$, каждая точка x_i, $i=1,2$ играет роль параметра.

$$C(x;x_i) = \frac{-1}{4\pi||x-x_i||}B(x_i).$$

Определим семейство вектор-функций $A(x;x_i)$ и семейство функций $\varphi(x;x_i)$, зависящих от точки x пространства.

$$A(x;x_i) = \frac{B(x_i)\times(x-x_i)}{4\pi||x-x_i||^3}.$$

Иными словами, определим вектор-функцию $A(x;x_i)$ как векторный потенциал диполя с центром в точке x_i, ось и интенсивность которого определяются значением поля B в этой точке.

$$\varphi(x;x_i) = \frac{-1}{4\pi}(B(x_i), \mathrm{grad}\ (\frac{1}{||\mathrm{x}-\mathrm{x_i}||})).$$

Функция $\varphi(x;x_i)$ называется скалярным потенциалом того же диполя. Выполнены равенства

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{C}(\mathrm{x};\mathrm{x_i}) = -\mathrm{A}(\mathrm{x};\mathrm{x_i}),$$
$$div\ C(x;x_i) = \varphi(x;x_i),$$

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{A(x;x_i)} = -\mathrm{grad}\ \varphi(\mathrm{x;x_i}). \tag{3}$$

Эти равенства справедливы во всех точках пространства, за исключением особой точки x_i. Удобно ввести аналогичные обозначения $\tilde{C}(x;\tilde{x}_i)$, $\tilde{A}(x;\tilde{x}_i)$, $\tilde{\varphi}(x;\tilde{x}_i)$ для семейства векторных и скалярных потенциалов диполей, связанных с полем $\tilde{B}$.

2.1 Обозначение

Среднее значение того или иного семейство векторов или скаляров будем обозначать через m, указывая при этом параметры по которым происходит усреднение (интегрирование). Например,

$$[m_{x_i}\varphi](x) = \int \varphi(x;x_i)dx_i.$$

Далее удобно ввести сокращенные обозначения

$$[m_{x_i}A](x) = A(x), \qquad [m_{\tilde{x}_i}\tilde{A}](x) = \tilde{A}(x).$$

2.2 Лемма

Для среднего значения семейства функций $\varphi(x;x_i)$ по параметру x_i справедливо равенство

$$[m\varphi_{x_i}](x) = 0. \tag{4}$$

Доказательство

Достаточно доказать равенство $\Delta[m_{x_i}\varphi](x) = 0$. Пусть (x,y,z) – декартова система координат в пространстве. Переобозначим пару точек $(x;x_i)$ через $(v;v_i)$. Обозначим через B_x, B_y, B_z – координаты вектора B. Справедливо равенство $\varphi(v;v_i) = -(4\pi)^{-1}(\frac{B_x(v_i)\partial|v-v_i|^{-1}}{\partial\ x} + \frac{B_y(v_i)\partial|v-v_i|^{-1}}{\partial\ y} + \frac{B_z(v_i)\partial|v-v_i|^{-1}}{\partial\ z})$.

Обозначим $B_x(v_i)\frac{\partial|v-v_i|^{-1}}{\partial x}$ через $B'_x(v,v_i)$. Воспользуемся равенстом - $\Delta(-4\pi)^{-1}[m_{v_i}B_x](v) = \Delta(-4\pi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\ x}\ [m_{v_i}B_x](v) = \frac{\partial}{\partial x}\Delta\ (-4\pi)^{-1}[m_{v_i}B](v) = \frac{\partial B_x(v)}{\partial x}|_{v=v_i}$. Справедливы аналогичные равенства для частных производных ∂y, ∂z, примененных к компонентам B_y, B_z соответственно. Складывая эти равенства и используя условие $div\ B(v) = 0$, получаем требуемое.

2.3 Лемма

Пусть $B(y;x_1)$ семейство векторных полей, параметризованных точкой $x_1 \in R^3$ в которой допускается особенность поля порядка не более $O(r^{-2})$ и особенность на бесконечности $O(r^{-2})$. Семейство $B(y;x_1)$ усредняется к гладкому векторному полю $[m_{x_1}B](y)$. Пусть $\varphi(x;y,x_1)$ – семейство скалярных потенциалов диполей с особенностями в y, построенных по векторам поля

$B(y;x_1)$ в соответствующей точке y такой, что $y \neq x_1$. Справедливо равенство $\Delta[m_{y,x_1}\varphi](x) = div\ [m_{x_1}B](y)|_{y=x}$, причем в обеих частях равенства среднее значение является абсолютно сходящимися.

Доказательство

Аналогично доказательству Леммы 2.1.

2.4 Следствие

Пусть $f(y)$ – гладкая функция, $f = O(r^{-1}), r \to \infty$. Пусть $\varphi(y;x_1)$ – семейство скалярных потенциалов диполей, определенных векторным полем grad f(x) в точке $x = x_1$. Справедливо равенство $[m_{x_1}\varphi](y) = f(y)$.

Доказательство

Представим функцию $f(x)$ как среднее значение семейства потенциалов $g(y,x_1) = \frac{-1}{4\pi}\frac{\psi(x_1)}{||x_1-y||}$, где $\psi(x_1) = \Delta f(y)$, $y = x_1$. Применим Следствие 2.3 к семейству векторных полей $B(y,x_1) = \frac{-1}{4\pi}\text{grad}\ \frac{\psi(\mathrm{x}_1)}{||\mathrm{x}_1-\mathrm{y}||}$. Пусть $\varphi(y;x_1)$ – семейство диполей ими определяемое. Поскольку $[m_{x_1}]B(y) = \text{gradf(y)}$, $div\ [m_{x_1}B](y) = \Delta\ f(y) = \Delta[m_{x_1}\varphi](y)$. С другой стороны, $div[m_{x_1}B](y) = \psi(x_1)$, откуда вытекает $\Delta[m_{x_1}\varphi](y) = \Delta f(y)$. Обе функции $[m_{x_1}\varphi](x)$ и $f(y)$ имеют нулевые граничные условия на бесконечности и, таким образом, совпадают. Следствие доказано.

Нам потребуется следующее усиление предыдущей леммы.

2.5 Лемма

Пусть в условиях Леммы 2.2 семейство векторных полей $B(y;x_1)$ усредняется к гладкому векторному полю $[m_{x_1}B](y)$ в смысле главного значения при $x_1 \to y$; семейство скалярных потенциалов $\varphi(x;y,x_1)$ также усредняется в смысле главного значения к гладкой функции $[m_{y,x_1}\varphi](x)$. Тогда справедливо аналогичное равенство $\Delta[m_{y,x_1}\varphi](x) = div\ [m_{x_1}B](y)|_{y=x}$, причем в обеих частях равенства среднее значение понимается в смысле главного значения при $x_1 \to y$.

2.6 Доказательство

Аналогично доказательству Леммы 2.1, при этом следует заметить, что все средние берутся по параметру x_i (v_1 при переобозначении), частные производные берутся по переменной x (v). Оператор усреднения следует применять к равномерно сходящейся (при $\varepsilon \to 0$) последовательности допредельных семейств, определяемых условием $dist(x_i, y) > \varepsilon$. Сходимость средних для этой последовательности равномерная и требуемое соотношение является следствием допредельного аналогичного соотношения для средних (при фиксированном ε).

2.7 Лемма

Пусть ξ– произвольное векторное поле, определенное в окрестности точки x_1. Обозначим через S_ε – сферу радиуса ε с центром в точке x_1. Справедливы равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint (A(x;x_i)\times\xi(x))\ dS_\varepsilon = \frac{-2}{3}(B(x_i),\xi(x_i)), \tag{5}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint \varphi(x;x_i)\xi(x)\ dS_\varepsilon = \frac{-1}{3}(B(x_i),\xi(x_i)). \tag{6}$$

Доказательство

Докажем равенство (6). Рассмотрим сферическую систему координат (r,θ,ϕ) с центром в точке x_i и осью направленной из точки x_i в точку максимума функции $\varphi(x;x_i)|_{S_\varepsilon}$, т.е. по направлению вектора $B(x_i)$. Функция $\varphi(x;x_i)$ запишется в этой системе координат формулой $\varphi(\theta,\phi)=\frac{|B(x_i)|\ cos(\theta)}{4\pi\varepsilon^2}$. Воспользуемся равенством $\xi|_{S_\varepsilon}=\xi(x_i)+O(\varepsilon)$. Вектор $\xi(x_i)$ можно представить в виде $\xi(x_0)=\frac{(B(x_i),\xi(x_i))}{|B(x_i)|}\xi_a+\xi_b$, где ξ_a – вектор единичной длины в направлении луча $\theta=0$; ξ_b – вектор перпендикулярный оси.

Справедливы тождества $\oint\varphi(x;x_1)\xi_b\ dS_\varepsilon = 0$; $\oint\varphi(x;x_1)\xi_a(x_0)\ dS_\varepsilon = \frac{(B(x_i),\xi(x_i))}{4\pi\varepsilon^2}\oint cos^2\theta dS_\varepsilon = -\frac{(B(x_i),\xi(x_i))}{2}\int_0^\pi cos^2\theta\ sin\theta\ d\theta = -(B(x_i),\xi(x_i))\int_0^1 x^2dx = -\frac{(B(x_i),\xi(x_i)}{3}$. Это доказывает соотношение (6).

Для вычисления интеграла (5) воспользуемся равенством

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint (A(x;x_i)\times\xi(x))\ dS_\varepsilon = \int(\mathrm{rotA(x;x_i)},\xi(\mathrm{x}))\ \mathrm{dx}-\int(\mathrm{A(x;x_i)},\mathrm{rot}\xi(\mathrm{x}))\ \mathrm{dx}, \tag{7}$$

в котором интегрирование ведется по переменной x из области $\mathbf{R}^3\setminus D_\varepsilon(x_i)$, полученной из R^3 удалением диска радиуса ε с центром в точке x_i. (Здесь ξ - произвольное гладкое векторное поле во всем пространстве.)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint \varphi(x;x_i)\xi(x)\ dS_\varepsilon = \int(\mathrm{grad}\ \varphi(\mathrm{x;x_i});\xi(\mathrm{x}))\ \mathrm{dx}+\int\varphi(\mathrm{x;x_i})\ \mathrm{div}\ \xi(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}. \tag{8}$$

Усредняя по x_i равенство (8) и используя результат Леммы 2.1, получаем

$$\int([m_{x_i}\mathrm{grad}\ \varphi](\mathrm{x}),\xi(\mathrm{x}))\ \mathrm{dx} = -\int\frac{1}{3}(\mathrm{B(x)};\xi(\mathrm{x}))\mathrm{dx}. \tag{9}$$

Усредняя по x_i равенство (7), получаем

$$m\lim_{\varepsilon\to 0}\oint(A(x;x_i)\times\xi(x))\,dS_i=\int([m_{x_i}\mathrm{rot\ A}](\mathrm{x}),\xi(\mathrm{x}))\,\mathrm{dx}-\int(\mathrm{A}(\mathrm{x}),\mathrm{rot}\,\xi(\mathrm{x}))\,\mathrm{dx}. \tag{10}$$

С другой стороны, используя равенство $rot\,[m_{x_i}A](x)=B(x)$, доказанное ниже в Лемме 2.6, получаем (при выводе второго соотношения используем формулу (9)

$$\int(B(x),\xi(x))\ dx=\int(A(x),\mathrm{rot}\ \xi(\mathrm{x}))\mathrm{dx},$$

$$\frac{1}{3}\int(B(x),\xi(x))\ dx=\int([m_{x_i}\mathrm{rot\ A}],\xi(\mathrm{x}))\ \mathrm{dx}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), получаем равенство $m\int\lim_{\varepsilon\to 0}\oint(A(x;x_i)\times\xi(x))$ $dS_\varepsilon dx=\int\frac{-2}{3}(B(x),\xi(x))dx$. Это равенство выполнено для произвольного поля ξ. Применим к предельному случаю $\xi(x)\to\delta(x_i)$, где $\delta(x_i)$ – вектор с носителем в окрестности x_i, докажем (5). Лемма 2.2 доказана.

2.8 Замечание

Лемма 2.2 исправляет ошибку из работы [A], где ошибочно утверждается, что значения интегралов (5), (6) совпадают. Эта ошибка не позволяет определить вектор-функцию $\Gamma(x;x_1,x_2)$ (которая используется в формуле (4) из работы [A]), поскольку 2-форма, двойственная вектор-потенциалу $C(x;x_i,\tilde{x}_i)$, реализует нетривиальный класс двумерных когомологий в пространстве $R^3\setminus\{x_i,\tilde{x}_i\}$.

2.9 Лемма

Справедливо равенство

$$\mathrm{rot\ A(x)=B(x)},\qquad [\mathrm{m_{x_i}rot\ A](x)}=\frac{1}{3}\mathrm{B(x)}. \tag{12}$$

Второй среднее является несобственным и понимается в смысле главного значения.

Доказательство

По формуле Гаусса-Остроградского для произвольного вектора $\xi(x)$ выполнено равенство

$$\oint\varphi(x;x_i)\xi(x)d\ S_i=\int\varphi(x;x_i)div\ \xi(x)dx+\int(\mathrm{grad}\ \varphi(\mathrm{x};\mathrm{x_i}),\xi(\mathrm{x}))\mathrm{dx},$$

где S_i - предельная сфера малого радиуса с центром в x_i, а интегрирование в правой части ведется по области $\mathbf{R}^3\setminus D_\varepsilon(x_i)$. Воспользуемся равенством

$[m_{x_i}\varphi](x) = 0$, доказанным в Лемме 2.1. Получим после усреднения по параметру x_i и вычисления правой части с учетом равенства (6)

$$\int \frac{1}{3}(\xi(x), B(x))dx = \int ([m_{x_i}\mathrm{grad}\ \varphi](\mathrm{x}), \xi(\mathrm{x}))\mathrm{dx}.$$

В этой формуле векторное поле $\xi(x)$ произвольно и, следовательно, $[m_{x_i}\mathrm{grad}\varphi](\mathrm{x}) = \frac{1}{3}\mathrm{B}(\mathrm{x})$. С учетом равенства (3), третье уравнение, получаем второе соотношение (12).

Для доказательства первого соотношения (12) воспользуемся тождеством

$$\Delta[m_{x_i}C](x) = B(x)$$

и формулой rot rot $=$ grad div $-\ \Delta$. Применив эту формулу к вектору $[m_{x_i}C](x)$, учитывая тождество $\mathrm{rot}\ [\mathrm{m_{x_i}C}](\mathrm{x}) = [\mathrm{m_{x_i}rot\ C}](\mathrm{x})$; $div\ [m_{x_i}C](x) = [m_{x_i}div\ C](x)$, получим $\mathrm{rot\ A(x) = rot\ m_{x_i}A(x)} = -\mathrm{grad}\ [\mathrm{m_{x_i}}\varphi](\mathrm{x}) + \Delta[\mathrm{m_{x_i}C}](\mathrm{x})$. Следовательно, учитывая (4), $\mathrm{rot\ A(x) = B(x)}$, что доказывает требуемое равенство. Лемма доказана.

2.10 Лемма

Пусть $\psi(y; x_1) = \frac{-1}{4\pi}\frac{g(x_1)}{||y-x_1||}$ – семейство потенциалов с носителем в компактной области. Пусть $\varphi(x; y, x_1)$ – семейство дипольных потенциалов, ассоциированных с семейством векторных полей $grad\ \psi(y; x_1)$ (в смысле определения предшествующего Лемме 2.1, т.е. функция $\varphi(x; y, x_1)$ имеет в точке y особенность, определенную вектором $grad\ \psi(y; x_1)$ в точке y, в предположении $y \neq x_1$). Справедливы следующие равенства.

$$[m_{y,x_1}\varphi](x) = [m_y\psi](x), \tag{13}$$

$$[m_{y,x_1}\mathrm{grad}\ \varphi](\mathrm{x}) = \frac{2}{3}\mathrm{grad}\ [\mathrm{m_y}\psi](\mathrm{x}). \tag{14}$$

Доказательство

Равенство (13) доказано в Следствии 2.3. Приступим к доказательству формулы (14). Выпишем аналог формулы (8) для семейства $\varphi(x; y, x_1)$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint \varphi(x; y, x_1)\xi(x)dS_\varepsilon = \int (\mathrm{grad}\ \varphi(\mathrm{x; y, x_1}), \xi(\mathrm{x}))\mathrm{dx} + \int \varphi(\mathrm{x; y, x_1})\mathrm{div}\ \xi(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}. \tag{15}$$

Усредним это выражение по переменным (x_1, y). При усреднении второго слагаемого в правой части воспользуемся (13). Получим следующее выражение

$$\frac{-1}{3}(\mathrm{grad}\ [\mathrm{m_y}\psi](\mathrm{x}), \xi(\mathrm{x})) = \int ([\mathrm{m_{y,x_1}grad}\varphi](\mathrm{x}), \xi(\mathrm{x}))\mathrm{dx} - \int (\mathrm{grad}\ [\mathrm{m_{y,x_1}}\varphi](\mathrm{x}), \xi(\mathrm{x}))\mathrm{dx}.$$

Левая часть вычисляется по формуле (6). Далее воспользуемся тождеством $div([m_{y,x_1}\varphi](x)\xi(x))dx = (\mathrm{grad}\ [\mathrm{m_{y;x_1}}\varphi](\mathrm{x}), \xi(\mathrm{x})) + [\mathrm{m_{y,x_1}}\varphi](\mathrm{x})\mathrm{div}\xi(\mathrm{x})$. Следовательно,

$$\int [m_{y,x_1}\varphi](x) div\xi(x)dx = -\int (\mathrm{grad}\ [\mathrm{m_{y,x_1}}\varphi](\mathrm{x}); \xi(\mathrm{x}))\mathrm{dx}. \tag{16}$$

Подставив (16) в (15), получим (14). Лемма доказана.

Приступим к построению 4-линейной формы μ. Удобно сразу определить ее значения для четверки векторов $V_1 = B(x_1)$, $V_2 = B(x_2)$, $\tilde{V}_1 = \tilde{B}(\tilde{x}_1)$, $\tilde{V}_2 = \tilde{B}(\tilde{x}_2)$. Напомним, что справедливы равенства

$$\mathrm{rot\ A(x) = B(x)}; \quad \mathrm{div\ A(x)} = 0,$$

$$\mathrm{rot\ \tilde{A}(x) = \tilde{B}(x)}; \quad \mathrm{div\ \tilde{A}(x)} = 0.$$

Мы рассмотрим обобщенные семейства $A'(x; x_i)$ $(\tilde{A}'(x; \tilde{x}_i))$, которые удовлетворяют следующим двум условиям.

(У1). Вектор $A'(x; x_i)$ $(\tilde{A}'(x; \tilde{x}_i))$ имеет особенности в точке x_i $(\tilde{x}_i)$ порядка не выше $O(r^{-2})$ и особенность на бесконечности порядка не выше $O(r^{-2})$.

(У2). Среднее значение $[m_{x_i}A'](x)$ ($[m_{\tilde{x}_i}\tilde{A}'](x)$) по переменной x_i $(\tilde{x}_i)$ совпадает с вектором $A(x)$ $(\tilde{A}(x))$.

По каждой паре $A'(x; x_i)$; $\tilde{A}'(x; \tilde{x}_i)$ обобщенных семейств строется обобщенное семейство $\mathbf{C}'(x; x_i, \tilde{x}_i) = A'(x; x_i) \times \tilde{A}'(x; \tilde{x}_i)$.

В качестве основного примера обобщенных семейств рассматриваются следущие для которых введены специальные обозначения. $\aleph(x; x_i) = \frac{1}{2}(3A(x; x_i) - A(x))$, $\tilde{\aleph}(x; \tilde{x}_i) = \frac{1}{2}(3\tilde{A}(x; \tilde{x}_i) - \tilde{A}(x))$.

Определим семейство вектор-функций, зависящих от точки x пространства и параметризованных упорядоченной парой точек $x_i, \tilde{x}_i$ по формуле

$$\mathbf{C}(x; x_i, \tilde{x}_i) = \aleph(x; x_i) \times \tilde{\aleph}(x; \tilde{x}_i). \tag{17}$$

2.11 Определение формы μ

Пусть $(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ – упорядоченная четверка несовпадающих точек. Определим форму μ по формуле

$$\mu(x_1, x_2; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2; B(x_1), B(x_2), \tilde{B}(x_1), \tilde{B}(x_2)) = H(\mathbf{C}(x; x_1, \tilde{x}_1), \mathbf{C}'(x'; x_2, \tilde{x}_2)), \tag{18}$$

где $H(\mathbf{C}(x; x_1, \tilde{x}_1), \mathbf{C}'(x'; x_2, \tilde{x}_2)) = \int h(x_1, x_2; \mathbf{C}(x), \mathbf{C}'(x'))d\mathbf{R}^6$, причем подынтегральная функция h для пары векторных полей $\mathbf{C}(x; x_1, \tilde{x}_1)$, $\mathbf{C}(x'; x_2, \tilde{x}_2)$ при различных значениях параметров $(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ (вообще говоря, каждый вектор пары имеет ненулевую дивергенцию), определенна по формуле

(1), а интеграл (18) понимается как несобственный, при этом оказывается, что этот интеграл является абсолютно сходящимся. Необходимые оценки сходимости приводятся далее в Лемме 2.11.

2.12 Предложение

Значение $M(B, \tilde{B})$, определенное по формулам (1), (14) не изменится, если семейство $\mathbf{C}(x; x_i, \tilde{x}_i)$ изменить на обобщенное, которое построено по произвольным обобщенным семействам $A'(x; x_i)$, $\tilde{A}'(x; \tilde{x}_i)$, удовлетворяющим вышеперечисленным условиям (У1), (У2).

2.13 Следствие

Значение инварианта M можно определить без использования условий Соколова по формуле

$$M(B; \tilde{B}) = H(A(x) \times \tilde{A}(x), A(x) \times \tilde{A}(x)),$$

где $A(x), \tilde{A}(x)$ – гармонические вектор-потенциалы полей $B, \tilde{B}$, а интеграл Гаусса H задан при помощи подинтегрального выражения (1), в которой пара полей $B, \tilde{B}$ заменена на соответствующую пару $(A \times \tilde{A}; A \times \tilde{A})$, причем, вообще говоря, вектора пары имеют ненулевую дивергенцию.

2.14 Лемма

Определено среднее значение $[m_{x_1,x_2,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2}\mu]$ формы (18) по параметрам $(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ как главное значение несобственного интеграла.

Доказательство

Покажем, что интегральное выражение (2) сходится в смысле главного значения. Это вытекает из оценок снизу для значений формы $\mu(B(x_1), B(x_2), \tilde{B}(\tilde{x}_1), \tilde{B}(\tilde{x}_2))$ при условии, что четверка точек $(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ вырождается. Вырождение происходит на линейном подмногообразии в $\mathbf{R}^{12}$, которое имеет коразмерность 3. Доказательство сходимости следует из прямых вычислений. Например, если $x_1 \to \tilde{x}_1$, значение подынтегральной функции в выражении (2) имеет полюс порядка 3 в точке $x_1 = \tilde{x}_1$. В окрестности полюса подынтегральная функция нечетна и имеет асимптотику $O(r^{-3})$. Главный член асимптотики пропадает. На следующих стратах дискриминанта, которые имеют коразмерность 6 подынтегральная функция возрастает не быстрее $O(r^{-5})$ и сходится абсолютно. Если одна из точек четверки лежит вне области носителя поля, подынтегральное выражение тождественно обращается в 0. Сходимость M вытекает из полученной оценки.

Доказательство Предложения 2.9

Пусть $L(x;x_i)$ – семейство векторов, удовлетворяющее следующему усилению (У3) условия (У1) для обобщенного семейства $A'(x;x_i)$ и условию (У4).

(У3). Вектор $L(x;x_i)$ имеет в точке $x=x_i$ особенность порядка не выше $O(r^{-3})$, особенность на бесконечности $O(r^{-2})$. Причем определено среднее $[m_{x_i}L](x)$ в смысле главного значения.

(У4) Среднее значение $[m_{x_i}L](x)$ обращается в нуль.

Для доказательства Предложения нам необходимо лишь условие (У3) в форме (У1). Общее условие будет использоваться в последующих построениях.

2.15 Лемма

Среднее (абсолютно сходящееся) значение выражения

$$H(L(x;x_1)\times \tilde{A}_1(x;\tilde{x}_1), C_2'(x';x_2,\tilde{x}_2)), \tag{19}$$

где A_1, C_2' – обобщенные семейства, обращается в нуль. Аналогичные формулы верны если произвольное семейство векторов в формуле (14) заменить на семейство L, а остальные семейства понимать как обобщенные, удовлетворяющие условиям (У1), (У2).

Доказательство

Представим семейство интегралов (19) как предельное семейство собственных интегралов, где интегрирование ведется по области $\Omega_\varepsilon \subset \mathbf{R}^{18}$, которая задана уравнением $min(dist\{x,x',x_1,x_2,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\})\geq\varepsilon)$. При каждом фиксированном значении переменных $x_2,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$, выбраных вне области Ω_ε, усреднение по переменным x,x',x_1 является равномерным при $\varepsilon\to 0$. Вклад в среднее значения оставшихся интегралов становится пренебрежимо мал при $\varepsilon\to 0$, что следует из рассмотрения вкладов вблизи полюсов (в том числе полюсов, связанных с параметром x_1) (включая бесконечность) и линейной оценки по параметру ε вклада регулярных точек. В усредненный интеграле следует заменить значение величины, зависящей от x_1 на ее среднее, причем в случае условие (У3) среднее понимается в смысле главного значения, т.е. как предел средних значений по семейству дополнений к шарам радиусов стремящихся к 0. Лемма доказана.

2.16 Замечание

Утверждение предидущей леммы можно обобщить. Если опустить предположение (У4) для вектора $L(x;x_i)$, среднее значение интеграла (19) (см.

Лемму 2.15), можно вычислить усреднив по переменной x (в смысле главного значения при $x \to x_1$) вектор

$$K(x'; x_1, \tilde{x}_1) = (L(x; x_1) \times \tilde{A}_1(x; x_1)) \times \frac{(x, x')}{||(x - x')||^3},$$

(остальные переменные $(x', x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2)$ при этом фиксированы) и далее вычислив среднее по оставшимся переменным $(x', x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2)$ семейства скалярных произведений

$$\int (K(x'; x_1, \tilde{x}_1), C_2'(x'; x_2, \tilde{x}_2)) \, dx'.$$

Доказательство аналогично (12), с использованием Леммы 2.5.

Вернемся к доказательству Предложения 2.9 . Пусть $H(\mathbf{C}_1(x; x_1, \tilde{x}_1), \mathbf{C}_1(x'; x_2, \tilde{x}_2))$, $H(\mathbf{C}_2(x; x_1, \tilde{x}_1), \mathbf{C}_2(x'; x_2, \tilde{x}_2))$ – два семейства интегралов, построенных с учетом (У1)(У2), по двум парам обобщенных семейств A_j', $\tilde{A}_j'$, $j = 1, 2$. Преобразуем одно обобщенное семейство в другое, меняя последовательно одно из семейств A_1' $(\tilde{A}_1')$ на семейство A_2' $(\tilde{A}_2')$. При каждой такой элементарной замене воспользуемся свойством аддитивности интеграла H по соответствующему аргументу и далее Леммой 2.13, с учетом нулевого среднего разности векторов соответствующих семейств. Предложение 2.9 доказано.

Интеграл (18) применяется к полям для которых дивергенция не обрщается в нуль. Сформулируем правило для вычисления интеграла для таких полей.

2.17 Предложение

Пусть $a(x)$, $b(x)$ – два произвольных векторных поля, убывающих на бесконечности не медленнее $O(r^{-2})$. Значение интеграла Гаусса $H(a, b)$ вычисляется по формуле $\int (c(x); b(x)) dR^3$ (или по формуле $\int (a(x), d(x)) dR^3$), где $c(x) = \mathrm{rot}^{-1}(\mathrm{a(x)} + \mathrm{grad}\ \varphi(\mathrm{x}))$, $div(c(x)) = 0$; $d(x) = \mathrm{rot}^{-1}(\mathrm{b(x)} + \mathrm{grad}\ \psi(\mathrm{x}))$, $div(d(x)) = 0$. Функции φ, ψ выбираются так, что выполнены условия $div(a(x) + \mathrm{grad}\ \varphi(\mathrm{x})) = 0$, $div(b(x) + \mathrm{grad}\ \psi(\mathrm{x})) = 0$.

Доказательство

Доказательство вытекает из представления векторных полей $\mathrm{grad}\ \varphi(\mathrm{x})$ и $\mathrm{grad}\ \psi(\mathrm{x})$ в виде градиентов семейства элементарных гармонических потенциалов.

3 Проверка инвариантности M

Мы покажем, что значение инварианта M на парах эквивалентных полей совпадает. Будет удобно воспользоваться допредельной формой выражения

(1), не производя усреднения при определении формы μ. Запишем интеграл в виде

$$M(B,\tilde{B}) = \int h(\mathbf{C}(x;x_1,\tilde{x}_1),\mathbf{C}(x';x_2,\tilde{x}_2))d\mathbf{R}^{18}, \qquad (20)$$

причем выражение (1) получается из (19) в результате усреднения по координатам (x,x'), при этом усреднении интеграл является равномерно сходящимся. Усреднение по произвольному набору координат (например, по $x_1,\tilde{x}_1$) равномерным, вообще говоря, не является, что не позволяет всякий раз воспользоваться теоремой Фубини и свести несобственный интеграл (20) к повторному. Ниже показано, что дифференцирование под знаком интеграла возможно, если сходимость подинтегрального выражения понимать в смысле главного значения.

Удобно воспользоваться следующим допредельным выражением, которое является собственным интегралом.

$$M_\varepsilon(B,\tilde{B}) = \int h_\varepsilon(\mathbf{C}(x;x_1,\tilde{x}_1),\mathbf{C}(x';x_2,\tilde{x}_2))d\mathbf{R}^{18}. \qquad (21)$$

Интегрирование ведется по области $\Omega \subset R^{18}$, выделенной уравнением $min(dist\{x,x';x_1,x_2,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\}) \geq \varepsilon$, где $dist\{\ldots\}$ означает множество попарных расстояний между заданными точками. (Ср. с доказательством Леммы 2.13).

Далее в силу абсолютной сходимости имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon(B,\tilde{B}) = M(B,\tilde{B}). \qquad (22)$$

Абсолютная сходимость вытекает из следующего. Рассмотрим точку X из $\mathbf{R}^3$. Особенность подинтегрального выражения порядка r^{-3} возникает при условии совпадения по крайней мере двух из шести точек $x,x',x_1,x_2,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$ в подынтегральном выражении с точкой X, т.е. в коразмерности 6. При более высокой коразмерности $3k$ вырождения конфигурации точек порядок особенности становится не более $-3(k-1)$. С другой стороны, правая часть выражения (21) является собственным интегралом и допустимо дифференцирование под знаком интеграла.

Воспользуемся очевидным утверждением: произвольный диффеоморфизм $D \in SDiff(R^3)$ с компактным носителем связан однопараметрическим семейством диффеоморфизмов с компактными носителями с диффеоморфизмом D', который тождественен внутри наперед заданного шара. Из этого, очевидно, вытекает, что инвариантность выражения M достаточно проверить для предельно-малого диффеоморфизма, т.е. бездивергентного векторного поля.

Пусть $D(t): \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $t \in [0;+\varepsilon]$ – росток однопараметрического семейства диффеоморфизмов из группы $SDiff$, причем $D(0) = Id$. Обозначим через $B(t), \tilde{B}(t)$ образы векторных полей при соответствующем диффеоморфизме. Мы покажем, что

$$\frac{\partial M(B(t), \tilde{B}(t))}{\partial t} = 0 \tag{23}$$

.

Обозначим $\frac{d\ D(t)}{d\ t}$ через u. Условие сохранение объема перепишется в виде $div(u) = 0$.

Используем равенства

$$\frac{d\ A(x; x_i)}{d\ t} = u \times \text{grad}\ \varphi(\mathrm{x}; \mathrm{x_i}) + \text{grad}\ \psi_1(\mathrm{x}; \mathrm{x_i}),$$

$$\frac{d\ A(x)}{d\ t} = u \times B(x) + \text{grad}\ \psi_2(\mathrm{x}),$$

(см. [M] 2.118). Функции $\psi_1(x; x_1)$, $\psi_2(x)$ выбираются такими, чтобы соответствующий вектор был бы бездивергентным.

Обозначим $\psi_1(x; x_1) + \psi_2(x)$ через $\psi(x; x_1)$. После дифференцирования выражения (21) получим $\frac{\partial M}{\partial t} = \sum_{i=1}^{4} X_i$, где

$$X_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int h_\varepsilon [\frac{1}{2}(u \times ((3\ \text{grad}\ \varphi(\mathrm{x}; \mathrm{x_1}) - \mathrm{B(x)}) + \text{grad}\ \psi(\mathrm{x}; \mathrm{x_1})) \times$$

$$\tilde{\aleph}(x; \tilde{x}_1), C(x'; x_2, \tilde{x}_2)] d\mathbf{R}^{18}, \tag{24}$$

Остальные слагаемые X_2, X_3, X_4 получены дифференцированием по правилу Лейбница и задаются аналогичными формулами.

Представим функцию $\psi(x; x_1)$ в виде

$$\psi_0(x; x_1) = \psi(x_1)(|x - x_1|)^{-1} + \xi(x; x_1), \tag{25}$$

где функция $\xi(x; x_1)$ непрерывна (но, возможно, имеет разрыв производных $O(r^{-1})$). Далее представим допредельный (при $x \to x_1$) интеграл в выражении (24) в виде суммы двух слагаемых

$$X_{1,1} = \int h_\varepsilon [\frac{1}{2}(u \times ((3\ \text{grad}\ \varphi(\mathrm{x}; \mathrm{x_1}) - \mathrm{B(x)}) + \text{grad}\ \xi(\mathrm{x}; \mathrm{x_1})) \times$$

$$\tilde{\aleph}(x; \tilde{x}_1), \mathbf{C}(x'; x_2, \tilde{x}_2)] d\mathbf{R}^{18}, \tag{26}$$

$$X_{1,2} = \int h_\varepsilon [\frac{1}{2}(\text{grad}\ \psi_0(\mathrm{x_1}) |\mathrm{x} - \mathrm{x_1}|^{-1}) \times \tilde{\aleph}(\mathrm{x}; \tilde{\mathrm{x}}_1), \mathbf{C}(\mathrm{x'}; \mathrm{x_2}, \tilde{\mathrm{x}}_2)] \mathrm{d}\mathbf{R}^{18}. \tag{27}$$

Зафиксировав параметры $(x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ в интеграле (26), проведем усреднение подинтегральных величин по переменным x_1, x, x' внутри области Ω_ε. Пользуясь Леммой 2.6, заменим величину $3\text{grad}\ \varphi(\mathrm{x}; \mathrm{x_1}) - \mathrm{B(x)}$ средней (бесконечно малой) величиной $O(\varepsilon)$.

Далее устремляя ε к нулю и используя равномерную сходимость при усреднении, получим (при каждом фиксированном значении параметров и переменных) в пределе выражение:

$$X_1 = \int \frac{1}{2} h[\text{grad } (\psi_0(\mathrm{x}_1)(|\mathrm{x}-\mathrm{x}_1|)^{-1}) \times \tilde{\aleph}(\mathrm{x};\tilde{\mathrm{x}}_1), \mathbf{C}(\mathrm{x}';\mathrm{x}_2,\tilde{\mathrm{x}}_2))\mathrm{d}\mathbf{R}^{18}. \qquad (28)$$

При усреднении соленоидального слагаемого grad $\psi(\mathrm{x};\mathrm{x}_1)$ мы воспользовались тождеством $\Delta\psi(x;x_1) = -div(u \times \mathrm{rot}\ \aleph(\mathrm{x};\mathrm{x}_1))$ (см. [M] 2.119), а также тем, что $|x-x_1|^{-1}$ гармоническая функция, что приводит к нулевому среднему $\xi(x;x_1)$ в пределе выражения (26).

Докажем, что выражение (28) и аналогичные ему выражения для величин X_i, $i = 2,3,4$, обращаются в нуль. Представим потенциальное векторное поле grad $\psi(\mathrm{x};\mathrm{x}_1) = \psi_0(\mathrm{x}_1)$grad $(|\mathrm{x}-\mathrm{x}_1|)^{-1}$ с особенностью при $x = x_1$ как среднее (x_1,x_3)-семейства градиентов функций от x с точечной особенностью при $x_3 = x_1$

$$G(x;x_1,x_3) = 3\text{grad } \varphi(\mathrm{x};\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_3) - \text{grad } [\mathrm{m}_{\mathrm{x}_1}\psi](\mathrm{x})). \qquad (29)$$

(усреднение происходит по параметрам x_1, x_3 и понимается в смысле главного значения в предположении $x_3 \neq x_1$), где $\varphi(x;x_1,x_3)$ – скалярный потенциал диполя, приложенного в точке x_3 вдоль вектора поля $\psi(x_1)$grad $(|\mathrm{x} - \mathrm{x}_1|)^{-1}$.

Действительно, используем формулу (14) из Леммы 2.7 и получим $[m_{x_1,x_3}G](x) = [m_{x_1}\mathrm{grad}\psi](\mathrm{x})$. Семейство потенциалов $\varphi(x;x_1,x_3)$ является абсолютно сходящимся и мы находимся в условиях Леммы 2.2.

Перепишем интеграл (28) с использованием формулы (29), в виде следующего абсолютно сходящегося интеграла

$$X_1 = \int h(G(x;x_1,x_3) \times \tilde{\aleph}(x;\tilde{x}_1), \mathbf{C}(x';x_2,\tilde{x}_2))d\mathbf{R}^{21}. \qquad (30)$$

Совпадение значений интегралов (28) и (30) следует из равномерной сходимости по переменным $(x_3;x,x')$, что приводит к тождественно равным правым частям в каждом интеграле.

Выражение (30) можно проинтегрировать явно. Определим вектор-потенциал $F(x;x_1,\tilde{x}_1,x_3)$ (далее мы показываем, что этот вектор является потенциалом) для вектора $G(x;x_1,x_3) \times \tilde{\aleph}(x;\tilde{x}_1))$ формулой

$$F(x;x_1,\tilde{x}_1,x_3) = (3\varphi(x;x_1,x_3) - [m_{x_1}\psi](x))\tilde{\aleph}(x;\tilde{x}_1). \qquad (31)$$

3.1 Лемма

Интеграл X_1, заданный по формуле (30), вычисляется как среднее значение по переменным $(x_1,\tilde{x}_1,x_3,x_2,\tilde{x}_2)$ от скалярного произведения двух векторов

$$X_1 = [m_{x_1,\tilde{x}_1,x_3} \int (F(x), C(x;x_2,\tilde{x}_2))]dx. \qquad (32)$$

Доказательство

Прямые вычисления доставляют формулу

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{F}(\mathrm{x};\mathrm{x}_1,\tilde{\mathrm{x}}_1,\mathrm{x}_3) = \mathrm{G}(\mathrm{x};\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_3)\times\tilde{\aleph}(\mathrm{x};\tilde{\mathrm{x}}_1)+$$

$$3\varphi(x;x_1,x_3) - [m_{x_1}\psi](x))\mathrm{rot}\ \tilde{\aleph}(\mathrm{x},\tilde{\mathrm{x}}_1). \qquad (33)$$

Первое слагаемое доставляет семейство векторов под интегралом (30) (по первому аргументу). Семейство векторов, заданных вторым слагаемым сходится в силу Лемм 2.6; 2.13 в смысле главного значения к нулевому вектору и удовлетворяет условию (У3) (2.12). Таким образом это семейство векторов не дает вклада в вычисления интеграла (30) и не меняя значения интеграла его можно подставить в подынтегральное выражение. Таким образом, семейство векторов $G(x;x_1,x_3)\times\tilde{\aleph}(x;\tilde{x}_1)$ в интеграле (30) можно заменить на семейство $\mathrm{rot}\ \mathrm{F}(\mathrm{x};\mathrm{x}_1,\tilde{\mathrm{x}}_1,\mathrm{x}_3)$. Более того, семейство векторов $F(x;x_1,\tilde{x}_3)$ является бездивергентным (с учетом значения дивергенции в полюсах). (Можно добавить семейство градиентов гармонических потенциалов с точечными особенностями, "убивающих" дивергенцию в особенностях, а затем отнять градиент скалярной функции – их среднее значение) В самом деле, $[m_{x_1,x_3}div\ F](x;\tilde{x}_1) = [m_{x_1,x_3}3\mathrm{grad}](\varphi(\mathrm{x}) - \mathrm{grad}[\mathrm{m}_{\mathrm{x}_1}\psi](\mathrm{x})),\tilde{\aleph}(\mathrm{x};\tilde{\mathrm{x}}_1)) + 3[\mathrm{m}_{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_3}\oint\varphi(\mathrm{x})\tilde{\aleph}(\mathrm{x};\tilde{\mathrm{x}}_1)]\mathrm{dS}_\varepsilon = 0$. При вычислении $[m_{x_1,x_3}\mathrm{grad}\varphi](\mathrm{x})$ мы воспользовались (14), а при вычислении последнего слагаемого $\oint\varphi(x;x_1,x_3)\tilde{\aleph}(x;\tilde{x}_1)dS_\varepsilon$ воспользовались (6).

С учетом Предложения 2.16, каждый вектор $\mathrm{rot}\ \mathrm{F}(\mathrm{x};\mathrm{x}_1,\tilde{\mathrm{x}}_1,\mathrm{x}_3)\times\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}{||(\mathrm{x}-\mathrm{x}')||^3}$ при усреднении по x (в главном значении при $x\to x_3$) перейдет в вектор-потенциал $F(x';x_1,\tilde{x}_1,x_3)$, который определяется однозначно условием бездивергентности и условием минимального порядка в особенностях. Действительно, при таком усреднении получится семейство с полюсами не старше r^{-2} (в действительности, r^{-1}, если принять во внимание соображения "четности"). Исходное семейство F также, очевидно, этому свойству удовлетворяет, и, потому, оба семейства являются абсолютно сходящимися. Оба семейства (после усреднения) бездивергентны, их разность является потенциальным вектором и усреднения совпадают.

Следовательно, при усреднении по x семейство интегралов

$$\int h(rot\ F(x;x_1,\tilde{x}_1,x_3),\mathbf{C}(x';x_2,\tilde{x}_2))dx'$$

переходит в семейство интегралов скалярных произведений

$$\int(F(x';x_1,\tilde{x}_1,x_3),\mathbf{C}(x';x_2,\tilde{x}_2))d\ x'.$$

Таким образом, интеграл (30) может быть вычислен по формуле (32), что доказывает Лемму 3.1.

Для доказательства равенства (21) осталось заметить, что выражение (32) обращается в нуль из арифметических свойств косой коммутативности смешанного произведения: $(a \times b; c) = -(c \times b; a)$. При этом полагаем $a = \tilde{\aleph}(x; \tilde{x}_1); b = \aleph(x; x_1), c = \tilde{\aleph}(x; \tilde{x}_2)$. Слагаемое с противоположным знаком возникает при перестановке точек $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$. Инвариантность M доказана.

4 Инвариант M невырожден

Пусть $(B, \tilde{B})$ – пара бездивергентных векторных полей, которая моделирует зацепление $L \cup \tilde{L}$ (см. по поводу определения [Fr]). Это означает, что выделены два полнотория U_L, $U_{\tilde{L}}$ и поля B, $\tilde{B}$ имеют в качестве носителей соответствующие полнотория. Из-за условия $div(B) = div(\tilde{B}) = 0$, поля характеризутся значениями потоков $\Phi, \tilde{\Phi}$ через трансверсальные сечения соответствующих полноториев.

Построение высших аналогов интеграла спиральности проводится, как правило, для случая векторных полей, моделирующих зацепление. При этом часто предполагают, что класс зацеплений для которых определен высший аналог интеграла спиральности удовлетворяет тем или иным дополнительным предположениям, т.е. зацепление, моделируемое полем, не является произвольным (см., например, [M-S], [E-B]).

В этом разделе мы предположим, что

$$lk(L, \tilde{L}) = 0 \tag{34}$$

и покажем, что в этом случае справедливо равенство $M(B; \tilde{B}) = W(B; \tilde{B})$, где W– инвариант Сато-Левина (см. [S-L]), интегральная формула для которого построена в работе [A-R].

Напомним определение инварианта W. Пусть $A(x)$, $\tilde{A}(x)$ – вектор-потенциалы для полей B и $\tilde{B}$ соответственно. По условию (34) определены гладкие функции ϕ и $\tilde{\phi}$ с областями определения U, $\tilde{U}$, удовлетворяющие тождествам

$$\mathrm{grad}\ \tilde{\phi} = \tilde{\mathrm{A}}|_{\mathrm{U}}$$

$$\mathrm{grad}\ \phi = \mathrm{A}|_{\tilde{\mathrm{U}}}.$$

Определен вектор

$$G(x) = A(x) \times \tilde{A}(x) - \tilde{\phi}(x)B(x) + \phi(x)\tilde{B}(x).$$

Легко видеть, что $div(G) = 0$ в кадой точке пространства и определен вектор $F(x)$ такой, что $\mathrm{rotF} = \mathrm{G}$. Определим

$$W(B, \tilde{B}) = \int G(x)F(x) - \tilde{\phi}^2(x)A(x)B(x) - \phi^2(x)\tilde{A}(x)\tilde{B}(x)d\mathbf{R}^3. \tag{35}$$

Доказано (см. [A-R]), что $W(B,\tilde{B}) = \Phi^2\tilde{\Phi}^2\beta(L;\tilde{L})$, где β - инвариант Сато-Левина, определенный для произвольного двукомпонентного зацепления, удовлетворяющего условию (34), построенный в [S-L].

Мы покажем, что $M(B,\tilde{B}) = W(B,\tilde{B})$, где правая часть равенства определена лишь для очень специального класса пар векторных полей (который был описан выше), в то время как левая часть определена для произвольной пары векторных полей. Наше доказательство использует условие незаузленности хотя-бы одной компоненты зацепления $\mathbf{L}$ (скажем, компоненты L), в частности, оно проходит для случая зацепления Уайтхеда, поскольку обе его компоненты незаузлены. Таким образом, инвариант M обобщает инвариант Сато-Левина. В топологии подобное обобщение связано с инвариантом Виро-Поляка [P-V] (см. также [A-M-R]) (переоткрытым в работах [K-L],[A-Re]). Далее в разделе 5 мы обобщим инвариант W на случай произвольного двукомпонентного (в обобщенном смысле) зацепления, (т.е. многокомпонентного зацепления, компоненты которого окрашены в два цвета и связными не предполагаются). При этом новый инвариант зацеплений обозначен через M, хотя совпадение этого инварианта с основным инвариантом, построенным в работе, пока не доказана. В направлении такого доказательства получены результаты в работе [A-M-R], в которой выдвинута гипотеза, о том, что инвариант Поляка-Виро определен не только для двукомпонентных (произвольных) зацеплений, но и для двукомпонентных (в обобщенном смысле) зацеплений.

Расположим наше зацепление $\mathbf{L}$ в пространстве таким образом, чтобы незаузленная компонента L представляла бы собой плоскую окружность малого радиуса, а компонента $\tilde{L}$ пересекала бы диск D^2, ограниченный компонентой L по семейству ρ прямолинейных отрезков в некотором числе точек с алгебраической кратностью 0. При этом все точки пересечения $\tilde{L}$ с диском D расположены вблизи центральной точки x диска D.

Пусть U, $\tilde{U}$ – полнотории малого радиуса, окружающие соответствующие компоненты зацепления, которые служат носителями полей B, $\tilde{B}$ соответственно. Выбирая диаметр полнотория $\tilde{U}$ очень малым и увеличивая посредством изотопии, неподвижной на L длины семейства ρ отрезков, (вся остальная часть компоненты $\tilde{L}$ попадает в окрестность дуги, удаленной от компоненты L на очень большое расстояние) удлинняя их по обе стороны диска, добьемся того, чтобы функция $\tilde{\phi}$ (см. (35)), определенная на U, стала бы тождественно равной нулю со сколь угодно большой точностью. Теперь интеграл (35) приводится к виду

$$W(B;\tilde{B}) = \int G(x)F(x) - \phi^2\tilde{A}(x)\tilde{B}(x)d\mathbf{R}^3.$$

Здесь вектор-функция $G(x)$ построена по паре гармонических потенциалов $A(x)$, $\tilde{A}(x)$ и соответствующей функции ϕ. Далее, после калибровочного преобразования $A(x) \to A(x) + \mathrm{grad}\ \mathrm{f}$ для подходящей функции f с носителем в окрестности компоненты $\tilde{L}$, получаем

$$W(B;\tilde{B}) = \int G(x)F(x)d\mathbf{R}^3,$$

где $G(x) = (A(x) + \mathrm{grad\ f(x)}) \times \tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$. Теперь $W(B;\tilde{B}) = H(G(x);G(x)) = H(A(x)\times\tilde{A}(x);A(x)\times\tilde{A}(x))+2H(\mathrm{grad\ f(x)}+\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x});\mathrm{A(x)}\times\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x}))+\mathrm{H}(\mathrm{grad\ f(x)}\times\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x});\mathrm{grad\ f(x)}\times\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x})) = M(B,\tilde{B}) + 2H(\mathrm{grad\ f(x)} + \tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x});\mathrm{A(x)}\times\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x})) + \mathrm{H}(\mathrm{grad\ f(x)}\times\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x});\mathrm{grad\ f(x)}\times\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x}))$. Второе и третье слагаемое в этом выражении равны нулю, т.к. каждое из них можно представить в виде (30) и повторить дальнейшие рассуждения предидущего раздела, используя условие ортогональности. Тем самым равенство $M(B;\tilde{B}) = W(B;\tilde{B})$ доказано.

5 Построение инварианта M для пары полей, моделирующих двукомпонентное (в обобщенном смысле) зацепление

Пусть векторные поля B, $\tilde{B}$ моделируют зацепление $\mathrm{L} = L\cup\tilde{L}$, причем компоненты L, $\tilde{L}$ зацепления связными не предполагаются (см. определения раздела 4). Отличие нашего подхода от ранее предложенных в [M-S], [E-B], [A-R] состоит в том, что мы не накладываем никаких ограничений на коэффициенты зацепления компонент и никаких ограничений на инварианты Милнора μ_{123} для трехкомпонентных подзацеплений.

Пусть Φ_i, $\tilde{\Phi}_j$, $1 \le i \le l$, $1 \le j \le m$ – значения потоков векторов B, $\tilde{B}$ через трансверсальные сечения соответствующих трубок. Пусть $lk(i,j)$ – матрица размера $l \times m$ попарных коэффициентов зацеплений различных связных компонент, причем первая компонента в паре выбирается из первой обобщенной компоненты зацепления, а вторая из второй. Для каждой компоненты L_i определим вещественное число $\kappa_i = \sum_j \tilde{\Phi}_j lk(i,j)$. Аналогично для каждой компоненты $\tilde{L}_j$ введем число $\tilde{\kappa}_j$ по формуле $\tilde{\kappa}_j = \sum_i \Phi_i lk(i,j)$.

5.1 Определение

Скажем, что зацепление L является чистым, если выполнены равенства $\kappa_i = 0$, $\tilde{\kappa}_j = 0$ для всех i,j.

Для чистых зацеплений требуемое интегральное выражение, фактически, было построено в [A-R] (переход от двукомпонентных зацеплений со связными компонентами к обобщенным двукомпонентным происхдит без каках-либо затруднений), мы использовали это интегральное выражение в разделе 4 для доказательства невырожденности инварианта M, определенного в разделе 1. Наши дальнейшие построения связаны с анализом остаточных членов в выражении интеграла (35) и дополнительных слагаемых в выражении для вектора $G(x)$, при помощи которого этот интеграл определяется. Мы ослабим условие чистоты зацепления Ł и определим аналогичное интегральное выражение без каких-либо дополнительных предположений. Нам будет необходимо ввести специальную систему координат в окрестрости носителей полей.

Пусть $(U,\tilde{U}) \supset (L,\tilde{L})$ – пара трубчатых окрестностей (более точно, пара объединений трубчатых окрестностей), содержащих соответствующие компоненты зацепления. Дадим определение цилиндрической системы координат на паре окрестностей $(U,\tilde{U})$.

Пусть $U_i \subset U$ – связная компонента, являющаяся окрестностью одной из подкомпонент зацепления. Под цилиндрической системой координат на U_i будем понимать диффеоморфизм

$$F_i : D^2_\varepsilon \times S^1 \to U_i, \tag{36}$$

где D^2_ε – диск радиуса $1 >> \varepsilon > 0$, причем выполнены следующие условия.

(1) $Im(F|0 \times S^1) = L_i$.

(2) Оснащение окрестности U_i, заданное посредством F_i, имеет нулевой коэффициент самозацепления.

(3) Диффеоморфизм F_i переводит форму стандартного объема в прообразе (предполагается, что форма площади и длины на декартовых координатах в пробразе выбраны стандартными) в форму стандартного объема евклидова пространства.

(4) Носитель поля B в окрестности U целиком попадает внутрь меньшего полнотория, при этом образ тонкого цилиндрического слоя с двумя границами $D^2_{\varepsilon-\delta} \times S^1 \subset D^2_\varepsilon \times S^1$, $0 < \delta << \varepsilon$ не содержит носителя поля B. Этот образ далее будет обозначаться через V_i, а полноторий $U_i \setminus V_i$ через U'_i.

Аналогичные определения и обозначения вводится для каждой связной окрестности $\tilde{U}_j \subset \tilde{U}$. Для того, чтобы сравнивать две цилиндрические системы координат на одном и том же зацеплении удобно условиться, что параметр ε, от которого зависит объем каждого полнотория (как в образе, так и в прообразе) одинаков для каждого полнотория и выбирается достаточно малым так, чтобы суммарный объем всех полноториев оставался малым. Строго говоря, следует различать системы цилиндрических координат в зависимости от значения ε.

Определим каноническую риманову метрику Ξ_i $(\tilde{\Xi}_j)$ в окрестности U_i $(\tilde{U}_j)$ как метрику индуцированную из стандартной метрики на $D^2_\varepsilon \times S^1$ посредством F_i. Аналогично определим метрику в $\tilde{U}_j$. Удобно условится, что каждая из построенных метрик продолжена (с сохранением объема) в цилиндрической окрестности V_i $(\tilde{V}_j)$ с внутренней границы до стандартной метрики R^3 на внешней границе. Продолжение, тем самым, определяет риманову метрику на всем прстранстве $\mathbf{R}^3$, стандартную вне окрестрности носителя.

Мы будем рассматривать зацепления с точностью до следующего отношения эквивалентности, что удобно. Пусть $(\mathrm{L}; U, \tilde{U})$, $(\mathrm{L}'; U', \tilde{U}')$ – два двукомпонентных (в обобщенном смысле) зацепления, снабженные цилиндрическими системами координат с одинаковыми объемами. Условимся для краткости такие зацепления называть утолщенными. Скажем, что эти два утолщенных зацепления эквивалентны, если найдется диффеоморфизм из $SDiff(R^3)$ с компактным носителем, переводящий одно зацепление в другое (с сохранением каждой обобщенной компоненты) и переводящий заданную цилиндрическую систему координат окрестности одного зацепления в цилиндрическую систему координат окрестности другого. Легко показать, что новое отношение эквивалентности совпадает с обычным: два утолщенных зацепления $(\mathrm{L}; U, \tilde{U})$ и $(\mathrm{L}'; U', \tilde{U}')$, эквивалентны тогда и только тогда, когда сами зацепления L и L' эквивалентны в смысле объемлемой изотопии (гладкой) пространства, переводящей одно зацепление в другое. Построим интегральный инвариант для утолщенного зацепления $(\mathrm{L}; U, \tilde{U})$ и проверим, что этот инвариант сохраняется при определенном выше отношении эквивалентности.

Для построеня интеграла удобно задавать поля B, $\tilde{B}$ внутри каждой окрестности некоторыми специальными формулами, связанными с цилиндрической системой координат на утолщении. Определим вещественнозначные функции $\chi_i : U_i \to \mathbf{R}^1$ $(\tilde{\chi}_j : \tilde{U}_j \to \mathbf{R}^1)$ удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $\chi_i = 0$ $(\tilde{\chi}_j = 0)$ в цилиндрической окрестности V_i $(\tilde{V}_j)$.

(ii) функция χ_i $(\tilde{\chi}_j)$ зависит лишь от r- координаты на диске D_i $(\tilde{D}_j)$ – трансверсальном сечении соответствующей трубки.

(iii) $\int \Delta \chi_i dD_i = -\Phi_i$ $(\int \Delta \tilde{\chi}_j d\tilde{D}_j = -\tilde{\Phi}_j)$.

Удобно задать такую функцию в классе непрерывных и кусочно-дифференцируемых. При этом значение оператора Δ уже представляет собой обобщенную функцию с носителем на поверхности разрыва производной исходной функции. Соответствующий переход к гладкому случаю посредством C^0- аппроксимации с сохранением условий (i)-(iii) не вызывает затруднений.

5.2 Определение

Определим функцию χ_i с носителем на U_i, зависящую лишь от координаты r по формуле

$$\chi_i(r) = \alpha, \quad 0 \le r \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\chi_i(r) = \alpha - \alpha\delta^{-1}(r - \frac{\varepsilon}{2}), \quad \frac{\varepsilon}{2} < r < \frac{\varepsilon}{2} + \delta,$$

$$\chi_i(r) = 0, \quad \frac{\varepsilon}{2} + \delta < r < \varepsilon.$$

В этих формулах $0 < \delta << \varepsilon$, α-вещественный параметр, который выбирается таким, чтобы выполнялось условие (iii) в определении χ. Определение $\tilde{\chi}_j$ совершенно аналогично.

Для вычисления A воспользуемся следующими равенствами

$$\Delta\chi_i = \frac{\partial^2\chi_i(r)}{dr^2} + r\frac{\chi_i(r)}{\partial r^2} = \alpha\delta^{-1}r, \quad \frac{1}{2} < r < \frac{1}{2} + \delta.$$

$$\Delta\chi_i = -\hat{i}_r\alpha\delta^{-1}, \quad r = \frac{1}{2};$$

$$\Delta\chi_i = \hat{i}_r\alpha\delta^{-1}, \quad r_0 = \frac{1}{2} + \delta.$$

$$\Delta\chi_i = 0, \quad \{0 \le r < \frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2} + \delta < r \le \varepsilon\}.$$

В этих формулах $\hat{i}_r$ – обобщенная функция с носителем на полнотории радиуса r. Тогда $\int \Delta\chi_i dD_i = \alpha(1-\delta)$. Откуда $\alpha = \frac{\Phi_i}{1-\delta}$.

Выберем вектор B в трубке U_i параллельным центральной линии, а длину и направление этого вектора выберем в соответствии со следующей формулой:

$$(B, n) = \Delta\chi_i, \tag{37}$$

где n–вектор единичной положительной нормали к поверхности D_i трансверсального сечения трубки. Выражение в левой части равенства представлено скалярным произведением в каждой точке диска D_i, это равенство должно выполняться в каждой точке для каждого сечения трубки. Эти условия определяют вектор B в каждой точке трубки U_i однозначно. Очевидно, что вектор B оказывается бездивергентным и величина его потока через сечение D_i равна Φ_i (см. условие (iii)). Аналогично определяются вектор $\tilde{B}$ в каждой трубке $\tilde{U}_j$. Теперь перейдем к определению вектор-потенциалов A, $\tilde{A}$ в каждой трубке U_i, $\tilde{U}_j$. Следует выбрать эти вектора в наиболее простой форме.

Зададим вектор A в окрестности U'_i, $U'_i \subset U_i$ (которую для краткости в дальнейшем будем обозначать через U'_i по формуле

$$A|_{U'_i} = A0 + A1, \tag{38}$$

вектор $\tilde{A}$ зададим по формуле

$$\tilde{A}|_{U'_i} = \tilde{A}2. \tag{39}$$

В этих формулах вектора $A1$, $\tilde{A}1$ параллельны центральной линии трубки U_i и имеют постоянную координату вдоль этой образующей, а вектор $A0$ имеет единственную ненулевую циклическую координату φ в каждом трансверсальном сечении, причем значение этой координаты (тем самым и длины вектора) зависит лишь от расстояния до центральной линии и не зависит от значения этой координаты. Значение этой координаты однозначно восстанавливается из уравнения

$$\mathrm{rot\ A0} = \mathrm{B}|_{\mathrm{U}'_{\mathrm{i}}}$$

и граничного условия $A0|_{L_i} = 0$, где L_i – центральная линия трубки. Вектор $A0$ в разложении вектора A при этом оказывается вектором-потенциалом поля B внутри трубки U'_i, выбранным в простейшей форме, вектор $A1$ является вектором- потенциалом, представленным градиентом многозначной функции на U'_i. Эта функция постоянна по координатам трансверсали к трубке и линейна по координате образующей. Длина этого вектора в каждой точке из U'_i постоянна и определяется суммой произведений потоков в каждой оставшейся трубке U'_i, $i' \neq i$ на коэффициент зацепления $lk(L'_i, L_i)$. Длина вектора $\tilde{A}2$ определена аналогичной константой κ_i, связанной с потоками, индуцированными полем $\tilde{B}$ в трубках $\tilde{U}_j$.

В окрестности $\tilde{U}'_j$, $\tilde{U}'_j \subset \tilde{V}_j$, имеется аналогичное разложение по формуле

$$\tilde{A}|_{U'_j} = \tilde{A}0 + \tilde{A}1, \tag{40}$$

вектор A задается по формуле

$$A|_{U'_i} = A2. \tag{41}$$

В общем случае можно записать в окрестности U_i (и аналогично в окрестности $\tilde{U}_j$) $A = A0 + A1 + \mathrm{grad}\ \phi$, $\tilde{A}^H = \tilde{A}2 + \mathrm{grad}\ \tilde{\psi}$, где $\phi, \tilde{\psi}$ подходящие скалярные (однозначные) функции. Эта обшая формула использоваться не будет. Вектор A, заданный в окрестности зацепления L формулами (38), (41), продолжается до вектор-потенциала во всем оставшемся пространстве $\mathbf{R}^3 \setminus \{U' \cup \tilde{U}'\}$ как градиент многозначной функции в стандартной метрике на $\mathbf{R}^3 \setminus \{U \cup \tilde{U}\}$ и нестандартной (неевклидовой) на кольцевых окрестностях $V \cup \tilde{V}$. Вектор-потенциалы A, $\tilde{A}$ полей B, $\tilde{B}$ построены.

Рассмотрим функцию $\sum_i \kappa_i \chi_i$ носителем в окрестности U, обозначим эту функцию через χ. Аналогично определяется функция $\tilde{\chi}$ формулой $\sum_j \tilde{\kappa}_j \tilde{\chi}_j$. Определим вектор-потенциал G в пространстве R^3 по формуле

$$G = A \times \tilde{A} - \mathrm{grad}\chi + \mathrm{grad}\tilde{\chi}. \tag{42}$$

Заметим, что носители дополнительных слагаемых в формуле (42) лежат в $U \cup \tilde{U}$. Более того, вектор G в области $U \cup \tilde{U}$ направлен вдоль радиусов дисков трансверсального сечения. Прямым вычислением убеждаемся, что выполнено равенство

$$div(G(x)) = 0 \tag{43}$$

для каждой точки пространства. Действительно, в дополнении $\mathbf{R^3} \setminus \{U \cup \tilde{U}\}$, где поля B, $\tilde{B}$ обращаются в нуль, формула очевидно вытекает из соотношения $div(\mathrm{gradf_1} \times \mathrm{gradf_2}) = 0$. В области носителей поля, например, в области U_i, справедливо соотношение $divG(x) = (rotA(x), \tilde{A}2) - \kappa_i \Delta\chi_i = \kappa_i((B(x), n) - \Delta\chi_i) = 0$ в силу равенства (37).

Таким образом, учитывая (43), определен вектор $F(x)$, rot F(x) = G(x). Вектор $F(x)$ определен с точностью до прибавления градиента однозначной функции. Определим обобщенный инвариант спиральности $M(B, \tilde{B})$ по формуле

$$M(B, \tilde{B}) = \int F(x)G(x)d\mathbf{R}^3. \tag{44}$$

Формула (44) является обобщением частного случая (35) для зацепления со связными компонентами $L, \tilde{L}$. Частность заключается в предположении, что в формуле (35) вектора A, $\tilde{A}$ выбраны так, что функции ϕ, $\tilde{\phi}$, построенные по ним, оказываются нулевыми. Можно пытаться обобщить формулу (44) и избавится от дополнительных предположений, введя дополнительные слагаемые в формуле (42) по аналогии.

Докажем, что выражение (44) не зависит от выбора утолщенного зацепления в классе эквивалентности. Иными словами, докажем, что при диффеоморфизме D сохраняющем объем и переводяшем цилиндрическую систему координат утолщения первого зацепления в систему координат другого значение инварианта $M(B, \tilde{B})$ не изменяется. При замене системы координат вектора A, $\tilde{A}$ меняются на калибровочные преобразования

$$A \to A + \mathrm{gradf}, \tag{45}$$

$$\tilde{A} \to \tilde{A} + \mathrm{grad}\tilde{\mathrm{f}}. \tag{46}$$

Из условия сохранения канонической метрики на утолщении вытекает, что функции f, $\tilde{f}$ заданы постоянными в окрестностях U', $\tilde{U}'$, в области носителей полей B, $\tilde{B}$. Обозначим через f_i, f_j, $\tilde{f}_i$, $\tilde{f}_j$ значения функции f, $\tilde{f}$ в торической окрестности соответствующей компоненты. Индексом i помечаются подкомпоненты связности U, индексом j – подкомпоненты $\tilde{U}$.

Достаточно рассмотреть калибровочное преобразование (45) для A, предполагая, что вектор $\tilde{A}$ не изменяется.

Вектор $G(x)$ изменяется при калибровочном преобразовании (45) по формуле $G(x) \to G(x) + \mathrm{gradf} \times \tilde{\mathrm{A}}$. Вектор $F(x)$ изменяется как $F(x) \to F(x) + f\tilde{A} - \sum_j f_j \tilde{A}_j + \mathrm{grad\ g}$. Используем равенства $(\tilde{\chi}_j, \tilde{A}_j) = 0$, $(\chi_i, \tilde{A}_j) = 0$, $divG = 0$, из которых вытекает, что значение M не изменяется.

5.3 Следствие

Инвариант Милнора $\mu_3(1,2,3,4)$ (а также и инвариант $\bar{\mu}_3(1,1,2,3)$) допускает интегральное представление, которое само определено для произвольного 4-компонентного зацепления (3-компонентного зацепления) без предположении о его полуограничиваемости (см. [A-M-R]) по поводу определений).

Доказательство

Пусть $\L = L_1 \cup L_2 \cup \tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2$– произвольное четырехкомпонентное зацепление, компоненты которого окрашены в два цвета. Определим значение $\mu_3(1,2,\tilde{1},\tilde{2})$ как значение $M(\L)$. В случае если все коэффициенты пар компонент обращаются в нуль (6 условий) и все инварианты Милнора μ_2 от каждой тройки компонент также обращаются в нуль (4 условия), значение $M(\L)$ совпадает со значением $\mu_3(1,2,\tilde{1},\tilde{2})$, которое в этом случае определено. Это вытекает, например, из построений [A-M-R]. Следствие доказано.

Гипотеза

Инвариант Милнора $\mu_3(1,2,3,4)$ длины 3, рассматриваемый как инвариант изотопического класса четырехкомпонентного зацепления с пронумерованными компонентами, является инвариантом Васильева порядка 3 (иначе говоря, этот инвариант допускает продолжение на пространство произвольных четырехкомпонентных зацеплений до инварианта третьего порядка).

6 Приложения в магнитной гидродинамике

В рамках магнитной гидродинамики изучают магнитное поле B в трехмерной жидкой несжимаемой проводящей среде [M]. Движение среды в предположении идеальной проводимости и отсутствии магнитной вязкости задано вектором u и удовлетворяет системе уравнений индукции из которой вытекает, что вектор магнитного поля B является "вмороженным", т.е. переносится средой как векторное поле. Если магнитное поле достаточно мало, то движение среды подчиняется уравнению Эйлера-Гельмгольца, согласно которому вектор $\mathrm{rot}\ \mathrm{u}$ является вмороженным. В общем случае вектор $\mathrm{rot}\ \mathrm{u}$ зависит от B.

Здесь уже не предполагается, что вектора u, B имеют конечный носитель. Обычно накладывают следующие асимптотические условия в окрестности бесконечности $u = O(R^{-3})$, $B = O(R^{-3})$, $R \to \infty$.

Для изучения свойств такой системы рассматривают интеграл магнитной спиральности

$$\int AB\ d\mathbf{R}^3$$

и интеграл перекрестной спиральности

$$\int uB\ d\mathbf{R}^3,$$

сохранение которых вытекает и непосредственно из сохранения энергии системы (см. [S-F]). Эти интегралы уже являются несобственными, но абсолютно сходятся в окрестности бесконечности. В общем случае интеграл гидродинамической спиральности

$$\int u \text{ rot } \mathrm{u}\mathbf{R}^3$$

не сохраняется, этот интеграл сохраняется лишь в пределе $B \to 0$ при переходе к кинематической задаче.

Проблема описания топологических инвариантов, высших аналогов интегралов спиральности, важна с различных точек зрения. В частности, высшие топологические инварианты могут оказаться полезными для более тонкой оценки магнитной энергии и для изучения пространственного спектра случайного магнитного поля.

Работа представляет собой конспект доклада на конференции по теории особенностей и ее приложениям, проходившей в Ливерпуле с 16 по 21 декабря 2000. Автор благодарит Машу Векшину за вдохновение, позволившее исправить ошибку, допущенную в работе [5], и О.Я.Виро за предоставленную возможность продумать часть доказательства во время месячного визита в Университет г. Уппсала в марте 2001.

Список Литературы

1. [Arn] Arnold V.I.; The asymptotic Hopf invariant and its applications, Selecta Math. Sovietica 5 (1986), 327-345.

2. [A-Kh] Arnold V.I. and Khesin B.A.; Topological methods in Hydrodynamics, Applied Mathematical Sciences, Vol. 125, Springer (1998).

3. [A-M-R1] Ахметьев П.М., Малешич Й, Реповш Д.; Формула для обобщенного инварианта Сато-Левина, Мат. Сборник N1 (2001) 1-10.

4. [A-M-R] Ахметьев П.М., Малешич Й, Реповш Д.; Об инвариантах Милнора длины 3 для полуограничивающих зацеплений. Математические Заметки, в печити (2001).

5. [A] Ахметьев П.М.; О высшем аналоге коэффициента зацепления пары бездивергентных векторных полей. Труды Научных Семинаров ПОМИ (2000) N6.

6. [A-Re] Ахметьев П.М., Реповш Д.; Обобщенный инвариант Сато-Левина. Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, (1998), т.221, 69-80.

7. [Akh] Akhmet'ev P. M.; On a Higher Analog of the Linkig Number of Two Curves. Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 185 (1998) 113-127.

8. [A-R] Akhmet'ev P.M., Ruzmaikin A.; A forth-order invariant for magnetic and vortex lines, J. Geom. Phys., 15 (1995), 95-101.

9. [E-B] Evans N.W. and Berger M.A.; A hierarchy of linking integrals. H.K.Moffatt at al. (eds.), Topological Aspect of the Dynamics of Fluids and Plasmas, 237-248 (1992) Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.

10. [Fr] Freedman M.; A note on topology and magnetic energy in noncompressible perfectly conducting fluids, J. Fluid Mech. 194 (1988) 549-551.

11. [F-C] Frick P., Sokoloff D., Cascade and dynamo action in shell model of magnetohydrodynamic turbulence. Physical Review E. Vol 57, N 4 (1998)

12. [K-L] Kirk P. and C. Livingston, Vassil'ev invariants of two component links and the Casson-Walker invariant, Topology 36 (1997) 1333-1353.

13. [M-S] Monastyrskii M.U. and Sasorov P.V.; Topological invariants in magnetic hydrodynamics, Sov.Phys.JETP 93 (1987) 1210-1220.

14. [M] Моффат Г.К. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде, пер. Москва, Мир, (1980).

15. [M-R] Moffatt H.K. and Ricca R. Helicity and the Calugareanu invariant, Topological Aspects of Dynamics of Fluids and Plasma, H.K.Moffatt at al.

(eds.), Kluwer, Dordrecht, the Netherlands, (1992), 257-270.

16. [P-V] Polyak M. and Viro O., Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants, Internat. Math. Res. Notices (1994) N 11, 8pp. (electronic).