О высшем аналоге коэффициента зацепления пары бездивергентных векторных полей

П.М.Ахметьев

Работа написана при финансовой поддержке грантов РФФИ NN 02-01-00014, 00-05-64015.

1 Основные определения и результаты

Пусть $B, \tilde{B}$ – два бездивергентных векторных поля в трехмерном евклидовом пространстве, имеющие компактный носитель. Говорят, что пара $(B_1, \tilde{B}_1)$ эквивалентна паре $(B_2, \tilde{B}_2)$, если существует диффеоморфизм $D : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ такой, что $D(B_1) = B_2$, $D(\tilde{B}_1) = \tilde{B}_2$, при этом D сохраняет ориентированный объем (обозначим это через $(B_1, \tilde{B}_1) \simeq (B_2, \tilde{B}_2)$, $D \in SDiff$) и имеет компактный носитель, т.е. неподвижен вне некоторого шара, размеры которого не фиксируются.

Определение

Скажем, что вещественнозначная функция $I(B, \tilde{B})$ является инвариантом пары векторных полей, если ее значения на двух эквивалентных парах полей совпадает, т.е. $I(B_1, \tilde{B}_1) = I(B_2, \tilde{B}_2)$, если $(B_1, \tilde{B}_1) \simeq (B_2, \tilde{B}_2)$.

Нас будут интересовать лишь инварианты, записанные в виде кратных интегралов от самих полей и их векторных потенциалов. Задача построения подобных интегральных выражений сформулирована в [А], задача 1990-16. "Какие из инвариантов узлов могут быть "размазаны" до инвариантов бездивергентных векторных полей?" Эта же задача была мотивирована рядом приложений инварианта перекрестной спиральности, см. [S-F]. В работе [Ахм] была предложена ошибочная конструкция для решения этой задачи. В настоящей работе предложено ее решение, построением нового примера инварианта $M(B, \tilde{B})$. Обозначение предложено в честь американских математиков Милнора и Масси. Начнем с известного примера.

Пример 1. Интеграл спиральности.

Определим функцию

$$h(x,x';B(x),\tilde{B}(x')) = \frac{\langle B(x),\tilde{B}(x'),(x-x')\rangle}{||x-x'||^3}, \qquad (1)$$

где $\langle a,b,c\rangle$ – ориентированный объем параллелепипеда, построенного по упорядоченной тройке векторов. Определим интеграл спиральности $I_1(B,\tilde{B}) = H(B,\tilde{B})$ по формуле $H(B,\tilde{B}) = \int h(x,x';B(x),\tilde{B}(x'))dxdx'$.

Инвариантность интеграла спиральности была, фактически, установлена Гауссом исходя из топологических соображений. На современном языке эти соображения можно сформулировать так. Если пара полей $(B,\tilde{B})$ моделирует зацепление $L = L_1 \cup \tilde{L}_1$ (по поводу этого см. разделы 4,5), то значение $H(B,\tilde{B})$ пропорционально коэффициенту зацепления $lk(L,\tilde{L})$ (с коэффициентом $F\tilde{F}$, где F и $\tilde{F}$ – потоки векторов B и $\tilde{B}$ через трансверсальное сечение соответствующей компоненты носителя поля). При топологическом подходе случай произвольной пары полей сложен, необходимы более тонкие рассуждения об асимптотическом усреднении, которые были проведены В.И.Арнольдом для наиболее сложного случая $\tilde{B} = B$, см. [Arn],[A-Kh]. Аналитическое доказательство того,

что H является инвариантом значительно проще, см. [M],[A-Kh].

2 Предварительные построения

В этом разделе мы предполагаем, что векторные поля B, $\tilde{B}$ фиксированы. Ниже строятся семейства векторов $T(x,y;B)$, $T(x,y;\tilde{B})$, $A(x,y;B)$, $A(x,y;\tilde{B})$, зависящие от точки $x \in R^3$ и параметризованные точкой $y \in R^3$. Удобно отождествить пространство параметров и область определения векторов, поскольку при этом оказывается, что соответствующий вектор имеет особенность в точке x, равной значению параметра y при отождествлении. Параметр иногда будет удобно обозначать той же буквой, что и переменную из области значений, помечая при этом параметр нижним индексом и знаком "тильда". Будут также определены семейства скалярных функций $\varphi(x,y;B)$, $\varphi(x,y;\tilde{B})$.

Далее нам потребуется и более общий случай, когда поле B не задано, а задан лишь вектор ξ, приложенный в точке x. В этом случае будем использовать обозначения $\varphi(x,y;\xi)$ и аналогичные. В этом разделе для сокращения обозначений условимся вектор B опускать, записывая $T(x,y)$ вместо $T(x,y;B)$ и аналогично для остальных обозначений.

Определим семейство вектор-функций $T(x; x_i)$, каждая точка x_i, $i = 1, 2$ играет роль параметра.

$$T(x; x_i) = \frac{-1}{4\pi||x - x_i||} B(x_i).$$

Определим семейство вектор-функций $A(x; x_i)$ и семейство функций $\varphi(x; x_i)$, зависящих от точки x пространства.

$$A(x; x_i) = \frac{B(x_i) \times (x - x_i)}{4\pi||x - x_i||^3}.$$

Иными словами, определим вектор-функцию $A(x; x_i)$ как векторный потенциал диполя с центром в точке x_i, ось и интенсивность которого определяются значением поля B в этой точке.

$$\varphi(x; x_i) = \frac{-1}{4\pi}(B(x_i), \mathrm{grad}\ (\frac{1}{||\mathrm{x} - \mathrm{x_i}||})).$$

Функция $\varphi(x; x_i)$ называется скалярным потенциалом того же диполя. Выполнены равенства

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{T}(\mathrm{x}; \mathrm{x_i}) = -\mathrm{A}(\mathrm{x}; \mathrm{x_i}),$$

$$div\ T(x; x_i) = \varphi(x; x_i),$$

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{A}(\mathrm{x}; \mathrm{x_i}) = -\mathrm{grad}\ \varphi(\mathrm{x}; \mathrm{x_i}).$$

Эти равенства справедливы во всех точках пространства, за исключением особой точки x_i, т.е. при $x \in \mathbf{R}^3 \setminus x_i$. Удобно ввести аналогичные обозначения $\tilde{T}(x; \tilde{x}_i)$, $\tilde{A}(x; \tilde{x}_i)$, $\tilde{\varphi}(x; \tilde{x}_i)$ для семейства векторных и скалярных потенциалов диполей, связанных с полем $\tilde{B}$.

2.1 Обозначение

Поточечное среднее значение (т.е. среднее значение по параметру в каждой точке пространства) того или иного семейства векторов или скаляров будем обозначать через m, указывая при этом параметры по которым происходит усреднение (интегрирование). Например,

$$[m_{x_i}\varphi](x) = \int \varphi(x; x_i) dx_i.$$

Далее удобно ввести сокращенные обозначения

$$[m_{x_i}A](x) = A(x), \qquad [m_{\tilde{x}_i}\tilde{A}](x) = \tilde{A}(x).$$

3 Построения высшего аналога инварианта спиральности

Нам потребуется определение полилинейной функции μ, которая будет служить интегральным ядром для искомого интеграла.

3.1 Определение формы μ

Пусть $(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ – упорядоченная четверка несовпадающих точек, $\xi_1, \xi_2, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$ – четверка векторов, приложенная в соответствующих точках. Обозначим через ψ_1 – векторное поле в $\mathbf{R}^3$ с особенностью в точке x_1, зависящее только от выбора этой точки и вектора ξ_1, определенное по формуле $\psi_1 = \mathrm{grad}\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1; \xi)$. Аналогично введем обозначения ψ_2, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$.

Определим форму μ по формуле

$$\mu(x_1, x_2; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2; \xi_1, \xi_2, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = H(\psi_1 \times \tilde{\psi}_1, \psi_2 \times \tilde{\psi}_2), \qquad (2)$$

где $H(\quad,\quad)$ – интеграл спиральности, заданный интегрированием функции $h(x, x'; \psi_1(x) \times \tilde{\psi}_1(x), \psi_2(x) \times \tilde{\psi}_2(x'))$ по формуле (1), причем интегрирование происходит по переменным x, x' по области $\mathbf{R}^3 \setminus \{x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ и этот интеграл понимается в смысле главного значения в окрестности особых точек. Далее для упрощения обозначений векторные аргументы функции μ будут опускаться, их будем описывать заранее.

Мы будем применять конструкцию, для случая $\xi_1 = A(x_1)$, $\xi_2 = A(x_2)$, $\tilde{\xi}_1 = \tilde{A}(\tilde{x}_1)$, $\tilde{\xi}_2 = \tilde{A}(\tilde{x}_2)$. При этом векторные поля $A(x)$, $\tilde{A}(x)$ определены по исходным векторным полям $B(x)$, $\tilde{B}(x)$ согласно обозначениям 2.1.

3.2 Определение

Определим

$$M(B, \tilde{B}) = \int \mu(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) dx_1 dx_2 d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \qquad (3)$$

3.3 Замечание

Вектора $\psi_i(x, x_i)$, $(\tilde{\psi}_i(x, \tilde{x}_i))$ $i = 1, 2$ сходятся в смысле главного интегрального значения к своим средним по параметрам x_i $(\tilde{x}_i)$. (Можно показать, что $m_{x_i}\psi_i(x, x_i) = \frac{1}{3}A_i(x)$). Эти вектора сходятся не абсолютно, поэтому переставлять пределы интегрирования по x и x_i в определении M вообще говоря, недопустимо.

3.4 Лемма

Интегральное выражение (3) является абсолютно сходящимся.

Доказательство

Проблемы со сходимостью в окрестности бесконечности не возникает, проверим сходимость в окрестности диагонали $x_1 = \tilde{x}_1$. Для этого предположим, что поле $\psi_1 \times \tilde{\psi}_1$ не имеет особенностей внутри шара D единичного радиуса. Эффектами кривизны интегральных линий можно пренебречь и мы предположим, что вектора ξ_1, $\tilde{\xi}_1, \xi_2, \tilde{\xi}_2$ постоянны в области D.

Чтобы исключить расходимость, связанную с некорректностью учета главных значений в особых точках, предположим, что переменные $x_1, \tilde{x}_1$ меняются в меньшем концентрическом шаре радиуса $\frac{1}{2}$.

Воспользуемся принципом подобия и изменим масштаб в области интегрирования по переменной x в ε-раз. Расстояние между точками $x_1, \tilde{x}_1$ (которые мы при подобии не переобозначаем) изменится в ε раз, вектора $\psi_1 \times \tilde{\psi}_1$ в соответствующих точках изменятся в ε^{-5} раз, элемент объема при этом изменится в ε^3 раз. Область интегрирования по x имеет рариус ε^{-1} и эффектами на бесконечности можно пренебречь, дополнив область интегрирования до полного пространства. По переменной x' следует перейти к потенциалу вектора $\psi_2 \times \tilde{\psi}_2$ (см. ниже вычисления μ), поэтому интеграл вычисляется как скалярное произведение $\int (\psi_1 \times \psi_2, C(x)dx)$.

Итак, значение интегрального ядра μ оценивается величиной, пропорциональной ε^{-2}, где $\varepsilon-$ расстояние между особыми точками x_1, x_2. Диагональ $x_1 = \tilde{x}_1$ имеет коразмерность 3 и особенность интегрируется абсолютно. Аналогичные рассуждения можно провести для других диагоналей, скажем для $x_1 = x_2$. Лемма об абсолютной сходимости доказана.

Теперь рассмотрим вопрос о вычислении интегрального ядра μ. Обозначим через $C(x, x_1, \tilde{x}_1)$ – векторное поле с особенностями в x_1, $\tilde{x}_1$, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(i) $\mathrm{rot C(x, x_1, \tilde{x}_1)} = \psi_1(\mathrm{x, x_1}) \times \tilde{\psi}_1(\mathrm{x, \tilde{x}_1})$.

(ii) $divC(x, x_1, \tilde{x}_1) = 0$ (с учетом равенства нулю дивергенции в особых полюсах и на бесконечности).

(iii) вектор C имеет минимально возможные особенности в особых точках и асимптотическое стремление к 0 в бесконечности (порядков не превышающих $O(r^{-2})$.

Нетрудно проверить, что вектор, удовлетворяющий условиям (i-iii) существует (в частности, условие (i) требует равенства нулю дивергенции в полюсах $x_1, \tilde{x}_1$ векторного поля $\psi_1 \times \tilde{\psi}_2$, что устанавливается непосредственно) и единственный.

3.5 Лемма

Значение $\mu(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ вычисляется по формуле

$$\int (C(x, x_1, \tilde{x}_1), \psi_2(x, x_2) \times \tilde{\psi}_2(x, \tilde{x}_2)) dx, \qquad (4)$$

причем интегрирование ведется по области $\mathbf{R}^3 \setminus \{x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ и интеграл понимается в смысле главного значения в точках $x_2, \tilde{x}_2$.

Доказательство

Доказательство опускается. Заметим, что утверждение Леммы можно принять за независимое определение формы μ.

Приступим к доказательству калибровочной инвариантности M. Используя стандартные рассуждения, удается показать, что проверка инвариантности сводится к доказательству того, что следующий интеграл обращается в нуль:

$$\int \mu(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \mathrm{gradf(y_1)} \times \mathrm{\tilde{A}(\tilde{x}_1)}, \mathrm{A(x_2)} \times \mathrm{\tilde{A}(\tilde{x}_2) dx_1 dx_2 d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2}. \qquad (5)$$

Мы указали лишь один из интегралов, необходимо рассмотреть каждый, у которых потенциальный член стоит на одном из четырех аргументов поля. Функция f определяется из вариации интеграла M по произвольному малому бездивергентному векторному полю скорости, который определяет бесконечно малый диффеоморфизм пространства, сохраняющий объем.

Воспользуемся Леммой 3.6 о вычислении интегрального ядра μ. Определим векторное поле $\Gamma(x, x_1, \tilde{x}_1, \mathrm{gradf(x_1)}, \mathrm{\tilde{A}(\tilde{x}_1)}) = \psi(\mathrm{x}, \mathrm{x_1})(\varphi_{\mathrm{\tilde{A}_1}}(\mathrm{x}, \mathrm{\tilde{x}_1}) - \varphi_{\mathrm{\tilde{A}_1}}(\mathrm{x_1}, \mathrm{\tilde{x}_1}))$. Здесь $\psi(x, x_1) = \mathrm{grad}\varphi_{\mathrm{f}}(\mathrm{x}, \mathrm{x_1})$ – градиент скалярного потенциала диполя, ассоциированного с вектором $\mathrm{gradf(x_1)}$ в точке x_1, $\varphi_{\tilde{A}_1}(x, \tilde{x}_1)$ – скалярный потенциал диполя, ассоциированного с вектором $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1)$, $\varphi_{\tilde{A}_1}(x_1, \tilde{x}_1)$ – постоянная функция, равная значению потенциала в точке x_1.

Для сокращения мы далее переобозначим $(\varphi_{\tilde{A}_1}(x, \tilde{x}_1) - \varphi_{\tilde{A}_1}(x_1, \tilde{x}_1)$ через $\tilde{\varphi}(x, x_1, \tilde{x}_1)$. Обозначим через $\gamma(x, x_1, \tilde{x}_1)$ такую функцию, что вектор $\Gamma(x, x_1, \tilde{x}_1) - \mathrm{grad}\gamma(\mathrm{x}, \mathrm{x_1}, \mathrm{\tilde{x}_1})$ совпадает с $C(x, x_1, \tilde{x}_1)$.

Пусть точки x_2, $\tilde{x}_2$ – фиксированы. Рассмотрим два малых параметра ε, δ, связанных между собой соотношением $0 < \varepsilon << \delta << 1$. Рассмотрим вспомогательное выражение

$$\mu^{\varepsilon,\delta}(x_2, \tilde{x}_2) = \int (\Gamma(x, x_1, \tilde{x}_1), \psi_2(x, x_2) \times \tilde{\psi}_2(x, \tilde{x}_2)) dx dx_1 d\tilde{x}_1,$$

где интегрирование ведется по области $dist(x,x_1) > \delta$, $dist(x,\tilde{x}_1) > \delta$, $dist(x_1,\tilde{x}_1) > \varepsilon$ и, кроме того, вне ε-окрестности полюсов x_2, $\tilde{x}_2$ векторов ψ_2, $\tilde{\psi}_2$. В повторном пределе $\lim_{\delta\to 0}(\lim_{\varepsilon\to 0}\mu^{\delta,\varepsilon})$ получится выражение $[m_{x_1,\tilde{x}_1}\mu](x_2,\tilde{x}_2)$. С другой стороны, само допредельное выражение $\mu^{\varepsilon,\delta}$ является абсолютно сходящимся и можно перейти к повторному интегралу, сначала по $x_1,\tilde{x}_1$, затем по x. В результате во внешнем пределе $\delta\to 0$ интеграл сходится к значению $\int([m_{x_1,\tilde{x}_1}C](x),\psi_2(x,x_2)\times\tilde{\psi}_2(x,\tilde{x}_2)d\mathbf{R}^3\setminus\{x_2,\tilde{x}_2\}$, где интегрирование ведется по x.

Теперь достаточно показать, что $[m_{x_1,\tilde{x}_1}]C(x)=0$. Это вычисление можно проводить отдельно для Γ и $\mathrm{grad}\gamma$. Следует доказывать, что значение $div(\Gamma(x,x_1,\tilde{x}_1)$ (с учетом значения дивергенции в полюсах) сходится в смысле главного значения к нулевой функции. Поясним это вычисление.

Вклад среднего значения $[m_{x_1,\tilde{x}_1}div\Gamma](x)$ составляет $([m_{x_1}\mathrm{grad}\varphi_{\mathrm{f}}](\mathrm{x}),[\mathrm{m}_{\tilde{\mathrm{x}}_1}\mathrm{grad}\varphi_{\tilde{\mathrm{A}}_1}](\mathrm{x}))=\frac{2}{3}(\mathrm{gradf}(\mathrm{x}),\tilde{\mathrm{A}}_1(\mathrm{x})))$. Вклад дивергенции в особенностях x_1 составляет $\frac{1}{9}(\mathrm{gradf}(\mathrm{x}),\tilde{\mathrm{A}}_1(\mathrm{x}))$. Наконец, вклад дивергенции в особенностях $\tilde{x}_1$ составляет $-\frac{1}{3}(\mathrm{gradf}(\mathrm{x}),\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{x}))$. Проделанные вычисления доказывают, что $[m_{x_1,\tilde{x}_1}\gamma](x)=0$. Инвариантность интеграла M доказана.

3.6 Замечание

Для произвольных потенциалов $A(x)$ и $\tilde{A}(x)$ и семейства дипольных полей $\psi(x,x_1)$, $\tilde{\psi}(x,\tilde{x}_1)$ с ними ассоциированных, можно также определить семейство векторных полей $\Gamma(x,x_1,\tilde{x}_1)=\mathrm{grad}\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{x},\mathrm{x}_1)\varphi_{\tilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{x},\tilde{\mathrm{x}}_1)$. Однако в этом случае среднее значение дивергенции $[m_{x_1,\tilde{x}_1}\Gamma](x)$ не обращается в нуль. Поскольку векторное поле $\psi_2(x,x_2)\times\tilde{\psi}_2(x,\tilde{x}_2)$ имеет особенности порядка $O(r^{-3})$ в точках x_2, $\tilde{x}_2$, то значение выражения $H(\psi_2\times\tilde{\psi}_2,\mathrm{gradf})$, зависит от выбора f (определяется значением grad*f* в особых точках $x_1,\tilde{x}_1$. В следующем разделе мы покажем, исходя из топологических соображений, что инвариант M невырожден.

4 Топологическое доказательство невырожденности интеграла M

Пусть $(B,\tilde{B})$ – пара бездивергентных векторных полей, которая моделирует зацепление $L\cup\tilde{L}$ (см. по поводу определения [Fr]). Это означает, что выделены два полнотория U_L, $U_{\tilde{L}}$ и поля B, $\tilde{B}$ имеют в качестве носителей соответствующие полнотория. Из-за условия $div(B)=div(\tilde{B})=0$, поля характеризутся значениями потоков $\Phi,\tilde{\Phi}$ через трансверсальные сечения соответствующих полноториев.

Построение высших аналогов интеграла спиральности проводится, как правило, для случая векторных полей, моделирующих зацепление. При этом часто предполагают, что класс зацеплений для которых определен высший аналог интеграла спиральности удовлетворяет тем или иным дополнительным предположениям, т.е. зацепление, моделируемое полем, не является произвольным (см., например, [M-S], [E-B], [M-R]).

В этом разделе мы предположим, что поля B, $\tilde{B}$ моделирует зацепление Уайтхеда с единичными потоками. Это зацепление характеризуется условием

$$lk(L, \tilde{L}) = 0, \tag{6}$$

более того, обе компоненты зацепления незаузлены (рисунок см., например, в [A-M-R]).

Мы докажем, что в этом случае справедливо $M(B; \tilde{B}) \neq 0$. Наши рассуждения основаны на сравнении интегральной формулы для M с интегралом W, построенным в работе [A-R], последний является интегральным выражением для инварианта Сато-Левина (см. [S-L]), обобщенный в [K-L], [P-V], [Akh], [A-R].

Вспомогательным диффеоморфизмом пространства можно добиться того, чтобы зацепление Уайтхеда было расположено в пространстве так, что ограничение потенциала $A(x)$ на компоненте носителя поля $\tilde{B}$, и значение потенциала $\tilde{A}$ на компоненте носителя B (которые при любом расположении зацепления в пространстве совпадают с градиентом некоторой однозначной функции из-за условия (6)), оценивалось бы по значению сколь угодно малым неотрицательным числом ε. Для этого, например, можно расположить одну из компонент зацепления в виде стандартной окружности радиуса ε^{-1}, а другую компоненту расположить в окрестности бесконечности так, что расстояние между компонентами было бы не меньше ε^{-1}. Пусть $\aleph$ – регулярное слоение пространства (за исключением окрестности Q_{sing}, которую мы далее определим) на замкнутые кривые, определенное следующей конструкцией.

Пусть S_τ, $S_{\tilde{\tau}}$ – семейства поверхностей Зейферта, определенных линиями уровня многозначных (целочисленных) форм ϕ, $\tilde{\phi}$ потенциалов A, $\tilde{A}$. Каждая из поверхностей семейства имеет границу на соответствующей компоненте (которые для простоты конструкции удобно представлять себе как кривую, в окрестности которой соответствующий потенциал имеет особенность порядка $O(r^{-1})$ и регулярна при всех параметризующих значениях, за исключением их конечного числа. Рассмотрим лишь те поверхности семейства τ $(\tilde{\tau})$, которые не пересекают кривую $\tilde{L}$ (L). Пересечение поверхностей из этих подсемейств образуют рассматриваемую область Q_{reg}, а дополнение к этой области Q_{sing} представлено в виде объединения двух множеств $U \cup \tilde{U}$, в соответствии с семействами удаленных поверхностей. Слоение $\aleph$ определено также и вне области Q_{sing}, но оно уже не является регулярным, т.к. имеет особенности на компонентах носителя полей.

Вычисление интеграла M удается свести к вычислению интеграла спиральности как двукратного интеграла по регулярной области $Q_{reg} \times Q_{reg} \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ от пары бездивергентных полей без особенностей. В регулярной области поле $A \times \tilde{A}$ является бездивергентным и представляется в виде двупараметрического семейства бездивергентных векторных полей. (Удобно понимать такое семейство как конечное объединение трубок малого диаметра, заполняющих область Q_{reg}. Центральной линией каждой трубки служит слой $\aleph$.) Мы докажем, что в рассматриваемом случае можно переставить пределы интегрирования по переменным x, x' у интегрального ядра (2) и интеграла (3) по переменным $x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$.

Рассмотрим интеграл M как кратный интеграл по переменным $x, x', x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ по подобласти $Q^2_{reg} \times (R^3)^4$. Удобно в малой регулярной окрестности границы области ∂Q_{reg} семейства полей $\psi_i \times \tilde{\psi}_i$, $i = 1, 2$ заменить на поле $A \times \tilde{A}$, чтобы избежать технических трудностей, связанных с оценкой главных значений на границе области. Выберем малые положительные числа $\varepsilon_1 >> \varepsilon_2 > 0$ и аппроксимируем область $Q^2_{reg} \times (R^3)^4$ переменных интегрирования регулярной подобластью $P(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Далее мы перейдем к собственному кратному интегралу $M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, который можно преобразовать в два повторных $M1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $M2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, разбив переменные на две группы $(x, x') \in Q^2_{reg}$, $(x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in (R^3)^4$.

Мы покажем, что в пределах

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \lim_{\varepsilon_2 \to 0} M1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 3^{-4} H(A \times \tilde{A}, A \times \tilde{A}) dQ^2_{reg}, \tag{7}$$

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \lim_{\varepsilon_2 \to 0} M2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = M_{reg}(B, \tilde{B}), \tag{8}$$

причем $M(B, \tilde{B}) - M_{reg}(B, \tilde{B}) = I_1$ мы оценим далее бесконечно малой величиной, которая стремиться к 0, если расстояние между компонентами L, $\tilde{L}$ стремится к бесконечности при однопараметрическом семействе диффеоморфизмов пространства.

В формуле (8) через $H(A \times \tilde{A}, A \times \tilde{A}) dQ^2_{reg}$ обозначен интеграл спиральности от бездивергентного поля $A \times \tilde{A}$ по области Q^2_{reg}. (Замечу, что вектор $A \times \tilde{A}$ касателен к границе ∂Q_{reg}, поэтому интеграл выражает полную спиральность поля в рассматриваемой области.

Определим область $P(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ следующим образом. Условие 1: точки x, x' лежат на слоях $\aleph$, расстояние между которыми превышает ε_1. Условие 2: точки $x_1, \tilde{x}_1$ $(x_2, \tilde{x}_2)$ отстоят от точки x (x') на расстояние, превышающее ε_2. Область $P(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ определена.

Докажем равенство (7). При условии $\varepsilon_2 > 0$ можно перейти к средним по переменным $x_1, \tilde{x}_1$ в точке x и к средним по $x_2, \tilde{x}_2$ в точке x'. Тогда при $\varepsilon_2 \to 0$ значение интеграла $\lim_{x_2 \to 0} M1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ будет пропорционально интегральному среднему попарных коэффициентов зацепления слоев $\aleph$ – центральных линий трубок (где мера на пространстве слоев задана величиной потока вектора $A \times \tilde{A}$ в регулярной окрестности каждого слоя, состоящей из соседних слоев), при условии, что слои расстояние между слоями превышает ε_1. Коэффициент пропорциональности равен 3^{-4}, он определяется значением $[m_{x_1}\psi_1](x) = \frac{1}{3}A(x)$ и аналогичными выражениями. Это выражение при $\varepsilon_1 \to 0$ стремиться к правой части формулы (7). Формула (7) доказана.

Докажем равенство (8).

Нам потребуется другое эквивалентное описание области интегрирования $P_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$. Для фиксированных точек $x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ рассморим подобласть $W1_{\varepsilon_2} \subset Q^2_{reg}$, $W2_{\varepsilon_2} \subset Q^2_{reg}$, каждая из которых состоит из объединения концентрических шаров радиуса ε_2, окружающих пару точек $x_1, \tilde{x}_1$ и $x_2, \tilde{x}_2$. Рассмотрим подобласть $PW_{\varepsilon_2} \subset Q^2_{reg} \times (R^3)^4$, состоящую из таких шестерок точек $x, x', x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, для которых $x \neq W1_{\varepsilon_2}$, $x' \neq W2_{\varepsilon_2}$.

Определим также подобласть $PV_{\varepsilon_1} \subset (Q^2_{reg})^2 \times (R^3)^4$, состоящую из тех таких конфигураций точек, для которых (x, x') расположены на слоях $\aleph$, удаленных друг от друга более чем на ε_1. Область $P_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ определена как пересечение подобластей $PW_{\varepsilon_2} \cap PV_{\varepsilon_1}$.

Докажем, что если точки $x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ фиксированы, то интегральный вклад в $M2$ конфигураций точек, не лежащих в области $P_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ становится пренебрежимо мал, если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ достаточно малы.

Пусть расстояние d между точками $x_1, \tilde{x}_1$ меньше ε_2. Пользуясь соображениями подобия (см. доказательство Леммы 3.4) легко показать, что значение интеграла по объединению шаровых ε_2-окрестностей, окружающих точки $x_1, \tilde{x}_1$ растет не быстрее $O(d^{-2})$. С другой стороны, особенность имеет коразмерность 3, поэтому интегрируется абсолютно.

Произведем оценку порядка особенности, при которой два слоя $\aleph$, на к оторых лежат точки x, x' из области интегрирования совпадают. Обозначим общий слой слоения через α. Совпадение двух слоев происходит в коразмерности 2, при этом значение формы μ имеет особенность, если точки x и x' на общем слое совпадают, т.е. в коразмерности 3. Эта особенность имеет порядок $O(r^{-2})$ и интегрируется абсолютно. Пусть теперь точка x_1 лежит на α. Особенность μ, связанная с этой точкой, возникает в коразмерности 6 (обе точки x, x' совпадают с x_1) и имеет порядок $O(r^{-5})$. Эта особенность интегрируется абсолютно. При дальнейшем вырождении порядок и коразмерность особенности понижаются одинаково. Следовательно, значение повторного интеграла $M2$ по рассматриваемой области совпадает с $M_{reg}(B, \tilde{B})$ и формула (8) доказана.

Теперь рассмотрим особый случай, когда одна из точек (x, x') попадает в область Q_{sing}. Интегральный вклад таких четверок обозначим через I_1. Необходимо оценить интегральный вклад выражения I_1 в M.

Для оценки I_1 воспользуемся принципом подобия, устремив значение параметра ε к нулю. Потенциалы ϕ $\tilde{\phi}$ ограниченные на линии $\tilde{B}$, B соответственно стремяться к нулевому значению пропорционально ε^{-2}. Диаметр линий увеличивается пропорционально ε^{-1}. Поэтому, мера сингулярных поверхностей Зейферта, оцененная относительно безразмерного параметра τ уменьшается, пропорционально ε. Следовательно, толщина областей V и $\tilde{V}$ остается постоянной, а объем увеличивается пропорционально ε^{-2}.

Объем регулярной области увеличивается при этом пропорционально ε^{-3}. Оценка подынтегральных выражений для точек из регулярной и сингулярных областей одинакова. Интегральное выражение остается постоянным. Следовательно, вкладом в интеграл (7) при малом ε точек (x, x') из области Q_{sing} можно пренебречь.

Доказательство невырожденности M закончено.

Работа представляет собой конспект доклада на конференции по теории особенностей и ее приложениям, проходившей в Ливерпуле с 16 по 21 декабря 2000. Автор благодарит В.И.Арнольда, Д.Д. Соколова, К. Майера, Г. Хорнига, Е.В.Щепина, С.С.Подкорытова, С.Мелихова, Р.Михайлова за обсуждения, позволившие выявить ошибку в предварительной конструкции интеграла, опубликованной в [5]. Автор благодарит О.Я.Виро за предоставленную возможность продумать часть доказательства во время месячного визита в Университет г. Уппсала в марте 2001.

Список Литературы

1. [Arn] Arnold V.I.; The asymptotic Hopf invariant and its applications, Selecta Math. Sovietica 5 (1986), 327-345.

2. [A] Арнольд В.И.; Задачи Арнольда; Москва, Фазис (2000).

3. [A-M-R1] Ахметьев П.М., Малешич Й, Реповш Д.; Формула для обобщенного инварианта Сато-Левина, Мат. Сборник N1 (2001) 1-10.

4. [A-M-R] Ахметьев П.М., Малешич Й, Реповш Д.; Об инвариантах Милнора длины 3 для полуограничивающих зацеплений. Математические Заметки, в печити (2001).

5. [Ахм] Ахметьев П.М.; О высшем аналоге коэффициента зацепления пары бездивергентных векторных полей. Труды Научных Семинаров ПОМИ (2000) N6.

6. [A-Re] Ахметьев П.М., Реповш Д.; Обобщенный инвариант Сато-Левина.

Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, (1998), т.221, 69-80.

7. [Akh] Akhmet'ev P. M.; On a Higher Analog of the Linkig Number of Two Curves. Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 185 (1998) 113-127.

8. [A-R] Akhmet'ev P.M., Ruzmaikin A.; A forth-order invariant for magnetic and vortex lines, J. Geom. Phys., 15 (1995), 95-101.

9. [E-B] Evans N.W. and Berger M.A.; A hierarchy of linking integrals. H.K.Moffatt at al. (eds.), Topological Aspect of the Dynamics of Fluids and Plasmas, 237-248 (1992) Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.

10. [Fr] Freedman M.; A note on topology and magnetic energy in noncompressible perfectly conducting fluids, J. Fluid Mech. 194 (1988) 549-551.

11. [F-C] Frick P., Sokoloff D., Cascade and dynamo action in shell model of magnetohydrodynamic turbulence. Physical Review E. Vol 57, N 4 (1998)

12. [K-L] Kirk P. and C. Livingston, Vassil'ev invariants of two component links and the Casson-Walker invariant, Topology 36 (1997) 1333-1353.

13. [M-S] Monastyrskii M.U. and Sasorov P.V.; Topological invariants in magnetic hydrodynamics, Sov.Phys.JETP 93 (1987) 1210-1220.

14. [M] Моффат Г.К. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде, пер. Москва, Мир, (1980).

15. [M-R] Moffatt H.K. and Ricca R. Helicity and the Calugareanu invariant, Topological Aspects of Dynamics of Fluids and Plasma, H.K.Moffatt at al.

(eds.), Kluwer, Dordrecht, the Netherlands, (1992), 257-270.

16. [P-V] Polyak M. and Viro O., Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants, Internat. Math. Res. Notices (1994) N 11, 8pp. (electronic).