Об асимптотических высших аналогах инварианта спиральности в МГД.

П.М.Ахметьев

21 января 2010

Аннотация

Положительно решена одна проблема В.И.Арнольда о высшем асимптотическом инварианте Хопфа бездивергентного векторного поля. Определен новый асимптотический инвариант магнитного поля: квадратичная (2–мономиальная) и q–мономиальная спиральность. Построен высший асимптотический инвариант магнитного поля, не выражающийся через коэффициент зацепления. Предложено определение асимптотического инварианта классических зацеплений и построены примеры асимптотических инвариантов двух– и трех– компонентных зацеплений. Обсуждаются различные задачи, которые решаются при помощи инварианта магнитной спиральности и могут уточняться при помощи высших аналогов инварианта магнитной спиральности.

Ключевые слова: магнитная спиральность, асимптотический инвариант Хопфа, интеграл Гаусса, инвариант зацепления.

Коды MSC: 35Qxx, 57Mxx, 76Fxx.

1 Введение

В.И.Арнольд сформулировал следующую проблему ([Arn], проблема 1984-12). "Перенести асимптотическое эргодическое определение инварианта Хопфа бездивергентного векторного поля на теорию Новикова, обобщающую умножение Уайтхеда в гомотопических группах".

В работе получены результаты, подтверждающие существование асимптотического высшего инварианта Хопфа, при помощи обобщения интегральных выражений для инвариантов Масси (в старших размерностях интегралы Масси определяют обобщенные умножения Уайтхеда). Мы рассматриваем трехмерный случай, наиболее важный для приложений.

Бездивергентные векторные поля будут называться магнитными полями. Легко понять, что не любой инвариант конечного порядка классического зацепления является асимптотическим и порождает закон сохранения вмороженного магнитного поля. Асимптотический инвариант должен выдерживать предельный переход специального вида (см. раздел 4). Мы строим бесконечное семейство асимптотических инвариантов: полиномиальные спиральности. Далее строится высший асимптотический инвариант M, который не выражается через (асимптотические) коэффициенты зацепления компонент зацепления.

Эргодическое определение высшего асимптотического инварианта не рассматривается. Все высшие асимптотические инварианты, построенные в работе, являются многозначными. Для полей, все силовые линии которых являются замкнутыми (такие поля важны для приложений, т.к. связаны напрямую с понятием магнитной трубки (см. [P-F])), построенные высшие асимптотические инварианты оказываются однозначными. Нельзя исключить, что высшие асимптотические инварианты однозначны, во всяком случае, для магнитных полей "общего положения". Начнем издалека, а именно, с обсуждения возможных физических приложений.

Рассмотрим систему уравнений МГД

$$\frac{\partial(w)}{\partial t} = \mathrm{rot}(V \times w) + \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B}) - \nu \mathrm{rot}\mathrm{rot} w, \qquad (1)$$

$$w = \mathrm{rot} V; \quad \mathrm{div}(V) = 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(V \times \mathbf{B}) - \eta \mathrm{rot}\mathrm{rot}\mathbf{B}, \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0.$$

Уравнение (1) определяет эволюцию вектора ротора скорости жидкой проводящей среды в присутствии магнитного поля с учетом гидродинамической вязкости. Уравнение (2) определяет эволюцию вектора магнитного поля с учетом магнитной вязкости. Предполагается, что в начальный момент времени векторные поля $\mathbf{B}$, w имеют конечный носитель. Из системы (1),(2), очевидно, вытекает, что и при всех $t > 0$ решения $\mathbf{B}(t)$, $w(t)$ имеют конечный носитель.

Уравнение (1) записано в форме Коши-Гельмгольца, которая удобна для топологических приложений. В условии отсутствия магнитного поля (или в условиях малого магнитного поля) при нулевой гидродинамической вязкости ν векторное поле w является вмороженным (медленно изменяется по времени во внутренних координатах среды со скоростью, пропорциональной $\mathbf{B}^2$), что влечет законы сохранения (высших) топологических инвариантов, построенных для траекторий этого поля. При достаточно большом $\mathbf{B}$ даже при $\nu = 0$ векторное поле w не является вмороженным и изменяется во внутренних координатах среды под действием сил Лоренца, причем вектор частной производной $\frac{\partial V}{\partial t}$ (вектор V служит вектор-потенциалом векторного поля w) направлен перпендикулярно магнитному полю. При $\nu = 0$, $\eta = 0$ (этот случай носит название идеальной МГД) из условия вмороженности поля w из начальных условий вытекает, векторное поле скорости V имеет асимптотику $V \sim r^{-2}$.

Уравнение (2) выявляет аналогию закона эволюции векторов w и $\mathbf{B}$. В условиях отсутствия магнитной вязкости η векторное поле $\mathbf{B}$ является вмороженным, что также влечет законы сохранения (высших) топологических инвариантов, построенным по траекториям этого векторного поля. Основной топологический инвариант, определяющий закон сохранения системы уравнений в идеальной МГД, связан со средним коэффициентом зацепления пар силовых линий магнитного поля. Этот инвариант называется магнитной спиральностью (см. [A-Kh], гл.3) и также асимптотическим инвариантом Хопфа. Асимптотический инвариант для инварианта магнитной спиральности связан с интегральным выражением коэффициента зацепления двух замкнутых кривых, который был открыт К.Ф.Гауссом.

Основной задачей, основанной на применении интеграла магнитной спиральности, является задача Зельдовича-Сахарова об оценке магнитной энергии через (высшие) топологические инварианты магнитного поля. Основным инструментом исследования в этой задаче служит неравенство Арнольда ([A-Kh], гл.3, раздел 1.3, Теорема 1.5).

Решения системы уравнений МГД в отсутствии магнитной диссипации доставляются колебаниями вблизи положений магнитостатического равновесия, в котором магнитная энергия минимизируется ([T]).

Наличие даже слабой магнитной вязкости приводит к разрушению всех высших топологических инвариантов, за исключением инварианта магнитной спиральности, который полностью характеризует состояние магнитостатического равновесия данной системы. С другой стороны, разрушение высших топологических инвариантов напрямую связано с процессом пересоединения силовых линий (см. [K]).

Построение асимптотических инвариантов магнитного поля, в том числе, теорема Арнольда об асимптотическом гауссовском коэффициенте зацепления является мостиком, связывающим теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с (глобальной) топологией. Для двумерных задач в указанном контексте подобной связи не возникает, в частности, корэффициент зацепления двух плоских непересекающихся кривых равен нулю. В случае, когда размерность пространства больше 3, алгебраический аспект задачи изучения топологических инвариантов зацеплений сильно отличается от случая размерности 3. Самый сложный случай размерности 3 представляет наибольший интерес для приложений.

Многие прикладные задачи, решаемые при помощи инварианта спиральности, могут быть более детально изучены при помощи других более тонких асимптотических топологических инвариантов. Точные решения уравнений МГД очень сложны. При переходе от точных решений к приближенным в теории турбулентности используются случайные магнитные (гидродинамические) поля. При этом оказываются полезными приближенные спектральные формулы для закона сохранения, в то время как явная формула самого закона сохранения может быть неизвестна. Произвольный асимптотический топологический инвариант, определяющий закон сохранения, порождает функционал на спектре решений системы уравнений МГД, который сохраняется и для случайного решения.

Вероятно, что не существует простых формул для высших асимптотических инвариантов магнитных полей. Гипотеза А.В.Чернавского состоит в следующем. Предположим, что некоторый первый интеграл I системы уравнений идеальной МГД, при условии, что магнитное поле представлено объединением конечного числа магнитных трубок (см. [A-Kh], гл.3, раздел 7.3) с единичными магнитными потоками, оказывается равен некоторому комбинаторному инварианту конечного порядка, вычисленному для трехмерного зацепления, которое образовано центальными линиями семейства магнитных трубок. Тогда либо инвариант I алгебраически выражается через магнитную спиральность, либо не выражается конечнократным несобственным интегралом от полей $\mathbf{B}$ и V и частных производных этих полей любого конечного порядка. Частичные результаты в направлении положительного решения гипотезы Чернавского были получены С.С.Подкорытовым (2004, устное сообщение).

Еще один интересный результат о невозможности получить простую формулу для высших топологических инвариантов траекторий бездивергентных векторных полей был получен Е.А.Кудрявцевой, см. [Kudr]. Результ Кудрявцевой препятствует построению однозначного высшиего топологического инварианта бездивергентных полей без предположения о том, что справедлива гипотеза о возвращении из раздела 4 (гипотеза не позволяет предположить, что выполняются условия общего положения). Вопрос об эргодичности построенных инвариантов не исследован.

В разделе 2 вспомним две задачи, которые связаны с изучением свойств турбулентного магнитного поля при помощи интеграла спиральности. Первая задача, которую мне объяснил проф. Д.Д.Соколов, связана с верхней оценкой спектра турбулентного магнитного поля. Смысл этой задачи в следующем: магнитная энергия случайных вихрей с течением времени диссипирует по спектру из области собственных частот с малыми волновыми числами (крупномасштабных) в область собственных частот с большими волновыми числами (мелкомасштабных). Геометрически этот процесс можно, как и в случае аналогичной гидродинамической задачи [F], представлять себе как возникновение фрактального каскада вихрей, все более мелких размеров. Процесс фрактализации не происходит до бесконечности, но лишь до определенного порогового значения, который в первом приближении характеризуется значением гидродинамической энергии в начальный момент времени и инвариантом магнитной спиральности, оба инварианта являются первыми интегралами идеальной системы (в присутствии малой диссипации эти величины являются адиабатическими инвариантами т.к. в этом случае энергия системы не сохраняется, а топология разрушается из-за пересоединения силовых линий). Более детальное исследование рассматриваемой задачи приводит к теории каскадных моделей. Для системы уравнений МГД каскадные модели пока еще недостаточно изучены. Высшие асимптотические инварианты, заданные в виде функционалов на спектре решений, доставляют в этой задаче дополнительную информацию, которая может быть использована как для оценки переноса энергии по спектру, так и для оценки моментов распределения по пространству правых и левых турбулентных вихрей.

Вторая задача из теории динамо связана с проблемой роста магнитного поля. Простейший основной результат назвается α–эффект.

Он был открыт в 60-х годах прошлого века Steenbeck, Krause, Rädler (1966). Согласно основному результату этой теории рост среднего магнитного поля в условиях модели с усреднением случайного магнитного поля по мелкомасштабным вариациям поля скорости, в целом, характеризуется средним значением попарных коэффициентов зацепления линий ротора поля скорости среды. Рост магнитного поля наблюдается, когда абсолютная величина указанного среднего коэффициента зацепления достаточно велика и не наблюдается в противном случае. Представляется возможным, что формулы для высших асимптотических инвариантов поля могут оказаться полезными в этом контексте при развитии теории. Другие задачи для применения высших аналогов асимптотического инварианта Хопфа можно найти в [R-S-T],[H-M], [Gh]. Ряд приложений высших асимптотических инвариантов спиральности связан с изучением переплетений силовых линий в магнитной трубке [P-F].

В разделе 3 строится высший топологический инвариант M, выражающий закон сохранения для магнитного поля с носителем на трех замкнутых магнитных линиях. Подчеркну, что в отличии от других высших топологических инвариантов, применявшихся в этой задаче (впервые это было сделано в [M-R], где применяются интегалы Масси), не требуется, чтобы попарные коэффициенты зацепления силовых линий принимали нулевые значения. Более того, если по крайней мере, два из трех попарных коэффициентов зацепления магнитных силовых линий обращаются в нуль, то и инвариант M обращается в нуль. Тем не менее, инвариант M не выражается через попарные коэффициенты зацепления.

Раздел 4 посвящен построению нового семейства асимптотических топологических инвариантов $\delta^q_{\mathbf{B}}$ магнитного поля, называемых инвариантами мономиальной спиральности, где натуральный параметр $2q$ называется степенью инварианта, а параметр $2q-1$ совпадает с порядком этого инварианта. В контексте топологических приложений новый инвариант существенного интереса не представляет: для ориентированного зацепления с двумя компонентами он равен q-ой степени коэффициента зацепления компонент. Для уравнений МГД построенное семейство асимптотических инвариантов представляет интерес, т.к. уже при $q = 2$ полиномиальная (квадратичная) спиральность не выражается через интеграл спиральности, как легко показать на примере поля, заключенного в два дизъюнктных зеркальных шара с ненулевой спиральностью в каждом шаре. В этом же разделе доказан основной результат, а именно, построен высший асимптотический инвариант $\mu_{\mathbf{B}}$ магнитного поля, который порождается инвариантом M, построенным в разделе 3.

Раздел 5 посвящен общим обсуждениям на пути возможных приложений высших асимптотических инвариантов магнитных полей. Приложения основаны на понятии корреляционного тензора магнитного поля. Приводится корреляционный тензор для δ^2 и μ–инвариантов, которые (при выполнении гипотезы о сходимости некоторого формального ряда, которая носит весьма общий характер), можно, в частности, рассматривать как законы сохранения системы уравнений МГД. В разделе 5 приводится необходимый алгебраический материал и дается понятие асимптотического инварианта зацеплений конечного порядка. Выясняем топологическую природу M–инварианта на основе результатов работы С.А.Мелихова [Me].

Работа докладывалась на конференциях в институте Эйлера (Ст-Петербург): 10-14 сентября 2007 и на Мемориале В.А.Рохлина 11-16 января 2010 и на конференции по нелинейным уравнениям 15-20 декабря 2009 (оз. Банное). Автор благодарен В.И.Арнольду, Б.А.Борисову, В.Н. Васильеву, О.Карпенкову, С.А.Мелихову, Л.П.Плахте, В.Б.Семикозу, Д.Д.Соколову, А.Б.Сосинскому за обсуждения.

2. Некоторые приложения интеграла спиральности в теории турбулентности

Напомним основные определения: вектор-потенциал $\mathbf{A}(x)$ магнитного поля и интеграл спиральности. Поскольку $\mathrm{div}(\mathbf{B}(x)) = 0$, существует векторное поле $\mathbf{A}(x)$, которое удовлетворяет уравнению $\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ с граничными условиями: $\mathbf{A}(r) \sim r^{-2}$, при $r \to \infty$. Это векторное поле называется вектор-потенциалом магнитного поля $\mathbf{B}(x)$. Условием $\mathrm{div}(\mathbf{A}(x)) = 0$ вектор-потенциал однозначно определен. Определен интеграл магнитной спиральности по формуле:

$$\chi(\mathbf{B}) = \int \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x)\, dx. \tag{3}$$

Пример Д.Д.Соколова: оценка спектра турбулентного магнитного поля

Пусть b_k, $0 < k < N$ – набор коэффициентов спектра энергии $E = \int \mathbf{B}^2 dx$ турбулентного магнитного поля в однородной среде. Параметр N определяет границу спектра. Предположим, что для средних значений выполнено равенство

$$\bar{b}_k = C_b^2 k^{-\alpha},$$

где $\alpha > 0$ – показатель спектра (при $\alpha < 1$ оценка эффективная). Коэффициенты спектра магнитной спиральности $\chi(\mathbf{B})$ определены равенством $b_k^\chi = C_b^2 k^{-\alpha-1}$, $0 < k < N$ (интеграл сходится). Полная энергия системы $U + E$ оценивается снизу следующим неравенством:

$$U + E > C_b^2 \int_1^N k^{-\alpha} dk \tag{4}$$

(при $\alpha < 1$ интеграл расходится). Магнитная спиральность $\chi(\mathbf{B})$ доставляет нижнюю оценку константы C_b^2:

$$|\chi(\mathbf{B})| \leq C_b^2 \int_1^N k^{-\alpha-1} = C_b^2 \alpha^{-1}.$$

Нижняя оценка константы C_b^2 определяет верхнюю оценку границы спектра N из уравнения (4).

Уравнение индукции для среднего магнитного поля, α-эффект

Предположим, что задано случайное поле скорости $V'(x,t)$ со средним значением $\bar{V}(x,t) = 0$. Представим магнитное поле $\mathbf{B}(x,t)$ в виде: $\mathbf{B}(x,t) = \bar{\mathbf{B}}(x,t) + \mathbf{B}'(x,t)$, где первое слагаемое в правой части равенства является средним магнитным полем, а второе слагаемое определяет случайные вариации магнитного поля. (Отмечу, что в отличии от теории возмущений, где предполагается, что вторичное поле много меньше первоначального, в нашем случае, напротив, $\|\mathbf{B}'(x,t)\| >> \|\bar{\mathbf{B}}(x,t)\|$.)

В работе [R] показано, что среднее магнитное поле $\bar{\mathbf{B}}$ удовлетворяет уравнению

$$-\eta_m \mathrm{rotrot}\bar{\mathbf{B}} + \alpha \mathrm{rot}\bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}(\bar{\mathbf{B}}) = 0.$$

Коэффициенты η_m, α в этом уравнении характеризуют скорость изменения среднего магнитного поля. Коэффициент η_m зависит от коэффициента диффузии и спектральных характеристик случайного поля скорости. В то время как коэффициент α не зависит от спектральных характеристик и равен значению интеграла гидродинамической спиральности

$$\alpha = \chi_w = \int (V(x), w(x)) dx.$$

3. Формула для высшего коэффициента зацепления 3 замкнутых траекторий

Пусть $\mathbf{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$– 3–компонентное зацепление в $\mathbb{R}^3$, которое мы определим как замкнутое одномерное ориентированное подмногообразие с 3 компонентами связности. Компоненты подмногообразия $\mathbf{L}$ снабжены натуральной параметризацией. Единичный касательный вектор к $\mathbf{L}$ в точке $x_i \in L_i \subset \mathbf{L}$, $i = 1, 2, 3$, обозначим через $\dot{x}_i$.

Для каждой точки $x_i \in L_i$, определим векторное поле $\mathbf{A}(x_i; x)$ с особенностью в точке x_0 по формуле:

$$\mathbf{A}(x_i; x) = \frac{\dot{x}_i \times (x - x_i)}{(x - x_i)^2}.$$

Определим векторное поле $\mathbf{A}_i(x)$ с особенностью на кривой L_i, называемое вектор-потенциалом компоненты L_i, по формуле:

$$\mathbf{A}_i(x) = \oint_{L_i} \mathbf{A}(x_i, x) dx_i, \quad x_i \in L_i. \tag{5}$$

Для каждой пары точек $x_i \in L_i$, $x_j \in L_j$, $i \neq j$, определим векторное поле $\vec{\alpha}_{i,j}(x_i, y_j; x)$ по формуле:

$$\vec{\alpha}(x_i, x_j; x) = \mathbf{A}(x_i; x) \times \mathbf{A}(x_j; x).$$

Определим векторное поле $\vec{\alpha}_{i,j}(x)$ с особенностью на кривых L_i, L_j по формуле:

$$\vec{\alpha}_{i,j}(x) = \mathbf{A}_i(x) \times \mathbf{A}_j(x) = \oint_{L_i \cup L_j} \vec{\alpha}_{i,j}(x_i, x_j; x) dx_i dx_j, \quad x_i \in L_i, x_j \in L_j. \tag{6}$$

Поле $\vec{\alpha}_{i,j}(x)$, заданное формулой 6, определяет предельный (при стремлении к нулю диаметра магнитных трубок, далее в аналогичных формулах этот предельный переход специально оговариваться не будет) потенциал $\mathbf{A}_i \times \mathbf{A}_j$ в формуле (19),[Akh] в наиболее удобной форме для вычисления. Обозначим через (i, j), $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ – коэффициент зацепления i-ой и j–ой компонент $\mathbf{L}$. Коэффициент (i, j) определяется по формуле:

$$(i, j) = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\langle \dot{x}_i, \dot{x}_j, x_i - x_j \rangle}{\|x_i - x_j\|^3} dx_i dx_j, \quad x_i \in L_i, x_j \in L_j, \tag{7}$$

который в случае двухкомпонентного зацепления обозначается через k.

Обозначим через $\varphi_{j,i} : L_i \to \mathbb{R}^1$, $i \neq j$ – многозначную функцию, определенную выбором ветви при интегрировании вектор-потенциала $\mathbf{A}_j$ по компоненте L_i. Это многозначная функция с периодом (i,j) определяется по формуле:

$$\varphi_{j,i}(x_i) = \int_{pt_i}^{x_i} \mathbf{A}_j(x_i) dx_i, \quad x_i \in L_i, \tag{8}$$

где $pt_i \in L_i$ – выбранная точка на кривой L_i. По построению $\varphi_{j,i}(pt_i) = 0$, причем это значение определено с точностью до прибавления $(i,j)k$, $k \in \mathbb{Z}$. Многозначная функция $\varphi_{j,i}$ входит в формулу (19)[Akh], эта функция определена уравнением (13)[Akh].

Многозначная функция $\varphi_{j,i}$ представляется в виде суммы стандартной многозначной функции $\varphi^0_{j,i}(pt_i)$, функции $\varphi^{var}_{j,i}$, для которой среднее значение на L_i обращается в нуль, и постоянной функции:

$$\varphi_{j,i}(x_i) = \varphi^0_{j,i}(pt_i) + \varphi^{var}_{j,i} + C'_i. \tag{9}$$

Многозначная функция $\varphi^0_{j,i}(pt_i)$ однозначно характеризуется следующими свойствами: она становится линейной на универсальной накрывающей $\tilde{L}_i$ над L_i и обращается в нуль в отмеченной точке $pt_i \in L_i$.

Определим скалярный потенциал $\phi_i : L_i \to \mathbb{R}^1$ по формулам:

$$\phi_1 = (3,1)\varphi_{2,1} - (1,2)\varphi_{3,1}, \tag{10}$$

$$\phi_2 = (1,2)\varphi_{3,2} - (2,3)\varphi_{1,2}, \tag{11}$$

$$\phi_3 = (2,3)\varphi_{1,3} - (3,3)\varphi_{3,1}. \tag{12}$$

Скалярный потенциал ϕ_i представляет собой однозначную функцию, определенную с точностью до прибавления константы. Формулы (10)–(12) совпадают с формулами (16)-(18)[Akh]. Воспользовавшись равенством (9), перепишем формулы (10), (11), (12) в виде:

$$\phi_1 = (3,1)\varphi^{var}_{2,1} - (1,2)\varphi^{var}_{3,1} + C_1, \tag{13}$$

$$\phi_2 = (1,2)\varphi^{var}_{3,2} - (2,3)\varphi^{var}_{1,2} + C_2, \tag{14}$$

$$\phi_3 = (2,3)\varphi_{1,3}^{var} - (3,3)\varphi_{2,3}^{var} + C_3. \tag{15}$$

Выбор констант C_1, C_2, C_3 в формулах (11)-(13) однозначно определяется из уравнения:

$$\int_{L_1} C_1 dx_1 = \int_{L_1} \varphi_{1,2}^{var}(\mathbf{grad}\varphi_{1,3}^{var}, \dot{x}_1) - (\mathbf{grad}\varphi_{1,2}^{var}, \dot{x}_1)\varphi_{1,3}^{var} dx_1 + \tag{16}$$

$$\frac{2}{3}\int \langle \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x)\rangle dx,$$

$$\int_{L_2} C_2 dx_2 = \int_{L_2} \varphi_{2,3}^{var}(\mathbf{grad}\varphi_{2,1}^{var}, \dot{x}_2) - \mathbf{grad}\varphi_{2,3}^{var}, \dot{x}_2)\varphi_{2,1}^{var} dx_2 + \tag{17}$$

$$\frac{2}{3}\int \langle \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x)\rangle dx,$$

$$\int_{L_3} C_3 dx_3 = \int_{L_3} \varphi_{3,1}^{var}(\mathbf{grad}\varphi_{3,2}^{var}, \dot{x}_3) - (\mathbf{grad}\varphi_{3,1}^{var}, \dot{x}_3)\varphi_{3,2}^{var} dx_3 + \tag{18}$$

$$\frac{2}{3}\int \langle \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x)\rangle dx.$$

Уравнения (16) – (18) влекут уравнение (10)[Akh], поэтому определяют допустимую калибровку потенциалов. Множитель $\frac{2}{3}$ во вторых слагаемых в правых частях указанных уравнений вытекает из того, что при суммировании этих уравнений, при котором получается уравнение (10)[Akh], соответствующее слагаемое в левой части утраивается.

Для произвольной тройки точек $x_i \in L_i, i = 1,2,3$ определим векторное поле $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3; x)$ с особенностями в точках x_1, x_2, x_3 по формуле:

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3; x) = (2,3)(3,1)\vec{\alpha}_{1,2}(x_1, x_2; x) + (3,1)(1,2)\vec{\alpha}_{2,3}(x_2, x_3; x) + \tag{19}$$

$$(1,2)(2,3)\vec{\alpha}_{3,1}(x_3, x_1; x),$$

где $\vec{\alpha}(x_i, x_j; x)$ определено по формуле (6).

Определим векторное поле $\mathbf{F}(x)$ с особенностями на компонентах зацепления $\mathbf{L}$ по формуле

$$\mathbf{F}(x) = \oint_{\mathbf{L}} \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3; x) dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (20)$$

Векторное поле, заданное уравнением (20), используется в качестве главного слагаемого в формуле (19)[Akh].

Определим действительное число W при помощи интеграла Гаусса:

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\langle \mathbf{F}(x), \mathbf{F}(y), (x-y) \rangle}{\|x-y\|^3} dx dy. \qquad (21)$$

Интеграл (21) совпадает с главным слагаемым первого слагаемого в формуле (20)[Akh] для инварианта M.

Определим векторное поле $\mathbf{A}_i^{\phi}(x)$ с особенностью на кривой L_i по формуле:

$$\mathbf{A}_i^{\phi}(x) = \oint_{L_i} \phi_i(x_i) \mathbf{A}(x_i, x) dx_i, \quad x_i \in L_i. \qquad (22)$$

Определим действительные числа $b_{1;1,2}$, $b_{1;1,3}$, $b_{2;2,3}$, $b_{2;2,1}$ $b_{3;3,1}$, $b_{3;3,2}$ следующими интегралами, в которые входят векторные поля, заданные уравнениями (5), (22):

$$b_{1;1,2} = -(2,3)^2(3,1) \int \langle \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_1^{\phi}(x) \rangle dx, \qquad (23)$$

$$b_{1;1,3} = -(2,3)^2(1,2) \int \langle \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_1^{\phi}(x) \rangle dx, \qquad (24)$$

$$b_{2;2,3} = -(3,1)^2(1,2) \int \langle \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_2^{\phi}(x) \rangle dx, \qquad (25)$$

$$b_{2;2,1} = -(3,1)^2(2,3) \int \langle \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_2^{\phi}(x) \rangle dx, \qquad (26)$$

$$b_{3;3,1} = -(1,2)^2(2,3) \int \langle \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_3^{\phi}(x) \rangle dx, \qquad (27)$$

$$b_{3;3,2} = -(1,2)^2(3,1)\int \langle \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_3^{\phi}(x)\rangle dx. \qquad (28)$$

Интегралы (23)–(28), вообще говоря, не обращаются в нуль, т.к. векторные поля $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{A}_i^{\phi}$, вообще говоря, линейно-независимы. Сумма интегралов (23)–(28) совпадает с первой частью остаточного слагаемого в первом слагаемого формулы (20)[Akh] для инварианта M.

Определим действительные числа $b_{1;2,3}$, $b_{2;3,1}$, $b_{3;1,2}$ следующими интегралами:

$$b_{1;2,3} = -(1,2)(2,3)(3,1)\int \langle \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_1^{\phi}(x)\rangle dx, \qquad (29)$$

$$b_{2;3,1} = -(1,2)(2,3)(3,1)\int \langle \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2^{\phi}(x)\rangle dx, \qquad (30)$$

$$b_{1;2,3} = -(1,2)(2,3)(3,1)\int \langle \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3^{\phi}(x)\rangle dx. \qquad (31)$$

Сумма интегралов (29)–(31) совпадает со второй частью остаточного слагаемого в первом слагаемого формулы (20)[Akh] для инварианта M.

Определим действительные числа $c_{1;1}$, $c_{2;2}$, $c_{3;3}$, $c_{1;2}$, $c_{2;3}$, $c_{3;1}$ следующими интегралами:

$$c_{1;1} = (2,3)^2 \oint \phi_1(\dot{x}_1, \mathbf{A}_1^{\phi})dx_1, \qquad (32)$$

$$c_{2;2} = (3,1)^2 \oint \phi_2(\dot{x}_2, \mathbf{A}_2^{\phi})dx_2, \qquad (33)$$

$$c_{3;3} = (3,1)^2 \oint \phi_3(\dot{x}_3, \mathbf{A}_3^{\phi})dx_3, \qquad (34)$$

$$c_{1;2} = 2(2,3)(3,1) \oint \phi_2(\dot{x}_2, \mathbf{A}_1^{\phi})dx_2, \qquad (35)$$

$$c_{2;3} = 2(3,1)(1,2) \oint \phi_3(\dot{x}_3, \mathbf{A}_2^{\phi}) dx_3, \tag{36}$$

$$c_{3;1} = 2(1,2)(2,3) \oint \phi_1(\dot{x}_1, \mathbf{A}_3^{\phi}) dx_1. \tag{37}$$

Сумма интегралов (32)–(37) совпадает с суммой трех последних остаточных слагаемых в формулы (20)[Akh] для инварианта M.

Определим действительные числа $d_{1;1}$, $d_{2;2}$, $d_{3;3}$, $d_{1;2}$, $d_{2;3}$, $d_{3;1}$ следующими интегралами:

$$d_{1;1} = -(2,3)^2 \oint \phi_1^2(\dot{x}_1, \mathbf{A}_1) dx_1, \tag{38}$$

$$d_{2;2} = -(3,1)^2 \oint \phi_2^2(\dot{x}_2, \mathbf{A}_2) dx_2, \tag{39}$$

$$d_{3;3} = -(3,1)^2 \oint \phi_3^2(\dot{x}_3, \mathbf{A}_3) dx_3, \tag{40}$$

$$d_{1;2} = (3,1)(2,3) \oint \phi_2^2(\dot{x}_2, \mathbf{A}_1) dx_2, \tag{41}$$

$$d_{2;3} = (1,2)(3,1) \oint \phi_3^2(\dot{x}_3, \mathbf{A}_2) dx_3, \tag{42}$$

$$d_{3;1} = (2,3)(1,2) \oint \phi_1^2(\dot{x}_1, \mathbf{A}_3) dx_1. \tag{43}$$

Сумма интегралов (28)–(43) совпадает с суммой первых остаточных слагаемых в формулы (20)[Akh] для инварианта M.

Формула инварианта M

Определим вещественное число $M(\mathbf{L})$ следующей суммой интегралов:

$$M = W + \sum_{i;j=1}^{3} b_{i;i,j} + \sum_{i=1}^{3}(b_{i;i+1,i+2} + c_{i;i} + c_{i,i+1} + d_{i;i} + d_{i;i+1}). \qquad (44)$$

Теорема 1. *1. Сумма слагаемых в правой части выражения* (44) *является абсолютно сходящейся.*

2. Выражение (44) *определяет не равный нулю инвариант изотопического класса зацепления* $\mathbf{L}$, *который не выражается через коэффициенты зацепления компонент.*

Доказательство Теоремы 1

Утверждение 1 следует из оценки сходимости интегралов. Проверим сходимость главного слагаемого W, заданного уравнением (21). Слагаемые в выражении W разделены на две группы. В первую группу входят слагаемое вида:

$$(2,3)^2(3,1)^2 \oint_{L_1}\oint_{L'_1}\oint_{L_2}\oint_{L'_2} \qquad (45)$$

$$\frac{\langle \mathbf{A}(x_1;x)\times\mathbf{A}(x_2;x), \mathbf{A}(x'_1;x')\times\mathbf{A}(x'_2;x'), (x-x')\rangle}{\|x-x'\|^3} dx dx' dx_1 dx'_1 dx_2 dx'_2.$$

и еще два подобных слагаемых, получающихся циклической перестановкой индексов. Во вторую группу входят слагаемое вида:

$$2(3,1)(1,2)(2,3)^2 \oint_{L_1}\oint_{L'_1}\oint_{L_2}\oint_{L_3} \qquad (46)$$

$$\frac{\langle \mathbf{A}(x_1;x)\times\mathbf{A}(x_2;x), \mathbf{A}(x'_3;x')\times\mathbf{A}(x'_1;x'), (x-x')\rangle}{\|x-x'\|^3} dx_1 dx'_1 dx_2 dx'_3.$$

и еще два подобных слагаемых, получающихся циклической перестановкой индексов.

В выражении (45) первый сомножитель $(2,3)^2(3,1)^2$ определен кратным несобственным интегралом по 8–точечному конфигурационному пространству. Абсолютная сходимость этого интеграла доказана в ниже в Теореме 3 (в данном случае сходимость очевидна). Сходимость главного второго сомножителя в выражении (45) следует из простых геометрических оценок. Формально интеграл, определяющий этот сомножитель, расходится, поскольку для его вычисления при $x_1 \to x'_1$ требуется интегрировать особенность порядка r^{-4} по пространству размерности 4. Интеграл абсолютно сходится, поскольку порядок особенности на 1 меньше, чем ее формальный порядок. Для слагаемого (46) и для аналогичных слагаемых оценка сходимости аналогична. Сходимость главного слагаемого W доказана.

Слагаемое $b_{1,1;2}$ и еще два других аналогичных слагаемых в формуле (44) задаются несобственным интегралом, имеющим формальную особенность порядка r^{-4}, которую требуется интегрировать по пространству размерности 4. Интеграл абсолютно сходится, поскольку порядок особенности на 1 меньше, чем ее формальный порядок.

Слагаемое $c_{1,1}$ и два других аналогичных слагаемых получаются в результате интегрирования особенности формального порядка r^{-2} по прямой. При этом сам интеграл особенности не имеет, т.к. порядок формальной особенности снижается при интегрировании на 2. Сходимость остальных интегральных слагаемых в формуле (45) очевидна.

Докажем утверждение 2, а именно, докажем, что выражение (44) получается следствием инвариантности интеграла (20) из [Akh]. Рассмотрим магнитное поле $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3)$, локализованное в трех магнитных трубках с единичными потоками, центральными линиями магнитных трубок служат компоненты (L_1, L_2, L_3) зацепления $\mathbf{L}$. Определен интегральный инвариант $M(\mathbf{B})$, который сохраненяется при диффеоморфизмах пространства, сохраняющих объём. Рассмотрим однопараметрическое семейство магнитных полей $\mathbf{B}(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0+$, полученное при стремлении толщены трубки к нулю. Интеграл (20) из [Akh] определен как интеграл по $\mathbb{R}^3$ и легко доказать, что определено его предельное значение

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} M(\mathbf{B}(\varepsilon)). \tag{47}$$

Интеграл, заданный формулой 122, переходит в предельный интеграл, заданный формулой 44. Поскольку интеграл $M(\mathbf{B})$ инвариантен при изотопии, сохраняющей объем, то этим свойством обладает и интеграл 44. Произвольный инвариант (ориентированных 3-компонентных) зацеплений относительно диффеоморфизмов пространства, сохраняющих объём, определяет инвариант изотопического класса зацеплений. Теорема 1 доказана.

Интересно отметить, что инвариант M является кососимметричным при зеркальной симметрии пространства. В разделе 6 на основе комбинаторных формул для полинома Конвея строится инвариант, который обозначается также через M, который удовлетворяет специальным свойствам, сформулированным в Определении 7. Выдвигается гипотеза о совпадении этих двух аналитического и комбинаторного инвариантов (подробную формулировку см. в конце раздела 6). Используя результаты работы [TGKMSV] можно пытаться получить альтернативное интегральное выражение для инварианта M, в частности, пытаться упростить остаточные слагаемые в формуле (44). Выдвигается еще одна гипотеза, согласно которой, инвариант M включен в бесконечную серию инвариантов более высокого порядка, которые являются асимптотическими инвариантами: следующий инвариант в этой серии определен для 4-компонентных ориентированных зацеплений и выражается через три первых коэффициента в полиноме Конвея (см. раздел 6).

4. Асимптотические инварианты бездивергентного поля

Мы вспомним определение В.И.Арнольда асимптотического коэфициента зацепления бездивергентного поля $\mathbf{B}$ (с компактным носителем), следуя учебнику [A-X]. Далее мы построим мономиальный коэффициент зацепления, который является нелинейным аналогом асимптотического коэффициента зацепления, и, наконец, докажем (частично) результаты о высшем асимптотическом инварианте магнитного поля.

Некоторые результаты (Теорема 3 п.2 и Основная Теорема 5 п.2) формулируются в предположении о том, что магнитное поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет условию возвращения (см. ниже). Такое предположение не слишком умаляет общности, поскольку для магнитного поля, представленного конечным числом магнитных трубок, можно считать, что указанная гипотеза выполнена. Но при условиях общего положения, в частности, при учете магнитной диссипации, когда могут наблюдаться критические точки, в которых происходит пересоединение силовых линий поля, гипотеза о возвращении уже не выполнена. Леммы 2,5,7 доказаны без каких-либо предположений о наличии магнитных трубок. Доказать, что асимптотический инвариант определяет однозначный инвариант магнитного поля без упрощающих предположений не удалось. Отметим, что предлагаемый в работе подход позволяет опустить рассуждения, связанные с анализом системы "коротких"путей, которые для высших асимптотических инвариантов при наличии критических точек магнитного поля представляются сложными (см. определение и замечания в [A-Kh], гл. III, разделы 3,4).

Определение 2. Гипотеза о возвращении Пусть $\mathbf{B}$, $\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0$ – гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^3$ с компактным носителем $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, который является гладким многообразием с краем, при условии, что на границе $\partial\Omega$ магнитное поле направлено по касательной к указанной поверхности. Пусть $\{g^t : \Omega \to \Omega\}$– фазовый поток, определенный полем $\mathbf{B}$. Скажем, что поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет условию возвращения, если для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^3$ существует такое значение $t_0 > 0$, $t_0 = t_0(x)$, что $\{g^{t_0}(x) = x$.

Из условия о возвращении вытекает, что каждая силовая линия поля $\mathbf{B}$ замкнута, при этом не требуется, чтобы отображение Пуанкаре в трансверсальном сечении каждой силовой линии являлось бы тождественным. Область Ω, вообще говоря, несвязная, представляется объединением (сколь угодно тонких) магнитных трубок.

Определим гауссов коэффициент зацепления траекторий поля $\mathbf{B}$ за время T_1, T_2, выпущенных из точек x_1, x_2 следующим образом:

$$\Lambda_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi T_1 T_2}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} \frac{\langle \int \dot{x}_1(t_1), \dot{x}_2(t_2), x_1(t_1) - x_2(t_2)\rangle}{\|x_1(t_1) - x_2(t_2)\|^3} dt_1 dt_2, \quad (48)$$

$$\Lambda_{\mathbf{B}}(x_1,x_2) = \lim_{T_1,T_2 \to +\infty} \Lambda_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2), \quad (49)$$

где $x_1(t_i) = g^{t_i}(x_i)$–траектория точки x_i, а $\dot{x}_i(t_i) = \frac{d}{dt_i} g^{t_i} x_i$ – соответствующие векторы скорости.

(Лемма 2, [A-X], стр. 158, Лемма 4.12.)

Предел $\Lambda_{\mathbf{B}}(x_1,x_2)$ существует почти всюду на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Функция $\Lambda_{\mathbf{B}}(x_1,x_2)$ абсолютно интегрируема и выполнено равенство $\int \Lambda_{\mathbf{B}}(x_1,x_2)dx_1 dx_2 = \chi_{\mathbf{B}}$, где правая часть равенства определена по формуле (3).

Интересно отметить, что интеграл спиральности имеет порядок гс^{2}см^4, а гауссов коэффициент зацепления имеет топологический порядок 1.

Приступим к определению асимптотического q–мономиального инварианта спиральности (асимптотического q–мономиального инварианта Хопфа) $\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}$. Определим гауссов коэффициент зацепления степени q $\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(T_1,T_2;x_1,x_2)$ траекторий поля $\mathbf{B}$ за времена T_1,T_2, выпущенных из точек x_1,x_2 следующим образом:

$$\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(T_1,T_2;x_1,x_2)= \tag{50}$$

$$\frac{1}{4^q\pi^q T_1^q T_2^q}\int_0^{T_1}\dots\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\dots\int_0^{T_2}\frac{\langle \dot{x}_{1,1}(t_{1,1}),\dot{x}_{2,1}(t_{2,1}),x_{1,1}(t_{1,1})-x_{2,1}(t_{2,1})\rangle}{\|x_{1,1}(t_{1,1})-x_{2,1}(t_{2,1})\|^3}\cdot\dots\cdot$$

$$\frac{\langle \dot{x}_{q,1}(t_{1,q}),\dot{x}_{q,2}(t_{2,q}),x_{1,q}(t_{1,q})-x_{2,q}(t_{2,q})\rangle}{\|x_{1,q}(t_{1,q})-x_{2,q}(t_{2,q})\|^3}dt_{1,1}\dots dt_{1,q}dt_{2,1}\dots dt_{2,q}.$$

В этом кратном интеграле можно положить $T_1=T_2$, что приводит к небольшому упрощению.

Определим асимптотический гауссов коэффициент зацепления (верхний и нижний) степени q $\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(x_1,x_2)$ траекторий поля $\mathbf{B}$, выпущенных из точек x_1,x_2 по формулам:

$$\overline{\Lambda}_{\mathbf{B}}^{(q)}(x_1,x_2)=\overline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(T_1,T_2;x_1,x_2), \tag{51}$$

$$\underline{\Lambda}_{\mathbf{B}}^{(q)}(x_1,x_2)=\underline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(T_1,T_2;x_1,x_2). \tag{52}$$

Определим асимптотический инвариант спиральности спиральности (верхний и нижний) степени q $\overline{\Lambda}_{\mathbf{B}}^{(q)}$ $\underline{\Lambda}_{\mathbf{B}}^{(q)}$ по формулам:

$$\overline{\chi}_{\mathbf{B}}^{(q)}=\overline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\int\Lambda_{\mathbf{B}}^{(k)}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2, \tag{53}$$

$$\underline{\chi}_{\mathbf{B}}^{(q)}=\underline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\int\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2. \tag{54}$$

Для сокращения обозначений и ссылок далее не будем различать верхний и нижний инварианты. Поэтому две пары предыдущих формул объединим:

$$\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(x_1,x_2)=\lim_{T_1,T_2\to+\infty}\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(T_1,T_2;x_1,x_2), \tag{55}$$

$$\chi_{\mathbf{B}}^{(q)}=\lim_{T_1,T_2\to+\infty}\int\Lambda_{\mathbf{B}}^{(q)}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2. \tag{56}$$

В исключительном случае $q = 2$ определим асимптотический инвариант квадратичной спиральности $\Lambda^{(2)}_{\mathbf{B}}$ по формуле:

$$\chi^{(2)}_{\mathbf{B}} = \overline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty} \int \overline{\Lambda}^{(2)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2. \qquad (57)$$

Нетрудно проверить, что асимптотический инвариант квадратичной спиральности имеет размерность гс^{4}см^4, а порождает его топологический инвариант: квадрат коэффициента зацепления, который имеет топологический порядок 2.

Теорема 3. *–1. Определены асимптотические интегральные инварианты* (53), (54) *диффеоморфизмов с компактным носителем пространства* $\mathbb{R}^3$, *сохраняющих объем.*

–2. В предположении о возвращении поля $\mathbf{B}$ *верхний и нижний асимптотические интегральные инварианты, определенные формулами* $(53), (54)$, *совпадают и определен асимптотический инвариант спиральности степени* q $\chi^{(q)}_{\mathbf{B}}(x_1,x_2)$ *по формуле (*56*). Более того, в формуле* (56) *сходимость по переменным* T_1, T_2 *равномерная, причем справедлива формула:*

$$\chi^{(q)}_{\mathbf{B}} = \int \Lambda^{q}_{\mathbf{B}}(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

Доказательство Теоремы 3

Проверим, что неотрицательное число $|\chi^{q}_{\mathbf{B}}|$ оценивается сверху сходящимся интегралом, который есть "временное среднее"- интегрируемой функции на компактном многообразии $\Omega^q \times \Omega^q$, на которой действует абелева группа $\{g^{t_{1,1}}\}\times\dots\times\{g^{t_{1,q}}\}\times\{g^{t_{2,1}}\}\times\dots\times\{g^{t_{2,q}}\}$.

Перепишем интеграл (56), заменив области интегрирования $[0,T_1]$ (соответственно $[0,T_2]$) по каждой переменной $t_{1,j}$, $1 \le j \le k$, (соответственно по каждой переменной $t_{2,j}$, $1 \le j \le q$), введя дополнительный параметр интегрирования $\varepsilon > 0$:

$$\Lambda^{(q)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2;\varepsilon) = \qquad (58)$$

$$\frac{1}{16^q\pi^k T_1^q T_2^q} \int_{-T_1}^{T_1} \dots \int_{-T_1}^{T_1} \int_{-T_2}^{T_2} \dots \int_{-T_2}^{T_2}$$

$$K_\varepsilon(x_{1,1},x_{2,1},\dots,x_{1,q},x_{2,q})dt_{1,1}\dots dt_{1,q}dt_{2,1}\dots dt_{2,q},$$

где интегральное ядро K_ε вычисляется по формуле:

$$K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{1,q}, x_{2,q}) = \tag{59}$$

$$\varepsilon^{-q} \int_0^\varepsilon \dots \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \dots \int_0^\varepsilon \frac{\langle \dot{x}_{1,1}(t_{1,1}), \dot{x}_{2,1}(t_{2,1}), x_{1,1}(t_{1,1}) - x_{2,1}(t_{2,1}) \rangle}{|x_{1,1}(t_{1,1}) - x_{2,1}(t_{2,1})|^3} \cdot \dots$$

$$\cdot \frac{\langle \dot{x}_{q,1}(t_{1,q}), \dot{x}_{q,2}(t_{2,q}), x_{1,q}(t_{1,q}) - x_{2,q}(t_{2,q}) \rangle}{|x_{1,q}(t_{1,q}) - x_{2,q}(t_{2,q})|^3} dt_{1,1} \dots dt_{1,q} dt_{2,1} \dots dt_{2,q}.$$

Очевидно, для произвольных T_1, T_2 при $\varepsilon \to 0+$ интеграл (58) стремится к интегралу (55) (равномерно по T_1, T_2). Разница значений допредельного и предельного интегралов обусловлена граничными условиями, когда один из параметров интегрирования принимает значения $\{-T_1, T_1\}$, $\{-T_2, T_2\}$. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ при $T_1 \to +\infty$, $T_2 \to +\infty$, почти при любых x_1, x_2 интеграл (58) стремится к интегралу (55). Интеграл (59) преобразуется в произведение интегралов по формуле:

$$K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{1,q}, x_{2,q}) = \tag{60}$$

$$\varepsilon^{-q} \prod_{j=1}^{q} \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{\langle \dot{x}_{1,j}(t_{1,j}), \dot{x}_{2,j}(t_{2,j}), x_{1,j}(t_{1,j}) - x_{2,j}(t_{2,j}) \rangle}{|x_{1,j}(t_{1,j}) - x_{2,j}(t_{2,j})|^3} dt_{1,j} dt_{2,j}.$$

Воспользуемся тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превышает среднего геометрического. Тогда

$$K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{1,q}, x_{2,q}) \le \tag{61}$$

$$\frac{1}{q\varepsilon^q} \sum_{j=1}^{q} (\int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \left| \frac{\langle \dot{x}_{1,j}(t_{1,j}), \dot{x}_{2,j}(t_{2,j}), x_{1,j}(t_{1,j}) - x_{2,j}(t_{2,j}) \rangle}{\| x_{1,j}(t_{1,j}) - x_{2,j}(t_{2,j}) \|^3} \right| dt_{1,j} dt_{2,j})^q.$$

Правую часть подынтегральной функции в каждом сомножителе выражения (61) при достаточно малом фиксированном ε оценивается величиной

$$C \ln(\rho(x_{1,j}, x_{2,j})), \tag{62}$$

где коэффициент C зависит от значений частных производных первого порядка компонет векторного поля $\mathbf{B}$, $\rho(x_{1,j}, x_{2,j})$–длина перпендикуляра, опущенного из точки $x_{1,j}$ на прямую, проходящую через точку $x_{2,j}$ с направляющим вектором $\dot{x}_{2,j}$.

Подставим неравенства (61), (62) в выражение (60). Это доставляет следующую оценку для абсолютной величины интегрального ядра (59) интеграла (58):

$$K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{1,q}, x_{2,q}) \le \frac{C^q}{\varepsilon^q q} \ln^q(\rho(x_1, x_2).$$

Поскольку интеграл

$$\int \ln^q(\rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

сходится по компактной подобласти в $\mathbb{R}^3(x_1) \times \mathbb{R}^3(x_2)$ при произвольном q, то при некотором конечном ε интеграл (56) оценивается сверху по абсолютной величине. Интеграл (58) приближает интеграл (56) равномерно по ε при произвольных T_1, T_2. Этим доказано, что интеграл (56) абсолютно сходится.

Докажем, что $\chi^{(q)}_{\mathbf{B}}$ является инвариантом векторного поля $\mathbf{B}$ при диффеоморфизмах $\mathbb{R}^3$ с компактным ностиелем, сохраняющих объем. Для простоты обозначений предположим, что $k = 2$, общий случай полностью аналогичен. Пусть $D(s) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $s \in [0, s_0]$ – однопараметрическое гладкое семейство диффеоморфизмов, сохраняющих объем (вообще говоря, не являющееся инвариантным на области Ω), которое переводит тождественное преобразование $Id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в заданный диффеоморфизм $D(s_0)$ (существование такого семейства диффеоморфизмов следует из теоремы А.И.Шнирельмана ([A-X], раздел 7, гл. IV). При каждом значении параметра s рассмотрим функцию от переменной T

$$\chi^{(q)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}(T, s) = \int \Lambda^{(q)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}(T; x_1, x_2) dx_1 dx_2, \tag{63}$$

где интегрирование проводится по области $D(s)(\Omega) \times D(s)(\Omega)$. Из полученных выше оценок сразу вытекает, что функция $\chi^{(q)}_{\mathbf{B}}(T)$ ограничена снизу и сверху на всей своей области определения $(0, +\infty)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Функция*

$$\frac{d}{ds} \int \Lambda^{(q)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}(T_1 = T, T_2 = T; x_1, x_2) dx_1 dx_2 dt_2 \tag{64}$$

при $T \to +\infty$ мажорируется функцией CT^{-1} для подходящего значения константы $0 < C$, которая зависит лишь от значений частных производных $\frac{dD}{ds}$.

Доказательство Леммы 4

Для простоты обозначений рассмотрим случай $q = 2$, общий случай совершенно аналогичен. Из стандартных вычислений (см., например, [Mo])

$$\frac{d}{ds}\int \Lambda^{(2)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2dt_1dt_2 = \tag{65}$$

$$\frac{1}{16\pi^2 T_1^2 T_2^2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}$$

$$\frac{\langle \dot{x}_1(t_1,t),\dot{x}_2(t_2,t),x_1(t_1,t)-x_2(t_2,t)\rangle\psi}{|x_1(t_1,t)-x_2(t_2,t)|^3}\quad dx_1dx_2dt_1dt_2,$$

где ψ–ограниченная функция, $|\psi| < C$, зависящая от вектора скорости $\frac{D(s)}{ds}$ выбранного семейства $D(s)$. Отсюда каждого s правая часть выражения (65) оценивается, при $T_1 = T_2 = T \to +\infty$ для подходящего C интегралом

$$\frac{1}{16\pi^2 T^4}\int_0^T\int_0^T C\,|\chi_{\mathbf{B}}|\,dt_1dt_2,$$

который, очевидно, имеет порядок малости T^{-1} при каждом $s \in [0, s_0]$. Лемма 4 доказана.

Из доказанного вытекает, что

$$\frac{d}{ds}\overline{\chi}^{(2)}_{\mathbf{B}} = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\underline{\chi}^{(2)}_{\mathbf{B}} = 0.$$

При условии возвращения область интегрирования Ω представлена системой магнитных трубок и несобственный интеграл (56) по переменным x_1, x_2 сходится равномерно при $T \to \infty$. В результате переходу к пределу получим, что при каждом $s \in [0, s_0]$

$$\frac{d}{ds}\chi^{(2)}_{D(s)_*(\mathbf{B})} = 0.$$

Откуда интегрированием по s получается, что $\chi^{(q)}$ является инвариантом диффеоморфизмов, сохраняющих объем. Теорема 3 доказана.

Замечание

Очевидно, что построенный в Теореме 3 асимптотический мономиальный инвариант можно обобщить и рассматривать асимптотический инвариант, построенный по набору из r, $r \geq 2$ силовых линий при помощи произвольного однородного полимонома от попарных коэффициентов зацепления этих линий.

Теперь переходим к формулировке основной Теоремы.

Теорема 5.

–1. При условии о возвращении определен высший асимптотический инвариант $\mu_{\mathbf{B}}$ *диффеоморфизмов с компактным носителем, сохраняющих объем, построенный как асимптотический предел интегралов в формуле* (44) *по всевозможным тройкам траекторий поля* $\mathbf{B}$.

–2. В общем случае высший определен верхний $\overline{\mu}_{\mathbf{B}}$ *и нижний* $\underline{\mu}_{\mathbf{B}}$ *асимптотический инвариант диффеоморфизмов с компактным носителем, сохраняющих объем.*

Замечание

Размерность инварианта $\mu_{\mathbf{B}}$ равна гс^{12}см^{6}.

Приступим к доказательству Теоремы 5. Нам потребуется перенести определение инварианта M, заданное формулой (44), со случая 3-компонентного зацепления на случай незамкнутого зацепления, определенного тремя интегральными траекториями за время T. Далее вычисляем среднее значение $M(x_1, x_2, x_3; T)$ по пространственным координатам. Определяем $\mu_{\mathbf{B}}$ переходя к асимптотическому пределу при $T \to +\infty$.

Определение инварианта $\mu_{\mathbf{B}}$

Определим главное слагаемое W. Рассмотрим тройку траекторий поля $\mathbf{B}$ за времена T_1, T_2, T_3 (для простоты положим $T_1 = T_2 = T_3 = T$), выпущенных из точек x_1, x_2, x_3. Обозначим несобственный интеграл

$$\int \frac{\langle \vec{\alpha}_{1,2}(\dot{x}_1(t_1), \dot{x}_2(t_2); y), \vec{\alpha}_{3,1}(\dot{x}_3(t_3), \dot{x'}_1(t'_1); z), y - z \rangle}{\|y - z\|^3} dydz \qquad (66)$$

через $a_{1,1,2,3}(x_1(t_1), x_1'(t_1'), x_2(t_2), x_3(t_3))$. Аналогично определим $a_{2,2,3,1}(x_2(t_2), x_2'(t_2'), x_3(t_3), x_1(t_1))$, $a_{3,3,1,2}(x_3(t_3), x_3'(t_3'), x_1(t_1), x_2(t_2))$. Определим W следующим уравнением, которое аналогично уравнению (48):

$$W_{\mathbf{B}}(T; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{T^{12}} \Lambda^2_{\mathbf{B}}(T; x_1, x_2) \Lambda^2_{\mathbf{B}}(T; x_2, x_3) \Lambda^2_{\mathbf{B}}(T; x_3, x_1) \tag{67}$$

$$[\int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T a_{1,1,2,3}(x_1, x_1', x_2, x_3) dt_1 dt_1' dt_2 dt_3 +$$

$$\int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T a_{2,2,3,1}(x_2, x_2', x_3, x_1) dt_2 dt_2' dt_3 dt_1 +$$

$$\int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T a_{3,3,1,2}(x_3, x_3', x_1, x_2) dt_3 dt_3' dt_1 dt_2].$$

Интеграл (67) определен как сумма трех интегралов, каждый из которых является несобственным интегралом, определенным по конфигурационному пространству 16 точек. Для вычисления сомножителя в первом интегральном слагаемом

$$\int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T a_{1,1,2,3}(x_1, x_1', x_2, x_3) dt_1 dt_1' dt_2 dt_3$$

требуется интегрировать по конфигурационному пространству 4 точек, две из которых x_1, x_1' расположены на первой интегральной траектории поля $\mathbf{B}$ длины T (компонента L_1), точка x_2 расположена на второй интегральной траектории (компонента L_2), точка x_3 расположена на третьей интегральной траектории (компонента L_3). Для вычисления каждого сомножителя $\Lambda^2_{\mathbf{B}}(T; x_1, x_2)$, $\Lambda^2_{\mathbf{B}}(T; x_2, x_3)$, $\Lambda^2_{\mathbf{B}}(T; x_3, x_1)$ требуется интегрировать по конфигурационному пространству 4 точек, как это было определено в Теореме 3. Интегралы заданы формулой (48).

По аналогии с уравнением (49) определим:

$$W_{\mathbf{B}}(x_1, x_2, x_3) = T^{-12} \lim_{T \to +\infty} W_{\mathbf{B}}(T; x_1, x_2, x_3), \tag{68}$$

где $x_1(t_i) = g^{t_i}(x_i)$–траектория точки x_i, а $\dot{x}_i(t_i) = \frac{d}{dt_i} g^{t_i} x_i$ – соответствующие векторы скорости. Легко проверить, что если $\mathbf{L}$–трехкомпонентное зацепление с векторным полем, заданным натуральной параметризацией вдоль каждой компоненты, то асимптотические предел выражения (68) существует и равен старшему интегральному слагаемому W в формуле (44).

Для оценки оставшихся интегральных слагаемых требуется построить функции (9) и функции (10), (11), (12) без предположения о замкнутости интегральных траекторий. Построение аналогично и опускается. Аналогично определяются все слагаемые, входящие в уравнение 44 без предположения о том, что интегральные траектории поля замкнуты. Таким образом, прямое обобщение формулы (44) доставляет значение $M(x_1, x_2, x_3; T)$, и определены верхний асимптотический инвариант магнитного поля $\mathbf{B}$

$$\overline{\mu}_{\mathbf{B}} = \overline{\lim}_{T\to+\infty} T^{-12} \int\int\int M(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (69)$$

и нижний асимптотический инвариант магнитного поля $\mathbf{B}$

$$\underline{\mu}_{\mathbf{B}} = \underline{\lim}_{T\to+\infty} T^{-12} \int\int\int M(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (70)$$

Для доказательства Теоремы 5 нам потребуется оценка роста главного и остаточных слагаемых в интеграле (44) при переходе к асимптотическому пределам (69), (70).

Для оценки функции $\varphi_{2,1}$, заданной на интегральной траектории L_1 поля уравнением (9), определим семейство векторных полей $n(x_2, x_1)$, где точка $x_2 \in L_2$ фиксирована и параметризует поле семейства, а $x_1 \in L_1$– произвольна. Обозначим скалярное произведение

$$(\mathbf{A}(x_1; x), \dot{x}), \quad x \in L_2 \qquad (71)$$

через $n(x_1, x), x \in L_2$. Аналогично определим $n(x_2, x), x \in L_1$, $n(x_2, x), x \in L_3$, $n(x_3, x), x \in L_2$ $n(x_3, x), x \in L_1$, $n(x_1, x), x \in L_3$. Справедливо равенство:

$$\int_{x=pt_1}^{x=x_1} \int_{L_2} n(x_2, x) dx_2 dx = \varphi_{2,1}.$$

Выписанная формула означает, что векторное поле градиента функции $\varphi_{2,1}$ на L_1 определён с точностью до константы интегралом (который затем преобразуется в интегральное среднее в асимптотическом пределе $T \to +\infty$) семейства векторных полей $n(x_2, x)$ в точках $x \in L_1$. Аналогичные формулы справедливы для функций $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{1,3}$, $\varphi_{3,1}$, $\varphi_{2,3}$, $\varphi_{3,2}$.

Обозначим несобственный интеграл

$$\int \langle \mathbf{A}(x_1; x), \mathbf{A}(x_2; x), \mathbf{A}(x_3; x) \rangle dx \qquad (72)$$

через $m(x_1, x_2, x_3)$.

Лемма 6. *Существуют числа $C > 0$, и $\varepsilon > 0$, зависящие лишь от абсолютных величины поля* $\mathbf{B}$ *и абсолютной величины первых частных производных поля* $\mathbf{B}$, *такие, что:*

– *интеграл*

$$a_{1,1,2,3,\varepsilon} = \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon a_{1,1,2,3}(x_1(t_1'), x_1'(t'1), x_2(t_2), x_3(t_3))dt_1 dt_1' dt_2 dt_3 \quad (73)$$

оценивается по абсолютной величине выражением $(C\ln(r^{-1}_{1,2;1',3}))$. Здесь $x_1 = x_1(0), x_1' = x_1'(0) \in L_1$, $x_2 = x_2(0) \in L_2$, $x_3 = x_3(0) \in L_3$, через $r_{1,2;1',3}$ обозначен минимум двух длинн перпендикуляров, первый из которых опущен из точки x_1 на прямую, проходящую через точку x_2 с направляющим вектором $\dot{x}_2$, второй из которых опущен из точки x_1' на прямую, проходящую через точку x_3 с направляющим вектором $\dot{x}_3$. Аналогичные оценки справедливы для интегралов $a_{2,2,3,1}(x_2(t_2), x_2'(t_2'), x_3(t_3), x_1(t_1))$, $a_{3,3,1,2}(x_3(t_3), x_3'(t_3'), x_1(t_1), x_2(t_2))$.

– *интеграл*

$$m_{1,2,3;\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon m(x_1(t_1), x_2(t_2), x_3(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (74)$$

оценивается по абсолютной величине выражением $C\ln(r^{-1}_{1,2,3})$. Здесь $r_{1,2,3}$–минимум из трёх перпентикуляров, первый из которых опущен из точки x_1 на прямую, проходящую через точку x_2 с направляющим вектором $\dot{x}_2$, два оставшихся определяются аналогично при циклической перестановке индексов.

– *интегал*

$$n_{i,j;\varepsilon} = \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon n_{x_i(t_i),x_j(t_j)} dt_i dt_j \quad (75)$$

оценивается по абсолютной величине выражением $C\ln(r^{-1}_{x_i,x_j})$, где r_{x_i,x_j}–длинна перпендикуляра, опущенного из точки x_i на прямую, проходящую через точку x_j с направляющим вектором $\dot{x}_j$.

Доказательство Леммы 6

Оценим особенности подынтегральной функции в (66). При $\mathrm{dist}(x_1, x_2) \to 0$ и при $\mathrm{dist}(x_1', x_3) \to 0$ векторные поля $\vec{\alpha}_{1,2}$, $\vec{\alpha}_{1,3}$ имеют особенности порядка $\mathrm{dist}(x_1, x_2)^{-3}$, $\mathrm{dist}(x_1', x_3)^{-3}$. Поэтому, если $\mathrm{dist}(x_1, x_1')$, $\mathrm{dist}(x_2, x_3)$ превышают ε, то подынтегральное выражение итнтеграла (66) имеет две особенности порядков $\mathrm{dist}(x_1, x_2)^{-3}$, $\mathrm{dist}(x_1', x_3)^{-3}$ в коразмерности 3. Первая оценка доказана.

При переходе к интегралу (73), рассуждая как в (62), заключаем, что подынтегральное выражение имеет пару особенностей порядков $\mathrm{dist}(x_1, x_2)^{-2}$, $\mathrm{dist}(x'_1, x_3)^{-2}$. При перемене порядка в (73) интегрирование по внешней переменной выполняется по $\mathbb{R}^3$, поэтому интеграл абсолютно сходится. Если $\mathrm{dist}(x_2, x_3) \to 0$, то значение этого интеграла оценивается сверху величиной порядка $\ln(r^{-1}_{x_2,x_3})$. Оценка интегралов (74), (75) аналогична (и проще). Лемма 6 доказана.

Доказательство Теоремы 5

Первая часть теоремы является прямым следствием Теоремы 1. Вторая часть теоремы, где утверждается существование конечных пределов в выражениях (69), (70) доказывается по аналогии с первой частью Теоремы 3. Для оценки сходисмости используется Лемма 6. Инвариантность $\overline{\mu}_{\mathbf{B}}$ и $\underline{\mu}_{\mathbf{B}}$ при диффеоморфизмах с компактным носителем, сохраняющих объем, доказывается по аналогии с первой частью Теоремы 3. Теорема 5 доказана.

5. Корреляционный тензор μ–инварианта, закон сохранения и другие топологические обсуждения

Для приложений важны приближенные выражения высших топологических инвариантов, которые можно приближенно вычислять и точно оценивать по корреляционным тензорам. Вопрос о том, насколько корреляционный тензор является хорошим приближением соответствующего топологического инварианта сложен и не является предметом анализа данной работы.

Корреляционный тензор $\tilde{\delta}(\mathbf{B})$

С асимптотическим инвариантом $\chi^{(2)}_{\mathbf{B}}$, построенным в Теореме 3, ассоциирован корреляционный тензор

$$\delta(\mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{B}^2(x_1)\mathbf{B}^2(x_2)(< \vec{e}_1(x_1), \vec{e}_2(x_2), x_1 - x_2 >)^2}{\|x_1 - x_2\|^6} dx_1 dx_2.$$

Размерность корреляционного тензора $\delta(\mathbf{B})$ равна гс^{4}см^2. Справедливо равенство:

$$\chi^{(2)}_{\mathbf{B}} \leq \delta(\mathbf{B}).$$

Итак, значение $\delta(\mathbf{B})$ легко вычисляется и служит верхней оценкой для инварианта квадратичной спиральности $\chi^{(2)}_{\mathbf{B}}$.

Корреляционный тензор W_3

С асимптотическим инвариантом $\mu_{\mathbf{B}}$ (см. Гипотезу 5) ассоциирован корреляционный тензор W_3:

$$\int_{x_1,x_2,x_3} \mathbf{B}^4(x_1)\mathbf{B}^4(x_2)\mathbf{B}^4(x_3)\gamma(x_1,x_2)\gamma^2(x_2,x_3)\gamma(x_3,x_1)\Gamma(x_1,x_1,x_2,x_3)$$

где $\gamma(x_i,x_{i+1}) = \frac{\langle \vec{e}_i(x_i), \vec{e}_{i+1}(x_{i+1}), x_i - x_{i+1}\rangle}{\|x_i - x_{i+1}\|^3}$, а $\Gamma(x_1,x_1',x_2,x_3)$ – интеграл Гаусса для пары полей $\frac{\mathbf{A}_1(x_1,y)\times\mathbf{A}_2(x_2,y)}{|\mathbf{B}_1(x_1)||\mathbf{B}_2(x_2)|}$, $\quad \frac{\mathbf{A}_1(x_1,z)\times\mathbf{A}_3(x_1,z)}{|\mathbf{B}_1(x_1)||\mathbf{B}_3(x_3)|}$.

Корреляционный тензор W_3 имеет размерность гс^{12}см$^{-3}$. Отрицательная размерность главного слагаемого корреляционного тензора по пространственным координатам показывает, что интеграл имеет особенность. Для вычисления спектральных коэффициентов указанного корреляционного тензора следует воспользоваться тем, что кратный интегра абсолютно сходится. Выдвигается гипотеза, согласно которой корреляционный тензор $W_3(\mathbf{B})$ является приближением инварианта $\mu_{\mathbf{B}}$ таким образом, что после перехода к случайным полям (см. [R]) значения $\mu_{\mathbf{B}}$ и $W_3(\mathbf{B})$ совпадут.

Закон сохранения

Пусть $W(\mathbf{B}(t))$–произвольный корреляционный тензор поля $\mathbf{B}(t)$. Определим полную производную $w_i(t)$ порядка i тензора W при $t \in (-T_0,+T_0)$, по формуле $w_i(t) = \frac{d^iW(\mathbf{B}(t))}{dt^i}$. Значение $w_i(t)$ вычисляется в произвольный момент времени по векторам $V(t)$, $\mathbf{B}(t)$, входящих в систему уравнений МГД.

В работе [А-К] определено однопараметрическое (по параметру t_0) семейство формальных рядов, которое определяет семейство формальных первых интегралов (по времени t) системы уравнений МГД:

$$\mathbf{W}(t,t_0) = W(t) - w_1(t)(t-t_0) + w_2(t)\frac{(t-t_0)^2}{2!} +$$

$$+ \ldots + (-1)^i w_i \frac{(t-t_0)^i}{i!} + \ldots .$$

Проф. Ю.Н.Смолин объяснил автору, что изложенный выше метод построения законов сохранения повторяет метод Лагранжа варации (бесконечного числа) постоянных.

Примеры корреляционных тензоров

Приведем примеры корреляционных тензоров, которые сами не определяют законы сохранения, но порождают (формальный) закон сохранения, описанный выше.

1. Интеграл гидродинамической спиральности в присутствии магнитного поля.

2. Интегралы магнитной и перекрестной магнитной спиральностей в присутствии гидродинамической и магнитной вязкости.

3. Корреляционный тензор $\tilde{\delta}$ асимптотической квадратичной спиральности.

4. Корреляционные тензоры $W_3, W_4, \dots$ асимптотических высших магнитных спиральностей.

В заключении отмечу, что при наличии магнитной (гидродинамической) вязкости топологические приложения, связанные с системой уравнений МГД по-прежнему возможны. Например, в работе [А-К-К] предложено топологическое объяснение формулы ([А-Х] Гл.3, раздел 7.3, замечание 7.19) для диссипации интеграла магнитной спиральности в присутствии магнитной вязкости на основе формулы Калугариану для коэффициентов верчения и скручивания (см. [А-Х], раздел 7.4). Особый интерес в этом контексте представляет комбинаторная формула (92), доказанная в следующем разделе.

6. Топологический смысл асимптотической высшей магнитной спиральности

Сформулируем понятие асимптотического инварианта зацепления.

Введем следующие понятия и обозначения. Пусть $(\mathbf{L}, \xi)$–произвольное m–компонентное оснащенное зацепление. Определим оснащенное зацепление $r(\mathbf{L}, \xi)$, $r \in \mathbb{Z}$, как m–компонентное зацепление, компоненты которого получены в результате замены соответствующей оснащенной компоненты (L_i, ξ_i) оснащенного зацепления $(\mathbf{L}, \xi)$, $i = 1, \dots m$, на компоненту $r(L_i, \xi_i)$, полученную в результате $(r, 1)$–кратной намотки вдоль L_i, т.е. компонента $r(L_i, \xi_i)$ обходит r вдоль параллели и 1–кратно вдоль меридиана границы тонкой регулярной окрестности компоненты L_i, на которой оснащение ξ_i определяет систему координатных параллелей. При $r = 0$ получается зацепление с маленькими незаузленными дизъюнктными компонентами.

Оснащение ξ индуцирует оснащение зацепления $r(\mathbf{L}, \xi)$. Оснащение $r\xi_i$ к произвольной компоненте $r(L_i, \xi_i)$ зацепления $r(\mathbf{L}, \xi)$ определено вектором внутренней нормали к границе регулярной окрестности каждой компоненты зацепления $\mathbf{L}$.

Пусть $(\mathbf{L}, \xi; L_0)$– произвольное $(m-1)$–компонентное оснащенное зацепление с одной выделенной компонентой $L_0 \subset \mathbf{L}$. Определим m–компонентное оснащенное зацепление $(\mathbf{L}, \xi; L_0)^{\uparrow}$. Каждая из последних $(m-2)$ компонент зацепления $(\mathbf{L}, \xi)$ преобразуется тождественно; отмеченная оснащенная компонента (L_0, ξ_0) зацепления $\mathbf{L}$ заменяется на пару параллельных оснащенных компонент $(L^{\uparrow}_{0,1}, \xi^{\uparrow}_{0,1}; L^{\uparrow}_{0,2}, \xi^{\uparrow}_{0,2})$, первая из которых совпадает с L_0, а вторая получена в результате малого сдвига компоненты L_0 вдоль векторов оснащения ξ_0. Оснащения $\xi^{\uparrow}_{0,1}$, $\xi^{\uparrow}_{0,2}$ определяются как индуцированные оснащением ξ_0. По $(m-1)$–компонентному оснащенному зацеплению $(L, \xi; L_0)$ с отмеченной компонентой и целому числу r определяются два оснащенных m–компонентных зацепления, обозначаемых через $r((\mathbf{L}, \xi; L_0)^{\uparrow})$, $(r(\mathbf{L}, \xi; L_0))^{\uparrow}$. Зацепление $r((\mathbf{L}, \xi; L_0)^{\uparrow})$ получено последовательным применением операции удвоения отмеченной компоненты и операции r–кратной намотки вдоль каждой из двух отмеченных компонент с индуцированным оснащением и вдоль остальных оснащенных компонент. Зацепление $(r(\mathbf{L}, \xi; L_0))^{\uparrow}$ получено в результате применения указанных операций в обратном порядке, т.е. сначала каждая компонента, включая отмеченную, преобразуется в r-кратную намотку по заданному оснащению, причем на намотке отмеченной компоненты определено индуцированное оснащение, затем у полученного зацепления отмеченная компонента удваивается по оснащению.

Определение 7.

Скажем, что инвариант I для m–компонентных зацеплений (значение I не зависит от оснащения зацепления) является асимптотическим инвариантом степени s (замечу, что если инвариант I имеет конечный порядок, то степень инварианта, вообще говоря, не совпадает с его порядком), если выполнены следующие два условия:

–1. Справедливо равенство:

$$I(r(\mathbf{L}, \xi)) = r^s I(\mathbf{L}) + o(r^s). \tag{76}$$

–2. Справедливо равенство:

$$I(r((\mathbf{L}, \xi; L_0)^{\uparrow})) = I((r(\mathbf{L}, \xi; L_0))^{\uparrow}) + o(r^s), \tag{77}$$

где через $o(r^s)$ обозначены многочлены переменной r степени меньшей s, коэффициенты которого зависят только от оснащенного зацепления $(\mathbf{L}, \xi)$.

Замечание по поводу условия –2 в Определении 7

Предположим, что магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, $t \in [0,1]$ зависит от времени (не является вмороженным) и в начальный момент $t = 0$ имеет только замкнутые силовые линии внутри одной магритной трубки, но при $t \neq 0$ появляются, вообще говоря, незамкнутые траектории. Предположим, что в моменты времени $t_i = \frac{1}{i}$, $i \to +\infty$ все магнитные линия поля $\mathbf{B}$ по-прежнему замкнуты, и магнитная трубка в каждый такой момент характеризуется числом скручивания вокруг центральной линии. При $t = t_i$ для каждого набора m силовых линий поля $\mathbf{B}(t_i)$ определено значение I. Значение $I(\mathbf{B}(t_i))$ корректно определено как среднее значение по всем m–наборам силовых линий. Условие 2 в этом случае означает $I(\mathbf{B}(t_i)) \to I(\mathbf{B}(0))$, при $i \to +\infty$.

Основным результатом настоящего раздела является следующая теорема.

Теорема 8. *При $m = 3$ существует асимптотический инвариант степени 12, который определен инвариантом конечного порядка и не выражается через коэффициенты зацепления компонент.*

Асимптотический инвариант зацепления: q–мономиальный коэффициент зацепления

Пусть $\mathbf{L} = L_1 \cup L_2$ – двукомпонентное зацепление, компоненты которого зацеплены с коэффициентом k. Определим q–мономиальный коэффициент зацепления выражением k^q. При $q = 1$ 1–мономиальный коэффициент зацепления совпадает с коэфициентом зацепления k. Инвариант k^q, как нетрудно проверить, имеет порядок q в смысле В.А.Васильева, см. [V]. Докажем, что инвариант k^s является асимптотическим инвариантом степени $s = 2q$. Для этого следует проверить равенства (76), (77).

При $s = 1$ рассматриваемый инвариант совпадает с коэффициентом зацепления k, для которого оба равенства (76), (77) просто проверить. Действительно, значение k определяется интегралом (7), при переходе от зацепления $\mathbf{L}$ к зацеплению $r\mathbf{L}$ значение интеграла (7) увеличивается в r^2 раз. Поэтому значение $I = k^q$ увеличивается в r^{2q} раз, что доказывает равенство (76).

Проверим формулу (77) для $I = k^q$. Сначала проверим эту формулу при $q = 1$. Пусть $(\mathbf{L}, \xi)$–оснащенный узел. Рассмотрим 2–компонентное зацепление $(\mathbf{L},\xi)^{\uparrow} = (\mathbf{L}^{\uparrow},\xi^{\uparrow})$ и двухкомпонентное зацепление $r(\mathbf{L}^{\uparrow},\xi^{\uparrow})$. Справедлива формула:

$$k(r((\mathbf{L},\xi)^{\uparrow})) = r^2 k((\mathbf{L},\xi)^{\uparrow}). \tag{78}$$

Рассмотрим оснащенный узел $r(\mathbf{L},\xi)$ и двухкомпонентное зацепление $(r(\mathbf{L},\xi))^{\uparrow}$. Из геометрических соображений очевидно, что $k((r(\mathbf{L},\xi))^{\uparrow}) = kr^2 + r$. Откуда по формуле (78) получаем

$$k((r(\mathbf{L},\xi))^{\uparrow}) = k(r((\mathbf{L},\xi)^{\uparrow})) + r. \tag{79}$$

Из этой формулы очевидно вытекает формула (77) при $q = 1$. При произвольном q эта формула также справедлива, для доказательства обе части равенства (79) достаточно возвести в степень q.

q–Мономиальный коэффициент зацепления k^q является комбинаторным аналогом инварианта q–спиральности $\chi^{(q)}_{\mathbf{B}}$, построенного в разделе 4.

Для асимптотического инварианта $\tilde{M}$ (см. ниже Определение 17) нам потребуется предварительный материал. Напомним простейшие свойства инвариантов конечного порядка многокомпонентных зацеплений.

Рассмотрим многочлен Конвея m–компонентного зацепления $\mathbf{L}$:

$$\nabla_{\mathbf{L}}(z) = z^{m-1}(c_0 + c_1 z^2 + \cdots + c_n z^{2n}). \tag{80}$$

По поводу определения и свойств этого многочлена см. [P-S],[Me].

Будем рассматривать нварианты зацепления, которые выражается алгебраически через коэффициенты c_0, c_1 этого многочлена (многочлен будет применяться не только к самому зацеплению $\mathbf{L}$, но также и ко всем подзацеплениям зацепления $\mathbf{L}$ с меньшим числом компонент).

Простейшим инвариантом указанного вида, который не выражается через попарные коэффициенты зацепления компонент, является Обобщенный инвариант Сато-Левина. Этот инвариант определяется для $m = 2$, $\mathbf{L} = L_1 \cup L_2$ в работе [Akh2] (см. также [A-R], [A-M-R]) на основе элементарных соображений. Обобщенный инвариантом Сато-Левина определен в работах [Me],[N] (в этих работах приводятся ссылки на более ранние работы других авторов) по формуле:

$$\beta(\mathbf{L}) = c_1(\mathbf{L}) - c_0(\mathbf{L})(c_1(L_1) + c_1(L_2)). \tag{81}$$

В формуле (81) $c_0(\mathbf{L})$ совпадает с коэффициентом зацепления $lk(L_1, L_2)$ компонент, $c_1(L_1)$, $c_1(L_2)$ называются инвариантами Кассона узлов, образованных соответствующими компонентами. В дальнейшем в этом разделе коэффициент зацепления $c_0(\mathbf{L})$ компонент 2-компонентного зацепления будет для краткости обозначаться через k.

Определим простейшее 2-компонентное зацепление, которое назовем k–зацеплением Хопфа и обозначим через $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$. Первая компонента L_1 зацепления $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$ представляет собой стандартную ориентированную окружность в выделенной координатной плоскости, а вторая компонента L_2 расположена на границе регулярной окрестности первой компоненты и однократно обматывает первую ориентированную компоненту в том же направлении с коэффициентом зацепления k, т.е., обходя один раз вдоль параллели компоненты L_1, компонента L_2 k раз оборачиваясь вокруг L_1 вдоль маридиана. Легко проверить, что при перенумерации компонент зацепления $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$ новое зацепление изотопно исходному. Легко проверить равенство

$$r(L_0, \xi_0)^{\uparrow} = L^+_{Hopf}(r), \tag{82}$$

где (L_0, ξ_0) – стандартная окружность в выделенной плоскости, снабженная тривиальным (плоским) оснащением. Согласно введенным выше обозначениям $c_0(\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)) = k$.

Зацепление $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$ обладает естественным оснащением. Оснащение к компоненте L_2 выбирается по вектору внутренней нормали к границе регулярной окрестности компоненты L_1, на которой лежит компонента L_2. Вектор оснащения к произвольной точке на компоненте L_1 лежит в нормальной плоскости к компоненте L_1 и направлен к точке пересечения указанной плоскости с компонентой L_2. Коэффициент самозацепления каждой компоненты зацепления $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$ равен k. В частности, при $k = 0$ рассматриваемые оснащения компонент параллельны выделенной плоскости.

Зацепление $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$ моделирует пару близких замкнутых магнитных линий простейшей конфигурации с заданным коэффициентом зацепления k, который совпадает с коэффициентом скрученности естественного оснащения каждой компоненты.

Лемма 9. *Обобщенный инвариант Сато-Левина, определенный по формуле* (81) *удовлетворяет равенству:*

$$\beta(\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)) = \frac{(k+1)k(k-1)}{6}. \tag{83}$$

Доказательство Леммы 9

Приведем два независимых доказательства.

Первое доказательство. Стандартное вычисление левой части формулы (83) с применением соотношений подскока для многочлена (80) и с учетом равенства нулю коэффициента c_1 от обеих компонент L_1, L_2 зацепления $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$, приводит к тому, что $\beta(\mathbf{L}^+_{Hopf}(k))$ является многочленом степени 3 от переменной k. При $k = -1, 0$ или $+1$, очевидно, получим $\beta(\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)) = 0$. При этом на основании простого прямого рассуждения можно заключить, что $\beta(\mathbf{L}^+_{Hopf}(2)) = 1$. Равенство (83) оказывается единственно возможным.

Второе доказательство. Наряду с зацеплением $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$ рассмотрим зацепление $\mathbf{L}^-_{Hopf}(-k)$, которое получается из $\mathbf{L}_{Hopf}(-k)$ в результате обращения ориентации одной из компонент. Применяя формулы подскока для полинома Конвея [PS] в результате прямых вычислений для произвольного k получим $C_1(\mathbf{L}^-_{Hopf}(-k)) = 0$. Компоненты $\mathbf{L}^-_{Hopf}(-k)$ незаузлены и по формуле (81) получим $\beta(\mathbf{L}^-_{Hopf}(-k)) = 0$. Отсюда по результату [N] об изменении значения обобщенного инварианта Сато-Левина вытекает формула (83). Лемма 9 доказана.

Замечание

В рамках задачи построения высших топологических инвариантов магнитного поля естественно считать, что зацепление $\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)$ доставляет тривиальный объект с точки зрения инварианта высшей спиральности. Определение Обобщенного инварианта Сато-Левина, предложенное автором в работе [Akh2], отличается от определения по формуле (81) и доставляется формулой:

$$\beta^\circ(\mathbf{L}) = c_1(\mathbf{L}) - k(c_1(L_1) + c_1(L_2)) - P(k), \tag{84}$$

где $P(k)$- многочлен третьей степени от коэффициента зацепления компонент, определяемый по формуле:

$$P(k) = \frac{(k+1)k(k-1)}{6}. \tag{85}$$

В частности, для инварианта β° справедливы равенства:

$$\beta^\circ(\mathbf{L}^+_{Hopf}(k)) = 0, \tag{86}$$

$$\beta^\circ(\mathbf{L}^-_{Hopf}(k)) = -P(k), \tag{87}$$

где зацепление $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}(k)$ было определено при доказательстве Леммы 9. В то время как для инварианта β справедливы равенства:

$$\beta(\mathbf{L}^{+}_{Hopf}(k)) = P(k), \tag{88}$$

$$\beta(\mathbf{L}^{-}_{Hopf}(k)) = 0. \tag{89}$$

Инвариант β°, определенный по формуле (86) назовем нормализованным Обобщенным инвариантом Сато-Левина. Нормализованный инвариант β° и инвариант β имеют порядок 3.

В случае $k(\mathbf{L}) = 0$ Обобщенный инвариант Сато-Левина был определен в работе [S-L] и называется инвариантом Сато-Левина. В работе [A-R] было построено интегральное выражения для инварианта Сато-Левина. Нижеследующая формула (92) предполагает, что интегральная формулы из [A-R] (см. также [A-K]) имеет асимптотический смысл и может применяться для среды, в которой всевозможные пары магнитных линий зацеплены в асимптотическом смысле с нулевыми коэффициентами. При малом возмущении такой среды возникают пары магнитных линий, зацепленных в асимптотическом смысле с ненулевыми коэффициентами, и интегральное выражение инварианта Сато-Левина изменяется, причем скорость изменения интегрального инварианта Сато-Левина определяется "мерой заузленности" траекторий исходной системы. Аналогичное построение для инварианта спиральности проводится в [A-K-K].

Лемма 10. *Для произвольного 2-компонентного оснащенного зацепления $(\mathbf{L}, \xi)$ справедливы равенства:*

$$Q(r) + \beta^{\circ}(rL_1, L_2) = r^2\beta^{\circ}(\mathbf{L}), \tag{90}$$

$$Q(r) + \beta^{\circ}(L_1, rL_2) = r^2\beta^{\circ}(\mathbf{L}), \tag{91}$$

где $Q(r)$ некоторый многочлен от переменной r степени не выше 4, коэффициенты которого зависят только от двух параметров: $k(\mathbf{L})$, $k(L_1, \xi_1)$ в случае уравнения (90) и $k(\mathbf{L})$, $k(L_2, \xi_1)$ в случае уравнения (91). В случае $k(\mathbf{L}) = 0$, имеем $Q(r) = 0$.

2. Для произвольного оснащенного узла $(\mathbf{L},\xi)$ при условии $k(L,\xi)=0$ справедливо равенство:

$$\beta^{\circ}(r((\mathbf{L},\xi)^{\uparrow})) = 2r^4 C_1(\mathbf{L}), \tag{92}$$

где $C_1(\mathbf{L})$–инвариант Кассона узла $\mathbf{L}$.

Замечание

В случае $k(\mathbf{L},\xi) \neq 0$ даже при $k(\mathbf{L}_1,\xi_1) = 0$ или $k(\mathbf{L}_2,\xi_2) = 0$ правые части равенств (90), (91) и равенства (92) имеют разный порядок по переменной r. Обобщенный инвариант Сато-Левина не является асимптотическим инвариантом зацеплений в смысле Определения 7. В частном случае $k(\mathbf{L},\xi) = 0$ Обобщенный инвариант Сато-Левина удовлетворяет первой аксиоме из Определения 7 с показателем $s=4$, и второй аксиоме с точностью до поправки, равной значению инварианта Кассона.

Проверим равенство (92). Мураками и Накашиши, и также С.В. Матвеевым, было определено понятие Δ–движения, которое оказалось удобным для подсчета значений инвариантов малых порядков (см. [Na] и последующие ссылки).

Согласно результату [Akh2] (см. также [A-M-R]) Обобщенный инвариант Сато-Левина β° полностью определяется условием нормировки (86) и нижеследующими формулами (93),(94) подскока инварианта β при Δ–движениях разных видов:

$$\beta^{\circ}(\mathbf{L})|_{t=t_0+\varepsilon} - \beta^{\circ}(\mathbf{L})|_{t_0-\varepsilon} = O(x)O(y)(lk(L_x^+,L') - lk(L_x^-,L') - O(x)), \tag{93}$$

где предполагается, что в Δ–движении участвуют две ветви одной компоненты зацепления и одна ветвь другой компоненты.

$$\beta(\mathbf{L})|_{t=t_0+\varepsilon} - \beta(\mathbf{L})_{t_0-\varepsilon} = 0, \tag{94}$$

где предполагается, что в Δ–движении участвуют три ветви одной компоненты зацепления.

В формуле (93) через $O(x)$ обозначено алгебраическое значение вершины x исчезающего треугольника самопересечения, на диаграмме (проекции) зацепления, в которой самопересекается одна из компонент

L зацепления $\mathbf{L}$, скажем, для определенности, компонента L_1 (случай компоненты L_2 аналогичен); $O(y)$– алгебраическое значение произвольной другой вершины y исчезающего треугольника на диаграмме зацепления; L_x^+ – замкнутая петля на диаграмме зацепления с вершиной в точке x, которая содержит две стороны исчезающего треугольника (по соглашению эта петля лежит на L_1), L_x^-–оставшаяся петля на той же компоненте L_1, L'–оставшаяся компонента зацепления (по соглашению $L' = L_2$).

Пусть зацепление $\mathbf{L}$ при $t = t_0$ преобразуется при помощи Δ–движения. Тогда зацепление $r\mathbf{L}$, при $t = t_0$ преобразуется при помощи семейства r^2 Δ–движений. Докажем формулу:

$$r^4\beta^\circ(\mathbf{L})|_{t=t_0+\varepsilon} - r^4\beta^\circ(\mathbf{L})|_{t_0-\varepsilon} = \beta^\circ(r\mathbf{L})|_{t=t_0+\varepsilon} - \beta^\circ(r\mathbf{L})_{t_0-\varepsilon}. \tag{95}$$

На диаграмме зацепления $r\mathbf{L}$ рассмотрим r^2 точек самопересечения x_i, $i = 1,\dots,r^2$, которые расположены в окрестности вершины x исчезающего треугольника на диаграмме $\mathbf{L}$. В каждой такой точке x_i рассмотрим петлю $(rL)_x^+$ на диаграмме зацепления $r\mathbf{L}$, ветвь которой начинается и заканчивается с тех же сторон, что и ветвь L_x^+. Обозначим коэффициент зацепления $lk(L_1, L_2)$ компонент $\mathbf{L}$ для краткости через k, а коэффициенты зацепления $lk(L_x^+, L')$, $lk(L_x^-, L')$ через $\lambda_+(x)$, $\lambda_-(x)$ соответственно. Очевидно, $\lambda_+(x) + \lambda_-(x) = k$.

В каждой точке x_i непосредственно вычислим коэффициенты $\lambda_+(x_i) = lk((rL)_x^+, rL')$, $\lambda_-(x_i) = lk((rL)_x^+, rL'$. Согласно этому вычислению:

$$\sum_{i=1}^{r^2} \frac{\lambda_+(x_i)}{k^3} = \lambda_+(x) + (\lambda_+(x)+1) + \dots + (\lambda_+(x)+i) + \dots + (\lambda_+(x)+(k-1)).$$

$$\sum_{i=1}^{r^2} \frac{\lambda_-(x_i)}{k^3} = (\lambda_-(x)+(k-1)) + (\lambda_-(x)+(k-2)) + \dots + (\lambda_-(x)+i) + \dots + \lambda_-(x).$$

Поэтому
$$\sum_{i=1}^{r^2} \frac{\lambda_+(x_i) - \lambda_-(x_i)}{k^3} = k(\lambda_+(x) - \lambda_-(x)).$$
Равенство (95) доказано.

Чтобы доказать равенства (90), (91) для произвольного $(\mathbf{L}, \xi)$ достаточно проверить это равенство для зацепления $\mathbf{L}_{Hopf}(k)$, с произвольным, вообще говоря, нестандартным оснащением компонент, что очевидно.

Проверим равенство (92). Согласно результату [Akh2] (см. также [A-M-R]) Обобщенный инвариант Сато-Левина удовлетворяет формуле:

$$\beta^{\circ}(\mathbf{L}^{\uparrow}) = 2c_1(\mathbf{L})k((\mathbf{L},\xi)^{\uparrow}), \tag{96}$$

где зацепление $(\mathbf{L}{,}\xi)^{\uparrow}$ определено в результате удвоения оснащенного узла $(\mathbf{L},\xi)$, $c_1(\mathbf{L})$ – инвариант Кассона узла $\mathbf{L}$, $k((\mathbf{L},\xi)^{\uparrow})$– коэффициент зацепления компонент.

Рассмотрим зацепление $(r(\mathbf{L},\xi))^{\uparrow}$, которое получено удвоением узла $r(\mathbf{L},\xi)$. Справедлива формула:

$$c_1(r\mathbf{L}) = r^3 c_1(\mathbf{L}). \tag{97}$$

Действительно, как доказано в [Akh2], (см. также [A-M-R]) инвариант Кассона $c_1(\mathbf{L})$ при Δ–движении изменяется на „знак исчезающего треугольника". Стороны исчезающего треугольника образованы тремя отрезками ветвей проекции узла в окрестности особой точки Δ–движения. Поэтому уравнение (97) очевидно, а из уравнений (96) (79), (97) вытекает равенство (92). В случае $k(L_1,\xi_1)=0$ упрощение формулы (90) очевидно.

Равенство (92) вытекает из формулы (96) для зацепления $r(\mathbf{L},\xi)$ и из формулы (79) при $k(\mathbf{L},\xi)=0$. Лемма 8 доказана.

Приступим к построению инварианта M и нормализованного инварианта M°.

Пусть $\mathbf{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$– 3-компонентное зацепление. Рассмотрим инвариант $\gamma(\mathbf{L})$, построенный в работе [Me]. Этот инвариант выражается через коэффициенты c_1 и $k = c_0$ полинома Конвея от всевозможных подзацеплений зацепления $\mathbf{L}$ по формуле:

$$\gamma(\mathbf{L}) = c_1(\mathbf{L}) - \tag{98}$$

$$\begin{gathered}((1,2)(2,3)+(2,3)(3,1)+(3,1)(1,2))(c_1(L_1)+c_1(L_2)+c_1(L_3))\\ -((3,1)+(2,3))(c_1(L_1\cup L_2)-(1,2)(c_1(L_1)+c_1(L_2)))\\ -((1,2)+(3,1))(c_1(L_2\cup L_3)-(2,3)(c_1(L_2)+c_1(L_3)))\\ -((2,3)+(1,2))(c_1(L_3\cup L_1)-(3,1)(c_1(L_3)+c_1(L_1))),\end{gathered}$$

где через (i,j) обозначен коэффициент зацепления $k(L_i \cup L_j)$ пары компонент L_i, L_j, $i,j=1,2,3$, $i \neq j$, зацепления $\mathbf{L}$.

Определим 3-компонентное зацепление $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2);(2,3);(3,1))$, зависящее от трех целочисленных параметров $(1,2),(2,3),(3,1) \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим три двухкомпонентных зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((2,3))$, $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((3,1))$, $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2))$, которые расположим в окрестности вершин равностороннего треугольника ABC соответственно, лежащего в плоскости в $\mathbb{R}^3$. Определим зацепление $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2);(2,3);(3,1))$ как 3-компонентное зацепление, компоненты которого определены в результате связной суммы первой компоненты зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((2,3))$ со второй компонентой зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((3,1))$, первой компоненты зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((3,1))$ со второй компонентой зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2))$, первой компоненты зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2))$ со второй компонентой зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((2,3))$. Суммирование соответствующей пары компонент двухкомпонентных зацеплений в разных вершинах треугольника происходит вдоль стороны треугольника без перекручивания относительно плоскости треугольника ABC. Компоненты зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2);(2,3);(3,1))$ соответствуют сторонам треугольника, обозначим эти компоненты через L_1, L_2, L_3. Обозначения выбраны так, что $k(L_1,L_2)=(1,2)$, $k(L_2,L_3)=(2,3)$, $k(L_3,L_1)=(3,1)$.

Наряду с зацеплением $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))$ определим также зацепление $L^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))$ с теми же предписанными коэффициентами зацепления. Различие состоит в том, что операция связного суммирования происходит при помощи набора зацеплений $\mathbf{L}^{+}_{Hopf}((2,3))$, $\mathbf{L}^{+}_{Hopf}((3,1))$, $\mathbf{L}_{Hopf}((1,2))^{-}$, вместо набора зацеплений $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((2,3))$, $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((3,1))$, $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2))$. (Компоненты зацепления $\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))$ удобно представлять себе расположенными в окрестности тонкого тора, связанное суммирование происходит вдоль отрезков параллелей тора. Оба семейства зацеплений $\{\mathbf{L}^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))\}$ и $\{\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))\}$ допускают преобразования симметрии. Например, существует преобразование симметрии, переводящее зацепление $\{\mathbf{L}^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))\}$ в зацепление $\{-\mathbf{L}^{+}_{Hopf}((3,2),(2,1),(1,3))\}$ с обращенной ориентацией компонент, при которой первая и третья компоненты переставляются. Указанная неоднозначность не влияет на дальнейшее построение.)

Из формулы (98) легко получить равенства:

$$\gamma(\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))) = 0, \tag{99}$$

$$\gamma(\mathbf{L}^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))) = R((1,2),(2,3),(3,1)), \tag{100}$$

где многочлен $R((1,2),(2,3),(3,1))$ от попарных коэффициентов зацепления компонент определен определен по формуле:

$$R((1,2),(2,3),(3,1)) = \tag{101}$$

$$\frac{(1,2)^2(2,3)(3,1)+(2,3)^2(3,1)(1,2)+(3,1)^2(1,2)(2,3)}{2}+\frac{3(1,2)(2,3)(3,1)}{2}.$$

Определим нормализованный инвариант $\gamma^{\circ}(\mathbf{L})$ по формуле:

$$\gamma^{\circ}(\mathbf{L}) = \gamma(\mathbf{L}) - R((1,2),(2,3),(3,1)). \tag{102}$$

Легко получить равенства:

$$\gamma^{\circ}(\mathbf{L}^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))) = 0, \tag{103}$$

$$\gamma^{\circ}(\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))) = -R((1,2),(2,3),(3,1)). \tag{104}$$

Нормализованный инвариант γ° и инвариант γ имеют порядок 4.

В следующей лемме выпишем формулы С.А.Мелихова (см. [M]) скачков инварианта γ (аналогичные формулы справедливы для нормализованного инварианта γ°) при гомотопии зацепления, при которой компоненты зацепления могут самопересекаться, но не могут пересекать друг друга. Пусть $\mathbf{L}_{sing;3}$ – особое 3-компонентное зацепление, компоненты L_1, L_2 являются регулярными, а компонента $L_{sing,3}$ самопересекается в единственной точке. Обозначим через $\mathbf{L}_{+;3}$, $\mathbf{L}_{-;3}$ – два 3-компонентных зацепления, первые две компоненты которых совпадают с L_1, L_2, третья компонента $L_{3;+}$ зацепления $\mathbf{L}_{3;+}$ определена в результате одного предписанного разрешения особенности самопересечения компоненты $L_{sing,3}$, третья компонента $L_{3;-}$ зацепления $\mathbf{L}_{-;3}$ определена в результате другого разрешения особенности самопересечения компоненты $L_{sing,3}$.

Определим 4-компонентное зацепление $\mathbf{L}_{s;3}$, с компонентами $(L_1, L_2, L_{3+}, L_{3-})$. Первые две компоненты у зацеплений $\mathbf{L}_{s;3}$, $\mathbf{L}_{sing;3}$ одинаковые, а компоненты L_{3+}, L_{3-} зацепления $\mathbf{L}_{s;3}$ получены в результате сохраняющего ориентацию сглаживания особой компоненты $L_{sing,3}$ зацепления $\mathbf{L}_{sing;3}$.

Обозначим через $(1,3^{+})$ $(1,3^{-})$ коэффициенты зацепления компоненты L_1 с компонентами L_{3+}, L_{3-} соответственно. Обозначим через $(2,3^{+})$ $(2,3^{-})$ коэффициенты зацепления компоненты L_2 с компонентами L_{3+}, L_{3-} соответственно.

Аналогичные обозначения определены при заменах номера $3 \to 1$, $3 \to 2$ особой компоненты.

Лемма 11. *Инвариант $\gamma(\mathbf{L})$ 3-компонентных зацеплений удовлетворяет следующим уравнениям:*

$$\gamma(\mathbf{L}_{+;3}) - \gamma(\mathbf{L}_{-;3}) = (1,2)((1,3^+)(2,3^-) + (1,3^-)(2,3^+)), \tag{105}$$

$$\gamma(\mathbf{L}_{+;1}) - \gamma(\mathbf{L}_{-;1}) = (2,3)((2,1^+)(3,1^-) + (2,1^-)(3,1^+)), \tag{106}$$

$$\gamma(\mathbf{L}_{+;2}) - \gamma(\mathbf{L}_{-;2}) = (3,1)((3,2^+)(1,2^-) + (3,2^-)(1,2^+)), \tag{107}$$

Для нормализованного инварианта γ° выполняются аналогичные соотношения.

Доказательство Леммы 11

Формулы подскока инварианта γ, полностью аналогичны соотношениям (105),(106),(107), доказаны в [Me], стр. 11. Лемма 11 доказана.

Изучим формулу подскока инварианта γ° при Δ–движении компонент. Изучим случай, когда в Δ–движении участвуют все три компоненты зацепления $\mathbf{L}$. Введем следующие обозначения.

Рассмотрим зацепления $\mathbf{L}_- = (L_{1,-} \cup L_{2,-} \cup L_{3,-})$, $\mathbf{L}_+ = (L_{1,+} \cup L_{2,+} \cup L_{3,+})$, исчезающий треугольник ABC_-, образованный тремя ветвями проекции зацепления $\mathbf{L}_-$, лежащими на разных компонентах зацепления и рождающийся треугольник ABC_+, образованный тремя соответствующими ветвями проекции зацепления L_+. Нумерацию вершин треугольника выберем так, что вершина A как в исчезающем, так и в рождающемся треугольнике, лежит на пересечении проекций компонент L_2 и L_3, вершина B лежит на пересечении проекций компонент L_3 и L_1, вершина C лежит на пересечении проекций компонент L_1 и L_2. Обозначим через $(L_{1,\pm} \odot L_{2,\pm}, L_{3,\pm})$–двухкомпонентное зацепление, полученое в результате сглаживания компонент $L_{1,\pm}$ и $L_{2,\pm}$ в вершине $C_\pm$, здесь и далее $\pm$ означает один из двух возможных выборов знака. Аналогично введем обозначения $(L_{2,\pm} \odot L_{3,\pm}, L_{1,\pm})$, $(L_{3,\pm} \odot L_{1,\pm}, L_{2,\pm})$.

Лемма 12. *Инвариант γ удовлетворяет следующим уравнениям при Δ–движении, в котором участвуют все три компоненты зацепления:*

$$\gamma(\mathbf{L}_+) - \gamma(\mathbf{L}_-) = \beta(L_{1,+} \odot L_{2,+}, L_{3,+}) - \beta(L_{1,+} \odot L_{2,+}, L_{3,+}) = \tag{108}$$

$$\beta(L_{2,+} \odot L_{3,+}, L_{1,+}) - \beta(L_{2,+} \odot L_{3,+}, L_{1,+}) =$$

$$\beta(L_{3,+} \odot L_{1,+}, L_{2,+}) - \beta(L_{3,+} \odot L_{1,+}, L_{2,+}).$$

Для нормализованных инвариантов γ°, β° выполняются аналогичные соотношения.

Доказательство Леммы 12

Применим формулы (98), (99). Справедливо равенство:

$$c_1(\mathbf{L}_+) - c_1(\mathbf{L}_-) = \gamma(\mathbf{L}_+) - \gamma(\mathbf{L}_-). \tag{109}$$

Действительно, при Δ–движении, в котором участвуют все три компоненты зацепления $\mathbf{L}$, изменяется лишь первое слагаемое в формуле (98). Воспользуемся тем, что Δ–движение представляется 3 разными способами в виде композиции гомотопии с пересечением двух компонент (при одном из трех способов Δ–движение представляется композицией преобразования гомотопии с пересечением компонент L_1 и L_2, изотопии, при которой проекция оставшаяся компоненты L_3 движется через вершину A исчезающего треугольника и обратной гомотопии с пересечением тех же компонент. Применим поочередно формулу для преобразования коэффициентов в многочлене Конвея к каждому из этих преобразований. Получим соотношение:

$$c_1(\mathbf{L}_+) - c_1(\mathbf{L}_-) = c_1(L_{1,+} \odot L_{2,+}, L_{3,+}) - c_1(L_{1,-} \odot L_{2,-}, L_{3,-}). \tag{110}$$

Теперь воспользуемся формулой (84) и выразим инвариант c_1 в формуле (110) через инвариант β°. Очевидно, справедлива формула:

$$c_1(L_{1,+} \odot L_{2,+}, L_{3,+}) - c_1(L_{1,-} \odot L_{2,-}, L_{3,-}) = \tag{111}$$

$$\beta(L_{1,+} \odot L_{2,+}, L_{3,+}) - \beta(L_{1,-} \odot L_{2,-}, L_{3,-}).$$

Подставляя (111) в правую часть формулы (110) и далее полученную формулу в формулу (109), получим одно из трех требуемых равенств в (108). Остальные два равенства доказываются аналогично. Лемма 12 доказана.

Определение 13. Пусть $\mathbf{L} = (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ – произвольное 3-компонентное зацепление. Определим инвариант $M(\mathbf{L})$ по формуле

$$M(\mathbf{L}) = (1,2)(2,3)(3,1)\gamma(\mathbf{L}) - \tag{112}$$

$$((1,2)^2(1,3)^2\beta(L_2 \cup L_3) + (2,3)^2(2,1)^2\beta(L_3 \cup L_1) + (2,3)^2(2,1)^2\beta(L_3 \cup L_1)).$$

Определим нормализованный инвариант $M^\circ(\mathbf{L})$ по формуле

$$M^\circ(\mathbf{L}) = (1,2)(2,3)(3,1)\gamma^\circ(\mathbf{L}) - \tag{113}$$

$$((1,2)^2(1,3)^2\beta^\circ(L_2 \cup L_3) + (2,3)^2(2,1)^2\beta^\circ(L_3 \cup L_1) + (2,3)^2(2,1)^2\beta^\circ(L_3 \cup L_1)).$$

Теорема 14.

1. Инвариант M удовлетворяет следующим уравнениям при гомотопии зацепления с точкой самопересечения на соответствующей компоненте:

$$M(\mathbf{L}_{+;3}) - M(\mathbf{L}_{-;3}) = (1,2)^2(2,3)(3,1)((1,3^+)(2,3^-) + (1,3^-)(2,3^+)) \tag{114}$$
$$-(1,2)^2(3,1)^2(2,3^+)(2,3^-) - (2,3)^2(2,1)^2(1,3^+)(1,3^-),$$

$$M(\mathbf{L}_{+;1}) - M(\mathbf{L}_{-;1}) = (1,2)(2,3)^2(3,1)((2,1^+)(3,1^-) + (2,1^-)(3,1^+)) \tag{115}$$
$$-(2,3)^2(1,2)^2(3,1^+)(3,1^-) - (3,1)^2(3,2)^2(2,1^+)(2,1^-),$$

$$M(\mathbf{L}_{+;2}) - M(\mathbf{L}_{-;2}) = (1,2)(2,3)(3,1)^2((3,2^+)(1,2^-) + (3,2^-)(1,2^+)) \tag{116}$$
$$-(3,1)^2(2,3)^2(1,2^+)(1,2^-) - (1,2)^2(1,3)^2(3,2^+)(3,2^-).$$

Для нормализованного инварианта M° выполняются аналогичные соотношения.

Инвариант M удовлетворяет следующим уравнениям при Δ–движении, в котором участвуют все три компоненты зацепления:

$$M(\mathbf{L}_+) - M(\mathbf{L}_-) = \tag{117}$$

$$(1,2)(2,3)(3,1)(\beta^\circ(L_{1,+} \odot L_{2,+}, L_{3,+}) - \beta^\circ(L_{1,+} \odot L_{2,+}, L_{3,+})) =$$
$$(1,2)(2,3)(3,1)(\beta^\circ(L_{2,+} \odot L_{3,+}, L_{1,+}) - \beta^\circ(L_{2,+} \odot L_{3,+}, L_{1,+})) =$$
$$(1,2)(2,3)(3,1)(\beta^\circ(L_{3,+} \odot L_{1,+}, L_{2,+}) - \beta^\circ(L_{3,+} \odot L_{1,+}, L_{2,+})).$$

Для нормализованных инвариантов M°, β° выполняются аналогичные соотношения.

Инвариант M удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$M(\mathbf{L}^{-}_{Hopf}((2,3),(1,2),(3,1))) = 0. \qquad (118)$$

Нормализованный инвариант M° удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$M^\circ(\mathbf{L}^{+}_{Hopf}((2,3),(1,2),(3,1))) = 0. \qquad (119)$$

2. Инварианты M и M° однозначно определяется уравнениями (114)-(119). *Инварианты M и M° являются инвариантами порядка* 7 *в смысле В.А.Васильева.*

3. В частном случае $(1,2) = (2,3) = (3,1) = k$ формулы для инвариантов M и M° приобретают вид:

$$M = k^3 C_1(\mathbf{L}) - 3k^4[C_1(L_1,L_2) + C_1(L_2,L_3) + C_1(L_3,L_1)] \qquad (120)$$
$$-k^5[C_1(L_1) + C_2(L_2) + C_3(L_3)].$$

$$M^\circ = k^3 C_1(\mathbf{L}) - 3k^4[C_1(L_1,L_2) + C_1(L_2,L_3) + C_1(L_3,L_1)] \qquad (121)$$
$$-k^5[C_1(L_1) + C_2(L_2) + C_3(L_3)] - 2k^7 - \frac{3k^6}{2} + \frac{k^5}{2}.$$

Доказательство Теоремы 14.

Формулы (114),(115),(116),(117) вытекают из формул (105), (106), (107) подскоков для инварианта γ° и аналогичных хорошо известных формул подскоков для инварианта β° при элементарной гомотопии зацепления (см, [A-R],[Me],[N]). Формула (118) вытекает из формул (98), (118). Вторая и третья часть теоремы очевидны. Теорема 14 доказана.

Для построения асимптотического инварианта и доказательства Теоремы 8 нам потребуются две леммы, в которых исследуются свойства инварианта M и которые имеют самостоятельный интерес.

Пусть $(\mathbf{L},\xi) = ((L_1,\xi_1),(L_2,\xi_2),(L_3,\xi_3))$ – трехкомпонентное оснащенное зацепление. Рассмотрим зацепление $(r(L_1,\xi_1),L_2,L_3)$, $r \in \mathbb{N}$. Обозначим для краткости это зацепление через ${}_1r\mathbf{L}$. Аналогично определим ${}_2r\mathbf{L} = (L_1, r(L_2,\xi_2), L_3)$, ${}_3r\mathbf{L} = (L_1, L_2, r(L_3,\xi_3))$.

Лемма 15. *Пусть зацепление ${}_1r\bar{\mathbf{L}}$ получено из зацепления ${}_1r\mathbf{L}$ в результате замены первой компоненты $r(L_1,\xi_1)$ на компоненту L_1' путем вклеивания произвольной крашеной косы из r нитей вдоль короткого отрезка на компоненте L_1 зацепления $\mathbf{L}$. Справедливо равенство*

$$M({}_1r\bar{\mathbf{L}}) = M({}_1r\mathbf{L}). \tag{122}$$

В частности, при выборе другого оснащения ξ_1' компоненты L_1 получим зацепление $({}_1r\mathbf{L})' = (r(L_1,\xi_1'),L_2,L_3)$ для которого справедлива формула

$$M(({}_1r\mathbf{L})') = M({}_1r\mathbf{L}). \tag{123}$$

Формулы, аналогичные (122), (123) *выполняются для любой другой компоненты зацепления* $\mathbf{L}$.

Аналогичные формулы выполняются для нормализованного инварианта M°.

Доказательство Леммы 15

Достаточно доказать лемму для случая преобразование на элементарную косу, скручивающую две нити. Такое преобразование определяется гомотопией с единственной точкой трансверсального самопересечения на паре параллельных ветвей компоненты $r(L_1,\xi_1)$.

Обозначим через $(1,2),(2,3),(3,1)$ коэффициенты зацепления соответствующих компонент зацепления ${}_1r\mathbf{L}$. Пусть r_1, r_2 – натуральные числа, $r_1+r_2=r$, равные количествам витков компонент rL_1^+, rL_1^- вдоль компоненты L_1. Применим формулу (115) для вычисления подскока инварианта M при преобразовании зацепления ${}_1r\mathbf{L}$ в зацепление $\bar{\mathbf{L}}$. Нетрудно проверить, что первое слагаемое изменяется на величину $2(1,2)^2(2,3)^2(3,1)^2r_1r_2$, второе и третье слагаемые изменяются на величину $-(1,2)^2(2,3)^2(3,1)^2r_1r_2$. Следовательно, значение M не изменяется. Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *1. Справедливо равенство:*

$$M({}_1r\mathbf{L}) = r^4M(\mathbf{L}) +_1 Q(r), \tag{124}$$

где ${}_1Q(r)$ определено по формуле:

$$ {}_1Q(r) = M({}_1r\mathbf{L}^-_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1)) - \mathbf{L}^-_{Hopf}(r(1,2),(2,3),r(3,1)), $$

коэффициенты которого зависят только от попарных коэффициентов зацепления $(1,2),(2,3),(3,1)$ зацепления $\mathbf{L}$. Аналогичные равенства справедливы для зацеплений ${}_2r\mathbf{L}$, ${}_3r\mathbf{L}$.

2. Справедливо равенство:

$$ M(r\mathbf{L}) = r^{12}M(\mathbf{L}) + Q(r), \tag{125} $$

где $Q(r)$ определено по формуле

$$ Q(r) = M(r\mathbf{L}^-_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1)) - \mathbf{L}^-_{Hopf}(r^2(1,2),r^2(2,3),r^2(3,1)), $$

коэффициенты которого зависят только от коэффициентов зацепления $(1,2),(2,3),(3,1)$ зацепления $\mathbf{L}$.

3. Для произвольного 2–компонентного оснащенного зацепления $\mathbf{L}$ с отмеченной первой компонентой справедливо равенство:

$$ M(\mathbf{L}^{\uparrow},\xi) = S(k(L_1,\xi_1),k(\mathbf{L})), \tag{126} $$

где многочлен $S(k(L_1,\xi_1),k(\mathbf{L}))$, равный $M((\mathbf{L}^-)^{\uparrow}_{Hopf}(k),\xi')$, зависит только от коэффициента самозацепления оснащенной компоненты (L_1,ξ_1) (который совпадает с коэффициентом самозацепления оснащенной компоненты $(L^-_{1;Hopf},\xi')$) и от коэффициента зацепления компонент $k(\mathbf{L})$.

Аналогичные формулы выполняются для нормализованного инварианта M°.

Доказательство Леммы 16

Докажем утверждение 1. Рассмотрим нижеследующий список 1-4 элементарных особых преобразований зацепления $\mathbf{L}$:

–1. Δ–движение, в которой участвует лишь первая компонента L_1.

–2. Преобразование с точкой самопересечения компоненты L_2.

–3. Преобразование с точкой самопересечения компоненты L_3.

–4. Δ–движение, в котором участвуют все три компоненты зацепления $\mathbf{L}$.

Воспользуемся тем, что для произвольного зацепления $\mathbf{L}$ существует некоторая последовательность Ξ преобразований 1-4, переводящая зацепление $\mathbf{L}$ в зацепление $\mathbf{L}_{Hopf}((2,3),(1,2),(3,1))$.

Обозначим компоненты зацепления $\mathbf{L}_{Hopf}((2,3),(1,2),(3,1))$ через $(L_{1;Hopf}, L_{2;Hopf}, L_{3;Hopf})$. Последовательность Ξ порождает последовательность $r\Xi$ преобразований из списка 1-4 зацепления ${}_1r\mathbf{L}$ в зацепление ${}_1r\mathbf{L}_{Hopf}$.

Рассмотрим произвольное элементарное преобразование ξ_i из списка преобразований 1-4. Обозначим через $r\xi_i$ – элементарное преобразование типа 2,3,4 или подпоследовательность элементарных преобразований типа 1, которые соответветствуют элементарному преобразованию ξ_i зацепления ${}_1r\mathbf{L}$. Обозначим через $\mathbf{L}_-$, $\mathbf{L}_+$–зацепления, связанные преобразованием ξ_i. Обозначим через ${}_1r\mathbf{L}_-$, ${}_1r\mathbf{L}_+$ – зацепления, построенные по зацеплениям $\mathbf{L}_-$, $\mathbf{L}_+$ при r-кратной намотке первой компоненты. Зацепления ${}_1r\mathbf{L}_-$, ${}_1r\mathbf{L}_+$ связаны элементарным преобразоваением $r\xi_i$ типа 2,3,4 или последовательностью элементарных преобразований $r\xi_i$ типа 1. Для любого из перечисленных выше элементарных преобразований ξ_i зацепления $\mathbf{L}$ и для соответствующего ему преобразования $r\xi_i$ зацепления $r\mathbf{L}$ справедливо равенство:

$$r^4(M(\mathbf{L}_+) - M(\mathbf{L}_-)) = M({}_1r\mathbf{L}_+) - M({}_1r\mathbf{L}_-). \tag{127}$$

Это равенство вытекает из формул (114) - (117). Теперь достаточно проверить равенство (124) для зацепления $\mathbf{L}_{Hopf}((2,3),(1,2),(3,1)))$, что очевидно с учетом Леммы 15. Для зацеплений ${}_2r\mathbf{L}$, ${}_3r\mathbf{L}$ доказательства аналогичны. Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Равенство (125) следует из равенства (124) и аналогичных ему равенств для двух оставшихся компонент. Утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 3. Рассмотрим нижеследующий список 1-2 элементарных особых преобразований 2-компонентного зацепления $\mathbf{L}$:

–1. Δ–движение, в которой участвует лишь первая компонента L_1.

–2. преобразование с точкой самопересечения компоненты L_2.

Легко проверить, что для произвольного 2-компонентного оснащенного зацепления $(\mathbf{L}, \xi)$ с $c_0(\mathbf{L}) = k$ существует некоторая последовательность Ξ элементарных преобразований 1-2, переводящая оснащенное зацепление $(\mathbf{L}, \xi)$ в зацепление $(\mathbf{L}_{Hopf}(k), \xi')$. Последовательность Ξ индуцирует последовательность $\Xi^{\uparrow}$ преобразований 3-компонентного зацепления $(\mathbf{L}^{\uparrow})$ в 3-компонентное зацепление $(\mathbf{L}_{Hopf}(k)^{\uparrow})$. Для произвольного оснащения ξ_1 компоненты $L_{Hopf;1}$ зацепления $\mathbf{L}_{Hopf}(k)$ справедливы равенства $M(\mathbf{L}_{Hopf}(k)^{\uparrow}) = M({}_3k\mathbf{L}_{Hopf}(1)^{\uparrow}) = k^4 M(\mathbf{L}_{Hopf}(1)^{\uparrow}) = k^4 M(\mathbf{L}_{Hopf}(1,1,k)) = 0$. Проверим, что для каждого из перечисленных выше элементарных преобразований значение $M(\mathbf{L}^{\uparrow})$ не меняется.

Рассмотрим случай преобразования 1. В формуле (118) меняются только слагаемые $(1,2)(2,3)(3,1)\gamma^\circ$ и $(2,3)(1,3)\beta^\circ(L_{1,1},L_{1,2})$, где компоненты $L_{1,1},L_{1,2}$ получены в результате удвоения компоненты L_1 по заданному оснащению ξ, через $(1,2)$ обозначен $k(L_{1,1},L_{1,2})$, через $(1,3)$ обозначен $k(L_{1,1},L_3)$, через $(2,3)$ обозначен $k(L_{1,2},L_3)$. Каждое слагаемое меняется на величину

$$2\sigma k(L_{1,1},L_{1,2})k(L_{1,1},L_3)k(L_{1,2},L_3),$$

где σ–знак исчезающего треугольника в особой точке Δ–движения. Изменения слагаемых обратны по величине и компенсируют друг друга. Доказано, что при преобразовании 1 значение $M(\mathbf{L}^{\uparrow})$ не меняется.

Рассмотрим случай преобразования 1. В формуле (127) меняются только слагаемые $(1,2)(2,3)(3,1)\gamma^\circ(\mathbf{L}^{\uparrow})$ и $(1,2)^2(2,3)^2\beta^\circ(L_{1,1},L_3)$, $(1,2)^2(1,3)^2\beta^\circ(L_{1,2},L_3)$. Изменения первого слагаемого скомпенсировано суммарным изменением второго и третьего. Доказано, что при преобразовании 2 значение $M(\mathbf{L}^{\uparrow})$ не меняется. Утверждение 3 доказано. Лемма 16 доказана.

Для произвольного оснащенного 3-компонентного зацепления $(\mathbf{L},\xi) = ((L_1,\xi_1),(L_2,\xi_2),(L_3,\xi_3))$, переобозначим зацепление $((2,3)(L_1,\xi_1),(3,1)(L_2,\xi_2),(1,2)(L_3,\xi_3))$ через $(\mathbf{L}^{norm},\xi^{norm})$. Согласно построению все попарные коэффициенты зацепления компонент зацепления $(\mathbf{L}^{norm},\xi^{norm})$ одинаковые и равны произведению $(1,2)(2,3)(3,1)$ попарных коэффициентов зацепления компонент зацепления $(\mathbf{L},\xi)$.

Определение 17. Определим инвариант $\tilde{M}$ по формуле

$$\tilde{M}(\mathbf{L}) = \frac{M^\circ(\mathbf{L}^{norm},\xi^{norm})}{(1,2)^4(2,3)^4(3,1)^4}, \tag{128}$$

если $(1,2)(2,3)(3,1)\neq 0$.

Лемма 18. *Значение $\tilde{M}(\mathbf{L})$, определенное формулой* (128)*, является инвариантом конечного порядка. Его можно доопределить по непрерывности при* $(1,2)(2,3)(3,1)=0$.

Доказательство Леммы 18

Поскольку M° инвариант конечного порядка и по Лемме 15 и, кроме того, его значение не зависит от выбора оснащения ξ.

Следовательно, значение $M^\circ(\mathbf{L}^{norm}, \xi^{norm})$ можно рассматривать как многочлен, от переменных $(1,2),(2,3),(3,1)$, коэффициенты которого зависят от значений C_1 на собственных подзацеплениях. Докажем, что этот многочлен делится на $(1,2)(2,3)(3,1)$ Воспользуемся формулой (124), благодаря которой достаточно доказать, что $C_1(\mathbf{L}^{norm}, \xi^{norm})$ обращается в нуль, если хотябы один из коэффициентов зацепления $(1,2)$, $(2,3)$ или $(3,1)$ обратился в нуль. В таком случае зацепление $(\mathbf{L}^{norm}, \xi^{norm})$ содержит маленькую незаузленную компоненту, и по свойству многочлена Конвея это выполнено (см. [P-S]). Лемма 18 доказана.

Доказательство Теоремы 8

Докажем, что инвариант $\tilde{M}$, определенный по формуле (128), является асимптотическим т.е. проверим равенства (76) и (77).

Проверим формулу (76). Пусть $(\mathbf{L}, \xi)$–произвольное оснащенное зацепление, $(\mathbf{L}^{norm}, \xi^{norm})$–его нормализация, $r(\mathbf{L}, \xi)$, $r(\mathbf{L}^{norm}, \xi^{norm})$–зацепления, полученные в результате r–кратной намотки зацеплений $(\mathbf{L}, \xi)$, $(\mathbf{L}^{norm}, \xi^{norm})$ соответственно. Рассмотрим движение Ξ зацепления $(\mathbf{L}, \xi)$ в зацепление $(L^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))$, состоящее из последовательности Δ–движений, операций замены оснащения компонент и изотопий (пересечения различных компонент не допускается). Рассмотрим движение $r\Xi$ зацепления $r(\mathbf{L}, \xi)$ в зацепление $rL^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))$, индуцированное Ξ. Используя Определение 17, из Леммы 16 вытекает, что подскоки $\delta\tilde{M}(\Xi)$, $\delta\tilde{M}(r\Xi)$ инварианта $\tilde{M}$ при Ξ и при $r\Xi$ связаны формулой

$$r^{12}\delta\tilde{M}(\Xi) = \delta\tilde{M}(r\Xi).$$

Докажем равенство:

$$r^{12}\tilde{M}(L^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))) + o(r^{12}) = \tag{129}$$

$$\tilde{M}(rL^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1))).$$

После очевидных преобразований первое слагаемое в левой части формулы (129) принимает вид:

$$r^{12}((1,2)(2,3)(3,1))^{-4}M^\circ(L^{+}_{Hopf})^{norm}((1,2),(2,3),(3,1))).$$

Правая часть формулы (129) принимает вид:

$$(r^6(2,2)(2,3)(3,1))^{-4})M^\circ(r^3(L^{+}_{Hopf})^{norm}((1,2),(2,3),(3,1)).$$

После замены переменной $t^3 \to t$ равенство (129) приобретает вид:

$$r^{12} M^{\circ}((L^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1)))^{norm}) + o(r^{12}) = \tag{130}$$

$$M^{\circ}(r(L^{+}_{Hopf}((1,2),(2,3),(3,1)))^{norm}).$$

Из Леммы 16 вытекает, что равенство (130) эквивалентно равенству:

$$r^{12} M^{\circ}((L^{+}_{Hopf}(k,k,k) + o(r^{12}) = M^{\circ}(r(L^{+}_{Hopf}(k,k,k))), \tag{131}$$

где $k = (1,2)(2,3)(3,1)$. С учетом равенства (119) достаточно доказать, равенство

$$M^{\circ}(r(L^{+}_{Hopf}(k,k,k))) = o(r^{12}). \tag{132}$$

Коэффициенты самозацепления оснащенных компонент зацепления $L^{+}_{Hopf}(k,k,k)$, выбираются равными k.

Докажем равенство (132). Зацепление $r(L^{+}_{Hopf}(k,k,k))$ переводим в зацепление $L^{+}_{Hopf}(r^2k, r^2k, r^2k)$ при помощи композиции гомотопий $\Xi_3 \circ \Xi_2 \circ \Xi_1$.

Гомотопия Ξ_1 имеет r пересечений компонет с номерами 1 и 2 и после такой гомотопии компонента rL_2 будет расположена в окрестности центральной линии компоненты rL_1, причем коэффициент зацепления компонент 1 и 2 уменьшится на r, а коэффициенты зацепления каждой из этих компонент с компонентой 3 не изменятся. В результате гомотопии Ξ_1 зацепление $\Xi_1(L^{+}_{Hopf}(r^2k, r^2k))$ совпадает с зацеплением $(rk((\mathbf{L}_0,\xi_0), rL_3)^{\uparrow}$, где $(\mathbf{L}_0,\xi_0)$–оснащенный узел с коэффициентом самозацепления зацепления k. Затем коэффициент зацепления компонент 1 и 2 зацепления $((rk(\mathbf{L}_0,\xi_0))^{\uparrow}, rL_3)$ увеличиваем до r^2k малой гомотопией Ξ_2 с самопересечениями. В результате гомотопии зацепления $\Xi_1(rL^{+}_{Hopf}(k,k,k))$ получится зацепление $\Xi_2 \circ \Xi_1(rL^{+}_{Hopf}(k,k))$ с равными попарными коэффициентами зацепления. Переобозначим для краткости гомотопию $\Xi_2 \circ \Xi_1$ через Ψ. Гомотопию Ψ можно представить в виде композиции r элементарных гомотопий Ψ_i, $i = 1,\dots r$, каждая из которых имеет две точки пересечения компонент с разными знаками и не меняет коэффициента зацепления:

$$\Psi = \Psi_r \circ \dots \Psi_1.$$

Гомотопия Ξ_3 переводит зацепление $\Psi(rL^{+}_{Hopf}(k,k))$ в зацепление $L^{+}_{Hopf}(r^2k, r^2k, r^2k)$. Гомотопии такого вида изучались в Лемме 16.3. Гомотопия Ξ_3 не меняет значение M°.

Обозначим через δM° подскок инварианта M° при гомотопии Ψ. Обозначим через $\delta C_1(L_1, L_2)$, $\delta C_1(L_1, L_2, L_3)$ подскок коэффициента C_1 при ограничении гомотопии Ψ на подзацепления из первых двух компонент, а через $\delta C_1(L_1, L_2, L_3)$ подскок коэффициента C_1 при гомотопии Ψ для всего 3-компонентного зацепления. С учетом равенства (124) достаточно доказать, равенства:

$$\delta C_1(L_1, L_2) = O(r^3), \tag{133}$$

$$\delta C_1(L_1, L_2, L_3) = O(r^5). \tag{134}$$

Проследим за изменением коэффициента $C_1(L_1, L_2)$ при элементарной гомотопии Ψ_i. При гомотопии Ψ_i скачек $\delta(C_1)_i$ коэффициента C_1 имеет порядок ir, сумма скачков $\sum_{i=1}^{r} \delta(C_1)_i$ имеет порядок r^3. Формула (133) доказана.

Проследим за изменением коэффициента $C_1(L_1, L_2, L_3)$ при элементарной гомотопии Ψ_i. При гомотопии Ψ_i скачек $\delta(C_1)_i$ коэффициента C_1 оценивается величиной порядка ir^3, следовательно, сумма скачков $\sum_{i=1}^{r} \delta(C_1)_i$ имеет порядок r^5. Формула (134) доказана. Формула (76) доказана.

Проверим формулу (77). Аналогичные вычисления приводят к равенству

$$M^\circ(r(L^{+}_{Hopf}(r^{\frac{2}{5}}, r^{\frac{2}{5}}, r^{\frac{2}{5}}))) = o(r^{12}). \tag{135}$$

Равенство (135) доказывается аналогично равенству (132) при использовании оценок:

$$\delta C_1(L_1, L_2) = O(r^{3+\frac{2}{5}}), \tag{136}$$

$$\delta C_1(L_1, L_2, L_3) = O(r^{5+\frac{4}{5}}). \tag{137}$$

Теоремы 8 доказана.

Гипотеза

Инвариант $\tilde{M}$, заданный в Определении 17 совпадает с интегральном инвариантом (44).

Список литературы

[Arn] Арнольд, В.И., Задачи Арнольда, Москва, Фазис, 2000.

[Arn-Kh] Арнольд В.И., Хесин Б.А., Топологические Методы в Магнитной Гидродинамике Москва МЦНМО 2007, in English: Arnold, V.I. and Khesin, B.A., Topological methods in hydrodynamics, Applied Mathematical Sciences, vol. 125, Springer, 1998.

[Akh] Akhmetiev, P.M., On a new integral formula for an invariant of 3-component oriented links, Journal of Geometry and Physics, 53 (2005) 180-196.

[Akh2] Akhmetiev, P.M., On a higher analog of the linking number of two curves, Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants, Amer. Math. Soc. Transl., Ser 2, vol 185, Amer. Vath. Soc., Providence, RI, pp. 113-127.

[Akh3] Ахметьев П.М., О высшем аналоге коэффициента зацепления пары бездивергетных векторных полей, Геометрия и топология. 6, Зап. научн. сем. ПОМИ, 279, ПОМИ, СПб., 2001, 15–23; English translation: Journal of Mathematical Sciences (New York), 2004, 119:1, 5–9.

[A-R] Ахметьев П.М., Реповш Д., "Обобщение инварианта Сато–Левина", Локальные и глобальные задачи теории особенностей, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН, 221, Наука, М., 1998, 69–80.

[A-M-R] Ахметьев П.М., Малешич Й., Реповш Д., Формула для обобщенного инварианта Сато–Левина, Матем. сб., 192:1 (2001), 3–12.

[A-K-K] Ахметьев П.М., Кунаковская О.В., Кутвицкий В.А., Замечание о диссипации интеграла магнитной спиральности, ТМФ, (2009) том 158, номер 1, страницы 150–160.

[A-K] Ахметьев П.М., Кунаковская О.В., Интегральная формула для Обобщенного Инварианта Сато-Левина в магнитной гидродинамике. (2009) Математические Заметки, 85:4 (2009), 524–537.

[Fri] Frish, U., Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov, Cambridge University Press (1995). Перевод: У. Фриш, Турбулентность, наследие А.Н. Колмогорова, Москва (1998), Фазис.

[Gh] Etienne Ghys, Lorenz and Modular Flows: A Visual Introduction A tangled tale linking lattices, knots, templates, and strange attractors . . . http://www.ams.org/featurecolumn/archive/lorenz.html

[H-M] Hornig, G. and Mayer, Ch., 2002, "Towards a third order topological invariant for magnetic fields", J. Phys. A: Math. Gen. 35, 3945-3959.

[TGKMSV] Dennis DeTurck, Herman Gluck, Rafal Komendarczyk, Paul Melvin, Clayton Shonkwiler, David Shea Vela-Vick, Triple linking numbers, ambiguous Hopf invariants and integral formulas for three-component links arXiv:0901.1612

[K] Кадомцев Б.Б., Перезамыкание магнитных силовых линий УФН, (1987) Том 151, вып. 1, 3-29.

[Kudr] Е.А.Кудрявцева, Некоторые открытые проблемы по топологии и динамическим системам, препринт, http://dfgm.math.msu.su/zadachi.php

[Me] Melikhov, S.A., Colored finite type invariants and a multivariable analogue of the Conway polynomial, Preprint. http//front.math.ucdavis.edu/math.GT/0312007.

[Mo] Moffatt H.K., Magnetic Field Generation in Electrical Conductive Fluids. Cambridge University Press. (1978).

[M-R] Monastyrsky, M.V., Retakh, V.S., Topology of linked defects in condensed matter, Commun. Math. Phys., 103 (1986) 445-459.

[Na] Y. Nakanishi, Delta link homotopy for two-component links, Topology and its Applications 121 (2002) 169-182.

[N] Ryo Nikkuni, Homotopy on spatial graphs and Generalized Sato-Levine Invariants, arXiv:0710.3627v2 [math.GT] 29 Jan 2008.

[PS] V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky, Knots, Links, Braids and 3-Manifolds, MCCME, Moscow, 1997; English transl., Trans. Math. Monogr., vol. 154, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1997.

[P-F] Eric Priest and Terry Forbes "Magnetic reconnection; MHD theory and applications", Cambridge University press 2000. русс. пер.: Э. Прист, Т. Форбс, "Магнитное пересоединение; магнитогидродинамическая теория и приложения", Москва Физматлит 2005.

[R] K.-H. Rädler, The Generation of Cosmic Magnetic Fields, Lecture Notes in Physics, From the Sun to the Great Attractor, Guanajuato Lectures on Astrophysics, D.Page and J.G.Hirsh (Eds.) Springer (1999).

[T] J.B.Taylor, Relaxation revisited, Physics of Plasmas Vol. 7, N5 (2000) 1623-1629.

[V] Васильев В.А., *Топология дополнений к дискриминантам*, Фазис, Москва, 1997.