комбинаторное вычисление комбинаторных формул для инвариантов узлов

В.А. Васильев

Аннотация. Мы строим алгебраический алгоритм вычисления комбинаторных формул для всех инвариантов узлов конечной степени. Отправляясь от произвольной *весовой системы*, т.е. допустимой главной части инварианта конечной степени, алгоритм либо доказывает, что эта весовая система в действительности не соответствует никакому инварианту узлов, либо эффективно задает инвариант с такой главной частью, а именно предъявляет некоторое конечное множество просто описываемых сингулярных цепей полной размерности в пространстве пространственных кривых, такое, что значение этого инварианта на произвольном типичном узле равно сумме кратностей этих цепей в окрестности узла. (В посчитанных к настоящему времени примерах первая возможность не реализовалась.) Этот алгоритм формально реализован над $\mathbb{Z}_2$, однако его обобщение на случай произвольных коэффициентов является лишь технической задачей. Алгоритм основан на изучении комплекса цепей в пространстве гладких кривых в трехмерном пространстве с фиксированным флагом направлений, а также в дискриминантном множестве этого пространства кривых.

Ключевые слова: узел, инвариант, комбинаторная формула, дискриминант, комбинаторный алгоритм, спектральная последовательность, субалгебраическая цепь, симплициальное разрешение.

Введение

Неформально, комбинаторная формула для инварианта узлов — это рецепт, позволяющий вычислять значение инварианта, глядя на диаграмму узла общего положения и учитывая (с подходящими коэффициентами) конфигурации ее особых (в подходящем смысле) точек. Мы даем формальное определение комбинаторной формулы и рассматриваем такие формулы для *инвариантов конечной степени*, описанных в [17], [3], [2]. Наиболее известные формулы для таких инвариантов — это стрелочные диаграммы Поляка–Виро [15], учитывающие только перекрестия диаграммы узла. Любой инвариант, задаваемый формулами Поляка–Виро, имеет конечную степень; согласно теореме Гусарова [8] верно и обратное: любой инвариант конечной степени выражается такой формулой. Существуют и другие комбинаторные формулы для некоторых инвариантов, в частности формулы, описываемые в [12], [4] и в настоящей работе (см. также [24], [27]).

Все известные ранее алгоритмы, позволяющие находить явные выражения всех инвариантов конечной степени, включают рисование картинок (диаграмм узлов или особых узлов) и деформирование этих картинок. Ниже мы предлагаем *полностью*

Частично поддержано грантами РФФИ-01-01-00660, INTAS–00-0259, грантом Президента России НШ-1972.2003.01 и программой "Современные проблемы теоретической математики"ОМН РАН.

комбинаторный алгоритм, т.е. алгоритм, имеющий дело не с плоскими или пространственными картинками, а только с легко кодируемыми комбинаторными объектами наподобие хордовых диаграмм. Выполнение алгоритма — это цепочка линейных алгебраических операций над этими объектами, аналогичных проверке гомологических 4T- и 1T-условий (см. [17, 2, 3]) на сумму хордовых диаграмм. В частности, сложность этого вычисления и результатов его работы оценивается выражением, зависящим только от степени нашего инварианта, но не от сложности возникающих по пути диаграмм узлов. Поэтому алгоритм готов к эффективной компьютерной реализации.

Отправляясь от подходящей *весовой системы* ранга k, т.е. главной части (или *символа*) инварианта степени k, этот алгоритм предъявляет конечный набор субалгебраических цепей полной размерности в пространстве узлов, каждая из которых выделяется не более чем k стандартными условиями на геометрию расположения узлов, причем значение нашего инварианта на любом типичном узле в $\mathbb{R}^3$ равно кратности суммы этих цепей в окрестности узла. Этот алгоритм основан на изучении комплекса цепей, заданных аналогичными условиями в разрешенном дискриминантном множестве, состоящем из особых пространственных кривых, ср. [23].

Мы демонстрируем работу алгоритма в случае простейших инвариантов степени 2 и 3, приведенных по модулю двойки.

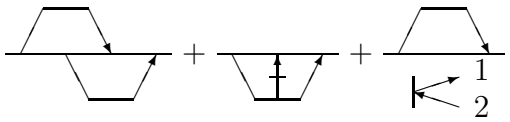
Эта работа является продолжением [24], но может читаться независимо. В [24] был предложен общий геометрический подход к построению комбинаторных формул для классов когомологий пространств узлов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Здесь мы подробно покажем, как он работает в наиболее классическом и хорошо изученном случае нульмерных классов, то есть инвариантов узлов в $\mathbb{R}^3$.

Вероятно, доказательство теоремы Гусарова о реализации инвариантов формулами Поляка–Виро доводится до некоторого алгоритмического метода нахождения таких формул. Описываемый ниже алгоритм пока что по нескольким параметрам уступает алгоритмам, получаемым при таком подходе. А именно,

а) он реализован только над $\mathbb{Z}_2$, т.е. без учета ориентаций возникающих сингулярных цепей;
б) его ответы менее однотипны, так как они включают некоторые члены, отличные от диаграмм Поляка–Виро;
в) главное преимущество — возможность эффективного программирования — пока не реализовано.

Этот список в действительности является программой дальнейших работ. Обобщение на случай целочисленных коэффициентов является чисто технической проблемой. Мы должны лишь выбрать (ко)ориентации всех элементарных цепей, из которых состоят наши комбинаторные формулы (эти цепи описаны в §2) и вычислить их коэффициенты инцидентности, ср. §3.3 в [17]. Эти коэффициенты всегда равны 0, 1 или -1, поэтому все результаты §3 настоящей работы (где мы описываем дифференциалы наших комплексов) и §4 (где описан и обоснован основной алгоритм) будут верны над целыми числами, как только мы поставим правильные знаки $\pm$ в их формулах.

Недостаток б) объясняется тем, что наш подход доставляет слишком много способов затягивания циклов, гомологичных нулю, полуалгебраическими подмножествами в пространстве кривых, см. например §4.2 ниже. Я не выбираю наиболее экономный из них, используя вместо этого способ, имеющий самое простое описание, но приводящий, вероятно, не к самым простым вычислениям. Поэтому имеющийся алгоритм называется *прямым*. Для примера, в §5 мы покажем, как этот алгоритм вычисляет комбинаторную формулу для простейшего инварианта (степени 2), см. стр. 72. Эта формула состоит из трех членов

(1) 

.

А именно, эта формула утверждает, что значение этого инварианта на любом типичном *длинном узле* (т.е. вложении $f : \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, совпадающем со стандартным вне некоторого компакта) равно (mod 2) сумме трех чисел:

а) числа конфигураций $(a < b < c < d) \subset \mathbb{R}^1$ таких, что $f(c)$ лежит над $f(a)$ в $\mathbb{R}^3$, а $f(d)$ над $f(b)$;

б) числа конфигураций $(a < b < c)$ таких, что $f(c)$ лежит над $f(a)$, а проекция точки $f(b)$ в $\mathbb{R}^2$ лежит к востоку от (общей) проекции точек $f(a)$ и $f(c)$;

в) числа конфигураций $(a < b)$ таких, что $f(b)$ лежит над $f(a)$ и направление "на восток"в $\mathbb{R}^2$ является линейной комбинацией проекций производных $f'(a)$ и $f'(b)$, причем первая из этих проекций участвует в этой линейной комбинации с положительным коэффициентом, а вторая — с отрицательным.

Почти тот же самый алгоритм с одним нетривиальным изменением (очевидным для человека, но пока не формализованным) дает формулу Поляка–Виро, состоящую из одного члена, см. §2 в [24] и Рис. 5 на стр. 16. Одна из ближайших задач — сделать имеющийся алгоритм не таким прямолинейным, т.е. научить его выбирать наиболее экономные варианты. С другой стороны, обилие возможностей дает много результатов сравнения комбинаторных формул, наподобие приведенных в [16]. В §7 я опишу другой алгоритм, опирающийся как на нашу гомологическую технику, так и на теорему Гусарова. Он имеет немного более простую формулировку и более простые результаты (в точности формулы Поляка–Виро), однако системы линейных уравнений, которые нужно решать при его выполнении, экспоненциально сложнее (по степени инвариантов). Кроме того, я не вижу, как можно было бы обобщить его на вычисление других классов когомологий пространств узлов, ср. [24].

Я приглашаю добровольцев, знакомых с математическим программированием, решить задачу в). Я надеюсь, что после этого компьютер сам сможет находить лучшие пути в проблеме б), и нам останется систематизировать его опыт.

Данная работа является лишь шагом в общей программе реализации классов когомологий произвольной размерности в пространствах узлов, ср. [24] (которая, в свою очередь, является лишь примером широкого класса подобных задач, касающихся эффективных методов в топологии пространств неособых объектов).

Как и в [24], наш алгоритм основан на изучении *дискриминантного подмножества* Σ в пространстве $\mathcal{K}$ гладких параметризованных кривых $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ с фиксированным поведением на бесконечности (т.е. множества отображений $f \in \mathcal{K}$, которые не являются гладкими вложениями). Главный инструмент — это *симплициальное разрешение* дискриминанта, т.е. некоторое топологическое пространство σ вместе с сюръективным отображением $\pi : \sigma \to \Sigma$. Группы гомологий пространств Σ и σ тесно связаны друг с другом и с когомологиями пространства узлов $\mathcal{K} \setminus \Sigma$. Разрешенный дискриминант σ обладает естественной фильтрацией $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots$, которая порождает спектральную последовательность, вычисляющую его группы гомологий.

Как и в [24], наш алгоритм по существу является добросовестным вычислением этой спектральной последовательности в терминах относительных цепей.[1] Мы начинаем с некоторой *весовой системы* ранга k, т.е. с относительного цикла γ в члене σ_k по модулю σ_{k-1}, представленного некоторой суммой открытых клеток максимальной размерности в $\sigma_k \setminus \sigma_{k-1}$. (Такие клетки находятся во взаимно однозначном соответствии с *классами эквивалентности k-хордовых диаграмм*, см. [20], [2] и §1 ниже.) Затем мы вычисляем его первую границу $d^1(\gamma) \subset \sigma_{k-1} \setminus \sigma_{k-2}$ и *затягиваем* ее там, т.е. строим цепь $\gamma_1 \subset \sigma_{k-1} \setminus \sigma_{k-2}$ такую, что $\partial\gamma_1 = -d^1(\gamma)$ в $\sigma_{k-1} \setminus \sigma_{k-2}$. Затем мы определяем $d^2(\gamma)$ как границу цепи $\gamma + \gamma_1$ в $\sigma_{k-2} \setminus \sigma_{k-3}$, затягиваем ее некоторой цепью $\gamma_2 \subset \sigma_{k-2} \setminus \sigma_{k-3}$, и т.д. Если исходная весовая система соответствовала какому-то инварианту узлов, то вся эта цепочка операций может быть выполнена, и мы получаем цикл $\gamma+\gamma_1+\ldots+\gamma_{k-1}$, то есть некоторый абсолютный цикл в одноточечной компактификации разрешенного дискриминанта σ. Проектируя его в исходный дискриминант Σ, получаем там некоторый полуалгебраический цикл. Наконец, мы затягиваем этот цикл некоторым относительным циклом ($\mathrm{mod}\ \Sigma$) во всем пространстве кривых $\mathcal{K}$: тавтологически, этот относительный цикл и есть искомая комбинаторная формула. В [24] с помощью этого метода были реализованы некоторые положительномерные классы когомологий в пространстве узлов.

Эта теория имеет глубокую аналогию с гомологическим исследованием наборов аффинных плоскостей в евклидовых пространствах, в особенности с явной реализацией их классов гомологий, предложенной в [28]. Больше об этой аналогии см. в [25], [26]. Рассмотрим пример.

Аналогично теории узлов, самый удобный способ вычисления гомологий наборов плоскостей основан на методе симплициальных разрешений. Этот метод является непрерывным аналогом комбинаторной формулы включений-исключений.

Наш основной пример — это набор $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^2$, состоящий из двух пересекающихся прямых, см. Рис. 1а. Допустим, что мы хотим вычислить его *группу гомологий Бореля–Мура* $\bar{H}_*(\mathbf{X})$, то есть группу гомологий его одноточечной компактификации

[1] Под вычислением гомологической спектральной последовательности обычно понимается вычисление ее с точностью до изоморфизма, включающее теорему существования, утверждающую, что каждый элемент вычисленной группы $E^\infty_{p,q}$ может быть продолжен до цикла с такой главной частью. Доказательство этой теоремы обычно является неявным и следует из отсутствия гомологических препятствий к такому продолжению. Под добросовестным вычислением я имею в виду явное построение таких циклов.

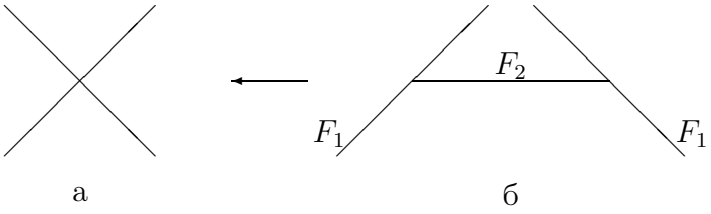


Рис. 1. Разрешение креста

$\bar{\mathbf{X}}$, приведенную по модулю добавленной точки (или, что в данном случае эквивалентно, группу гомологий комплекса локально конечных цепей пространства $\mathbf{X}$). Эта группа связана двойственностью Александера с обычной (приведенной по модулю точки) группой когомологий дополнительного пространства:

$$\bar{H}_i(\mathbf{X}) \sim \tilde{H}^{N-i-1}(\mathbb{R}^N \setminus \mathbf{X})$$

(в нашем случае $N = 2$). Симплициальное разрешение креста $\mathbf{X}$ показано на Рис. 1б. Именно, вначале мы берем две прямые, составляющие $\mathbf{X}$, по отдельности, а затем соединяем отрезком точки этих прямых, получившиеся из точки пересечения. Получившееся пространство $\mathbf{X}!$ обладает естественной собственной проекцией на $\mathbf{X}$, определяющей изоморфизм групп гомологий Бореля–Мура (и более того, продолжающейся до гомотопической эквивалентности их одноточечных компактификаций). На этом пространстве $\mathbf{X}!$ имеется естественная возрастающая фильтрация: ее член F_1 состоит из двух разведенных прямых, а F_2 совпадает со всем $\mathbf{X}!$.

В случае произвольного набора плоскостей Ψ в $\mathbb{R}^N$ мы также вначале берем все образующие его плоскости по отдельности, а затем добавляем симплексы, стягивающие их общие точки, таким образом, чтобы получающееся пространство $\Psi!$ обладало собственной проекцией на Ψ со стягиваемыми (хотя, вообще говоря, разными) слоями. Имеется несколько разных конструкций такого симплициального разрешения, см. [28], [19], [26]; мы используем конструкцию, определенную в терминах *порядкового комплекса* нашего набора плоскостей. Его определение см. в §1.2 на стр. 19. Получающееся разрешенное пространство $\Psi!$ всегда обладает естественной возрастающей фильтрацией длины $\leq N-1$: ее i-й член — это объединение всех *собственных прообразов* при проекции $\Psi! \to \Psi$ всех плоскостей коразмерности $\leq i$ в $\mathbb{R}^N$, получающихся пересечением некоторого числа плоскостей нашего набора.

В случае набора прямых $\mathbf{X}$, указанного на Рис. 1, соответствующая спектральная последовательность, вычисляющая группу гомологий Бореля–Мура, такова: единственные ее два ненулевых члена

$$E^1_{p,q} \simeq \bar{H}_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1})$$

— это $E^1_{1,0} \sim \bar{H}_1(F_1) \cong \mathbb{Z}^2$ и $E^1_{2,-1} \sim \bar{H}_1(F_2 \setminus F_1) \cong \mathbb{Z}$. Приведенные классы когомологий в $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}$ степени (= фильтрации) 1 — это в точности линейные комбинации индексов зацепления с прямыми, образующими $\mathbf{X}$.

В частности, мы видим, что гомологическая спектральная последовательность, вычисляющая группу $\bar{H}_*(\mathbf{X})$, стабилизируется в первом члене, и мы имеем

$$\bar{H}_i(\mathbf{X}) \equiv \bar{H}_i(\mathbf{X}!) \cong E^1_{1,i-1} \oplus E^1_{2,i-2}. \tag{2}$$

Аналогичная стабилизация в первом члене — общий факт, имеющий место для произвольных аффинных наборов плоскостей. Более того, имеет место *гомотопическое расщепление* [28], [19]: одноточечная компактификация объединения любого конечного набора аффинных плоскостей в $\mathbb{R}^N$ гомотопически эквивалентна букету одноточечных компактификаций пространств $F_k \setminus F_{k-1}$ естественной фильтрации симплициального разрешения этого набора плоскостей. Гомологическая версия этого расщепления — это формула Горески–МакФерсона [7] для когомологий дополнения к набору плоскостей.

Обозначим через A относительный цикл в разрешенном кресте $\mathbf{X}!$, порождающий группу $E^1_{2,-1} \equiv \bar{H}_1(F_2 \setminus F_1)$, то есть попросту фундаментальный класс горизонтального интервала на Рис. 1б. Хотя мы имеем расщепление (2) группы

$$\bar{H}_1(\mathbf{X}) \cong \tilde{H}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}),$$

этот цикл A сам по себе не определяет никакого класса когомологий и не может принимать значений на 0-мерных циклах в $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}$. Формула (2) утверждает лишь, что этот относительный цикл *может быть* продолжен до цикла Бореля–Мура во всем $\mathbf{X}$, который определит такой класс когомологий. Однако для того, чтобы корректно определить этот класс когомологий, мы должны явно построить такое продолжение.

Для этого мы вначале рассмотрим границу этого относительного цикла в F_1; она состоит из двух точек. Формула (2) утверждает, что ее можно *затянуть* в F_1, то есть представить как границу локально конечной цепи в F_1. Мы должны выбрать такую цепь A_1, тогда разность $A - A_1$ будет циклом во всем пространстве $\mathbf{X}!$. Затем возьмем прямой образ этого цикла в $\mathbf{X}$ и выберем относительный цикл пары $(\mathbb{R}^2, \mathbf{X})$, затягивающий этот цикл в $\mathbb{R}^2$. Этот относительный цикл уже может принимать значения на отдельных точках пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{X}$, определяя тем самым "комбинаторную формулу". В случае произвольного набора плоскостей в $\mathbb{R}^N$ мы должны сделать то же самое, но с бóльшим количеством шагов. Получив на входе какой-нибудь элемент группы $E^1_{p,q}$, мы сначала выбираем какой-нибудь локально конечный цикл A в $F_p \bmod F_{p-1}$, реализующий этот элемент, затем рассматриваем его границу $d^1(A)$ в $F_{p-1} \setminus F_{p-2}$, затягиваем ее там какой-нибудь цепью A_1, рассматриваем границу $d^2(A)$ цикла $A + A_1$ в $F_{p-2} \setminus F_{p-3}$, и т.д.

В случае наборов плоскостей в $\mathbb{R}^N$ имеется очевидный способ сделать все эти построения. Действительно, выберем произвольное постоянное векторное поле в $\mathbb{R}^N$, находящееся в общем положении с нашим набором плоскостей. Удобно представлять его себе как градиент типичной линейной функции ℓ. Любой член $F_i \setminus F_{i-1}$ стандартной фильтрации разрешения распадается в несвязное объединение прямых произведений некоторых плоскостей $L_I \subset \mathbb{R}^N$ размерности $N - i$ и подходящих симплициальных комплексов, возникающих при разрешении. Мы всегда можем затянуть любой цикл

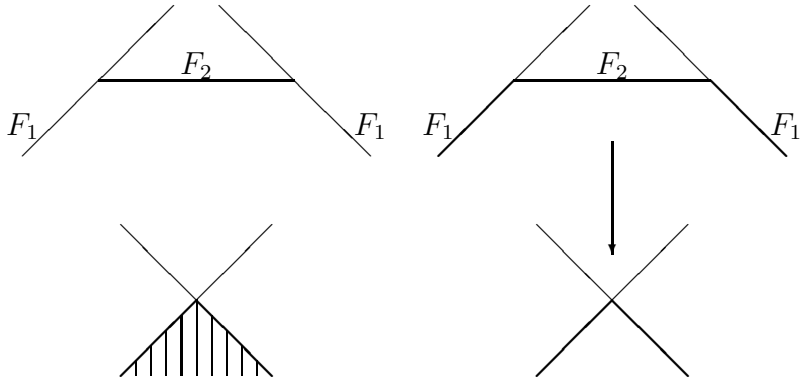


Рис. 2. “Комбинаторная формула"для класса когомологий второго порядка

$d^k(A)$ в этих компонентах множества $F_i \setminus F_{i-1}$ объединением лучей, вытекающих из точек этого цикла и таких, что их проекции на соответствующие плоскости L_I совпадают с траекториями градиентов ограничений функции ℓ на эти плоскости, а проекции на симплициальные объекты постоянны. Условие общности положения гарантирует, что эти лучи всегда трансверсальны к этим затягиваемым циклам.

В частности, для набора $\mathbf{X}$ эта процедура показана на Рис. 2. Мы предполагаем, что векторное поле направлено вниз. На левой верхней картинке мы выделяем жирной линией только исходный относительный цикл $A \subset F_2 \setminus F_1$; на правой верхней картинке мы дополнительно выделяем отрезки в F_1, затягивающие его границу; на правой нижней картинке мы видим проекцию получающегося цикла в $\mathbf{X}$; на левой нижней картинке заштрихована цепь, затягивающая этот цикл в $\mathbb{R}^2$ и заметенная траекториями нашего векторного поля, выходящими из точек этого цикла.

Конечно, при другом выборе направления в $\mathbb{R}^N$ мы получим другой относительный цикл (“комбинаторную формулу”), однако разность этих циклов будет иметь строго меньшую фильтрацию. Для примера, полезно провести на Рис. 2 аналогичное построение, исходя из другого направления в $\mathbb{R}^2$, скажем, из направления налево или вверх, и сравнить полученную при этом комбинаторную формулу с указанной выше.

В действительности, в случае наборов плоскостей нет необходимости выполнять все шаги этого вычисления, поскольку его результат можно угадать с самого начала: это реализация формулы Горески–МакФерсона, данная в [28]. Наш алгоритм является аналогом этого вычисления в более сложном случае пространств узлов, когда такое предсказание по-видимому невозможно.

Симплициальное разрешение дискриминанта Σ в пространстве $\mathcal{K}$ параметризованных кривых $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ (с фиксированным поведением на бесконечности) строится точно таким же образом. Вначале мы берем *тавтологическую нормализацию* множества Σ, т.е. тотальное пространство аффинного расслоения, база которого — это конфигурационное пространство $\overline{B(\mathbb{R}^1, 2)}$ всех неупорядоченных пар точек $a, b \in \mathbb{R}^1$, а слой над такой точкой (a, b) — это аффинное подпространство $L(a, b) \subset \mathcal{K}$, состоящее из всех отображений $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ таких, что $f(a) = f(b)$ если $a \neq b$ или $f'(a) = 0$ если

$a = b$. Это пространство снабжено очевидной проекцией на Σ и является естественным аналогом "объединения прямых, взятых по отдельности", то есть множества F_1 на Рис. 1б. Однако такие пространства $L(a,b)$ с разными парами (a,b) пересекаются в $\mathcal{K}$; следовательно, мы должны стянуть соответствующие их точки отрезками, треугольниками, и т.д. таким образом, чтобы получающееся пространство σ обладало естественной проекцией на Σ, слои которой стягиваемы.

Точная конструкция этого пространства σ описывается в терминах (естественным образом топологизированного) порядкового комплекса пространства всех аффинных подпространств в $\mathcal{K}$, равных пересечениям нескольких пространств типа $L(a,b)$. Оно также обладает естественной возрастающей фильтрацией $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots$, первый член которой совпадает с тавтологической нормализацией, а общий член σ_i является объединением собственных прообразов всех плоскостей $L(a_1,b_1) \cap L(a_2,b_2) \cap \dots$ коразмерности $\leq ni$.

Получающееся пространство σ очень похоже на Σ. При $n > 3$ их группы когомологий Бореля–Мура конечной коразмерности корректно определены и изоморфны между собой (и двойственны по Александеру группе когомологий пространства узлов). При $n = 3$ ситуация сложнее. A priori лишь часть классов гомологий Бореля–Мура конечной коразмерности пространства Σ (= классов когомологий пространства узлов в $\mathbb{R}^3$) представима образами циклов из σ. Это в точности классы когомологий *конечной степени*; их *степени* (или *порядки*) определяются нашей фильтрацией в σ. Однако эта подгруппа довольно велика: до сих пор не известно ни одного свободного класса гомологий пространства узлов в $\mathbb{R}^3$, на котором все классы когомологий конечного порядка принимали бы нулевое значение.

Первый член фильтрации, σ_1, гомологически тривиален: он является пространством аффинного расслоения над полуплоскостью $\mathbb{R}^2/\{(a,b) = (b,a)\}$, слой которого — аффинное подпространство коразмерности n в $\mathcal{K}$. Поэтому $\bar{H}_*(\sigma_1) \equiv 0$, и первый столбец $E^r_{1,q}$ соответствующей спектральной последовательности тождественно равен 0. Удобно разбить это пространство σ_1 на две клетки: одна из них является аффинным расслоением над открытой полуплоскостью $\{(a < b)\}$, а вторая равна ее границе и расслоена над диагональной прямой $\{(a,a)\}$. Аналогичные естественные разбиения на открытые клетки существуют для всех членов $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ нашей спектральной последовательности.

Далее, несложные вычисления показывают, что второй столбец $E^1_{2,q} \equiv \bar{H}_{2+q}(\sigma_2 \setminus \sigma_1)$ содержит единственный ненулевой член, который изоморфен $\mathbb{Z}$ и порожден пространством расслоения над некоторой 4-мерной открытой клеткой; слой этого расслоения равен произведению открытого интервала и аффинного подпространства коразмерности $2n$ в $\mathcal{K}$. По размерностным соображениям, этот столбец доживает до члена E^∞; более того, соответствующие циклы выдерживают проекцию $\sigma \to \Sigma$ и образуют подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}$, в группе гомологий Бореля–Мура коразмерности $2n-5$ пространства Σ. В силу двойственности Александера это означает, что единственная нетривиальная группа классов когомологий степени 2 в пространстве длинных узлов лежит в размерности $2n-6$ и изоморфна $\mathbb{Z}$; при $n = 3$ она порождена инвариантом Кассона v_2.

Мы рассмотрим комбинаторную формулу для этого базисного класса v_2 по аналогии с рассмотренным выше классом A, порождающим группу гомологий Бореля–Мура степени 2 для набора прямых с Рис. 1, приведенную по модулю классов степени 1. При этом для простоты все наши вычисления будут по модулю двойки, т.е. без учета ориентаций цепей.

Главная часть класса v_2 — это цикл, порождающий группу $\bar{H}_*(\sigma_2 \setminus \sigma_1)$. Этот цикл в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ заметается тройками вида

$$\big((a_1 < a_2 < b_1 < b_2) \subset \mathbb{R}^1, f, t\big)\,, \tag{3}$$

где $f \in \mathcal{K}$ — отображение $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ такое, что $f(a_1) = f(b_1)$, $f(a_2) = f(b_2)$, а $t \in (-1, 1)$ — параметр вдоль некоторого вклеенного интервала, возникающего в конструкции симплициального разрешения и аналогичного горизонтальному интервалу на Рис. 1б. Концы каждого такого интервала лежат в большей клетке $\breve{\sigma}_1$ члена σ_1, т.е. в пространстве пар

$$\big((a < b) \subset \mathbb{R}^1, f\big) \tag{4}$$

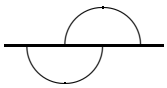
таких, что $f(a) = f(b)$. Именно, все такие концы вклеенных интервалов заметают в этой клетке $\breve{\sigma}_1$ подмножество, состоящее из таких ее точек (4), что дополнительно выполнено условие $f(a') = f(b')$ для некоторой пары точек $a' < b' \in \mathbb{R}^1$, где либо

$$a' < a < b' < b \tag{5}$$

либо

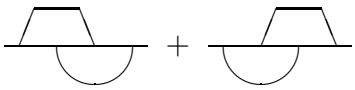
$$a < a' < b < b'. \tag{6}$$

Наш базисный цикл (3) в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ естественно закодировать “хордовой диаграммой"

(7)  ,

которая указывает взаимное расположение возможных пар точек (a_i, b_i), склеиваемых отображениями f, участвующими в его определении.

Два слагаемых границы этого цикла в σ_1, соответствующие двум возможным расположениям (5) и (6), будут обозначаться соответственно двумя частями выражения

(8)  .

Эти два слагаемых являются аналогами двух концов горизонтального отрезка на Рис. 1б.

Затянем эту границу цепью в клетке $\breve{\sigma}_1$. Напомним, что первое слагаемое в (8) — это объединение всех точек $((a, b), f) \in \sigma_1$ таких, что дополнительно найдутся две точки a', b' такие, что $a' < a < b' < b$ и $f(a') = f(b')$.

Естественно попытаться затянуть эту цепь в $\breve{\sigma}_1$ (то есть представить как участок границы) множеством точек $((a, b), f)$, удовлетворяющих тем же самым условиям, но с равенством $f(a') = f(b')$ замененным на условие, что проекции точек $f(a')$ и $f(b')$ на “плоскость доски"$\mathbb{R}^2$ совпадают, а проекция точки $f(a')$ на ортогональную к ней прямую лежит ниже проекции точки $f(b')$.

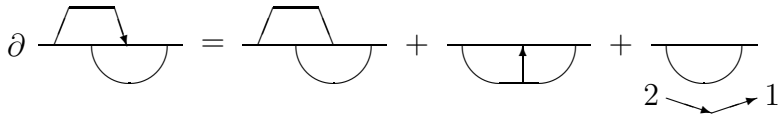
Последнее условие изображается “ломаной стрелкой"как в левой части уравнения (9).

Аналогично, мы пытаемся затянуть второе слагаемое в (8) цепью, изображенной в левой части уравнения (10).

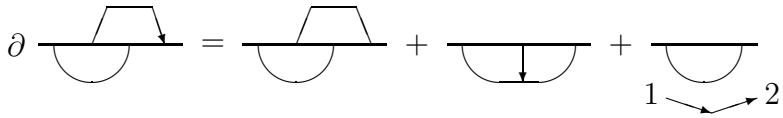
К сожалению, эти две цепи имеют лишние участки границы, так что их сумма не затягивает весь цикл (8). Эти участки соответствуют всевозможным вырождениям конфигураций четверок точек a, b, a' и b', участвующих в определении этих цепей.

А именно, полные границы этих двух цепей описываются правыми частями равенств (9) и (10). Проанализируем например первое из них.

(9)



(10)



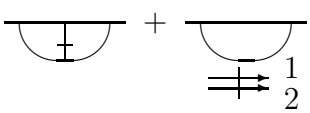
Второе слагаемое в его правой части возникает, когда сливаются первая точка a' и вторая точка a, участвующие в определении этой цепи. Оно состоит из таких точек $((a, b), f) \in \sigma_1$, что найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c)$ лежит над $f(a) = f(b)$ в $\mathbb{R}^3$.

На самом деле, эта формула должна бы содержать еще два слагаемых, возникающих, когда третья точка b' стремится либо к a либо к b. Однако эти два слагаемых совпадают и взаимно сокращаются, поскольку $f(a) = f(b)$. (Такое сокращение происходит и в аналогичных целочисленных вычислениях: эти два слагаемых возникают в целочисленной границе нашей цепи с противоположными ориентациями.)

Наконец, последнее слагаемое возникает, когда a' стремится к a, и одновременно b' стремится к b. Пространственная картинка соответствующего вырождения указана на Рис. 3а. Две нумерованные стрелочки в обозначении этого слагаемого выражают следующее условие: проекции на плоскость доски $\mathbb{R}^2$ производных нашего узла f в точках $a < b$ сонаправлены, однако во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ вектор $f'(a)$ идет “выше"чем $f'(b)$. Вторая формула (10) разбирается точно так же.

Мы получаем, что цикл (8) гомологичен в $\breve{\sigma}_1$ сумме вторых и третьих слагаемых в правых частях формул (9) и (10). Сумму этих вторых (соответственно, третьих) слагаемых удобно изобразить посредством первого (соответственно, второго) слагаемого в следующей формуле (11).

(11)



По определению, первое слагаемое в (11) состоит из точек $((a, b), f) \in \breve{\sigma}_1$ которые, в дополнение к обычному условию $f(a) = f(b)$, удовлетворяют еще следующему: найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что проекция точки $f(c)$ на плоскость доски совпадает

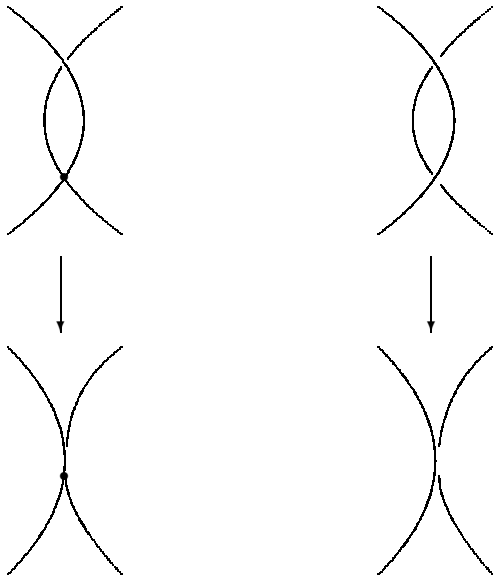


Рис. 3. Некоторые стандартные вырождения диаграмм особых узлов

с проекцией точки $f(a) \equiv f(b)$. Дополнительное условие, выраженное парой перекрещенных стрелок под вторым слагаемым в (11), означает, что проекции производных $f'(a)$ и $f'(b)$ на плоскость доски должны быть сонаправлены.

Итак, сумма слагаемых в правых частях формул (9), (10) задает гомологию между циклами (8) и (11), и нам остается затянуть второй из этих циклов. Этот цикл проще исходного: он состоит из двух цепей, каждая из которых определяется некоторыми условиями на поведение отображения f в трех или двух точках прямой $\mathbb{R}^1$, тогда как для обоих слагаемых исходного цикла (8) число таких “активных"точек равнялось 4. Эта ситуация типична для нашего алгоритма. На каждом его шаге нам нужно затянуть некоторый цикл, состоящий из нескольких цепей, каждая из которых задается некоторыми условиями на поведение f в нескольких точках. По крайней мере одно из этих условий должно быть условием типа равенства, выделяющим подмножество коразмерности 1 (например, самопересечение $f(\mathbb{R}^1)$ в $\mathbb{R}^3$, самокасание или тройное самопересечение проекции $f(\mathbb{R}^1)$ в $\mathbb{R}^2$, и т.д.). Тогда мы пытаемся затянуть такое множество аналогичным множеством, в определении которого это равенство заменяется неравенством, связывающим те же самые величины. Последнее множество обычно имеет лишние участки границы, но эти участки возникают при вырождении конфигураций активных точек, а следовательно проще исходного цикла. Алгоритм сходится в силу индукции по числу активных точек.

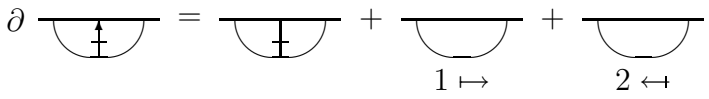
Итак, инструментарий нашего алгоритма включает некоторый набор подмножеств (*субалгебраических цепей*) полной размерности в пространстве кривых и в разрешении его дискриминанта, из которых состоят все наши затягивающие цепи, и списка

всевозможных неприводимых подмножеств коразмерности 1, из которых могут состоять границы предыдущих цепей. Эти подмножества перечисляются в §2 ниже. Все то же самое верно и для аналогичного (пока подробно не описанного) алгоритма с целыми коэффициентами, который будет отличаться от существующего алгоритма mod 2 заданием кооориентаций всех этих множеств и вычислением их коэффициентов инцидентности. Аналогичный инструментарий для алгоритмического вычисления комбинаторных формул для r-мерных классов когомологий должен включать аналогичные списки подмножеств коразмерностей r и $r+1$, но эти алгоритмы будут сложнее.

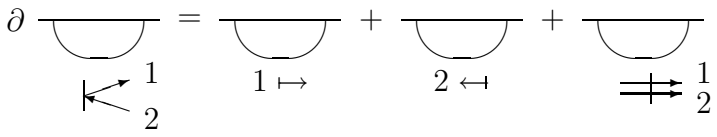
Применим эту процедуру к циклу (11). Заменим условие типа равенства, выделяющее его первое слагаемое, то есть условие "существует точка $c \in (a,b)$ такая, что проекции точек $f(c)$ и $f(a) \equiv f(b)$ в $\mathbb{R}^2$ совпадают"на условие типа неравенства: "существует точка $c \in (a,b)$ такая, что проекция точки $f(c)$ в $\mathbb{R}^2$ лежит *к востоку* от проекции точки $f(a) = f(b)$". Это условие изображается единожды перекрещенной стрелкой как в левой части равенства (12).

Также мы заменяем условие типа равенства, задающее второе слагаемое в (11), то есть условие "проекции векторов $f'(a)$ и $f'(b)$ в $\mathbb{R}^2$ сонаправлены"условием типа неравенства: "выбранное направление "на восток"в $\mathbb{R}^2$ лежит в угле между проекциями двух векторов $f'(a)$ и $-f'(b)$". Последнее условие изображается подписью под левой частью в (13).

(12)



(13)



Вновь, цепи, указанные в левых частях равенств (12), (13) обладают дополнительными участками границы, описанными в правых частях этих равенств. Например, условие $1 \mapsto$ означает, что проекция в $\mathbb{R}^2$ производной f' в первой активной точке направлена на восток. Сложность этих добавочных членов меньше, чем у членов, которые мы пытаемся затянуть. Например, гомология, заданная формулой (13), не уменьшает числа всех активных точек ее самой правой картинки (то есть второй картинки в (11)), но она заменяет условие, включающее две такие точки (выраженное подписью под этой картинкой) на условия, каждое из которых включает только одну такую точку, поэтому сложность опять уменьшается.

Эти дополнительные слагаемые в правых частях равенств (12), (13) взаимно сокращаются, поэтому сумма всех их слагаемых равна циклу (11). То же самое с необходимостью будет верно и в случае аналогичных вычислений над целыми числами (если поставить правильные знаки перед всеми участвующими членами) вследствие гомологических условий: все правые части наших равенств, равно как и цикл, который мы убиваем, не имеют границы.

Мы получаем, что искомая цепь, затягивающая цикл (8) в $\check{\sigma}_1$, равна сумме четырех множеств, указанных в левых частях равенств (9), (10), (12) и (13). Эта сумма задает гомологию между циклом (8) и некоторым циклом в меньшей клетке члена σ_1. По размерностным соображениям, последний цикл может быть лишь фундаментальным циклом последней клетки, взятым с некоторым коэффициентом. Но легко видеть, что граничные положения наших четырех подмножеств образуют подмножество положительной коразмерности в последней клетке. Поэтому искомый коэффициент равен нулю, и сумма наших четырех множеств затягивает цикл (8) во всем члене σ_1; эта сумма вместе с исходным относительным циклом (7) определяет цикл в σ_2, порождающий группу $\bar{H}_*(\sigma_2)$.

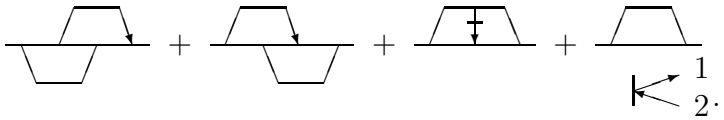
Замечание 1. В предыдущем абзаце мы благополучно миновали единственный опасный момент интегрирования весовой системы, т.е. момент, когда процесс интегрирования может прерваться доказательством того, что нашей исходной весовой системе γ не соответствует никакой инвариант узла. Именно, если степень γ равна k, то (успешный) алгоритм состоит из k шагов. Его начальными данными является цикл Бореля–Мура максимальной размерности в $\sigma_k \setminus \sigma_{k-1}$ закодированный этой системой γ. На r-м шагу алгоритм рассматривает некоторую геометрическую реализацию r-го дифференциала $d^r(\gamma)$, которая является циклом Бореля–Мура коразмерности 1 в $\sigma_{k-r} \setminus \sigma_{k-r-1}$, и пытается затянуть ее там, то есть представить как границу некоторой субалгебраической цепи полной размерности. Если это удается, то граница этой затягивающей цепи в $\sigma_{k-r-1} \setminus \sigma_{k-r-2}$ является начальными данными $d^{r+1}(\gamma)$ для следующего шага.

На каждом таком шагу наш алгоритм без проблем находит гомологию между $d^r(\gamma)$ и некоторым циклом в объединении вице-максимальных клеток. Последний цикл обязательно является линейной комбинацией этих клеток. Если гомологический класс этого цикла равен нулю, т.е. этот цикл равен границе некоторой линейной комбинации максимальных клеток, то мы вычитаем эту линейную комбинацию из предыдущей гомологии и получаем искомую цепь, затягивающую $d^r(\gamma)$. Однако если этот класс гомологий не равен нулю, то мы получаем препятствие к интегрированию. (По теореме Концевича, это не может случиться при вычислениях с рациональными коэффициентами, однако препятствие может оказаться элементом кручения и прервать интегрирование с целыми коэффициентами.) В принципе может случиться, что это препятствие не смертельно: если точно тот же нетривиальный класс гомологий возникал ранее как препятствие к интегрированию некоторой весовой системы γ' более низкой степени, то разность цепей, полученных при этих вычислениях для γ и γ', является относительным циклом в $(\sigma_k, \sigma_{k-r-1})$, который можно проинтегрировать еще по крайней мере на один шаг дальше; однако система γ' останется примером неинтегрируемой системы.

К счастью, во всех известных примерах все эти препятствия тривиальны, и нам остается сформулировать соответствующую общую гипотезу. На самом деле, во всех этих примерах тривиальность препятствия следует из того, что предельные положения наших гомологий (затягивающих циклы $d^r(\gamma)$ в максимальных клетках членов $\sigma_{k-r} \setminus \sigma_{k-r-1}$) образуют подмножества положительной коразмерности в вице-максимальных клетках, а следовательно гомологические границы этих гомологий в

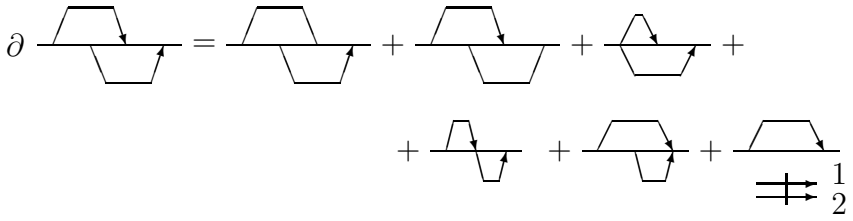
объединении последних клеток не только гомологичны нулю но и просто равны ему. Более сильная гипотеза гласит, что это — общая ситуация.

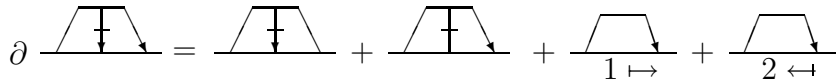
Теперь мы переходим к последнему шагу алгоритма и рассматриваем проекцию полученного цикла из σ в Σ. Проекция его части (7) имеет коразмерность 2 и не участвует в циклах коразмерности 1, отвечающих за инварианты узлов. С другой стороны, проекции в Σ четырех цепей из σ_1, найденных выше (т.е. левых частей равенств (9), (10), (12) и (13)) изображаются четырьмя слагаемыми следующей формулы:

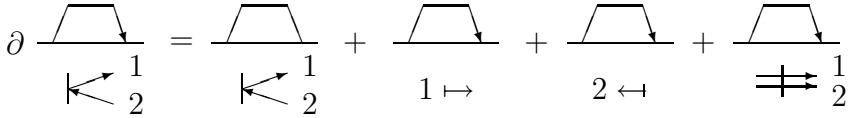
(14) 

Переход от цепи в σ_1 к цепи в Σ (выражаемый заменой круглых дуг на ломаные без стрелок) состоит во введении квантора $\exists$: мы заменяем множество точек $((a,b),f)$, удовлетворяющих условию $f(a)=f(b)$ и еще каким-то условиям, на множество отображений f таких, что найдутся точки a,b такие, что $f(a)=f(b)$ и выполнены все те же самые условия; если отображение f удовлетворяет этим условиям несколько раз, то мы берем его с соответствующей кратностью.

Вновь естественно попытаться затянуть полученную цепь другой цепью, в определении которой условие $f(a)=f(b)$ заменяется на условие, что $f(a)$ находится ниже $f(b)$ в $\mathbb{R}^3$. На языке картинок, это множество получается из исходного ориентированием ломаной (то есть рисованием стрелочки у одного из ее концов). Мы получим три картинки, указанные в левых частях равенств (15)—(17); отметим, что и первое и второе слагаемое цепи (14) появляются в правой части (15).

(15) 

(16) 

(17) 

Все остальные слагаемые в правых частях этих равенств очевидны, быть может за исключением последнего слагаемого в (15), которое аналогично последним слагаемым в (9), (10) и соответствует второму вырождению Райдемайстера, показанному на Рис. 3б.

Сумма третьего, четвертого и пятого членов в правой части равенства (15) равна второму слагаемому в (16). Поэтому сумма правых частей равенств (15)—(17) равна циклу (14), а сумма цепей, указанных в левых частях этих равенств (15)—(17), является искомой комбинаторной формулой, то есть относительным циклом пространства

кривых по модулю Σ, граница которого совпадает с циклом, порождающим группу гомологий Бореля–Мура порядка 2 пространства Σ. Эта сумма совпадает с формулой (1).

Замечание 2. Мы могли бы попытаться убить два слагаемых в (8) не левыми частями равенств (9) и (10), а аналогичными картинками с противоположными ориентациями ломаных. Если мы сделаем такую замену ровно для одного из этих слагаемых, то добавочные слагаемые в правых частях получающихся вариантов равенств (9) и (10) взаимно сократятся, так что сумма их левых частей затягивает цикл (8). Продолжая наш алгоритм, мы в этом случае получим в точности формулу Поляка–Виро с Рис. 5, состоящую из единственного члена, а не из трех членов, указанных в теореме 1. К сожалению, пока я не знаю, как сделать вычисление одновременно алгоритмическим и по возможности оптимальным в этом смысле.

В §2 мы опишем некоторые стандартные подмножества и цепи в пространстве кривых и в членах $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ разрешенного дискриминанта этого пространства: все затягивающие цепи γ_j и их границы будут строиться из этих цепей. В §3 мы изучим соотношения инцидентности между этими цепями, что необходимо для проверки гомологических условий. В §4 описывается основной алгоритм. В §5 мы в этих терминах прокомментируем проведенное только что вычисление комбинаторной формулы для инварианта v_2 фильтрации 2, в §6 мы покажем, как этот же алгоритм вычисляет комбинаторную формулу для следующего по сложности инварианта v_3 фильтрации 3.

Я очень благодарен А.Б. Меркову, помощь и критическое внимание которого были чрезвычайно полезны для этой работы. Вероятно, идея этой работы возникла у меня в результате наших предыдущих бесед. Кроме того, он выловил много недостатков в первом варианте алгоритма.

Значительная часть этой работы была выполнена в институте Исаака Ньютона (Кембридж), который я благодарю за гостеприимство.

1. Предварительные замечания

1.1. **Цепи в пространстве узлов.** Мы рассматриваем *длинные узлы*, см. [17], [24], т.е. гладкие вложения $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$, совпадающие со стандартным линейным вложением вне некоторого компакта в $\mathbb{R}^1$, см. Рис. 4. Мы обозначаем через $\mathcal{K}$ пространство всех отображений $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ с этими граничными условиями и определяем *дискриминант* $\Sigma \subset \mathcal{K}$ как множество таких отображений, имеющих либо самопересечения, либо особые точки. Длинные узлы — это в точности точки разности $\mathcal{K} \setminus \Sigma$. Точки множества Σ называются *особыми узлами*.

Мы работаем с пространством $\mathcal{K}$ как с вещественным аффинным пространством очень большой, но конечной размерности. Оправдание этому, основанное на технике конечномерных аппроксимаций, описано в [17]—[21]. Кавычки ‘ , ’ ниже выделяют

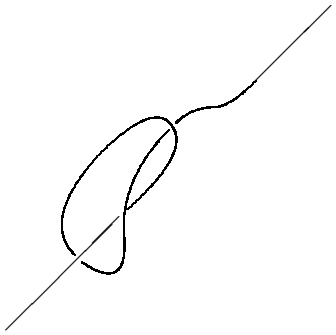


Рис. 4. Длинный узел

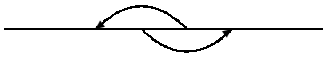


Рис. 5. Формула Поляка–Виро для инварианта Кассона

формально нестрогие утверждения и термины, которые нуждаются в этом оправдании. В частности, мы используем 'двойственность Александера' в $\mathcal{K}$,

$$\tilde{H}^i(\mathcal{K} \setminus \Sigma) \simeq \bar{H}_{3\omega-i-1}(\Sigma), \tag{18}$$

где $\tilde{H}^i$ — это группа когомологий, приведенная по модулю точки, 3ω — обозначение для 'размерности' пространства $\mathcal{K}$ (так что ω символизирует 'размерность' пространства функций $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ с фиксированным поведением на бесконечности), а $\bar{H}_{3\omega-j}$ — '*группа гомологий Бореля–Мура* коразмерности j'. Мы реализуем классы гомологий в правой части 'равенства' (18) при помощи 'субалгебраических цепей' бесконечной размерности, но конечной коразмерности.

Настоящий подраздел посвящен обсуждению следующего тезиса.

Замечание–Определение. Пусть задан какой-нибудь класс когомологий пространства узлов в $\mathbb{R}^n$ (например, инвариант узлов, если $n = 3$), тогда *комбинаторная формула* для этого класса — это *субалгебраический относительный цикл Бореля–Мура* в пространстве кривых $\mathcal{K}$ по модулю дискриминантного множества Σ, такой, что наш класс когомологий равен индексу пересечения с этим относительным циклом (или, эквивалентно, индексу зацепления с границей этого цикла).

Класс *субалгебраических цепей* будет определен чуть ниже. Сначала рассмотрим пример.

Формулы Поляка–Виро [15] — это картинки наподобие Рис. 5 ("стрелочные диаграммы") или линейные комбинации таких картинок. Формула Поляка-Виро, изображенная на Рис. 5, соответствует простейшему инварианту узлов (степени 2). Она читается следующим образом. Рассмотрим какой-нибудь длинный узел $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ общего положения, например узел с Рис. 4. *Представление* стрелочной диаграммы с Рис. 5 в узле f — это любой набор точек $\{a < b < c < d\} \subset \mathbb{R}^1$ такой, что $f(a)$

лежит ниже $f(c)$ и $f(d)$ лежит ниже $f(b)$ (относительно выбранного направления в $\mathbb{R}^3$). Значение этой диаграммы на нашем узле равно числу ее представлений (учтенных с подходящими знаками, явно описанными в [15]). Непосредственное вычисление показывает, что это число является инвариантом степени 2. Общие стрелочные диаграммы состоят из нескольких ориентированных дуг, соединяющих различные точки прямой $\mathbb{R}^1$.

Давайте поймем, в каком смысле предыдущая диаграмма определяет субалгебраическую цепь.

Рассмотрим прямое произведение $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^4$ пространства кривых $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ и пространства четверок точек $a, b, c, d \in \mathbb{R}^1$. Тогда все предыдущие условия очевидным образом определяют очень простой набор линейных условий в этом расширенном пространстве: 5 условий типа неравенства и $2(n-1) = 4$ условий типа равенства. Относительный цикл в $\mathcal{K}(\mathrm{mod}\ \Sigma)$, задаваемый формулой Поляка–Виро с Рис. 5, — это прямой образ при проекции в $\mathcal{K}$ фундаментального цикла множества, заданного этими линейными условиями.

В конечномерной алгебраической геометрии проекции полуалгебраических множеств или цепей остаются в тех же классах объектов в силу леммы Тарского-Зайденберга. В функциональном пространстве такой леммы нет, поэтому мы используем слово "*субалгебраический*" для образов полуалгебраических объектов при проектировании из чуть бóльших пространств.

Все цепи в пространстве кривых $\mathcal{K}$, возникающие в нашем алгоритме, субалгебраичны в том же самом смысле. Именно, они являются линейными комбинациями проекций некоторых полуалгебраических цепей.

Дадим точные определения.

Обозначим через W^m конфигурационное пространство наборов из m точек $a_1 < \cdots < a_m \in \mathbb{R}^1$; это — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть r — целое неотрицательное число, а $\tilde{A}$ — полуалгебраическая цепь коразмерности c в $\mathbb{R}^{3m(r+1)}$, то есть полуалгебраическое стратифицированное множество, минимальная коразмерность неособых стратов которого равна c, причем каждый такой страт коразмерности c снабжен коэффициентом из фиксированной группы коэффициентов и (если группа коэффициентов не второго порядка) кориентацией (= ориентацией нормального расслоения) в $\mathbb{R}^{3m(r+1)}$. Объединение замыканий стратов коразмерности c, коэффициенты при которых отличны от 0, называется *носителем* полуалгебраической цепи.

Формально полуалгебраическая цепь $A \subset \mathcal{K} \times W^m$, соответствующая цепи $\tilde{A}$, определяется как прообраз цепи $\tilde{A}$ при *мультиструйном отображении* j^r_m, сопоставляющем отображению f и набору точек $(a_1, \ldots, a_m) \subset \mathbb{R}^1$ набор r-струй отображения f в этих точках. Иными словами, A — это объединение таких точек $(f, (a_1, \ldots, a_m)) \in \mathcal{K} \times W^m$, что точка

$$\big(f(a_1), f'(a_1), \ldots, f^{(r)}(a_1), \ldots, f(a_m), \ldots, f^{(r)}(a_m)\big) \tag{19}$$

пространства $\mathbb{R}^{3m(r+1)}$ принадлежит носителю цепи $\tilde{A}$; такая точка $(f, (a_1, \ldots, a_m))$ снабжается тем же коэффициентом, что был у точки (19) в цепи $\tilde{A}$, а окрестность точки $(f, (a_1, \ldots, a_m))$ в A снабжается кориентацией в $\mathcal{K} \times W^m$, индуцированной из

кориентации $\tilde{A}$ при мультиструйном отображении j^r_m (которое, в силу теоремы трансверсальности Тома, трансверсально к цепи $\tilde{A}$ вблизи ее неособых стратов).

Замечание 3. Когда (в будущем) мы будем рассматривать классы когомологий пространства *компактных* узлов $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, нам придется определять формально полуалгебраические цепи с помощью пар цепей $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^{nm(r+1)}$ и $\tilde{B} \subset (S^1)^m$. Рассматривая пространства узлов в некотором многообразии M^n вместо $\mathbb{R}^n$, мы должны дополнительно заменить $\mathbb{R}^{nm(r+1)}$ на m-ю декартову степень пространства $J^r_0(\mathbb{R}^1, M^n)$ r-струй отображений $\mathbb{R}^1 \to M^n$ в начале координат линии $\mathbb{R}^1$.

В силу теоремы трансверсальности Тома, коразмерность цепи A в $\mathcal{K} \times W^m$ равна коразмерности цепи $\tilde{A}$ в $\mathbb{R}^{3m(r+1)}$.

Субалгебраические цепи в $\mathcal{K}$ определяются ниже с помощью проектирования формально полуалгебраических цепей из пространств $\mathcal{K} \times W^m$. При этом мы будем предполагать, что коразмерность $\operatorname{codim}(A)$ проектируемой цепи $A \subset \mathcal{K} \times W^m$ не меньше m.

Определение 1. Точка формально полуалгебраической цепи $A \subset \mathcal{K} \times W^m$ является *неособой*, если соответствующая точка (19) является регулярной точкой множества $\tilde{A}$ (то есть принадлежит некоторому страту минимальной коразмерности $\operatorname{codim}(\tilde{A})$ цепи $\tilde{A}$). Точка проекции $p(A) \subset \mathcal{K}$ носителя такой цепи называется *регулярной*, если все ее прообразы в A неособы и все точки из некоторой ее окрестности в $p(A)$ имеют одинаковое число прообразов. *Неособым участком* множества $p(A)$ называется любая компонента линейной связности множества регулярных точек в $p(A)$.

Предложение 1. *Пусть формально полуалгебраическая цепь $A \subset \mathcal{K} \times W^m$ определена полуалгебраической цепью $\tilde{A}$ коразмерности $\geq m$ в $\mathbb{R}^{3m(r+1)}$. Тогда*

1. множество $p(A)$ вблизи любой своей регулярной точки является гладким регулярным подмногообразием коразмерности $\operatorname{codim}(A) - m$ в $\mathcal{K}$ (то есть его сечение почти любой конечномерной аффинной плоскостью в $\mathcal{K}$, размерность которой больше чем $\operatorname{codim}(A) - m$, локально (вблизи любой регулярной точки) является подмногообразием такой коразмерности в этой плоскости);

2. коразмерность множества нерегулярных точек множества $p(A)$ в $\mathcal{K}$ строго больше, чем $\operatorname{codim}(A) - m$ (то есть пересечение этого множества с почти любой такой плоскостью имеет в этой плоскости коразмерность, бóльшую чем $\operatorname{codim}(A) - m$).

Все это следует из мультиструйной теоремы трансверсальности Тома, см. например [6]. □

По определению, *субалгебраическая цепь* $p_!(A)$, соответствующая цепи A, равна сумме неособых участков множества $p(A)$, взятых с естественным учетом кратностей. А именно, если мы изучаем $\mathbb{Z}_2$-когомологии пространства узлов (например, инварианты mod 2), то такой участок надо взять с кратностью 0 или 1 соответственно четности суммы коэффициентов при всех прообразах этого участка. Если же мы рассматриваем когомологии с целыми коэффициентами, то мы должны следующим образом

рассматривать кориентации (т.е. ориентации нормальных расслоений). Свертка со стандартной ориентацией в W^m производит из кориентации любого неособого участка цепи A некоторую кориентацию неособой части образа этого участка в $p(A)$. Цепь $p_!(A)$ равна сумме неособых участков множества $p(A)$, каждый из которых должен быть взят с произвольной кориентацией и с коэффициентом, равным сумме некоторых индексов по всем его прообразам в A: индекс, соответствующий какому-нибудь прообразу, равен произведению коэффициента при этом прообразе в цепи A и числа, равного 1 или -1 в зависимости от того, совпадает ли выбранная кориентация нашего участка в $p(A)$ с кориентацией, индуцированной из кориентации этого прообраза. Конечно, если мы выберем другую кориентацию неособого участка в $p(A)$, то сопоставляемый ему коэффициент в цепи $p_!(A)$ умножится на -1.

В конкретных примерах этот учет ориентаций имеет простую геометрическую интерпретацию, наподобие локальной закрученности (writhe), используемой в формулах Поляка–Виро.

Определение 2. *Элементарная субалгебраическая цепь* коразмерности $c \geq 0$ в $\mathcal{K}$ с целыми коэффициентами — это проекция произвольной формально полуалгебраической цепи $A \subset \mathcal{K} \times W^m$ ($\operatorname{codim}(A) = c+m$), неособые участки которой учитываются с описанными выше кратностями и кориентациями. *Носитель* элементарной субалгебраической цепи коразмерности c в $\mathcal{K}$ — это объединение замыканий всех ее неособых участков, коэффициенты при которых отличны от 0. *Субалгебраические цепи* коразмерности c в $\mathcal{K}$ — это конечные формальные суммы элементарных субалгебраических цепей $p_!(A_i)$ этой коразмерности, рассматриваемые с точностью до следующего отношения эквивалентности: сумма $\sum p_!(A_i)$ элементарных субалгебраических цепей коразмерности c *равна* другой такой цепи $\sum p_!(B_j)$, если для любого неособого участка объединения носителей всех этих элементарных цепей в $\mathcal{K}$ мы имеем $\sum m_i = \sum n_j$, где m_i (соответственно, n_j) — кратность этого участка в содержащем его неособом участке цепи $p_!(A_i)$ (соответственно, $p_!(B_j)$).

Определения в случае $\mathbb{Z}_2$-коэффициентов почти такие же, но при этом мы не должны учитывать кориентации.

Для этих цепей корректно определен граничный оператор (то есть граница любой субалгебраической цепи также представима субалгебраической цепью), а следовательно и ‘группа гомологий Бореля–Мура конечной коразмерности’ комплекса всех таких цепей. Цепь коразмерности c является *относительным циклом Бореля–Мура* (mod Σ) в $\mathcal{K}$, если ее гомологическая граница представима субалгебраической цепью, носитель которой содержится в Σ. Если это условие выполнено, то корректно определены индексы пересечения исходной цепи с c-мерными циклами пространства узлов $\mathcal{K} \setminus \Sigma$; более того, эти индексы зависят только от классов гомологий этих циклов.

1.2. **Симплициальное разрешение дискриминанта.** Как в [17]—[21] и [24], мы используем *симплициальное разрешение* множества Σ, т.е. другое ‘полуалгебраическое’ множество σ вместе с некоторым ‘собственным’ непрерывным отображением $\pi : \sigma \to \Sigma$. Это отображение индуцирует гомоморфизм ‘групп гомологий Бореля–Мура конечной коразмерности’ этих множеств. *Классы когомологий конечного типа*

в $\mathcal{K} \setminus \Sigma$ определяются как классы когомологий, двойственные по Александеру (18) к образам элементов группы $\bar{H}_*(\sigma)$ в $\bar{H}_*(\Sigma)$ при этом гомоморфизме. Эти классы образуют важную подгруппу $H^*_f \subset H^*(\mathcal{K} \setminus \Sigma)$. Пространство σ обладает естественной фильтрацией $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots$, порождающей спектральную последовательность $E^r_{p,q}$, вычисляющую 'группу гомологий Бореля–Мура конечной коразмерности' пространства σ, т.е. $E^r_{p,q} \to \bar{H}_{p+q}(\sigma)$, $E^1_{p,q} \simeq \bar{H}_{p+q}(\sigma_p \setminus \sigma_{p-1})$; здесь q принимает значения, 'почти равные' размерности пространства $\mathcal{K}$. Получающаяся фильтрация в группе гомологий Бореля–Мура пространства σ индуцирует фильтрацию в 'двойственной по Александеру' группе H^*_f. Например, 0-мерные классы когомологий (т.е. инварианты узлов) конечной фильтрации известны как инварианты конечного типа, а фильтрация инварианта часто называется его *порядком* или *степенью*.

В случае узлов в $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, *вся* (очень нетривиальная) группа когомологий пространства узлов вычисляется с помощью аналогичной конструкции: $H^*_f = H^*(\mathcal{K} \setminus \Sigma)$. Для $n = 3$ эта конструкция дает a priori лишь подгруппу в $H^*(\mathcal{K} \setminus \Sigma)$ (хотя пока не известно ни одного свободного класса гомологий в $\mathcal{K} \setminus \Sigma$, который принимал бы нулевые значения на всех классах когомологий из этой подгруппы). В оставшейся части статьи мы рассматриваем только случай инвариантов узлов в $\mathbb{R}^3$.

Каждый член $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, $i \geq 1$, стандартной фильтрации пространства σ является тотальным пространством некоторого $(3\omega - 3i)$-мерного аффинного расслоения над конечномерным полуалгебраическим множеством, канонически разбитым на конечное множество незамкнутых клеток. Поэтому и множество $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ состоит из конечного набора незамкнутых клеток (так что его одноточечная компактификация $\bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_{i-1}$ является 'CW-комплексом'). Группа гомологий клеточного комплекса, определенного этими клетками и их коэффициентами инцидентности, — это в точности искомый член $E^1_{i,*}$ нашей спектральной последовательности (с точностью до сдвига размерностей). В следующих подразделах 1.2.1—1.2.5 мы опишем конструкцию симплициального разрешения и перечислим его клетки, интересные для нас (т.е. участвующие в вычислении и реализации инвариантов узлов). При этом мы используем конструкцию симплициального разрешения σ, введенную в [18]. Она немного экономичнее, чем описанная в [17]—[21] (хотя и гомотопически эквивалентна ей).

1.2.1. *Симплициальные разрешения наборов плоскостей.* Следуя нашей аналогии с теорией конечных наборов плоскостей в $\mathbb{R}^N$, мы вначале построим симплициальные разрешения таких наборов.

Рассмотрим конечный набор $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ аффинных плоскостей произвольных размерностей в $\mathbb{R}^N$. Обозначим через L их объединение $\bigcup L_j$; для любого набора индексов $I \subset \{1, \dots, m\}$ обозначим через L_I плоскость $\bigcap_{j \in I} L_j$.

Наилучший метод вычисления групп гомологий пространства L основан на симплициальных разрешениях наборов $\mathcal{L}$. Имеется несколько конструкций таких разрешений. Мы используем здесь конструкцию из [28], основанную на понятии порядкового комплекса частично упорядоченного множества.

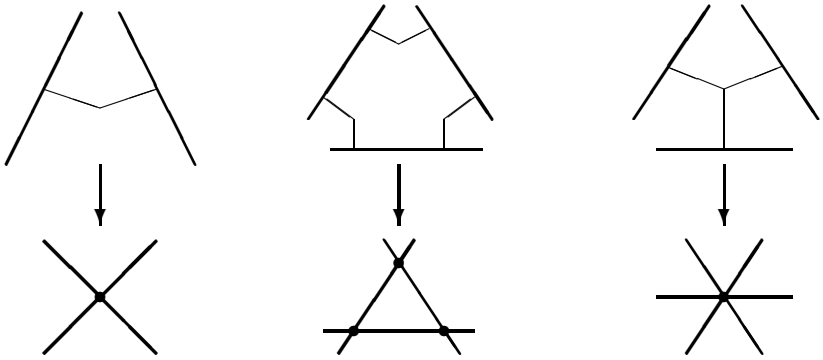


Рис. 6. Симплициальные разрешения наборов прямых

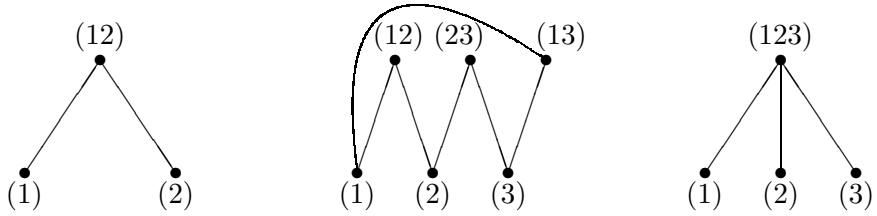


Рис. 7. Порядковые комплексы для наборов прямых с Рис. 6

Определение 3. Пусть дано частично упорядоченное множество $(A, <)$, тогда соответствующий *порядковый комплекс* $\Upsilon(A)$ — это симплициальный комплекс, вершины которого — это точки множества A, а симплексы натянуты на всевозможные монотонные (относительно нашего частичного порядка) последовательности таких точек.

Любой набор плоскостей $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_m\}$ определяет частично упорядоченное множество, точки которого соответствуют непустым множествам L_I, $I \subset \{1, \ldots, m\}$, а частичный порядок — инцидентностям; следовательно, определен и соответствующий порядковый комплекс $\Upsilon(\mathcal{L})$.

Например, для трех наборов прямых, указанных в нижнем ряду Рис. 6, соответствующие порядковые комплексы указаны на Рис. 7.

С любым набором I, таким, что $L_I \neq \emptyset$, связан порядковый подкомплекс $\Upsilon(I) \subset \Upsilon(\mathcal{L})$ — это объединение таких симплексов из $\Upsilon(\mathcal{L})$, у которых все вершины соответствуют плоскостям L_J, содержащим L_I. Любой такой подкомплекс $\Upsilon(I)$ стягиваем: действительно, все его максимальные симплексы имеют общую точку, соответствующую самой плоскости L_I. Обозначим через $\partial\Upsilon(I)$ *линк* этого подкомплекса, т.е. объединение всех его симплексов, не содержащих его экстремальную вершину $\{L_I\}$.

Симплициальное разрешение $\mathcal{L}'$ набора $\mathcal{L}$ определяется как подмножество декартова произведения $\Upsilon(\mathcal{L}) \times \mathbb{R}^N$, именно,

$$\mathcal{L}' \equiv \bigcup \Upsilon(I) \times L_I, \tag{20}$$

где объединение берется по всем геометрически различным непустым плоскостям L_I.

Очевидная проекция $\Upsilon(\mathcal{L})\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ определяет собственное непрерывное отображение $\pi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$. Все слои этого отображения совпадают с подходящими комплексами $\Upsilon(I)$, в частности, компактны и стягиваемы. Отсюда легко следует, что проекция π задает гомотопическую эквивалентность $\mathcal{L}' \sim \mathcal{L}$ и гомотопическую эквивалентность одноточечных компактификаций этих пространств, $\bar{\mathcal{L}}' \sim \bar{\mathcal{L}}$; в частности она определяет изоморфизмы как обыкновенных гомологий, так и гомологий Бореля–Мура пространства $\mathcal{L}'$ на аналогичные группы гомологий пространства $\mathcal{L}$.

Оказывается, что вычисление групп гомологий пространства $\mathcal{L}'$ намного проще, чем вычисление (изоморфных им) групп гомологий $\mathcal{L}$. Действительно, пространство $\mathcal{L}'$ обладает полезной возрастающей фильтрацией $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{N-1} = \mathcal{L}'$: ее член F_i — это объединение, аналогичное (20), но взятое только по пространствам L_I коразмерности $\le i$.

Например, для трех наборов прямых с нижней части Рис. 6, члены F_1 их разрешений показаны жирными линиями в верхней части рисунка и состоят из соответствующих прямых, взятых по отдельности; члены F_2 совпадают с пространствами разрешения и получаются добавлением ломаных, точки излома которых символизируют точки пересечения наших прямых в $\mathbb{R}^2$.

Предложение 2 (см. [28])**.** *Индуцированная фильтрация одноточечной компактификации $\bar{\mathcal{L}}'$ пространства $\mathcal{L}'$,*

$$\bar{F}_1 \subset \bar{F}_2 \subset \cdots \subset \bar{F}_{N-1} = \bar{\mathcal{L}}',$$

гомотопически расщепляется в букет последовательных факторов, т.е. имеется гомотопическая эквивалентность

$$\bar{\mathcal{L}}' \sim \bar{F}_1 \vee (\bar{F}_2/\bar{F}_1) \vee \cdots \vee (\bar{F}_{N-1}/\bar{F}_{N-2}).$$

В частности,

$$\bar{H}_* \simeq \bigoplus_{j=1}^{N-1} \bar{H}_*(F_j \setminus F_{j-1}).$$

Но любой член $F_j \setminus F_{j-1}$ распадается в несвязное объединение пространств $(\Upsilon(I) \setminus \partial\Upsilon(I)) \times L_I$ по всем плоскостям L_I коразмерности j; это немедленно дает формулу Горески–МакФерсона (см. главу III в [7]), сводящую гомологии Бореля–Мура пространства $\mathcal{L}$ к информации о размерностях различных пространств L_I.

1.2.2. *Симплициальное разрешение дискриминанта особых кривых.* Пусть $\mathcal{K}$ — пространство гладких отображений $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$, совпадающих со стандартным линейным вложением вне некоторого компакта в $\mathbb{R}^1$. Его дискриминант Σ — это множество таких отображений f, что найдется пара точек $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ такая, что

$$f(a) = f(b) \text{ если } a \neq b \quad \text{или} \quad f'(a) = 0 \text{ если } a = b. \tag{21}$$

Изучение пространства Σ очень сходно с изучением наборов плоскостей, поскольку это пространство заметается очень простым семейством плоскостей коразмерности 3 в $\mathcal{K}$: эти плоскости $L(a, b)$ параметризуются точками конфигурационного пространства

неупорядоченных пар $(a,b) \subset \mathbb{R}^1$ и при любых a и b состоят из всех отображений f, удовлетворяющих условию (21).

Следуя предыдущему разделу, мы можем построить симплициальное разрешение σ пространства Σ следующим образом: мы рассматриваем (подходящим образом топологизированный и пополненный) порядковый комплекс $\Delta(\mathcal{K})$ всевозможных плоскостей, получаемых как пересечения нескольких плоскостей типа $L(a,b)$, и определяем σ как подмножество декартова произведения $\Delta(\mathcal{K}) \times \mathcal{K}$ точно так же, как и раньше.

А именно, для любого натурального i рассмотрим множество всех аффинных подпространств коразмерности $3i$ в $\mathcal{K}$, получающихся как пересечение i плоскостей $L(a,b)$ с различными a и b. Обозначим через $\rho(i)$ замыкание этого множества в грассмановом пространстве всех подпространств такой коразмерности, это — $2i$-мерное полуалгебраическое множество. Оно естественным образом стратифицировано по комбинаторным типам вырождения набора $2i$ точек, определяющих эти i плоскостей. Опишем эти страты.

Для любого мультииндекса $A = (a_1, a_2, \dots, a_k; m_1, \dots, m_l)$, где $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ — натуральные числа, бóльшие 1, а m_j — произвольные натуральные числа, *мультиконфигурация* типа A — это произвольный набор из $a_1 + \dots + a_k$ различных точек в $\mathbb{R}^1$, разбитый на группы мощностей $a_1, \dots, a_k$ и дополненный какими-то l попарно различными точками (некоторые из которых могут совпадать с некоторыми из предыдущих $a_1 + \dots + a_k$ точек), снабженными индексами ("кратностями") $m_1, \dots, m_k$. Удобно рассматривать любую такую конфигурацию как подпространство пространства отображений $\mathcal{K}$: именно, как пространство всех отображений, принимающих одинаковые значения в точках каждой группы мощности a_j, $j = 1, \dots, k$ и удовлетворяющих условию $f' = f'' = \dots = f^{(m_j)}$ в точке, помеченной индексом m_j. Коразмерность этого подпространства в $\mathcal{K}$ равна $3(\sum_{i=1}^{k}(a_i - 1) + \sum_{i=1}^{l} m_i)$, поэтому число $\sum_{i=1}^{k}(a_i - 1) + \sum_{i=1}^{l} m_i$ называется *сложностью* мультииндекса A и любой мультиконфигурации типа A. Обозначим через $W(A)$ пространство всех A-конфигураций в $\mathbb{R}^1$. Пространство $\rho(i)$ разбивается на множества $W(A)$, соответствующие всевозможным мультииндексам A сложности i. Это все еще не полная топологическая классификация его точек, поскольку это разбиение не учитывает возможные совпадения точек из a- и m-групп. Подразбив все пространства $W(A)$ в соответствии с топологическими типами этих совпадений, мы получим искомую стратификацию.

Пример 1. $W(2;\emptyset)$ — это пространство пар $\{a < b\}$ в $\mathbb{R}^1$, т.е. открытая полуплоскость. Его замыкание $\overline{W(A)}$ — это замкнутая полуплоскость, состоящая из пар $\{a \leq b\}$, она совпадает со всем $\rho(1)$. Их разность $\overline{W(2;\emptyset)} \setminus W(2;\emptyset)$ — это прямая $W(\emptyset;1)$. Пространство $W(2;1)$ состоит из трех максимальных стратов (см. формулу (26) на стр. 28), разделенных двумя вырожденными стратами.

Несвязное объединение пространств $\rho(i)$ по всем $i \leq d$ является частично упорядоченным множеством относительно естественного включения мультиконфигураций (этот порядок можно интерпретировать как инцидентность соответствующих функциональных подпространств). Обозначим через $\Delta(d)$ соответствующий *непрерывный порядковый комплекс*. Именно, для любого d мы рассмотрим джойн всех пространств

$\rho(i)$, $i \le d$, т.е. естественно топологизированное объединение всевозможных симплексов, вершины которых — это точки разных пространств $\rho(i)$, и выберем только те из этих симплексов, все вершины которых соответствуют какой-либо цепочке вложенных подпространств в $\mathcal{K}$. Такие симплексы называются *когерентными*, а объединение их является искомым пространством $\Delta(d)$. Для любой точки $L \in \rho(i)$ определим $\Delta(L)$ как объединение таких когерентных симплексов в $\Delta(d)$, все вершины которых соответствуют подпространствам, содержащим подпространство коразмерности $3i$, соответствующее L.

Далее, определим d-й член σ_d разрешения дискриминанта Σ как некоторое подмножество в $\Delta(d) \times \mathcal{K}$, именно, как объединение пространств $\Delta(L) \times L$ по всем точкам L всевозможных пространств $\rho(i)$, $i \le d$. По построению, $\sigma_d \subset \sigma_{d+1}$, и мы определяем σ как объединение всех этих пространств с топологией прямого предела.

Например, пространство σ_1 — это *тавтологическое разрешение* пространства Σ, т.е. пространство расслоения над полуплоскостью $\rho(1)$, слои которого — аффинные подпространства коразмерности 3 в $\mathcal{K}$.

Вообще, любое пространство $\sigma_d \setminus \sigma_{d-1}$ является пространством расслоения, слои которого суть подпространства коразмерности $3d$ в $\mathcal{K}$, а база — естественно топологизированное объединение пространств $\Delta(L) \setminus \partial\Delta(L)$ по всем $L \in \rho(d)$. Последнее объединение является конечномерным полуалгебраическим множеством. Следовательно, в силу изоморфизма Тома группы гомологий Бореля–Мура конечной коразмерности этого пространства $\sigma_d \setminus \sigma_{d-1}$ сводятся к обычным (конечномерным) гомологиям Бореля–Мура некоторого конечномерного объекта.

1.2.3. *Предварительная клеточная структура последовательных членов симплициального разрешения.* Как мы видели выше, каждое пространство $\rho(i)$ имеет естественную стратификацию по комбинаторным типам мультиконфигураций A сложности i. Все страты этой стратификации являются открытыми клетками. Для любой такой конфигурации $L \in \rho(i)$ соответствующий порядковый комплекс $\Delta(L)$ является $(i-1)$-мерным полиэдром, в частности компактным клеточным комплексом; следовательно, и пространство $\Delta(L) \setminus \partial\Delta(L)$ канонически разбито на открытые клетки. Эти разбиения всех таких пространств $\Delta(L) \setminus \partial\Delta(L)$ с L из одной и той же клетки множества $\rho(i)$ канонически гомеоморфны друг другу и образуют тривиальное расслоение над этой клеткой. Следовательно, и пространство $\Delta(i) \setminus \Delta(i-1)$ оказывается канонически разбитым на конечное число клеток: эти клетки нумеруются а) нашими клетками в $\rho(i)$ и б) для любой такой клетки, клетками нашего разбиения комплекса $\Delta(L) \setminus \partial\Delta(L)$ для произвольного L из этой клетки. Соответственно и пространство $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ аффинного расслоения $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1} \to \Delta(i) \setminus \Delta(i-1)$ разбивается на столько же клеток (бесконечной размерности), а именно на прообразы предыдущих клеток.

Размерность такой клетки не может превосходить числа $3(\omega - i) + i - 1 + |A|$, где $|A| = a_1 + \cdots + a_m + l$. Далее мы занимаемся инвариантами узлов в $\mathbb{R}^3$, то есть (в силу изоморфизма (18)) классами гомологий полной размерности в дискриминанте. Поэтому мы интересуемся только клетками максимальной $(3\omega - 1)$ и вице-максимальной $(3\omega - 2)$ размерностей.

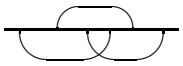


Рис. 8. Хордовая диаграмма

Все клетки размерности $3\omega-1$ связаны с пространством $W(A)$, где $A=(2,\dots,2;\emptyset)$ (i двоек). Это пространство $W(A)$ $2i$-мерно, и его связные компоненты находятся в каноническом взаимно-однозначном соответствии с классами эквивалентности (длинных) хордовых диаграмм. Такая диаграмма состоит из горизонтальной прямой ("линии Вильсона") и $2i$ попарно различных точек на ней, каким-то образом разбитых на пары, см. [17]. Со времен Гаусса такие пары точек изображаются дугами ("хордами") с концами в этих точках, см. Рис. 8. Линия Вильсона символизирует прообраз $\mathbb{R}^1$ наших длинных узлов и особых узлов $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^3$. Мы будем рассматривать также некоторые другие прямые $\mathbb{R}^1$, поэтому обозначим линию Вильсона через $\mathbb{R}^1_w$. (В параллельной теории *компактных узлов* $S^1\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ мы имеем не линию Вильсона, а петлю Вильсона S^1, спариваемые точки в которой соединены отрезками; это объясняет термины "хорда"и "хордовая диаграмма", см. [3], [2].) Две хордовые диаграммы *эквивалентны*, если они переводятся одна в другую сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом линии Вильсона.

Для любой конфигурации $L\in W(2,\dots,2;\emptyset)$ порядковый комплекс $\Delta(L)$ является барицентрическим подразбиением $(i-1)$-мерного симплекса, вершины которого соответствуют хордам соответствующей хордовой диаграммы. Итак, мы имеем $i!$ клеток максимальной размерности для любого класса эквивалентности хордовых диаграмм.

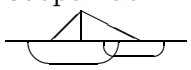
Клетки вице-максимальной размерности, определяющие гомологические условия на линейные комбинации максимальных клеток, бывают следующих трех типов.

B. С каждой связной компонентой того же пространства $W(2,\dots,2;\emptyset)$, т.е. с классом эквивалентности i-хордовых диаграмм, связаны вице-максимальные клетки, соответствующие вице-максимальным симплексам барицентрического подразбиения комплекса $\Delta(L)$ (где L — любая хордовая диаграмма из этого класса эквивалентности), не лежащим в его линке $\partial\Delta(L)$.

Два других класса вице-максимальных клеток в $\Delta(i)\setminus\Delta(i-1)$ связаны с различными вице-максимальными стратами пространства $\rho(i)$.

1T. Страты первого из этих классов являются открытыми подмножествами в $W(2,\dots,2;1)$ ($i-1$ двоек) и состоят из конфигураций $2i-1$ различных точек в $\mathbb{R}^1_w$, разбитых на $i-1$ пар (изображаемых хордами) и одну "особую" точку $*$. Для любой такой конфигурации L соответствующий порядковый комплекс $\Delta(L)$ вновь является барицентрическим подразбиением $(i-1)$-мерного симплекса, вершины которого соответствуют этим парам и особой точке. Для любого класса эквивалентности таких конфигураций имеется $i!$ вице-максимальных клеток нашего разбиения пространства $\Delta(i)\setminus\Delta(i-1)$, связанных со всеми *максимальными* симплексами этого барицентрического подразбиения для произвольного L из этого класса.

4T. Вице-максимальные страты второго класса в $\rho(i)$ состоят из конфигураций типа $(3,2,\dots,2;\emptyset)$, т.е. конфигураций $2i-1$ точек, разбитых на $i-2$ пар (вновь

изображаемых хордами) и одну тройку (изображаемую треножником) наподобие  . Для любой такой конфигурации L, порядковый комплекс $\Delta(L)$ содержит $3i!/2$ максимальных симплексов: они соответствуют всем упорядоченным последовательностям из i элементов, $i-2$ из которых соответствуют хордам конфигурации L, еще одна — некоторой паре точек из тройки, и одна — самой тройке; порядок этих элементов в последовательности может быть любым, лишь с тем исключением, что пара внутри тройки должна идти раньше, чем сама тройка. Если $i=2$, то носитель такого комплекса $\Delta(L)$ изображен на правой картинке Рис. 7; при любом $i\geq 2$ он гомеоморфен $(i-2)$-кратному конусу над этой фигурой (т.е. джойну ее с $(i-2)$-мерным симплексом).

1.2.4. *Приведенное клеточное разложение.* Описанное выше разбиение комплексов $\Delta(i)\setminus\Delta(i-1)$ (а следовательно и комплексов $\sigma_i\setminus\sigma_{i-1}$) на незамкнутые клетки чрезвычайно неэкономно. Для наших целей мы можем игнорировать многие из его клеток и скомбинировать остальные в бóльшие клетки.

Действительно, мы ищем линейные комбинации максимальных клеток, образующие циклы. Все $i!$ максимальных клеток, соответствующих одному и тому же классу эквивалентности $(2,\dots,2;\emptyset)$-конфигураций L, должны входить в такой цикл с одним и тем же коэффициентом, поскольку вице-максимальные клетки типа $\mathbf{B}$, разделяющие их, должны входить в границу цикла с нулевыми коэффициентами. Поэтому мы можем скомбинировать все эти $i!$ клеток в одну большую клетку, соответствующую всей внутренности комплекса $\Delta(L)$, и больше не вспоминать о вице-максимальных клетках типа $\mathbf{B}$.

Полученная клетка в $\sigma_i\setminus\sigma_{i-1}$ состоит из всех троек вида

$$(C,f,t), \tag{22}$$

где C — любая хордовая диаграмма из нашего класса эквивалентности, f — гладкое отображение $\mathbb{R}^1_w\to\mathbb{R}^3$, склеивающее вместе концы каждой хорды из C, а t — внутренняя точка $(i-1)$-мерного симплекса, возникающего в конструкции разрешения наподобие горизонтального интервала на Рис. 1б: вершины этого симплекса находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с хордами диаграммы C. Если $i=0$, то по определению единственная такая клетка (соответствующая хордовой диаграмме без хорд) совпадает со всем пространством $\mathcal{K}$ длинных кривых $f:\mathbb{R}^1_w\to\mathbb{R}^3$.

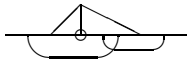
Итак, мы имеем $(2i)!/(i!2^i)$ максимальных клеток в $\sigma_i\setminus\sigma_{i-1}$, соответствующих всем возможным паросочетаниям данных $2i$ точек. Размерность любой такой клетки равна $2i+(3\omega-3i)+(i-1)=3\omega-1$, т.е. размерности гиперповерхностей в $\mathcal{K}$.

Далее, все вице-максимальные клетки типа $\mathbf{1T}$, связанные с одним и тем же классом эквивалентности типичных $(2,\dots,2;1)$-конфигураций, возникают в границе любой линейной комбинации таких укрупненных максимальных клеток с одним и тем же коэффициентом, поэтому мы можем также скомбинировать их в единую клетку.

Точка такой клетки вновь имеет вид (22), где C — любая конфигурация из нашего класса эквивалентности, f — отображение, склеивающее точки любой пары и удовлетворяющее условию $f'(*)=0$, а t — точка открытого $(i-1)$-мерного симплекса, $i-1$

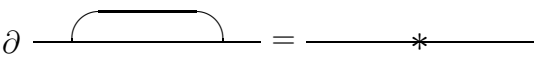
вершин которого соответствуют парам из этой конфигурации, а последняя вершина — точке $*$. Гомологическое условие на линейную комбинацию максимальных клеток (т.е. хордовых диаграмм), вытекающее из рассмотрения клеток типа **1T**, состоит в том, что любая хордовая диаграмма, у которой концы одной из хорд не разделены концами других хорд, участвует в любом цикле с нулевым коэффициентом; это условие называется *одночленным соотношением* или **1T**-*соотношением.*

Наконец, описанные выше вице-максимальные клетки типа **4T**, связанные с какой-либо $(3, 2, \dots, 2; \emptyset)$-конфигурацией, характеризуются выбором пары внутри тройки. Все клетки, для которых эта пара — одна и та же, возникают в любой границе с одним и тем же коэффициентом и без проблем могут быть скомбинированы в единую клетку. Таким образом, мы получаем три вице-максимальные укрупненные клетки, связанные с каждым классом эквивалентности $(3, 2, \dots, 2; \emptyset)$-конфигураций.

Такая клетка изображается хордовой диаграммой с одним треножником наподобие  , в котором точка тройки, *не принадлежащая выбранной паре*, отмечается маленьким кружочком. Любая точка такой клетки также имеет вид (22), где C — некоторая конфигурация из нашего класса эквивалентности, f — отображение $\mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^3$, склеивающее вместе точки каждой пары или тройки конфигурации C, а t — точка некоторого $(i-1)$-мерного симплекса, возникающего в конструкции разрешения: первые $i-2$ его вершины формально соответствуют хордам (парам) конфигурации C, еще одна вершина — тройке этой конфигурации, а последняя — выбранной паре внутри этой тройки.

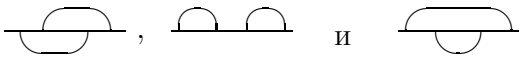
1.2.5. *Границы максимальных клеток.* Граница максимальной клетки в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, соответствующей i-хордовой диаграмме C, состоит из $2i-1$ слагаемых. Эти слагаемые соответствуют всем интервалам в $\mathbb{R}^1_w$, ограниченным соседними точками конфигурации C. Если концы такого интервала принадлежат одной паре, то она заменяется на особую точку $*$ и мы получаем одну вице-максимальную клетку типа **1T**. Если эти граничные точки принадлежат разным парам, то после стягивания эта пара пар вырождается в тройку. Соответствующее слагаемое в границе нашей максимальной клетки равно сумме двух вице-максимальных клеток типа **4T**, связанных с возникающей конфигурацией: это две клетки, в обозначениях которых точка, получающаяся при стягивании интервала, *не* обведена кружочком. Кроме того, эти граничные клетки надо взять с подходящими знаками, см. [17]. Здесь мы не будем рассматривать эти знаки, поскольку все наши вычисления будут только по модулю двойки.

Пример 2. Член σ_1 нашей фильтрации состоит из ровно двух клеток, одна из которых максимальна, а вторая равна ее границе:

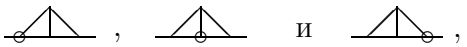
(23) ∂  .

Поэтому в пространстве длинных узлов не существует классов когомологий фильтрации 1, в частности инвариантов узлов степени 1.

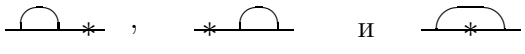
Пример 3. Член $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ содержит три клетки максимальной размерности:

(24) 

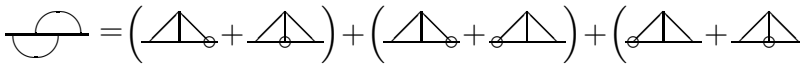
три вице-максимальные клетки типа **4T**:

(25) 

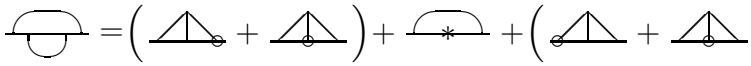
и три вице-максимальные клетки типа **1T**:

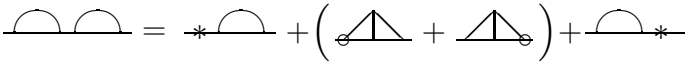
(26) 

Граничный оператор (mod 2), действующий из линейных комбинаций максимальных клеток в вице-максимальные, описывается тремя равенствами (27)—(29).

(27) 

где сумма в первой паре скобок (соответственно, во второй, соответственно, в третьей) возникает при стягивании интервала между первой и второй (соответственно, второй и третьей, соответственно, третьей и четвертой) точками хордовой диаграммы;

(28) 

(29) 

Следовательно, ядро этого оператора порождено первой хордовой диаграммой в (24).

Эта хордовая диаграмма порождает ядро и в случае целочисленных гомологий и определяет единственный (с точностью до множителя) инвариант второй степени.

Граница любой максимальной клетки (рассматриваемой как подмножество во всем разрешенном дискриминанте) содержится не только в том же члене $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ нашей фильтрации, но также и в ее младшем члене σ_{i-1}. Коразмерность пересечения этой границы с каждым членом σ_{i-j} равна j, поэтому для гомологических вычислений интересна лишь часть этой дополнительной границы, лежащая в $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}$. Эта часть границы максимальной клетки состоит из i слагаемых, соответствующих всем хордам хордовой диаграммы, индексирующей нашу клетку, или, что то же самое, всем $(i-2)$-мерным граням любого из $(i-1)$-мерных симплексов, заметающих нашу клетку, см. букву t в (22). Эти слагаемые не являются клетками или линейными комбинациями клеток аналогичного клеточного разбиения члена $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}$: их носители являются особыми гиперповерхностями в максимальных клетках этого разбиения. А именно, выберем произвольную хорду исходной i-хордовой диаграммы C_0. Стирая ее, мы получим некоторую $(i-1)$-хордовую диаграмму C_0', т.е. код некоторой максимальной клетки $V(C_0')$ в $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}$. Соответствующее слагаемое границы клетки $V(C_0)$, отвечающей i-хордовой диаграмме C_0, является особой гиперповерхностью в этой клетке члена $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}$. Эта гиперповерхность состоит из всевозможных троек (C', f, t') этой клетки (ср. (22)) таких, что C' эквивалентна C_0', а отображение f дополнительно склеивает некоторые две точки прямой $\mathbb{R}^1_w$, расположенные среди $2i-2$ точек $(i-1)$-хордовой диаграммы C' таким же образом, как концы стертой хорды. В обозначениях §2.4 эта гиперповерхность будет кодироваться картинкой, полученной из исходной i-хордовой диаграммы заменой выбранной хорды на ломаную линию с теми же концами.

1.3. **Субалгебраические цепи в клетках симплициального разрешения.** Описанные только что компоненты границ являются важным примером субалгебраических цепей в клетках пространства разрешения. (В §1.1 субалгебраические цепи определялись только в самòм функциональном пространстве $\mathcal{K}$.)

А именно, рассмотрим какую-либо максимальную клетку $V(C_0)$ множества $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, состоящую из всех точек вида (22), где C эквивалентна фиксированной хордовой диаграмме C_0. Пусть $m \geq 2i$, и некоторые $2i$ из m индексов $1, \dots, m$ выделены и разбиты на i пар $(j_1, j_1'), \dots, (j_i, j_i')$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{3m(r+1)}$ с 3-мерными координатами $\phi_1, \phi_1', \dots, \phi_1^{(r)}, \dots, \phi_m, \phi_m', \dots, \phi_m^{(r)}$. Тогда любая полуалгебраическая цепь $\tilde{A}$ коразмерности $c > m$ в $\mathbb{R}^{3m(r+1)}$, содержащаяся в плоскости, выделенной $3i$ условиями $\phi_{j_1} = \phi_{j_1'}, \dots, \phi_{j_i} = \phi_{j_i'}$, определяет *элементарную субалгебраическую цепь* $p_!(A)$ *в* нашей *клетке*. Точка (C, f, t) этой клетки (см. (22)) принадлежит этой цепи, если найдется множество C_1 мощности $m - 2i$ в $\mathbb{R}^1_w \setminus C$ такое, что пара $(f, C \cup C_1)$ принадлежит формально полуалгебраической цепи $A \subset \mathcal{K} \times W^m$, соответствующей $\tilde{A}$, а номера точек множества C среди точек множества $C \cup C_1$ (упорядоченных слева направо в $\mathbb{R}^1_w$) пробегают отмеченное множество индексов. Как и прежде, неособые участки множества таких точек в нашей клетке должны учитываться с подходящими кратностями и ориентациями, а пространство субалгебраических цепей в нашей клетке определяется как пространство линейных комбинаций элементарных субалгебраических цепей (с разнообразными m и r), профакторизованное по естественному отношению эквивалентности, ср. определение 2 на стр. 19.

Пространства субалгебраических цепей в вице-максимальных (и прочих) клетках члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ определяются аналогично.

Для реализации алгоритма нам потребуются лишь субалгебраические цепи, определяемые полуалгебраическими цепями $\tilde{A}$ нескольких специальных типов, которые будут описаны в следующем параграфе.

2. Зверинец цепей в пространстве кривых и в разрешенном дискриминанте

2.1. **Общие соглашения.** В нашем алгоритме рассматриваются только подмножества и цепи в максимальных и вице-максимальных клетках членов $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$.

Любая картинка, описывающая такую цепь, состоит из хордовой диаграммы (быть может с одним треножником или звездочкой), задающей клетку, в которой лежит носитель цепи, и некоторой фурнитуры (включающей ломаные линии и подписи), описывающей дополнительные условия, выделяющие эту цепь. Для примера см. Рис. 9 и оставшуюся часть статьи.

Эти картинки напоминают *сегментно-стрелочные диаграммы*, введенные А.Б. Мерковым [14] в связи с изучением инвариантов типичных плоских кривых, но содержат много дополнительных элементов, происходящих из трехмерности нашей задачи, а также из того, что мы рассматриваем цепи в разрешенном дискриминанте, а не только в функциональном пространстве $\mathcal{K}$.

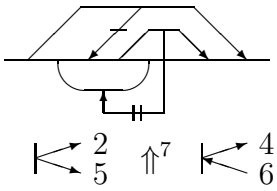


Рис. 9. Обозначение некоторой цепи в разрешенном дискриминанте

Дополнительные условия, определяющие наши субалгебраические цепи, будут описаны в §§2.2 и 2.4; сейчас мы дадим некоторые предварительные комментарии.

Все концы хорд и ломаных на картинке будут называться *активными точками* этой картинки, ср. [13], [14]. Они будут нумероваться слева направо в $\mathbb{R}^1_w$. Числа в подписях означают номера активных точек, участвующих в соответствующих условиях.

Зафиксируем полный флаг направлений в $\mathbb{R}^3$. Первое направление будет называться "вверх". "Плоскость стола"$\mathbb{R}^2$, в которой рисуются диаграммы узла, рассматривается как фактор пространства $\mathbb{R}^3$ по этому направлению. Говоря, что некоторая точка в $\mathbb{R}^3$ находится *выше* или *ниже* другой, мы имеем в виду это направление; в частности, такие две точки обязательно имеют одну и ту же проекцию в $\mathbb{R}^2$ вдоль этого направления.

Далее, мы выбираем направление на восток@" в этом факторпространстве $\mathbb{R}^2$ и говорим, что некоторая точка $x \in \mathbb{R}^3$ находится к востоку от точки y, если проекция в $\mathbb{R}^2$ вектора $\vec{yx}$ имеет это направление (в частности, такие две точки обязательно лежат в одной и той же аффинной двумерной плоскости, натянутой на направления "вверх"и "на восток"). На наших картинках это направление совпадает с направлением слева направо. Противоположное направление, естественно, называется "*на запад*".

Одиночная черта, пересекающая ломаную или участвующая в подписи (см., например, первую и последнюю подписи под Рис. 9 и стрелку на этом рисунке, ориентированную как $\swarrow$) означает, что соответствующее условие имеет дело с проекциями некоторых объектов (точек или касательных векторов) в $\mathbb{R}^2$.

Аналогично, мы рассматриваем факторпространство $\mathbb{R}^1$ плоскости $\mathbb{R}^2$ по направлению "на восток", фиксируем в нем направление на север@" и отмечаем двойной чертой $\|$ все условия, имеющие дело с проекциями на это пространство вдоль обоих рассмотренных выше направлений; см., например, вторую подпись $\Uparrow^7$ и одну из ориентированных ломаных на Рис. 9. На наших рисунках это направление к началу страницы; противоположное направление называется "*на юг*".

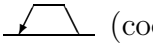
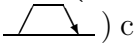
Проектирование $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ вдоль направления "вверх"обозначается через ρ_1, проектирование $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ вдоль обоих направлений "вверх"и "на восток"обозначается через ρ_2. Для любого отображения $f : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^3$ мы обозначаем через f_1 (соответственно, через f_2) композицию $\rho_1 \circ f : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^2$ (соответственно, $\rho_2 \circ f : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^1$). Последняя прямая $\mathbb{R}^1$ будет иногда называться *меридианом* нашей карты, а образы точек пространства $\mathbb{R}^3$ при отображении ρ_2 в эту прямую — их *широтами*.

Мы считаем, что фиксированное направление всех длинных узлов "на бесконечности"находится в общем положении с этим флагом направлений, а именно, для любого

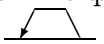
длинного узла f проекция $f_2 : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^1$ имеет постоянную *положительную* производную вне некоторого компакта в $\mathbb{R}^1_w$, см. Рис. 4.

2.2. **Цепи полной размерности.** Здесь мы опишем все дополнительные условия типа неравенств, выделяющие необходимые нам субалгебраические цепи полной размерности в максимальных клетках членов $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Из таких цепей строятся все затягивающие цепи γ_r, $r = k - i$, см. стр. 4. В частности, из таких цепей без хорд строятся искомые комбинаторные формулы в $\mathcal{K}$. Для примера см. на Рис. 9 обозначение некоторой такой цепи в максимальной клетке члена σ_1: она могла бы возникнуть в ходе построения комбинаторной формулы для инварианта узлов порядка 8 или больше.

Имеется пять типов таких дополнительных условий. Они описываются в пунктах **1**, . . . , **5** этого раздела. В скобках после номеров **1, . . . , 5** этих пунктов мы указываем мнемонические символы, обозначающие соответствующие условия.

1 (⊓). Ориентированная неперекрещенная ломаная  (соответственно, ) с концами $a < b$ на линии Вильсона обозначает условие "$f(a)$ ниже $f(b)$"(соответственно, "$f(a)$ выше $f(b)$"), где f — наше отображение $\mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^3$. *На картинке, изображающей цепь полной размерности в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, концы разных ломаных этого типа не могут совпадать друг с другом и с концами хорд.*

Замечание 4. Тем самым, условие очень близко к стрелке Поляка–Виро (так!) и эквивалентно ей в случае цепей в пространстве $\mathcal{K}$ (а не в разрешенном дискриминанте).

Замечание 5. В нашем алгоритме фактически будут встречаться только такие условия вида , условия же  зарезервированы для менее прямых алгоритмов.

Определение 4. Концы хорд или ориентированных неперекрещенных ломаных называются $\times$-*точками* нашей картинки (в отличие от φ-точек, которые мы определим в следующем пункте **2**). $\times$-точки картинки, изображающей цепь полной размерности, очевидным образом разбиты на пары. Такая пара точек вместе с соединяющей их хордой или ломаной называется $\times$-*парой.*

Например, на Рис. 9 мы имеем три $\times$-пары. В силу определения, образы $\times$-точек любой $\times$-пары при отображении f_1 совпадают в $\mathbb{R}^2$.

2 (↘). Ориентированная ломаная (которая случайно может оказаться однозвенной, то есть вектором), перекрещенная одной чертой и соединяющая центр хорды или неперекрещенной ломаной ⊓ с точкой линии Вильсона (например, как на картинках Рис. 10) означает, что при отображении f_1 образ точки (или $\times$-пары), соответствующей хвосту стрелки, лежит в $\mathbb{R}^2$ к западу от образа $\times$-пары (соответственно, точки), соответствующей острию. Конец такой перекрещенной ломаной, лежащий на линии Вильсона, называется φ-точкой. *На картинке, изображающей цепь полной размерности в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, точка линии Вильсона может быть φ-точкой не более чем одной такой ломаной.*

Замечание 6. Все условия типа **2**, возникающие в нашем алгоритме, обладают следующими двумя свойствами:

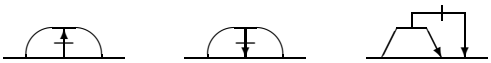


Рис. 10. Условия типа **2**

а) перекрещенная ломаная, задающая это условие, ориентирована от центра ×-пары к φ-точке;

б) φ-точка этой ломаной лежит в $\mathbb{R}^1_w$ между ×-точками соответствующей ×-пары.

Таким образом, из трех картинок с Рис. 10 у нас может возникнуть только средняя.

Свойство а) следует непосредственно из определения нашего алгоритма, свойство б) вытекает из п. 2а следствия 1 на стр. 63.

Определение 5. Дерево, образованное ×-парой вместе со всеми однократно перекрещенными ломаными, соединяющими ее центр с некоторыми φ-точками, называется *мостом*; перекрещенные ломаные, описанные в пункте **2**, — его *опорами*, а φ-точки таких ломаных — его *точками опоры*.

Очевидно, что если отображение $f : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям, выраженным картинкой с мостом, то образы всех точек опоры этого моста находятся на той же широте, что и образ его ×-пары, то есть образы всех этих точек при отображении f_2 совпадают.

3 ($\lessdot$). Подпись типа

(30)

(где j и l — номера ×-точек a_j, a_l некоторой ×-пары среди всех активных точек картинки) означает, что направление "на восток"в $\mathbb{R}^2$ является линейной комбинацией проекций в $\mathbb{R}^2$ производных отображения f в этих двух точках, и оба коэффициента в этой комбинации положительны (соответственно, коэффициент при проекции вектора $f'(a_l)$ положителен, а коэффициент при проекции $f'(a_j)$ отрицателен; соответственно, коэффициент при $f'_1(a_j)$ положителен, а коэффициент при $f'_1(a_l)$ отрицателен; соответственно, оба отрицательны).

Эти рисунки ничего не говорят об ориентациях реперов, образованных этими проекциями в $\mathbb{R}^2$. В частности, картинка (соответственно,) обозначает то же условие, что та же самая картинка с переставленными номерами l и j, а обозначает то же условие, что .

4 ($\Uparrow$ / $\Downarrow$). Подпись типа $\Uparrow^j$ (соответственно, $\Downarrow^j$) означает, что проекция $f'_2(a_j)$ производной $f'(a_j)$ отображения f в j-й активной точке в (касательное расслоение к) $\mathbb{R}^1$ направлена "на север"(соответственно, "на юг").

4а ($\|$ / $\nparallel$). Подпись $\|^j_l$ (соответственно, $\nparallel^j_l$), где j и l — номера двух активных точек a_j, a_l одного и того же моста, означает, что вектора $f'_2(a_j)$ и $f'_2(a_l)$ сонаправлены

Рис. 11. Условия типа **5**

(соответственно, противонаправлены) в $\mathbb{R}^1$. Эти условия сводятся к предыдущим при помощи *тождеств*

$$\|^j_l \equiv \left(\Uparrow^j \,\&\, \Uparrow^l\right) + \left(\Downarrow^j \,\&\, \Downarrow^l\right), \qquad \nparallel^j_l \equiv \left(\Uparrow^j \,\&\, \Downarrow^l\right) + \left(\Downarrow^j \,\&\, \Uparrow^l\right). \tag{31}$$

Например, первое из этих тождеств означает, что любая субалгебраическая цепь коразмерности 1 в нашей максимальной клетке, заданная каким-либо набором наших стандартных условий, включающим условие $\|^j_l$, равна сумме двух цепей, у которых все остальные задающие их условия — те же самые, а условие $\|^j_l$ в первой из них заменено на пару условий $\Uparrow^j$ и $\Uparrow^l$, а во втором — на $\Downarrow^j$ и $\Downarrow^l$.

5 ($\not\swarrow$). Для некоторой пары $\times$-пар (и их мостов) мы можем зафиксировать информацию, что образ $\times$-точек одной из этих пар в $\mathbb{R}^2$ лежит "севернее"образа $\times$-точек другой (т.е. его широта выше). Это условие выражается дважды перекрещенной (и, быть может, ломаной) стрелкой, направленной от центра более южной $\times$-пары к центру более северной, например как на Рис. 11.

Замечание 7. В нашем алгоритме это условие всегда обладает следующим свойством: $\times$-точки каждой из этих двух $\times$-пар разделены в $\mathbb{R}^1_w$ одной из $\times$-точек другой $\times$-пары.

Это следует из предложения 18б ниже, см. стр. 69.

Определение 6. Любая хордовая диаграмма, дополненная конечным набором условий типов **1**–**5**, пририсованных на или под ней, называется $\mathcal{F}$-*картинкой*. Такая картинка состоит из *главной части*, т.е. хордовой диаграммы и нарисованных на ней ломаных как в условиях типов **1, 2** или **5**, и *подписи*, т.е. приписанных под ней обозначений условий типов **3** и **4**. *Степень* такой картинки — это число хорд в ней.

Любая такая картинка Θ степени i следующим образом определяет субалгебраическую цепь $V(\Theta)$ в клетке множества $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, соответствующей хордовой диаграмме, состоящей из всех хорд этой картинки.

Определение 7. Отображение $f : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{K}$, *уважает* нашу $\mathcal{F}$-картинку, если оно склеивает вместе концы каждой ее хорды и удовлетворяет всем остальным условиям, закодированным в этой картинке.

Аналогично [15], *представление* $\mathcal{F}$-картинки в особом узле $f \in \mathcal{K}$ — это любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $h : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^1$ такой, что отображение $f \circ h$ уважает эту $\mathcal{F}$-картинку.

Субалгебраическая цепь $V(\Theta)$, определенная $\mathcal{F}$-картинкой Θ степени i, — это подмножество соответствующей максимальной клетки в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, в которое любая точка этой клетки (т.е. тройка (C, f, t) как в (22)) входит с кратностью, равной алгебраическому числу представлений нашей картинки в особом узле f.

В настоящей статье мы рассматриваем только $\mathbb{Z}_2$-гомологии, поэтому "алгебраическое число"означает просто четность числа представлений. В последующей работе будут учтены ориентации этих множеств, и "алгебраические числа"будут принимать любые целые значения.

В невырожденных случаях (когда мы не имеем взаимно исключающих условий, наподобие условий $\overset{l}{\underset{j}{\nwarrow\!\!\searrow}}$, $\Uparrow^l$ и $\Uparrow^j$, взятых одновременно) цепь $V(\Theta)$, определяемая $\mathcal{F}$-картинкой Θ, имеет полную размерность в соответствующей максимальной клетке.

Пример 4. Стрелочные диаграммы из [15] можно рассматривать как $\mathcal{F}$-картинки степени 0 (т.е. с пустыми хордовыми диаграммами), имеющие только условия типа **1** ($\sqcap\!\!\uparrow$). В [15] описан естественный способ учета знаков представлений этих диаграмм. В наших терминах, это позволяет сопоставить любой диаграмме целочисленную субалгебраическую цепь в пространстве $\mathcal{K}$. Теорема Гусарова [8] утверждает, что любой инвариант конечной степени можно реализовать при помощи рациональной линейной комбинации таких цепей.

Определение 8. *$\mathcal{F}$-блоком* называется любая субалгебраическая цепь $V(\Theta)$ *полной размерности* в максимальной клетке множества $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, определенная некоторой $\mathcal{F}$-картинкой Θ. Под *суммой* нескольких $\mathcal{F}$-картинок мы понимаем гомологическую сумму соответствующих $\mathcal{F}$-блоков.

Замечание 8. Мы могли бы рассматривать только нормализованные картинки, в которых знаки $\Uparrow^j$ или $\Downarrow^j$ проставлены при *каждой* активной точке. Действительно, любую $\mathcal{F}$-картинку, некоторые r активных точек которой свободны от таких знаков, можно разложить в сумму 2^r аналогичных картинок со всеми возможными комбинациями этих стрелок. Также мы могли бы рассматривать только картинки с *линейным* упорядочением мостов с юга на север (задаваемым дважды перекрещенными стрелками $\not\swarrow$ как в пункте **5**), раскладывая любую картинку с лишь частичным порядком в сумму картинок, соответствующих всевозможным его продолжениям до линейных порядков.

Однако все это экспоненциально увеличило бы число слагаемых, что нам нежелательно. Любая плоская картинка вроде диаграммы узла или особого узла содержит всю эту бесполезную информацию (и много что еще), что делает алгоритмы, решающие нашу задачу и активно использующие графическое исчисление, не очень эффективными для компьютерной реализации.

Замечание 9. *Виртуальные узлы* из [10], [8] (и классы эквивалентности виртуальных узлов) также можно рассматривать как области (а, следовательно, цепи полной размерности) в пространстве отображений $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$. Действительно, любая диаграмма виртуального узла определяет подмножество в $\mathcal{K}$, состоящее из отображений $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$, имеющих заданную проекцию $f_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих некоторым неравенствам над точками классических перекрестий, а над виртуальными ведущих себя произвольным образом (быть может пересекаясь). Объединение таких подмножеств, соответствующих классу изотопных диаграмм (относительно обычных

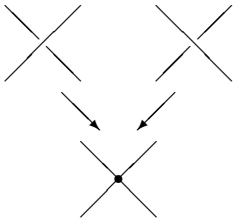


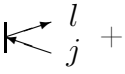
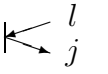
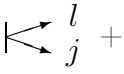
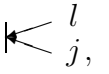
Рис. 12. **X**-вырождения

изотопий $\mathbb{R}^2$, неподвижных на бесконечности) очевидно является областью в $\mathcal{K}$. Наконец, любому виртуальному узлу (то есть, согласно [10], [8], классу эквивалентности таких изотопических классов) отвечает объединение всех таких областей, соответствующих этим изотопическим классам, дополненное "стенками"между ними, т.е. всеми отображениями f, вблизи которых это объединение плотно.

Аналогично, особые виртуальные узлы из [8] можно мыслить себе как области в подходящих членах симплициального разрешения дискриминанта.

Замечание 10. Условия **1–5** удовлетворяют большому числу соотношений. Вот несколько примеров.

(1) Помимо (31) условия $\|^j_l$ и $\nparallel^j_l$ удовлетворяют тождествам

(32) $\|^j_l =$  $+$  и $\nparallel^j_l =$  $+$  ,

связывающим их с условиями типа **3**, см. (30).

(2) Любое условие типа **3** на $\times$-пару в совокупности с условием типа **4** на любую точку этой пары влечет некоторое условие типа **4** на вторую ее точку.

(3) Имеются также тривиальные соотношения следующего типа. Сумма четырех почти совпадающих картинок, единственные различные фрагменты которых — это подписи четырех типов (30) с одними и теми же числами j и l, равна единственной картинке без этих фрагментов. Аналогично, сумма двух почти совпадающих картинок с подписями $\Uparrow^j$ и $\Downarrow^j$ равна единственной картинке без такой подписи.

2.3. **Стандартные вырождения.** Нам предстоит изучить некоторые субалгебраические цепи коразмерности 1 в наших максимальных клетках, а именно цепи, из которых состоят границы всех $\mathcal{F}$-блоков, рассмотренных в предыдущем разделе. Они возникают при следующих стандартных вырождениях особых узлов из этих блоков полной размерности.

X. Одно дополнительное самопересечение в паре точек прямой $\mathbb{R}^1_w$, удаленных от концов хорд и от φ-точек, см. Рис. 12.

R1, R2, R3: Вырождения, возникающие при стандартных перестройках Райдемайстера, см. Рис. 13. На нижнем левом рисунке подразумевается, что производная отображения f в точке "клюва"не равна нулю и направлена "вверх"(соответственно, "вниз") если параметр в $\mathbb{R}^1_w$ возрастает "справа налево"(соответственно, "слева направо") на этом рисунке.

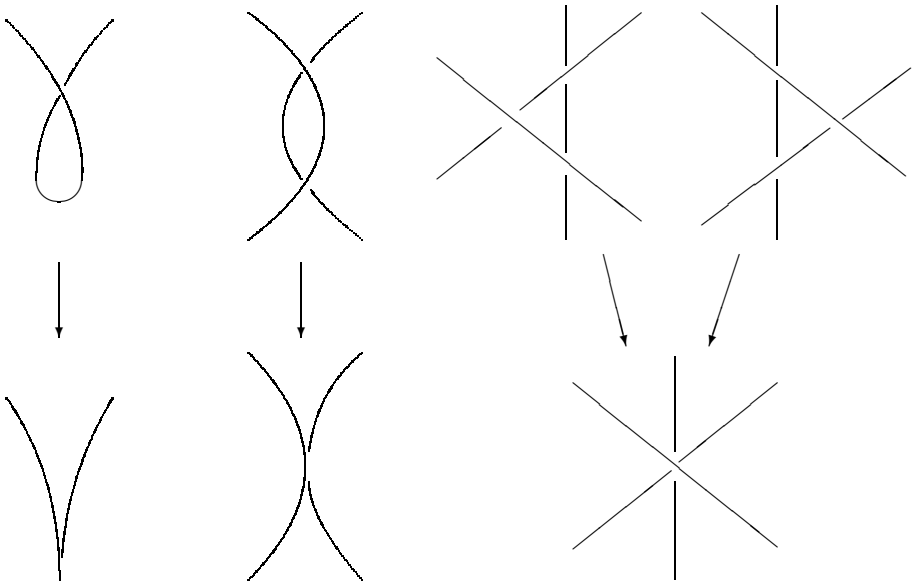


Рис. 13. Стандартные Райдемайстеровские вырождения

$\tilde{\mathbf{R}}$2, $\tilde{\mathbf{R}}$3: Движения Райдемайстера особых узлов, ср. [3]. На левом нижнем рисунке Рис. 14 подразумевается, что проекции в $\mathbb{R}^2$ двух ветвей в точке пересечения касаются друг друга, но касательные вектора к самим этим ветвям образуют ненулевой угол в содержащей их вертикальной плоскости.

Поскольку мы зафиксировали флаг направлений в $\mathbb{R}^2$, имеется много классов неизотопных вырожденных кривых этих типов (относительно изотопий, сохраняющих слоения $\mathbb{R}^3$ на слои проекций ρ_1 и ρ_2 вдоль этих направлений, но не отдельные слои): общим числом 4 класса типа **R1**, 2 — типа **R2**, 6 — типа **R3**, 2 — типа $\tilde{\mathbf{R}}$**2** и 6 — типа $\tilde{\mathbf{R}}$**3**. Если мы следим за ориентациями ветвей нашей кривой, участвующих в вырождении, то число возможностей еще возрастает: его надо умножить на соответствующую степень двойки.

M2, M3, M4 (ср. [14]): существенные изменения морсовской структуры функции $f_2 \equiv \rho_2 \circ f : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^1$, см. Рис. 15. (Числа 2, 3, 4 в их обозначениях — это числа участвующих ветвей кривой.) Пересечения сплошных линий на этих картинках изображают любые возможные $\times$-пары, т.е. проходы или переходы, соответствующие ориентированным (неперекрещенным) ломаным, или пересечения, соответствующие хордам.

Замечание 11. Явные формулы для гомологической границы любого $\mathcal{F}$-блока (которые мы изучим в §3 ниже) являются формализацией этих вырождений, примененных к точкам (22) этого $\mathcal{F}$-блока. С этой точки зрения каждое из вырождений **R3** и $\tilde{\mathbf{R}}$**3** нужно подразбить еще на два существенно различных типа. А именно, в каждом из

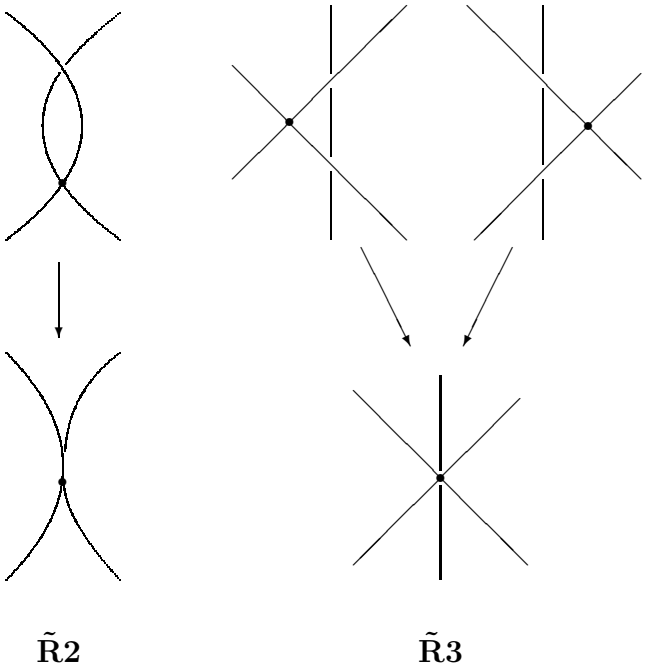


Рис. 14. Райдемайстеровские вырождения особых узлов

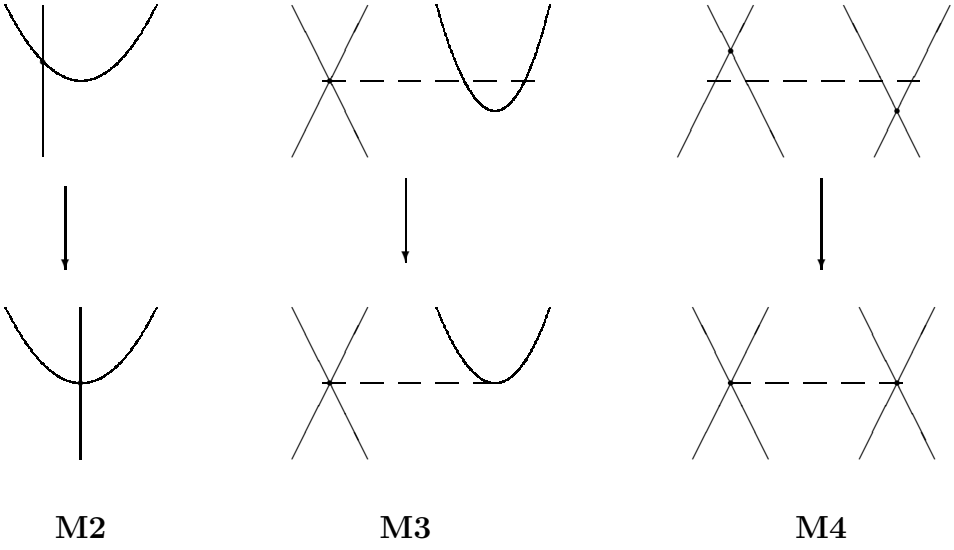


Рис. 15. Существенные морсовские вырождения

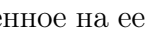
этих вырождений сталкиваются три двойные точки диаграммы узла. Алгебраическое выражение для соответствующей компоненты границы нашего $\mathcal{F}$-блока существенно зависит от того, все ли эти три точки соответствуют $\times$-парам исходной $\mathcal{F}$-картинки,

или только две из них. (Если только одна или ни одной, то это вырождение не дает никакого вклада в границу.)

2.4. **Цепи коразмерности 1.** В этом разделе мы опишем некоторые субалгебраические цепи коразмерности 1 в максимальных клетках члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Границы всех $\mathcal{F}$-блоков, описанных в §2.2 и участвующих в нашем алгоритме, можно реализовать как суммы этих цепей (плюс что-то в вице-максимальных клетках и в σ_{i-1}). Любую такую цепь коразмерности 1 можно задать набором тех же самых условий, что в §2.2, дополненным одним условием типа равенства или нетипичным совпадением некоторых активных точек, участвующих в описании $\mathcal{F}$-блоков; последнее условие может быть дополнено некоторым новым условием типа неравенства. Эти стандартные цепи коразмерности 1 будут называться $\mathcal{B}$-*блоками*, а картинки, задающие их, — $\mathcal{B}$-*картинками*.

Эти картинки и соответствующие условия типа равенства описываются в нижеследующих пунктах $\bar{\mathbf{1}}$–$\bar{\mathbf{6}}$. В круглых скобках после номеров этих пунктов мы указываем их мнемонические символы, а в квадратных скобках — типы вырождений, при которых может возникнуть особый узел, удовлетворяющий соответствующему условию.

В пунктах $\bar{\mathbf{2}}$**!**, $\bar{\mathbf{4}}$**!**, $\bar{\mathbf{5}}$**!** и $\bar{\mathbf{6}}$**!** мы описываем важные линейные комбинации субалгебраических цепей, выделенных условиями из пунктов $\bar{\mathbf{2}}$, $\bar{\mathbf{4}}$, $\bar{\mathbf{5}}$ и $\bar{\mathbf{6}}$ соответственно, а в пунктах $\bar{\mathbf{2}}$**а**, $\bar{\mathbf{2}}$**б**, $\bar{\mathbf{3}}$**а**/$\bar{\mathbf{3}}$**б**, $\bar{\mathbf{4}}$**!!**, $\bar{\mathbf{5}}$**а**, $\bar{\mathbf{5}}$**б** — сопутствующие новые условия типа неравенства.

$\bar{\mathbf{1}}$ **(** $\sqcap$ **). [X]**. Одна неориентированная ломаная  обозначает условие $f(a) = f(b)$, наложенное на ее концы a, b. *Эти концевые точки не должны совпадать с концами хорд нашей картинки.* Цепь, в обозначение которой входит такое условие, возникает как часть границы $\mathcal{F}$-блока $V(\Theta)$ полной размерности, описанного почти той же самой картинкой, на которой эта неориентированная ломаная заменена на ориентированную (в произвольную сторону), см. Рис. 12 и формулу (38) на странице 44. Кроме того, такая неориентированная ломаная получается из хорд при действии граничных операторов $\bar{H}_*(\sigma_{i+1} \setminus \sigma_i) \to \bar{H}_*(\sigma_i \setminus \sigma_{i-1})$ нашей спектральной последовательности, см. §3.7 на странице 59 и формулы (8), (14), (51) и (92)—(100).

Пара точек, соединенная такой ломаной, также считается $\times$-*парой*. Для нее сохраняются все возможности, указанные в §2.2 для таких пар. В частности, такая ломаная образует *мост*, и на концевые точки таких неориентированных ломаных могут быть наложены условия типа (30) ($\ltimes$), а также условия типа $\Uparrow^j$ или $\Downarrow^j$.

$\bar{\mathbf{2}}$ **(** $\curvearrowright$ **). [$\tilde{\mathbf{R}}$3]**. Точка самопересечения особого узла, соответствующая хорде, может оказаться в $\mathbb{R}^3$ выше или ниже некоторой его неособой точки. Это условие изображается неперекрещенной ломаной (быть может, однозвенной!), соединяющей соответствующую точку линии Вильсона с центром хорды и ориентированной по направлению к той точке (или хорде), образ которой в $\mathbb{R}^3$ выше; см. например Рис. 16.

При определении наших цепей коразмерности 1 любое условие типа (30) может быть наложено на любые две из трех активных точек линии Вильсона, участвующих в фигуре, составленной такими ломаной и хордой.

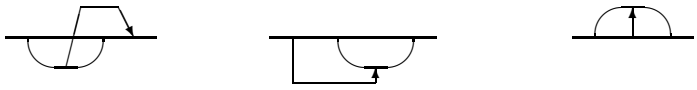


Рис. 16. Условия типа $\bar{\mathbf{2}}$

Замечание 12. Все условия типа $\bar{\mathbf{2}}$, возникающие в нашем алгоритме, удовлетворяют следующему дополнительному условию. Если конец неперекрещенной ориентированной ломаной, участвующей в описании этого условия, лежит на линии Вильсона левее или правее обоих концов хорды, то эта ломаная ориентирована направо в $\mathbb{R}^1_w$. Действительно, только такие $\mathcal{B}$-блоки могут возникать как компоненты границ $\mathcal{F}$-блоков, удовлетворяющих ограничению из замечания 5 на стр. 31.

$\bar{\mathbf{2}}$а ($\Vdash$). Дополнительное условие типа $\overset{j}{\underset{l}{\Vdash}}\,k$ (где j,k,l — это номера активных точек a_j, a_k, a_l, участвующих в конфигурации типа $\bar{\mathbf{2}}$) означает, что вектор $f_1'(a_k)$ (т.е. проекция производной $f'(a_k)$ в $\mathbb{R}^2$) является линейной комбинацией векторов $f_1'(a_j)$ и $f_1'(a_l)$ с положительными коэффициентами.

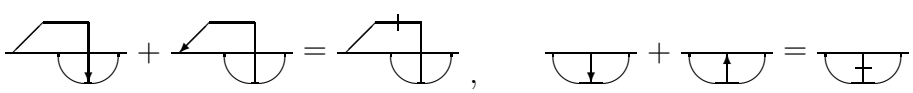
$\bar{\mathbf{2}}$б ($\dashv$). Напротив, условие $j \overset{k}{\underset{l}{\dashv}}$ означает, что ни один из этих трех векторов в $\mathbb{R}^2$ не лежит в угле, образованном двумя другими.

Условия типа **$\bar{\mathbf{2}}$а** или **$\bar{\mathbf{2}}$б** могут возникать при вырождениях типа $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{3}$, если все три двойные точки диаграммы особого узла, сталкивающиеся при этом вырождении, соответствуют $\times$-парам исходной $\mathcal{F}$-картинки, см. замечание 11 на странице 36.

Эти два условия можно выразить также через более стандартные условия $\Vdash$, описанные в пункте **3** §2.2. Действительно, вектора $f_1'(a_j)$, $f_1'(a_l)$ обязаны удовлетворять одному из четырех условий типа **3**. В соответствии с ними условие **$\bar{\mathbf{2}}$а** распадается в сумму четырех цепей:

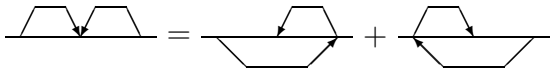
$$\overset{j}{\underset{l}{\Vdash}}\,k = \overset{j}{l} \,\&\Big(\Big(\overset{l}{k}\,\&\,\overset{k}{j}\Big) + \Big(\overset{j}{k}\,\&\,\overset{k}{l}\Big)\Big)$$
$$+\overset{l}{j}\,\&\Big(\overset{k}{j}\,\&\overset{l}{k}\Big) \;+\; \overset{j}{l}\,\&\Big(\overset{k}{l}\,\&\overset{j}{k}\Big)$$
$$+\overset{l}{j}\,\&\Big(\Big(\overset{k}{l}\,\&\overset{j}{k}\Big) \;+\; \Big(\overset{k}{j}\,\&\overset{l}{k}\Big)\Big)\,.$$

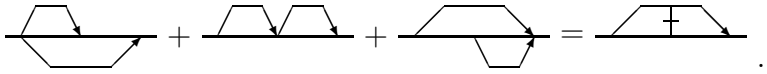
$\bar{\mathbf{2}}$! ($\curvearrowright$). Пусть две цепи коразмерности 1 ("$\mathcal{B}$-блоки") в M определены наборами условий, совпадающими во всем, за исключением ориентации неперекрещенной ломаной, участвующей в вырождении типа $\bar{\mathbf{2}}$. Тогда сумма этих двух цепей будет выражаться одной картинкой, на которой эти противонаправленные стрелки заменены одной перекрещенной неориентированной ломаной, например:

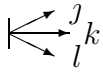


Вообще, неориентированная ломаная, перекрещенная одной чертой, означает, что проекции в $\mathbb{R}^2$ образов точек или $\times$-пар, соответствующих началу и концу этой ломаной, совпадают. Множество, заданное этим условием, является объединением двух аналогичных множеств, заданных картинками, в которых эта перекрещенная неориентированная ломаная заменена на две по-разному ориентированные неперекрещенные ломаные. Однако в нашем алгоритме это условие может появляться только в сочетании с хордой (как в пункте $\bar{\mathbf{2}}$ выше) или с неперекрещенной стрелкой (как в пункте $\bar{\mathbf{3}}$ ниже). Конец такой неориентированной перекрещенной ломаной, лежащий на линии Вильсона, также по определению является $\times$-*точкой*.

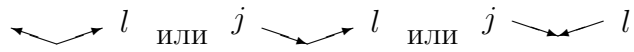
$\bar{\mathbf{3}}$ ( ). [R3]. Ровно одна концевая точка некоторой неперекрещенной ориентированной ломаной может совпадать с концом какой-нибудь другой такой ломаной. Соответствующие условия удовлетворяют очевидным условиям типа

(33)  и

(34)  .

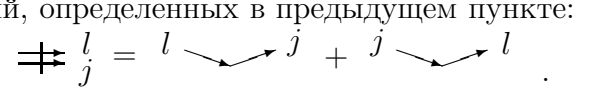
$\bar{\mathbf{3}}$а/$\bar{\mathbf{3}}$б. Вновь условия типа  или могут быть наложены на производные отображений f_1 в трех точках, участвующих в такой конфигурации, см. пп. **$\bar{\mathbf{2}}$а, $\bar{\mathbf{2}}$б** выше. Это происходит, если наша цепь возникает при вырождении типа **R3**, причем все три двойные точки плоской диаграммы узла, сталкивающиеся при этом вырождении, определяют $\times$-пары исходной $\mathcal{F}$-картинки.

$\bar{\mathbf{4}}$ ($\vee$). [$\tilde{\mathbf{R}}$2]. Подпись типа

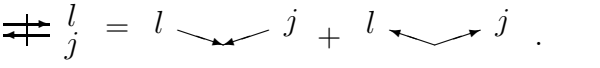
(35) 

(где j и l — номера концов a_j, a_l одной и той же хорды) означает, что направление "вверх"в $\mathbb{R}^3$ является линейной комбинацией производных $f'(a_l)$ и $f'(a_j)$, взятых с положительными коэффициентами (соответственно, $f'(a_l)$ с положительным коэффициентом, а $f'(a_j)$ — с отрицательным; соответственно, оба с отрицательными коэффициентами).

$\bar{\mathbf{4}}$! (,). [R2]. **а)** Условие (где l и j — номера точек a_l, a_j одной и той же $\times$-пары) означает, что проекции векторов $f'(a_l)$ и $f'(a_j)$ в $\mathbb{R}^2$ сонаправлены. Если наша $\times$-пара является хордой, то соответствующее условие может возникать также как сумма двух условий, определенных в предыдущем пункте:

(36)  .

б) Условие означает, что проекции векторов $f'(a_l)$ и $f'(a_j)$ в $\mathbb{R}^2$ противонаправлены. Если a_l и a_j являются концами хорды, то соответствующее условие может определяться также как сумма

(37)  .

Каждое из этих условий **а), б)** симметрично относительно l и j.

$\bar{4}$!! ($\Diamond$). Условия $\bar{4}$, **$\bar{4}$!а** и **$\bar{4}$!б** могут сопровождаться условием типа неравенства, указывающим, какая из локальных касающихся ветвей плоской кривой $f_1(\mathbb{R}^1_w)$ лежит западнее в $\mathbb{R}^2$. Это условие обозначается так: $j \dashrightarrow l$, где l — номер активной точки, образ которой лежит в более западной ветви. Очевидно соотношение: сумма двух $\mathcal{B}$-блоков, содержащих такое условие и различающихся только перестановкой j и l в этом условии, равна одному блоку без этого условия.

$\bar{5}$ ($\mapsto$). [M2, M3]. Условие $j \mapsto$ или $j \dashv$, где j — номер некоторой активной точки a_j, означает, что проекция вектора $f'(a_j)$ в $\mathbb{R}^2$ направлена на восток (соответственно, на запад).

$\bar{5}$! ($\leftrightarrow$). Сумма этих двух условий обозначается так: $\overset{j}{\dashv\!\!\!\mapsto}$; она означает попросту, что $f'_2(a_j) = 0$.

$\bar{5}$а ($\Uparrow$). Если проекция f'_2 первой производной на "меридиан"$\mathbb{R}^1$ равна нулю, как это вытекает из условий типа $\bar{5}$ или **$\bar{5}$!**, то проекция второй производной может быть положительной или отрицательной; эти условия обозначаются соответственно через $\Uparrow^j$ или $\Downarrow^j$. По определению, последние условия могут возникать только в сочетании с условиями типа $\bar{5}$ или **$\bar{5}$!**

$\bar{5}$б ($\smile\!\!\uparrow$). Важная линейная комбинация описанных выше условий выражается подписью типа $\overset{j}{l}$ (которая также может возникать только в сочетании с условием типа $\bar{5}$ или **$\bar{5}$!**). Она равна $\left(\Downarrow^j \& \Downarrow^l\right) + \left(\Uparrow^j \& \Uparrow^l\right)$ и означает, что вектора $f''_2(a_j)$ и $f'_2(a_l)$, т.е. проекции на меридиан $\mathbb{R}^1$ второй производной $f''(a_j)$ и первой производной $f'(a_l)$, направлены в одну и ту же сторону. Также может возникать аналогичная картинка с противоположными направлениями

$$\overset{j}{l} \equiv \left(\Downarrow^j \& \Uparrow^l\right) + \left(\Uparrow^j \& \Downarrow^l\right).$$

$\bar{6}$а, $\bar{6}$б. [M4]. (Сцепившиеся мосты). Для некоторых двух разных мостов, некоторые из точек опоры одного из них могут совпасть с $\times$-точками или точками опоры другого, и быть может одновременно некоторые из точек опоры второго моста совпадут с одной или обеими $\times$-точками первого, но при этом $\times$-точки этих мостов не сталкиваются. Это вырождение — типа **$\bar{6}$а**, если при этом встречаются только точки опоры разных мостов, и типа **$\bar{6}$б**, если хотя бы одна из них сталкивается с $\times$-точкой другого моста. Для примера, см. Рис. 17а и 17б соответственно. На обеих картинках отрезок линии Вильсона невырожденного отображения, стягивающийся при этом слиянии в точку, отмечен утолщением.

Как показано на Рис. 17б, предельное условие, возникающее при изображенном там вырождении типа **$\bar{6}$б** из условия, выраженного опорой моста (и состоящее в том, что образ $\times$-точек одной $\times$-пары в $\mathbb{R}^2$ лежит к востоку от образа другой), изображается единожды перекрещенной ломаной, связывающей центры этих $\times$-пар.

Замечание 13. В нашем алгоритме не могут встречаться сцепившиеся мосты, у которых обе $\times$-точки одной из $\times$-пар лежат в $\mathbb{R}^1_w$ левее обеих $\times$-точек другой $\times$-пары.

а б

Рис. 17. Сцепление мостов

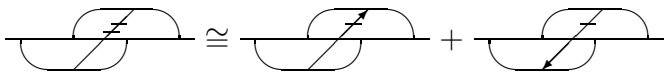


Рис. 18. Нормальная пара мостов типа $\bar{\mathbf{6}}$**!**

Конкретнее, если у этих двух мостов есть общая точка опоры, то она лежит между $\times$-точками каждой из $\times$-пар; если мосты соединены перекрещенной ломаной, ориентированной от одной $\times$-пары к другой (как на Рис. 17б), то хотя бы одна из $\times$-точек $\times$-пары, *к которой* направлена перекрещенная стрелка, должна лежать между $\times$-точками другой $\times$-пары.

Это следует из того, что перед столкновением мосты удовлетворяли условию б) замечания 6 на стр. 31.

$\bar{\mathbf{6}}$! ( ). *Нормальная* пара сцепившихся мостов — это сумма двух условий наподобие правой части равенства с Рис. 18 (т.е. условий, выраженных единожды перекрещенными ломаными с противоположными ориентациями, соединяющими одни и те же $\times$-пары; эта сумма равна единственному условию, что образы этих двух $\times$-пар в $\mathbb{R}^2$ имеют одинаковые широты), удовлетворяющая следующим дополнительным ограничениям:

а) $\times$-точки каждой из этих двух $\times$-пар разделены в $\mathbb{R}^1_w$ одной $\times$-точкой другой $\times$-пары;
б) обе эти $\times$-пары не имеют опор;
в) обе эти $\times$-пары являются хордами (а не ломаными).

Такая сумма двух условий изображается одной картинкой, в которой эти две единожды перекрещенные ломаные заменены на дважды перекрещенную неориентированную ломаную, см. левую часть Рис. 18.

Вообще, неориентированная дважды перекрещенная ломаная означает, что проекции в $\mathbb{R}^1$ точек или $\times$-пар, соответствующих ее концам, совпадают. Подмножество, заданное этим условием, является объединением двух подмножеств, заданных ориентированными в разные стороны единожды перекрещенными ломаными с одинаковыми концами. Однако в нашем алгоритме это условие может возникать только в сочетании с двумя $\times$-парами, соединенными такой ломаной, как в условии $\bar{\mathbf{6}}$**!**.

Замечание 14. В алгоритмах, вычисляющих старшие классы когомологий, нам потребуется много других классов особенностей; самые важные из них таковы (см. [24]).

$\bar{\mathbf{7}}$. Подпись $\uparrow^j$ (соответственно, $\downarrow^j$) означает, что производная $f'(a_j)$ направлена вверх (соответственно, вниз) в $\mathbb{R}^3$.

$\bar{\mathbf{7}}$**!**. Подпись $\updownarrow^j$ означает, что $f_1'(a_j) = 0$. Конечно, $\updownarrow^j = \uparrow^j + \downarrow^j$.

Однако эти условия не могут возникать в наших вычислениях, связанных с инвариантами узлов, см. предложение 6 на стр. 58 ниже.

Определение 9. *$\mathcal{B}$-картинкой* называется любая хордовая диаграмма, снабженная конечным числом дополнительных условий типов **1**–**5** из §2.2 и ровно одним условием типа $\bar{\mathbf{1}}$, $\bar{\mathbf{2}}$, $\bar{\mathbf{2}}$**!**, $\bar{\mathbf{3}}$, $\bar{\mathbf{4}}$, $\bar{\mathbf{4}}$**!а**, $\bar{\mathbf{4}}$**!б**, $\bar{\mathbf{5}}$, $\bar{\mathbf{5}}$**!**, $\bar{\mathbf{6}}$**а**, $\bar{\mathbf{6}}$**б** или $\bar{\mathbf{6}}$**!** из §2.4, приписанными на или под ней; при этом условие $\bar{\mathbf{2}}$ или $\bar{\mathbf{2}}$**!** может быть дополнено условием $\bar{\mathbf{2}}$**а** или $\bar{\mathbf{2}}$**б**, условие $\bar{\mathbf{3}}$ — условием $\bar{\mathbf{3}}$**а** или $\bar{\mathbf{3}}$**б**; условие $\bar{\mathbf{4}}$ или $\bar{\mathbf{4}}$**!а** или $\bar{\mathbf{4}}$**!б** может быть дополнено условием типа $\bar{\mathbf{4}}$**!!**; условие $\bar{\mathbf{5}}$ или $\bar{\mathbf{5}}$**!** может быть дополнено условием $\bar{\mathbf{5}}$**а** или $\bar{\mathbf{5}}$**б**.

Условия типов **1, 2, 3, 4, 4а, 5,** $\bar{\mathbf{2}}$**а,** $\bar{\mathbf{2}}$**б,** $\bar{\mathbf{3}}$**а,** $\bar{\mathbf{3}}$**б,** $\bar{\mathbf{4}}$**!!,** $\bar{\mathbf{5}}$**а** или $\bar{\mathbf{5}}$**б** называются *условиями типа неравенства*, а условия $\bar{\mathbf{1}}$**,** $\bar{\mathbf{2}}$**,** $\bar{\mathbf{2}}$**!,** $\bar{\mathbf{3}}$**,** $\bar{\mathbf{4}}$**,** $\bar{\mathbf{4}}$**!а,** $\bar{\mathbf{4}}$**!б,** $\bar{\mathbf{5}}$**,** $\bar{\mathbf{5}}$**!,** $\bar{\mathbf{6}}$**а,** $\bar{\mathbf{6}}$**б** и $\bar{\mathbf{6}}$**!** называются *условиями типа равенства* или *вырождениями*.

Любая $\mathcal{B}$-картинка определяет субалгебраическую цепь в клетке, закодированной входящей в нее хордовой диаграммой. Носитель этой цепи покрывается множеством всех точек (C, f, t) как в (22), таких, что наша картинка имеет представления в f: эти точки должны браться с кратностями, равными четностям чисел этих представлений.

В содержательных случаях это множество имеет коразмерность 1 в клетке члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, соответствующей нашей хордовой диаграмме. С другой стороны, см. на стр. 46 список некоторых ситуаций, когда его коразмерность больше.

Определение 10. Любая субалгебраическая цепь *коразмерности* 1, определенная какой-либо $\mathcal{B}$-картинкой в клетке, соответствующей хордовой диаграмме этой картинки, называется *$\mathcal{B}$-блоком*.

Замечание 15. Условия **1**–**5** и $\bar{\mathbf{1}}$–$\bar{\mathbf{6}}$**!** (или, точнее, цепи, заданные этими условиями) удовлетворяют многочисленным соотношениям. Некоторые из них см. в леммах 6 и 9 на страницах 81 и 90 соответственно.

3. Граничный оператор

Гомологическая граница любого $\mathcal{F}$-блока естественно разделена на три части, лежащие

а) в той же самой максимальной клетке члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$,

б) в вице-максимальных клетках члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, и

в) в младшем члене $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}$ основной фильтрации пространства σ.

В §§3.1—3.5 мы опишем часть а), в §3.6 — часть б), и в §3.7 — часть в).

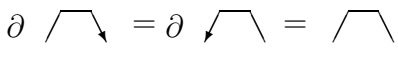
Вспомним, что для любого $i \geq 1$ максимальные клетки канонического клеточного разбиения члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ разрешенного дискриминанта находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности i-хордовых диаграмм.

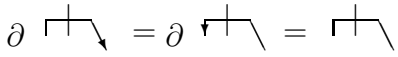
Предложение 3. *Для любой максимальной клетки канонического клеточного разбиения члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, $i \geq 0$, и любого $\mathcal{F}$-блока $V(\Theta)$ в ней (см. определение 8 на стр. 34) граница этого $\mathcal{F}$-блока в этой максимальной клетке равна конечной сумме*

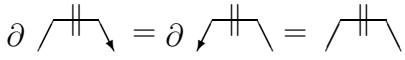
$\mathcal{B}$-блоков, определенных $\mathcal{B}$-картинками, в каждой из которых участвует не больше активных точек и не больше стандартных условий **1–5** *и* $\bar{\mathbf{1}}$–$\bar{\mathbf{6}}$**!**, *чем в исходной $\mathcal{F}$-картинке Θ, задающей $\mathcal{F}$-блок $V(\Theta)$.*

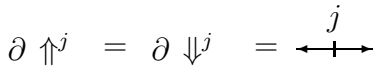
Доказательство этого предложения следует из списка вырождений, данного в §2.3. В §§3.1—3.5 мы явно опишем эти граничные блоки. Хотя здесь мы имеем дело только с $\mathbb{Z}_2$-цепями, аналогичное утверждение справедливо и в случае любой группы коэффициентов и вытекает из тех же самых рассуждений.

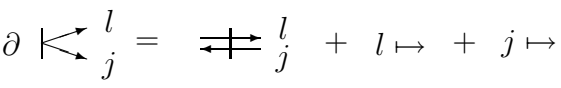
3.1. **Вырождения, сохраняющие число активных точек.** Наиболее важными для нас являются вырождения $\mathcal{F}$-блоков, которые не уменьшают число активных точек. Их можно описать как вырождение самих условий, а не конфигураций активных точек. Они перечислены в следующих восьми равенствах.

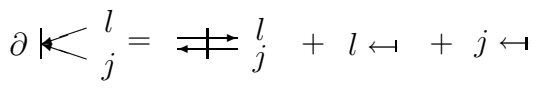
(38) 

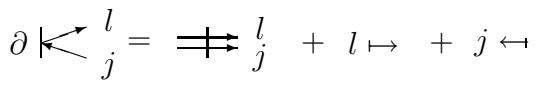
(39) 

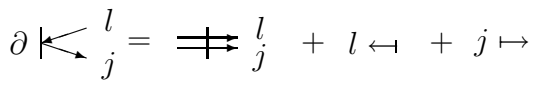
(40) 

(41) 

(42) 

(43) 

(44) 

(45) 

Именно, если $\mathcal{F}$-картинка нашего $\mathcal{F}$-блока содержит какой-нибудь фрагмент, указанный в левой части одного из этих равенств (под знаком ∂), то граница этого блока содержит $\mathcal{B}$-блок, в картинке которого этот фрагмент заменен на произвольное слагаемое правой части этого же равенства (т.е. части, не содержащей знак ∂). Конечно, при этом ломаные в формулах (38)–(40) могут иметь другую форму, чем нарисовано здесь.

3.2. **Слияния активных точек: основные понятия.** Другая часть граничного оператора, формулируемая в терминах вырождений конфигураций активных точек, описывается сложнее из-за обилия возможностей. Это описание занимает следующие разделы 3.2—3.5. Грубо говоря, для каждого набора отрезков, ограниченных активными точками исходной $\mathcal{F}$-картинки, мы должны

а) стянуть все эти отрезки в точки,

б) рассмотреть предельное множество, к точкам которого стремятся точки (22) нашего $\mathcal{F}$-блока, когда активные точки соответствующих отображений $\mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^3$ претерпевают такие слияния,

в) проверить, что коразмерность этого предельного множества равна 1, и

г) описать пересечение гомологической границы нашего $\mathcal{F}$-блока с этим множеством в терминах наших стандартных условий **1**–**5** и $\bar{\mathbf{1}}$–$\bar{\mathbf{6}}$**!**.

Дадим точные определения.

Определение 11. Пусть дан $\mathcal{F}$-блок $V(\Theta)$ в некоторой максимальной клетке члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, заданный $\mathcal{F}$-картинкой Θ степени i (т.е. с i хордами), и отмечен набор непересекающихся отрезков в линии Вильсона этой картинки, каждый из которых ограничен некоторыми (не обязательно соседними) активными точками этой картинки. *Геометрическим стягиванием* блока $V(\Theta)$ вдоль этого набора отрезков называется подмножество в той же максимальной клетке, лежащее в замыкании носителя цепи $V(\Theta)$ и определяемое следующим условием: точка $X = (C, f, t)$ принадлежит этому подмножеству тогда и только тогда, когда найдется непрерывная кривая $\lambda : [0, \varepsilon] \to \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ (т.е. семейство троек (C_τ, f_τ, t_τ) как в (22), непрерывно зависящее от параметра $\tau \in [0, \varepsilon]$), и непрерывное семейство гомеоморфизмов $h_\tau : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^1$, $\tau \in (0, \varepsilon]$, такие что

(1) $\lambda(0) = X$ (т.е. $C_0 = C, f_0 = f, t_0 = t$);
(2) при любом $\tau \in (0, \varepsilon]$, $\lambda(\tau)$ принадлежит носителю цепи $V(\Theta)$, а h_τ переводит хордовую диаграмму картинки Θ в C_τ и является представлением $\mathcal{F}$-картинки Θ в f_τ;
(3) при $\tau \to +0$ образы всех отмеченных отрезков при отображении h_τ становятся сколь угодно малыми.

Геометрическое стягивание вдоль набора отрезков *противоречиво*, если коразмерность этого предельного множества в соответствующей максимальной клетке члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ больше единицы.

Предложение 4. *Для любого $\mathcal{F}$-блока $V(\Theta)$ и любого набора непересекающихся отрезков в $\mathbb{R}^1_w$, ограниченных активными точками его $\mathcal{F}$-картинки, либо геометрическое стягивание цепи $V(\Theta)$ вдоль этого набора противоречиво, либо пересечение гомологической границы цепи $V(\Theta)$ с этим геометрическим стягиванием является $\mathcal{B}$-блоком.*

Доказательство этого предложения следует из явного описания этих стягиваний, которому посвящены разделы 3.2.2—3.5. □

Определение 12. *Гомологическое стягивание* $\mathcal{F}$-блока $V(\Theta)$ вдоль нашего набора отрезков — это субалгебраическая цепь коразмерности 1 в нашей клетке, равная 0, если геометрическое стягивание вдоль этого набора противоречиво, а в противном случае представленная пересечением гомологической границы цепи $V(\Theta)$ с этим геометрическим стягиванием.

Предложение 5. *Для любого* $\mathcal{F}$*-блока* $V(\Theta)$*, лежащего в некоторой максимальной клетке члена* $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$*, пересечение его гомологической границы* $\partial V(\Theta)$ *с той же максимальной клеткой равно сумме*

а) гомологических стягиваний цепи $V(\Theta)$ *вдоль всевозможных наборов отрезков, ограниченных активными точками картинки* Θ*, и*

б) всех $\mathcal{B}$*-блоков, картинки которых получаются из* Θ *заменой какого-нибудь фрагмента картинки* Θ*, изображенного в левой части какой-нибудь из формул (38)–(45), на произвольный элемент правой части той же формулы.*

Это предложение непосредственно следует из определений. □

3.2.1. *Несколько важных примеров противоречивых стягиваний.* Противоречивые геометрические стягивания возникают, в частности, в следующих ситуациях.

(1) По меньшей мере два отмеченных отрезка “независимы”, т.е. их концы не соединены цепью хорд и ломаных исходной $\mathcal{F}$-картинки.
(2) Хотя бы один отмеченный отрезок содержит более трех активных точек.
(3) Некоторый отмеченный отрезок содержит два конца хорд (не обязательно разных). В этом случае предельное множество лежит в объединении других (немаксимальных) клеток члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$.
(4) Некоторый отмеченный отрезок содержит две активные точки двух разных мостов с условиями $\Uparrow^j$ и $\Downarrow^l$, наложенными на поведение кривой в этих двух точках. В этом случае для любой точки f предельного множества соответствующая плоская кривая $f_1(\mathbb{R}^1_w)$ имеет на одной горизонтальной прямой одну точку с условием $f_2' = 0$ и либо две $\times$-пары, либо тройную точку.
(5) Некоторый отмеченный отрезок содержит две активные точки из двух разных мостов, причем по крайней мере одна из этих точек снабжена подписью $\Uparrow^j$, и наши два моста соединены дважды перекрещенной ломаной, ориентированной от моста, содержащего более правую из этих двух точек к мосту, содержащему более левую. В этом случае точка, полученная после сжатия отрезка, будет удовлетворять обоим условиям $\Uparrow$ и $\Downarrow$. Заменяя в нашем предположении $\Uparrow^j$ на $\Downarrow^j$ и одновременно изменяя ориентацию ломаной, мы также получим препятствие к стягиванию.
(6) Отмечены два отрезка. Левые точки этих отрезков являются активными точками одного моста, а правые — другого. Один из концов первого отрезка снабжен подписью $\Uparrow^l$, а один из концов второго — подписью $\Downarrow^j$. Тогда одновременное сжатие этих двух отрезков противоречиво. (См. пример на Рис. 19, где два отмеченных отрезка утолщены; именно, это отрезки, ограниченные третьей и четвертой (соответственно, пятой и шестой) активными точками картинки.)

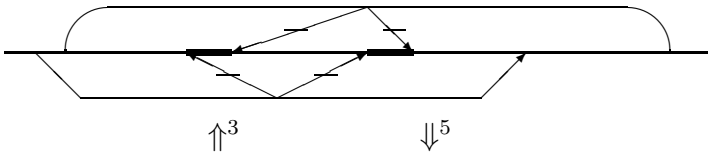


Рис. 19. Противоречивая пара отрезков

Действительно, знак $\Uparrow^3$ на этой картинке показывает, что непосредственно перед стягиванием мост, содержащий точки 1, 3, 5 и 7, был южнее другого моста, а знак $\Downarrow^5$ говорит, что он же был севернее. Другой вариант: мы имеем условие $\Uparrow$ (или $\Downarrow$) при некоторой точке одного отрезка, и такое же условие при какой-то точке другого, но один из этих отрезков ограничен точкой первого моста слева, а точкой второго моста — справа, а для второго отрезка все наоборот.

(7) Отмеченный отрезок содержит две точки одного и того же моста, и мы имеем условия $\Uparrow^j$ и $\Uparrow^l$, наложенные на эти две точки. В этом случае любая предельная кривая будет удовлетворять двум условиям $f_2' = 0$ и $f_2'' = 0$ в некоторой активной точке. Аналогично, пара условий $\Downarrow^j$ и $\Downarrow^l$ на такие две точки также не позволяет нам стягивать такой отрезок.

(8) После стягивания получается *замкнутая* цепочка неравенств на высоту образов нескольких точек, оказавшихся на одной вертикальной прямой в $\mathbb{R}^3$, см. Рис. 20а. Чтобы формализовать это условие, рассмотрим граф, вершины которого — это активные точки исходной $\mathcal{F}$-картинки Θ, а ребра — это ее хорды, ориентированные неперекрещенные ломаные, а также наши отмеченные отрезки на линии Вильсона (или части таких отрезков, содержащих более двух точек). *Допустимый путь* вдоль такого графа может идти по хордам или отмеченным отрезкам в любую сторону, а идя вдоль ломаных он должен следовать их ориентации. Если этот граф имеет нетривиальный допустимый *цикл*, то сжатие этих отмеченных отрезков противоречиво. Например, противоречиво стягивание трех жирных отрезков на любой из двух $\mathcal{F}$-картинок в верхнем ряду Рис. 20а.

(9) Еще один пример противоречивых стягиваний показан на Рис. 21а: после стягивания мы можем получить замкнутую цепочку неравенств на долготы образов некоторых точек.

Помимо всех этих запрещенных стягиваний, мы исключаем из рассмотрения случаи, когда отмеченный отрезок содержит оба конца какой-либо неперекрещенной ориентированной ломаной ⊓. Хотя такое стягивание само по себе непротиворечиво, оно не может возникать в нашем алгоритме, см. замечание 16 на стр. 52.

В §3.3 мы разберемся с тем, как можно стягивать отрезки, ограниченные активными точками одного и того же моста (это происходит при вырождениях типов **M2** и **M3**). В §3.4 мы изучим слияния точек разных мостов, не связанные со слияниями их ×-пар: это происходит при вырождениях типа **M4**.

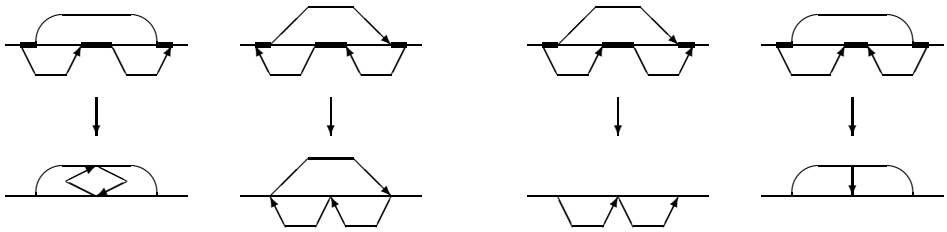


Рис. 20. Противоречивые и приведенные стягивания картинок

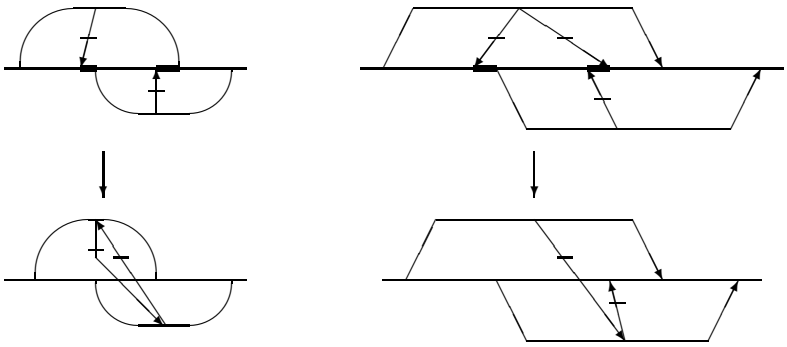


Рис. 21. Другие противоречивые и приведенные стягивания

В §§3.5.1—3.5.4 мы увидим, как могут сталкиваться разные $\times$-пары (это может происходить при вырождениях типов **R2, R3,** $\tilde{\mathbf{R}}$**2** и $\tilde{\mathbf{R}}$**3**). В §3.5.5 мы изучим, что при этом может происходить с опорами мостов, образованных этими $\times$-парами.

Введем еще несколько вспомогательных понятий.

3.2.2. *Простое и приведенное стягивание.* Гомологическое стягивание любого $\mathcal{F}$-блока вдоль произвольного набора отрезков задается $\mathcal{B}$-картинкой, основу которой составляет *простое стягивание,* описываемое в следующем определении, или *приведенное стягивание*, определяемое чуть дальше.

Определение 13. Пусть дана $\mathcal{F}$-картинка Θ степени i (т.е. с i хордами), и отмечен набор непересекающихся отрезков в ее линии Вильсона, каждый из которых ограничен некоторыми (не обязательно соседними) активными точками этой картинки, причем ни один из этих отрезков не содержит обоих концов какой-либо хорды или неперекрещенной ориентированной ломаной.

Простое стягивание картинки Θ вдоль нашего набора отрезков — это новая картинка, в которой

(1) каждый отмеченный отрезок стянут в точку,
(2) если какой-нибудь отмеченный отрезок содержит $\times$-точку и φ-точку одного и того же моста, то опора $\searrow$, заканчивающаяся в последней точке, удаляется;

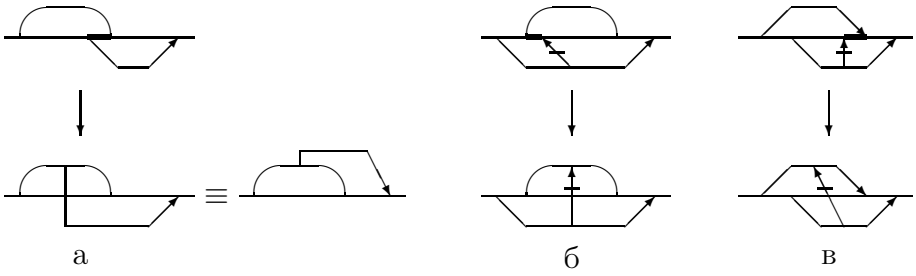


Рис. 22. Наследование ломаных

(3) если отмеченный отрезок содержит активные точки двух мостов, соединенных дважды перекрещенной ориентированной ломаной $\not\leftarrow$, то последняя ломаная удаляется;

(4) все
- хорды,
- неперекрещенные ориентированные ломаные,
- единожды перекрещенные ориентированные ломаные, не учтенные в пункте 2 выше,
- дважды перекрещенные ориентированные ломаные, не учтенные в пункте 3 выше, и
- любые фрагменты, связанные с активными точками, не принадлежащими отмеченным отрезкам

наследуются получающейся картинкой. При этом в некоторых случаях один из концов наследуемой ломаной смещается с линии Вильсона в центр хорды или ломаной, обозначающей более сильное условие, см. Рис. 22 и 17б. А именно, если отмеченный отрезок содержал конец хорды и конец либо ориентированной неперекрещенной ломаной $\sqcap\!\!\uparrow$ (см. Рис. 22а), либо единожды перекрещенной ломаной $\searrow$ (см. Рис. 22б), принадлежащей другому мосту, то при наследовании эта ломаная превращается в ломаную того же типа, конец которой лежит уже не на линии Вильсона, а в центре этой хорды; аналогично, если отмеченный отрезок содержит конец ориентированной неперекрещенной ломаной $\sqcap\!\!\uparrow$ и конец (φ-точку) ориентированной перекрещенной ломаной $\searrow$ (см. Рис. 22в), то при наследовании этот конец последней ломаной перемещается в центр первой ломаной;

(5) любая точка, полученная при стягивании любого отрезка, все активные точки которого принадлежали разным мостам, наследует все условия типов **3** и **4**, налагавшиеся прежде на активные точки этого отрезка; такие же условия на точки отмеченных отрезков, содержащих точки одного и того же моста, стираются.

Уже эта картинка может оказаться противоречивой (то есть задавать множество коразмерности ≥ 2 в дискриминанте), тогда и настоящее гомологическое стягивание цепи $V(\Theta)$ вдоль отмеченной системы отрезков будет противоречиво.

Рис. 23. Некоторые стягивания

С другой стороны, если простое стягивание не противоречиво, то некоторые из условий, выраженных ломаными линиями стянутой картинки, могут оказаться следствиями других ломаных и хорд. Например, если мы стянем жирные отрезки на левой (соответственно, правой) картинке в верхнем ряду Рис. 20б, то мы получим картинку с тремя ломаными (соответственно, с двумя ломаными и одной хордой), причем одна из ломаных является следствием двух других (соответственно, совпадает с другой) и может быть удалена. *Приведенное стягивание* $\mathcal{F}$-картинки вдоль набора отрезков — это композиция простого стягивания и последующего удаления таких излишних ломаных, см. нижний ряд Рис. 20б. Еще один пример приведенного стягивания см. на Рис. 21б.

Если гомологическое стягивание $\mathcal{F}$-блока вдоль набора отрезков не противоречиво, то оно задается картинкой приведенного стягивания, быть может дополненной некоторыми более тонкими условиями, которые мы подробно опишем в следующих пунктах 3.3—3.5.

3.3. **Слияния точек внутри мостов.**

3.3.1. *Столкновение φ-точек одного и того же моста.* Это — формализация вырождения **M3**. Она иллюстрируется последними слагаемыми в (135) и (150).

Допустим, что две φ-точки одного и того же моста нашей $\mathcal{F}$-картинки соседствуют (т.е. не разделены другими активными точками), а соответствующие опоры ориентированы к этим φ-точкам (иного мы не будем предполагать вследствие замечания 6 на странице 31). Если к тому же ни на одну из этих φ-точек не наложено условие $\Uparrow$ или $\Downarrow$, то граница соответствующего $\mathcal{F}$-блока содержит $\mathcal{B}$-блок, картинка которого является приведенным стягиванием вдоль этого отрезка (то есть простым стягиванием, у которого эти две опоры заменены одной), и на точку опоры a_j, полученную при стягивании, наложено условие $\overset{j}{\dashv\!\vdash}$ типа $\bar{\mathbf{5}}$**!**.

Если же на одну из этих φ-точек было наложено условие $\Uparrow$ или $\Downarrow$, то стягивание этого отрезка дает нам $\mathcal{B}$-блок, заданный $\mathcal{B}$-картинкой, состоящей из этого приведенного стягивания, снабженного условием типа $\bar{\mathbf{5}}$**!** и дополнительным условием вида $\Downarrow\!\!\Downarrow$ или $\Uparrow\!\!\Uparrow$, наложенным на точку, получающуюся при этом стягивании. А именно, условие $\Uparrow\!\!\Uparrow$ возникает, если мы имели условие $\Downarrow$ на левый конец стягиваемого отрезка или условие $\Uparrow$ на правый; в остальных двух случаях мы получим условие $\Downarrow\!\!\Downarrow$. Наконец, если на оба конца этого отрезка были наложены одинаковые условия типа **4**, то стягивание этого отрезка противоречиво, см. пункт 7 из §3.2.1.

3.3.2. *Столкновение φ-точки и $\times$-точки одного и того же моста.* Это — формализация вырождения **M2**. См. например два последних слагаемых в (12).

Пусть φ-точка некоторого моста соседствует в $\mathbb{R}^1_w$ с $\times$-точкой того же моста, соответствующая опора направлена к этой φ-точке, и при этом ни на одну из этих двух активных точек не наложено условий типа **4** и две $\times$-точки нашего моста не связаны условием типа **3**. Тогда граница нашего $\mathcal{F}$-блока содержит $\mathcal{B}$-блок, картинка которого является простым стягиванием отрезка, соединяющего эти φ- и $\times$-точки (т.е. сходной картинкой, на которой эта φ-точка и соответствующая опора удалены), а на $\times$-точку наложено одно из двух условий $\mapsto$, $\mapsfrom$ из пункта $\bar{\mathbf{5}}$ (в зависимости от ориентации этой опоры). Именно, мы добавляем условие $j \mapsto$ (соответственно, $j \mapsfrom$), если эта φ-точка лежала справа (соответственно, слева) от этой $\times$-точки в $\mathbb{R}^1_w$; см. Рис. 23, где стягиваемые отрезки отмечены утолщением[2]. Объяснение этого правила см. на Рис. 15, столбец **M2**.

С другой стороны, если на $\times$-пару этого моста наложено одно из условий типа **3** ($\mathrel{|\!<}$), то в зависимости от этого условия либо стягивание отрезка противоречиво, либо после стягивания мы дополнительно получаем условие типа $\overset{j'}{\underset{l'}{\rightrightarrows}}$ или $\overset{j'}{\underset{l'}{\rightleftarrows}}$, где j' — номер активной точки, полученной из сжатого отрезка на новой картинке, а l' — новый номер второй $\times$-точки того же моста; см. пункт $\bar{\mathbf{5}}\mathbf{б}$ из §2.4, а также последние слагаемые в (136) и (151). Именно, будем считать, что соответствующая опора моста направлена к своей точке опоры (как только и бывает в нашем алгоритме), и j — номер $\times$-точки, которую мы собираемся столкнуть с φ-точкой. Тогда стягивание нашего отрезка будет противоречиво в следующих случаях:

– мы имели первое или третье условие типа **3** (см. (30)), и $j > l$;

– мы имели второе или четвертое условие типа **3**, и $j < l$.

Далее, мы получим условие типа $\rightrightarrows$, если мы имели первое из условий (30) и $j < l$ или мы имели второе условие (30) и $j > l$. Мы получим условие $\rightleftarrows$ в оставшихся двух случаях, то есть в случае третьего условия (30) и $j < l$ или четвертого условия (30) и $j > l$.

Если же на $\times$- или φ-точку, участвующую в этом стягивании, было наложено условие $\Uparrow$ или $\Downarrow$ типа **4**, то в точке, полученной в результате стягивания, будет наложено условие $\Downarrow\!\!\!\!\Downarrow$ или $\Uparrow\!\!\!\!\Uparrow$, см. пункт $\bar{\mathbf{5}}\mathbf{а}$. Выбор одного из этих двух условий — такой же, как в конце предыдущего подраздела 3.3.1. Иллюстрация этого правила зашифрована в последних слагаемых равенств (137) и (152): чтобы ее увидеть явно, нужно расшифровать условие $\|^2_3$ в левых частях этих равенств в соответствии с равенством (31).

При этом начальные условия типов **3** и **4** независимы, то есть если мы перед стягиванием имели условия обоих этих типов, то в пределе мы получим картинку с объединением условий, описанных в предыдущих двух абзацах. Отметим только, что если

[2]если опора ориентирована *от* φ-точки, то стрелка в этой подписи должна быть ориентирована противоположным образом; однако мы не рассматриваем этой возможности в силу замечания 6 на странице 31.

мы имели условие типа **3** на $\times$-пару и условие типа **4** на точку этой пары, *не участвующую в стягивании*, то они влекут условие типа **4** и на $\times$-точку, участвующую в нем, и это условие нужно включить в список начальных условий.

Замечание 16. A priori имеется еще одна возможность, когда оба конца стягиваемого отрезка принадлежат $\times$-паре моста, т.е. соединены ориентированной неперекрещенной ломаной, и соответствующее вырождение — типа **R1**. Однако эта ситуация не может возникать в вычислениях, связанных с инвариантами узлов, поскольку исходные данные нашего алгоритма должны удовлетворять *одночленным соотношениям*, см. предложение 6 на странице 58 и абзац после его доказательства. С другой стороны, эта ситуация может существенным образом возникать при вычислении комбинаторных формул для классов когомологий старших размерностей, см. например [24].

3.4. **Сцепляющиеся мосты.** Это — формализация вырождения **M4**, в результате которого два моста оказываются на одной широте, но их $\times$-точки не сливаются. Если при этом их φ-точки также не сталкиваются между собой или с $\times$-точками другого моста, то в зависимости от того, связаны эти мосты условием типа **5** или нет, либо соответствующая часть границы полностью описывается формулой (40) либо никакого вырождения не происходит. Поэтому разберем оставшиеся случаи.

Рассмотрим все активные точки некоторых двух мостов и допустим, что имеется непустое множество непересекающихся пар точек $(a_{j_\alpha}, a_{l_\alpha}) \subset \mathbb{R}^1_w$, $\alpha = 1, \dots, r$, таких, что для любого α

а) точка a_{j_α} является активной точкой первого моста, а точка a_{l_α} — активной точкой второго;
б) $|j_\alpha - l_\alpha| = 1$, то есть точки a_{j_α} и a_{l_α} соседствуют в $\mathbb{R}^1_w$;
в) a_{j_α} и a_{l_α} не являются одновременно $\times$-точками;
г) одновременное стягивание всех отрезков $[a_{j_\alpha}, a_{l_\alpha}]$ не противоречиво в смысле §3.2 (все причины, по которым оно может быть противоречивым, перечислены в пунктах 4–6 раздела 3.2.1 по модулю соотношения 2 из замечания 10 на стр. 35).

Тогда граница исходного $\mathcal{F}$-блока содержит $\mathcal{B}$-блок, картинка которого — это *приведенное* стягивание всех отрезков $[a_{j_\alpha}, a_{l_\alpha}]$, см. например Рис. 21б; если $r > 1$, то дополнительно для любой пары индексов α, β, удовлетворяющих условию $1 \le \alpha < \beta \le r$, пара точек, полученных при стягивании отрезков $[a_{j_\alpha}, a_{l_\alpha}]$, $[a_{j_\beta}, a_{l_\beta}]$, снабжается условием $\|$ или $\nparallel$ типа **4a** в зависимости от знака числа $(a_{l_\alpha} - a_{j_\alpha})(a_{l_\beta} - a_{j_\beta})$ (конечно, только $r-1$ из этих $\binom{r}{2}$ условий будут независимы, а остальные полезно удалить). Более того, если эти два моста были связаны соотношением типа **5**, то все точки, полученные при стягивании этих отрезков, будут снабжены условиями $\Uparrow$ или $\Downarrow$. А именно, если отмеченный отрезок содержит две точки разных мостов, соединенных дважды перекрещенной ориентированной ломаной, то точка a_j, полученная при его стягивании, снабжается условием $\Uparrow^j$ (соответственно, $\Downarrow^j$) если эта ломаная была ориентирована по направлению к мосту, содержащему более правую (соответственно, левую) из этих двух точек.

3.5. **Столкновения разных ×-пар.** В этом разделе мы рассмотрим компоненты границ $\mathcal{F}$-блоков, возникающие при стягивании отрезков, хотя бы один из которых содержит ×-точки разных ×-пар.

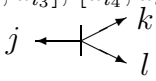
Вначале мы опишем лишь ограниченный набор таких возможных столкновений. Именно, в §§3.5.1—3.5.3 мы предполагаем, что на точки ×-пар, участвующие в наших столкновениях, не наложены условия типов **3** и **4**, и эти пары не связаны условиями типа **5**.

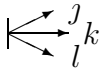
Имеются следующие основные три случая.

3.5.1. *Столкновение трех ×-пар.* Это столкновение является формализацией (в терминах $\mathcal{F}$- и $\mathcal{B}$-картинок) вырождений **R3** и $\tilde{\mathbf{R}}$**3** в случае, когда все три двойные точки диаграммы узла, участвующие в этом вырождении (см. верхние правые картинки на Рис. 13 и 14) являются ×-парами исходной $\mathcal{F}$-картинки, см. замечание 11 на стр. 36.

Оно иллюстрируется последними слагаемыми в формулах (102)—(105), (108), (109) и (138)—(140). Опишем его.

Допустим, что наша $\mathcal{F}$-картинка содержит три ×-пары с концами (a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_3}, a_{i_4}) и (a_{i_5}, a_{i_6}), не более чем одна из которых является хордой и по меньшей мере две — неперекрещенными ориентированными ломаными, такие что $|i_1 - i_3| = 1$, $|i_2 - i_5| = 1$, $|i_4 - i_6| = 1$. (Мы не предполагаем, что $i_1 < i_2$ или $i_3 < i_4$ или $i_5 < i_6$.)

Простое стягивание всех трех отрезков $[a_{i_1}, a_{i_3}]$, $[a_{i_2}, a_{i_5}]$ и $[a_{i_4}, a_{i_6}]$ превращает эту тройку ×-пар в треугольник, вершины которого — это наши три отрезка, стянутые в точки, а стороны образованы тремя ломаными (или двумя ломаными и одной хордой), унаследованными из этих ×-пар. Допустим, что это стягивание не противоречиво, то есть этот (быть может, частично) ориентированный треугольник не имеет допустимых циклов (см. п. 8 на стр. 47). Тогда граница исходного $\mathcal{F}$-блока содержит $\mathcal{B}$-блок, картинка которого является *приведенным стягиванием* наших трех отрезков, с дополнительным условием типа $\bar{\mathbf{2}}$**а** или $\bar{\mathbf{2}}$**б** (они же $\bar{\mathbf{3}}$**а** и $\bar{\mathbf{3}}$**б**), наложенным на три новорожденные активные точки, см. например последние слагаемые в формулах (102) и (138). Именно, если все три вектора $[a_{i_1}, a_{i_3}]$, $[a_{i_4}, a_{i_6}]$ и $[a_{i_5}, a_{i_2}]$ одинаково ориентированы в $\mathbb{R}^1_w$, то мы получаем условие 

, в противном случае мы получаем условие 

, где средняя стрелка соответствует точке, полученной при стягивании отрезка, для которого эта ориентация отличается от двух других.

3.5.2. *Полное столкновение двух ×-пар.* Это — формализация вырождений **R2** и $\tilde{\mathbf{R}}$**2.** Она иллюстрируется последними слагаемыми в (9), (10) и (15).

Допустим, что наша $\mathcal{F}$-картинка содержит две ×-пары с концами $(a_{i_1} < a_{i_2})$ и $(a_{i_3} < a_{i_4})$, не более чем одна из которых является хордой и по меньшей мере одна — неперекрещенной ориентированной ломаной, и $|i_1 - i_3| = 1$, $|i_2 - i_4| = 1$.

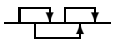
Вновь, мы стягиваем отрезки $[a_{i_1}, a_{i_3}]$ и $[a_{i_2}, a_{i_4}]$ в точки. Это стягивание может быть противоречивым только если обе ×-пары являются ломаными, ориентированными навстречу друг другу в $\mathbb{R}^1_w$ (в нашем алгоритме этого не бывает). Если это стягивание не противоречиво, то соответствующее приведенное стягивание дает нам одну хорду или

одну ломаную. В этом случае граница нашего $\mathcal{F}$-блока содержит $\mathcal{B}$-блок, картинка которого является результатом этого приведенного стягивания, дополненным одним условием типа $\bar{\mathbf{4}}$ или $\bar{\mathbf{4}}$**!а** или $\bar{\mathbf{4}}$**!б** (см. формулы (35), (36) и (37) на стр. 40 соответственно, где l и j — это номера точек новорожденной $\times$-пары в списке всех активных точек новой $\mathcal{B}$-картинки). Именно, если мы имели две (взаимно непротиворечивых) ломаных, так что приведенное стягивание дает нам одну ломаную, то мы получаем дополнительное условие типа $\bar{\mathbf{4}}$**!а** или $\bar{\mathbf{4}}$**!б** в зависимости от знака произведения $(a_{i_4}-a_{i_2})(a_{i_3}-a_{i_1})$. Если мы имели хорду и ломаную, так что приведенное стягивание дает нам одну хорду, то мы получаем условие типа $\bar{\mathbf{4}}$.

3.5.3. *Частичное столкновение двух $\times$-пар.* Это — формализация вырождений **R3** и $\tilde{\mathbf{R}}$**3** в случае, когда только две из трех двойных точек диаграммы (особого) узла соответствуют $\times$-парам исходной $\mathcal{F}$-картинки.

Допустим, что наша $\mathcal{F}$-картинка содержит две $\times$-пары (a_{i_1}, a_{i_2}) и (a_{i_3}, a_{i_4}), такие, что $|i_1 - i_3| = 1$ (вновь, мы не предполагаем, что $a_{i_1} < a_{i_2}$ или $a_{i_3} < a_{i_4}$).

Тогда граница исходного $\mathcal{F}$-блока содержит $\mathcal{B}$-блок, полученный из него простым стягиванием отрезка $[a_{i_1}, a_{i_3}]$.

Замечание 17. Последнее утверждение верно даже если выполнено более сильное условие, рассмотренное в §3.5.1 (то есть существование еще такой $\times$-пары (a_{i_5}, a_{i_6}), что $|i_2 - i_5| = |i_4 - i_6| = 1$) или в §3.5.2 (то есть $|i_2 - i_4| = 1$). Например, формула (138) на странице 91 показывает, что граница $\mathcal{F}$-блока  содержит не только субалгебраическую цепь, закодированную в конце (138) (и описанную в §3.5.1), но и некоторые пять цепей, полученных при частичных столкновениях разных пар $\times$-пар нашей картинки (см. слагаемые с 4 по 8 в правой части (138)); три из этих пяти частичных столкновений продолжаются до полного столкновения. Аналогично, формула (15) на странице 14 содержит не только свой последний член (указанный в §3.5.2), но и три члена, полученные при частичных столкновениях, два из которых продолжаются до полного.

3.5.4. *Влияние прочих условий.* Теперь допустим, что на $\times$-точки исходного $\mathcal{F}$-блока $V(\Theta)$, участвующие в одном из вырождений, описанных в §§3.5.1—3.5.3 выше, были наложены некоторые условия типов **3**, **4** или/и **5**. Тогда, вообще говоря, часть границы $\partial V(\Theta)$, определенная всевозможными вырождениями конфигураций $\times$-точек картинки Θ, будет "меньше" суммы $\mathcal{B}$-блоков, описанных в предыдущих трех разделах 3.5.1—3.5.3 для случая $\mathcal{F}$-блока без таких условий: некоторые из этих $\mathcal{B}$-блоков сократятся полностью или частично. Тем не менее, гомологическая граница нашего $\mathcal{F}$-блока $V(\Theta)$ будет линейной комбинацией некоторых $\mathcal{B}$-блоков, в соответствии с предложением 3.

А именно, при столкновении трех $\times$-пар или *частичном* столкновении двух $\times$-пар (описанных в разделах 3.5.1 и 3.5.3 соответственно) условия типа **3** ($\lessdot$) или **4** ($\Uparrow$ / $\Downarrow$), наложенные на активные точки до столкновения, дают в пределе точно такие же условия, наложенные на получающиеся из них точки. Условие типа **5** (

$\not\swarrow$), наложенное на две $\times$-пары, дает в пределе условие типа **4** при любой точке, получающейся при стягивании отрезка, содержавшего точки обеих этих пар.

При полном столкновении двух $\times$-пар (как в п. 3.5.2) условие типа **4** или условие типа **5**, связывающее эти две пары, дает в пределе условие типа **4**, а условие типа **3** на любую из этих двух $\times$-пар дает условие типа $\bar{\mathbf{4}}$**!!** ($\not\Diamond$).

3.5.5. *Что может происходить с опорами $\times$-пар при сталкивании их $\times$-точек.* Если $\times$-точки нескольких разных $\times$-пар нашей $\mathcal{F}$-картинки стремятся друг к другу, то некоторые точки опоры соответствующих мостов также могут сливаться.

Компоненты границы $\mathcal{F}$-блока $V(\Theta)$, описанные в разделах 3.5.1—3.5.4, соответствуют случаю, когда это не так, т.е. все точки опоры разных мостов стремятся к разным точкам линии $\mathbb{R}^1_w$ и, кроме того, они не стремятся к $\times$-точкам этих (или других) мостов. В настоящем подразделе мы учтем все остальные возможности, соответствующие тем же самым слияниям $\times$-пар.

Рассмотрим вначале полное столкновение двух $\times$-пар (a_{i_1}, a_{i_2}) и (a_{i_3}, a_{i_4}) как в §3.5.2, или частичное столкновение таких двух $\times$-пар, как в §3.5.3. Допустим, что мы можем выделить несколько точек опоры $a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$ первой из этих пар и столько же точек опоры $a_{l_1}, \dots, a_{l_r}$ второй $\times$-пары таким образом, что $|j_\alpha - l_\alpha| = 1$ для любого $\alpha = 1, \dots, r$. Будем считать также, что все опоры, соответствующие этим $2r$ точкам, ориентированы по направлению к ним.

Тогда мы можем стянуть эти $r+2$ отрезка $[a_{i_1}, a_{i_3}]$, $[a_{i_2}, a_{i_4}]$, $[a_{l_\alpha}, a_{j_\alpha}]$. Результатом этого стягивания будет субалгебраическое множество, выражаемое $\mathcal{B}$-картинкой, получаемой из исходной $\mathcal{F}$-картинка Θ следующим образом: наши две $\times$-пары изменяются в соответствии с §3.5.2, и дополнительно для любого $\alpha = 1, \dots, r$ отрезок $[a_{j_\alpha}, a_{l_\alpha}]$ стягивается, а пара опор с концами в a_{j_α} и a_{l_α} заменяется на только одну такую опору a_{η_α}, снабженную подписью $\|^{\eta_\alpha}_{\iota'}$ или $\nparallel^{\eta_\alpha}_{\iota'}$, где ι' — номер точки, получившейся при стягивании отрезка (a_{i_1}, a_{i_3}), а символ $\|$ или $\nparallel$ зависит от знака выражения $(a_{i_1} - a_{i_3})(a_{j_\alpha} - a_{l_\alpha})$. Конечно, после этого нужно проверить, не вступает ли это условие в противоречие с другими условиями типов **3** и **4**, унаследованными из таких условий на исходные активные точки; в противном случае это стягивание противоречиво. Если оно не противоречиво, то получающееся множество является $\mathcal{B}$-блоком, участвующим в границе исходного $\mathcal{F}$-блока.

В случае частичного столкновения двух $\times$-пар как в §3.5.3, имеется еще одна дополнительная возможность (см. Рис. 24 и последние слагаемые в формулах (110)—(119) и (141)—(145)). Именно, допустим, что $\times$-пара (a_{i_1}, a_{i_2}) кроме r точек опоры, рассмотренных в предыдущем абзаце, имеет еще точку опоры a_u такую, что $|i_4 - u| = 1$, $u \notin \{j_1, \dots, j_r, l_1, \dots, l_r\}$. Тогда граница $\mathcal{F}$-блока $V(\Theta)$ содержит также $\mathcal{B}$-блок, в $\mathcal{B}$-картинке которого

а) эти две $\times$-пары изменены в соответствии с §3.5.3 и 3.5.4,

б) для любого $\alpha = 1, \dots, r$, отрезок $[a_{j_\alpha}, a_{l_\alpha}]$ стягивается, пара соответствующих опор с концами в точках a_{j_α} и a_{l_α} заменяется на одну опору, конец которой a_{η_α} получается при этом стягивании и снабжается условием $\|^{\eta_\alpha}_{\iota'}$ или $\nparallel^{\eta_\alpha}_{\iota'}$; и

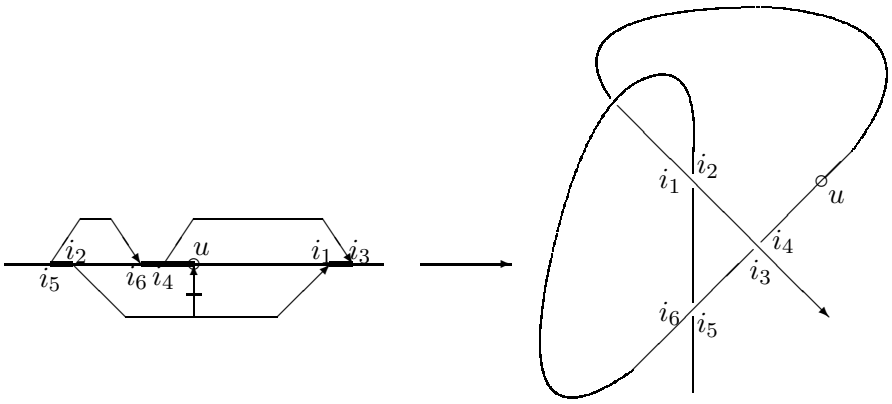


Рис. 24. Исчезающая опора

в) опора с концом в точке a_u исчезает, но взамен возникает условие типа **3** ($\ltimes$, см. (30)), наложенное на касательные векторы отображения f в двух точках, полученных при стягивании отрезков $[a_{i_1}, a_{i_3}]$ и $[a_{i_4}, a_u]$.

Геометрическое объяснение последнего условия см. на Рис. 24 (при этом не обращая внимания на точку перекрестия с индексами i_5, i_6, которая потребуется при иллюстрации следующего по сложности случая трех сливающихся $\times$-пар, описываемого ниже).

Замечание 18. Если исходный $\mathcal{F}$-блок удовлетворяет условиям замечания 6 (см. стр. 31), то такое исчезновение точки опоры a_u может иметь место только если отрезок $[a_{i_4}, a_u]$ расположен в $\mathbb{R}^1_w$ между отрезком $[a_{i_1}, a_{i_3}]$ и точкой a_{i_2}.

В общем случае, тем же самым образом может исчезать еще одна опора $\times$-пары (a_{i_3}, a_{i_4}) с точкой опоры a_v, $|v - i_2| = 1$. Однако, если исходный $\mathcal{F}$-блок удовлетворяет условиям замечания 6, то это невозможно: действительно, в этом случае по тем же причинам отрезок $[a_{i_2}, a_v]$ должен быть расположен между отрезками $[a_{i_1}, a_{i_3}]$ и $[a_{i_4}, a_u]$. Поэтому мы не будем подробно рассматривать эту возможность.

Наконец, рассмотрим столкновения троек $\times$-пар. Пусть у нас имеются три готовые к столкновению $\times$-пары, описанные в §3.5.1, и выделены некоторые непересекающиеся подмножества объединения их φ-точек, такие что

а) каждое подмножество состоит из двух или трех φ-точек, никакие две из которых не принадлежат одному и тому же мосту;
б) каждое подмножество состоит из соседних активных точек картинки, т.е. оно не разделено другими активными точками;
в) для всех таких множеств мощности 3, их средние точки принадлежат одному и тому же мосту;
г) одновременное стягивание трех отрезков $[a_{i_1}, a_{i_3}]$, $[a_{i_2}, a_{i_5}]$, $[a_{i_4}, a_{i_6}]$ (соединяющих точки наших $\times$-пар) и всех отрезков, соединяющих точки опоры внутри одного и того же выделенного множества, не противоречиво.

Тогда граница нашего $\mathcal{F}$-блока содержит $\mathcal{B}$-блок, на картинке которого наши три $\times$-пары преобразованы в соответствии с §3.5.1, и дополнительно каждая пара или тройка

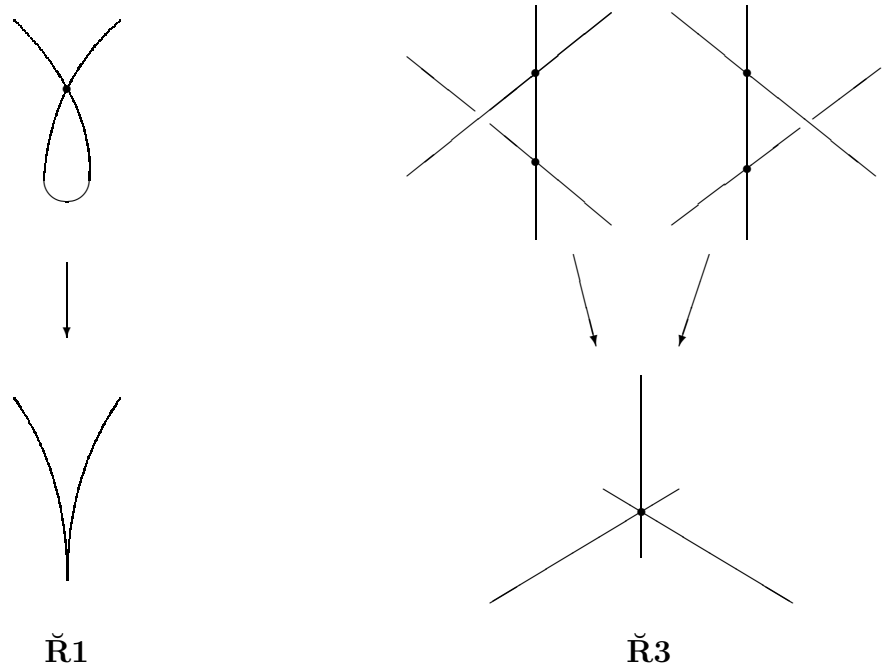


Рис. 25. Вырождения в меньшие клетки

опор, точки опоры которых принадлежат одному и тому же выделенному подмножеству, заменяется одной опорой; если эта опора получается при слиянии двух опор, то эта точка снабжается одним условием вида $\|_{\iota'}^{\eta_\alpha}$ или $\nparallel_{\iota'}^{\eta_\alpha}$, если же она получается при слиянии трех опор, то она снабжается тройкой таких условий (два из которых удобно переформулировать как условия на знаки производной отображения f_2 в трех точках, получающихся при слиянии наших $\times$-пар).

Кроме этого, в общем случае может исчезнуть еще одна опора, растущая из центра одной из $\times$-пар этой тройки, причем взамен возникнут некоторые условия типа **3** ($\Vdash$) на производные отображения f_1 в соответствующих трех $\times$-точках возникающей конфигурации; см. Рис. 24. Мы по-прежнему не будем рассматривать здесь случай двух исчезающих опор, поскольку он противоречит условиям из замечания 6. Однако может случиться, что в менее прямолинейном алгоритме эти условия не будут использоваться, а следовательно придется рассматривать такую возможность.

3.6. **Граница в вице-максимальных клетках.** В предыдущих разделах §3 мы рассматривали участки границы $\mathcal{F}$-блока, лежащие в той же самой максимальной клетке члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ стандартной фильтрации разрешенного дискриминанта, что и исходный $\mathcal{F}$-блок. Теперь мы рассмотрим другую часть этой границы, лежащую в вице-максимальных клетках этого же члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Она связана с вырождением набора хорд нашей $\mathcal{F}$-картинки, см. Рис. 25 на стр. 57 и примеры 2, 3 на стр. 27.

На левой нижней картинке Рис. 25 предполагается (в отличие от схожей картинки Рис. 13), что в точке "клюва"равна нулю производная самого́ параметризующего отображения $f : \mathbb{R}^1_w \to \mathbb{R}^3$, а не только производная его проекции f_1. На правой нижней картинке предполагается, что вектор "вверх"в $\mathbb{R}^3$ (направленный “к нам") принадлежит октанту, состоящему из положительных линейных комбинаций трех векторов, касательных в точке пересечения к нарисованным там трем отрезкам и ориентированных по направлению к их более длинным частям. Вырождения типа $\check{\mathbf{R}}\mathbf{1}$ определяют часть границы $\mathcal{F}$-блоков, лежащую в вице-максимальных клетках типа **1T**, а вырождения типа $\check{\mathbf{R}}\mathbf{3}$ — часть, лежащую в клетках типа **4T**.

Предложение 6. *Вырождение* $\check{\mathbf{R}}\mathbf{1}$ *в действительности не может возникать в нашем вычислении комбинаторных формул для инвариантов узлов.*

Доказательство проводится индукцией по нашему алгоритму (который будет описан в следующем параграфе); вот его идея. Начальные данные γ нашего алгоритма (т.е. "весовая система") удовлетворяют *одночленному* (или **1T**-) *соотношению*, которое означает, что концы любой хорды любой из хордовых диаграмм, составляющих γ, разделены в $\mathbb{R}^1_w$ концами некоторых других хорд той же хордовой диаграммы, см. стр. 27. На следующих шагах алгоритма некоторые из этих разделяющих хорд могут разрушиться, но не бесследно. Из конструкции алгоритма (как она описана в §4 ниже) следует, что для любой хорды любой $\mathcal{F}$-картинки, фактически возникающей при его выполнении, справедливо одно из двух:

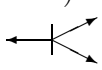
а) между концами a, b этой хорды найдется активная точка этой картинки,
б) вектора $f_1'(a)$ и $f_1'(b)$, т.е. проекции в $\mathbb{R}^2$ касательных векторов отображения f в этих концах, сонаправлены.

Любое из этих двух условий препятствует вырождению типа $\check{\mathbf{R}}\mathbf{1}$, стягивающему концы этой хорды вместе, т.е. соответствующий участок границы имеет слишком большую коразмерность для того, чтобы иметь значение для гомологических вычислений, связанных с инвариантами узлов. □

В качестве иллюстраций этого предложения см. лемму 5 на странице 72 и предложение 26 на странице 91. Аналогичное рассуждение позволяет нам не рассматривать вырождение **R1**, см. замечание 16 в §3.3.

Изучение вырождения $\check{\mathbf{R}}\mathbf{3}$ очень похоже на изучение вырождений **R3** и $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{3}$ выше. По-прежнему, с точки зрения формальных вычислений его надо разбить на два подслучая в зависимости от того, была ли единственная точка прохода-перехода диаграммы сингулярного узла, участвующая в этом вырождении (см. верхнюю часть Рис. 25, столбец $\check{\mathbf{R}}\mathbf{3}$), учтена в исходной $\mathcal{F}$-картинке с помощью ориентированной ломаной или нет. Первая (соответственно, вторая) возможность иллюстрируется двумя последними (соответственно, всеми кроме двух последних) слагаемыми в правой части любого из уравнений (71)—(79). Аналогично §3.5.5, при таком столкновении может совпасть или пропасть несколько опор. Если мы следуем прямому алгоритму, то пропадающих опор будет не более одной, см. например два последних слагаемых в любом из уравнений (80)—(83) или четыре последних слагаемых в уравнении (84).

Обозначение участка границы, полученного при таком вырождении, очень похоже на то, что мы имели раньше: оно состоит из обозначения вице-максимальной клетки, в которой лежит этот участок, и условий типов **1**, ..., **5**, $\bar{\mathbf{2}}$**а**, $\bar{\mathbf{2}}$**б**, приписанных на или под ним.

Но дополнительно оно может содержать еще одно геометрическое условие. Рассмотрим вице-максимальную клетку типа **4T**. Ее обозначение состоит из $i-2$ хорд и одного треножника с отмеченной ногой, см. (25). Тогда условие $\triangle$ означает, что выпуклая оболочка четырех лучей в $\mathbb{R}^3$, три из которых являются касательными направлениями отображения f в точках опоры треножника, а четвертое — это направление "вверх", является клином с тремя сторонами (то есть один из этих трех векторов лежит в октанте, натянутом на остальные три); условие $\bigtriangledown$ означает, что эта выпуклая оболочка — клин с четырьмя сторонами или все $\mathbb{R}^3$ (или, что то же самое, что аналогичная выпуклая оболочка этих же трех касательных направлений и направления "вниз" является клином с тремя сторонами). Эти два условия всегда появляются в сопровождении условия или  , описанного в пункте $\bar{\mathbf{2}}$**а** или $\bar{\mathbf{2}}$**б** раздела 2.4. Эти условия $\triangle$ и $\bigtriangledown$ возникают при вырождениях типа **Ř3**, при которых концы некоторой ломаной сталкиваются со свободными концами двух хорд, участвующих в вырождении. Для иллюстрации см. два последних слагаемых в каждом из равенств (71)—(79).

3.7. **Граница в младшем члене фильтрации.** Пусть дан $\mathcal{F}$-блок в некоторой максимальной клетке члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Его $\mathcal{F}$-картинка содержит i хорд. Тогда его граница в $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}$ состоит из i $\mathcal{B}$-блоков степени $i-1$. Эти блоки находятся в соответствии со всеми хордами исходной $\mathcal{F}$-картинки, а изображение любого такого блока получается из этой картинки заменой соответствующей хорды на неориентированную неперекрещенную ломаную.

4. Описание алгоритма

4.1. **Иерархия $\mathcal{B}$-блоков.** Наш алгоритм использует индукцию по *сложности* $\mathcal{B}$-блоков, т.е. по некоторому частичному порядку на множестве таких блоков в произвольной максимальной клетке члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Опишем этот частичный порядок.

Прежде всего, мы упорядочиваем эти $\mathcal{B}$-блоки по числу активных точек в соответствующих $\mathcal{B}$-картинках. Если у двух картинок такие числа совпадают, то мы упорядочиваем эти картинки по виду (единственного) условия типа равенства, описанного в пунктах $\bar{\mathbf{1}}$**,** $\bar{\mathbf{2}}$**,** $\bar{\mathbf{3}}$**,** $\bar{\mathbf{4}}$**,** $\bar{\mathbf{5}}$, или $\bar{\mathbf{6}}$ §2.4 и участвующего в описании этого блока: $\mathcal{B}$-блок с условием $\bar{\mathbf{1}}$ старше, чем блок с условием $\bar{\mathbf{2}}$, и т.д. Если у некоторых двух $\mathcal{B}$-блоков с одинаковым количеством активных точек эти показатели также совпадают, то мы упорядочиваем эти блоки в соответствии с лексикографическим порядком (в линии Вильсона, слева направо) набора активных точек, участвующих в этом условии.

Это — все еще не полный порядок на множестве всех возможных $\mathcal{B}$-картинок. Например, две картинки, отличающиеся только ориентациями некоторых ломаных или знаками в некоторых условиях типа неравенства (описанных в §2.2), будут несравнимы между собой.

Аналогичный частичный порядок можно определить на множестве субалгебраических цепей коразмерности 2, образующих неприводимые участки границ $\mathcal{B}$-блоков. Эти цепи будут встречаться ниже в связи с гомологическими условиями на линейные комбинации $\mathcal{B}$-блоков, задающие очередные дифференциалы $d^r(\gamma)$ спектральной последовательности: каждая такая линейная комбинация должна быть циклом в соответствующем члене $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, $i = k - r$.

Определение 14. $\mathcal{B}$-картинка или $\mathcal{F}$-картинка называется *правильной,* если все входящие в нее условия обладают свойствами, перечисленными в замечании 5 на стр. 31, замечании 6 на стр. 31, замечании 7 на стр. 33, замечании 12 на стр. 38 и замечании 13 на стр. 41. $\mathcal{B}$-блок (соответственно, $\mathcal{F}$-блок) называется правильным, если он задается правильной $\mathcal{B}$- (соответственно, $\mathcal{F}$-) картинкой.

Предложение 7. *Все $\mathcal{B}$-блоки, составляющие границу правильного $\mathcal{F}$-блока в соответствии с предложением 5, также правильны.*

Доказательство непосредственно. □

4.2. **Как алгоритм работает.** Он начинает с некоторой весовой системы некоторого ранга k, т.е. с цикла γ в $\sigma_k \setminus \sigma_{k-1}$, заданного линейной комбинацией нескольких максимальных клеток, соответствующих k-хордовым диаграммам. Затем мы вычисляем первую границу $d^1(\gamma)$ этого цикла, которая является суммой нескольких $\mathcal{B}$-блоков в максимальных клетках члена $\sigma_{k-1} \setminus \sigma_{k-2}$; см. § 3.7, а также формулы (8) и (51). Эта граница является набором начальных данных для первого шага алгоритма. Аналогично, начальные данные для r-го шага алгоритма, $r = k - i$, — это некоторый субалгебраический цикл $d^r(\gamma) \subset \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, построенный на $(r-1)$-м шаге.

На этом r-м шаге мы пытаемся затянуть цикл $d^r(\gamma)$ какой-нибудь относительной цепью γ_r в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Мы делаем это по отдельности в каждой максимальной открытой клетке члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Именно, мы фиксируем такую клетку M, рассматриваем цепь $d^r(\gamma) \cap M$ коразмерности 1, и пытаемся затянуть ее какой-нибудь цепью $\gamma_r^M \subset M$ полной размерности, так, чтобы выполнялось условие $\partial\gamma_r^M + (d^r(\gamma) \cap M) \subset \partial M$. Объединение этих цепей по всем клеткам M доставляет нам гомологию между $d^r(\gamma)$ и некоторым циклом в объединении вице-максимальных клеток; последний цикл не может быть ничем иным как линейной комбинацией этих клеток, и с ним мы разберемся позднее.

Обозначим через Δ эту цепь $d^r(\gamma) \cap M$, которую мы должны убить цепью γ_r^M. Очевидно, она является циклом в M, т.е. $\partial\Delta \subset \partial M$.

Предположение индукции. *Цикл Δ может быть представлен линейной комбинацией конечного числа* правильных *$\mathcal{B}$-блоков в клетке M, каждый из которых выделяется не более чем $r-1$ условием типа неравенства, описанным в пп.* **1**–**5** *§2.2, и ровно одним условием, описанным в пункте* $\bar{\mathbf{1}}$ *§2.4 (т.е. неориентированной неперекрещенной ломаной* ⊓ *). $\mathcal{B}$-картинка каждого такого $\mathcal{B}$-блока содержит не более чем $2k$ активных точек.*

Определим группу $\widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$ как группу формальных $\mathbb{Z}_2$-линейных комбинаций всевозможных *правильных* $\mathcal{B}$-блоков в нашей клетке M, выделенных не более чем $r-1$

условием типа неравенства как в пп. **1–5** §2.2 или пп. **$\bar{2}$а, $\bar{2}$б, $\bar{3}$а/$\bar{3}$б, $\bar{4}$!!, $\bar{5}$а, $\bar{5}$б** §2.4, и одним *произвольным* условием типа равенства (т.е. как в пунктах **$\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{2}$!, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{4}$!а, $\bar{4}$!б, $\bar{5}$, $\bar{5}$!, $\bar{6}$а, $\bar{6}$б** или **$\bar{6}$!** §2.4).

Обозначим через $\mathcal{B}_r(M)$ фактор этой группы по всем соотношениям наподобие указанных в замечаниях 10 и 15 (см. страницы 35 и 43): две формальные линейные комбинации эквивалентны (т.е. определяют один и тот же элемент группы $\mathcal{B}_r(M)$), если они определяют одинаковые субалгебраические цепи в M в смысле определения 2 на стр. 19.

Частичный порядок $\mathcal{B}$-блоков, описанный в §4.1, задает возрастающую фильтрацию в группе $\widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$, а следовательно и в $\mathcal{B}_r(M)$.

Определение 15. Фильтрация элемента группы $\widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$ равна максимальному порядку $\mathcal{B}$-блоков, входящих в определяющую его линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом.

Фильтрация элемента группы $\mathcal{B}_r(M)$ равна минимальной фильтрации представляющих ее элементов группы $\widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$.

Минимальный представитель некоторого элемента факторгруппы $\mathcal{B}_r(M)$ — это произвольный элемент группы $\widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$, представляющий его и имеющий наименьшую возможную фильтрацию среди всех его представителей.

Мы убиваем цикл Δ с помощью индуктивного процесса, каждый шаг которого уменьшает фильтрацию элементов группы $\mathcal{B}_r(M)$.

Вначале мы выбираем произвольный минимальный представитель $\tilde{\Delta} \in \widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$ цикла Δ. Выберем такие $\mathcal{B}$-блоки в $\tilde{\Delta}$, которые имеют наибольшее число активных точек. Обозначим это число через N. Среди всех $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde{\Delta}$, имеющих N активных точек, отберем те, которые содержат неориентированную неперекрещенную ломаную $\sqcap$ как в условии $\bar{1}$ из §2.4.[3] Среди всех таких $\mathcal{B}$-блоков мы выберем те, у которых эта ломаная расположена (лексикографически) дальше всего налево в $\mathbb{R}^1_w$; обозначим через A сумму всех таких $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde{\Delta}$. Обозначим через $A^\uparrow$ сумму $\mathcal{F}$-блоков, $\mathcal{F}$-картинки которых получаются из $\mathcal{B}$-картинок $\mathcal{B}$-блоков, составляющих набор A, заменой неориентированной неперекрещенной ломаной на ломаную, ориентированную слева направо; ср. с формулой (38) на странице 44.

Пример 5. Если Δ задается суммой (8) на стр. 9, то цепь A — это первое слагаемое в (8), а $A^\uparrow$ указано в левой части равенства (9). Тогда фильтрация цепи $A - \partial A^\uparrow$ строго ниже, чем у A. Ведущий (т.е. наивысшей фильтрации) член последней цепи равен второму слагаемому в (8). Мы убьем его левой частью равенства (10). Оставшаяся после этого сумма состоит из $\mathcal{B}$-блоков с не более чем 3 активными точками в каждом, в частности ее фильтрация еще ниже.

Аналогичная ситуация имеет место и в общем случае. Именно, мы имеем следующий общий факт.

[3] В самом начале это будут *все* наши $\mathcal{B}$-блоки, однако мы собираемся двигаться индукцией по N, а на следующих шагах этой индукции могут появиться и другие условия типа равенства.

Предложение 8. *Если класс цепи A в $\mathcal{B}_r(M)$ не равен 0, то фильтрация цикла $\tilde{\Delta} - \partial A^{\uparrow}$ строго ниже, чем у Δ.*

Доказательство. Пусть W — один из $\mathcal{F}$-блоков, составляющих $A^{\uparrow}$. В силу предложения 3 (см. стр. 43), его граница ∂W является суммой нескольких $\mathcal{B}$-блоков, $\mathcal{B}$-картинки которых имеют не более чем по N активных точек. Для любого такого граничного $\mathcal{B}$-блока, полученного из W вырождением любого типа кроме $\mathbf{X}$ (см. §2.3), его фильтрация строго ниже, чем у всех компонент цепи A. Поэтому единственная причина, по которой фильтрация цепи $\tilde{\Delta} - \partial A^{\uparrow}$ могла бы оказаться выше или равна фильтрации $\tilde{\Delta}$, состоит в следующем: у некоторых неориентированных ломаных $\sqcap$ на картинках компонент цепи $\partial A^{\uparrow}$, возникающих при вырождении некоторых ориентированных неперекрещенных ломаных $\sqcap\!\!\!\!\uparrow$ цепи $A^{\uparrow}$, левые концы могут оказаться левее (т.е. их номера в $\mathbb{R}^1_w$ меньше), чем (общий) номер левых концов аналогичных ломаных из картинок слагаемых цепи A.

Рассмотрим, например, равенство (105) на странице 83. Допустим, что A содержит $\mathcal{B}$-блок, заданный *вторым* слагаемым в правой части (105) и мы пытаемся убить его $\mathcal{F}$-блоком W, указанным в левой части этого равенства. Тогда, помимо нашего убиваемого $\mathcal{B}$-блока, ∂W содержит первое слагаемое в (105), фильтрация которого строго выше. К счастью, как мы сейчас увидим, эта ситуация не может возникнуть в нашем алгоритме: например, второе слагаемое в (105) не может быть ведущим членом цепи $\tilde{\Delta}$, поскольку иначе $\tilde{\Delta}$ не будет циклом в M.

В общем случае, пусть j — минимальное значение номеров левых концов неперекрещенных ориентированных ломаных $\sqcap\!\!\!\!\uparrow$, участвующих в $\mathcal{B}$-картинках всех $\mathcal{B}$-блоков, входящих в линейную комбинацию A. Если j больше, чем номер левого конца неориентированной неперекрещенной ломаной $\sqcap$, участвующей во всех этих картинках, то утверждение предложения 8 выполнено для A. Если же j меньше этого номера, обозначим через A_+ сумму всех $\mathcal{B}$-блоков, входящих в линейную комбинацию A, $\mathcal{B}$-картинка каждого из которых содержит неперекрещенную ориентированную ломаную $\sqcap$, левый конец которой имеет номер j (то есть называется a_j).

Лемма 1. *Цепь A_+ равна нулю в $\mathcal{B}_r(M)$.*

Доказательство леммы. Граница цепи A_+ содержит несколько компонент, задаваемых картинками, включающими две неориентированные неперекрещенные ломаные $\sqcap$: одна из этих ломаных наследуется из общей такой ломаной, присутствующей в $\mathcal{B}$-картинках всех блоков, составляющих A, а другая получается при вырождении типа $\mathbf{X}$, т.е. забыванием ориентации некоторой ориентированной ломаной $\sqcap\!\!\!\!\uparrow$. Выделим среди этих компонент в A_+ те, которые получаются таким вырождением из ориентированных ломаных, левые концы которых имеют номер j (т.е. обозначаются через a_j). Обозначим сумму этих компонент через $A^{\downarrow}_+$. Из условия $\partial\tilde{\Delta} = 0$ следует, что эта цепь $A^{\downarrow}_+$ равна 0. Действительно, по определению цепи A ни одно из ее слагаемых не может совпадать ни с какими другими участками границ $\mathcal{B}$-блоков, входящих в цикл $\tilde{\Delta}$: все эти участки либо имеют меньшее количество активных точек, либо их условия

типа равенства не типа $\bar{\mathbf{1}}$, либо же они типа $\bar{\mathbf{1}}$, но концы соответствующих неориентированных ломаных $\sqcap$ расположены лексикографически правее, чем в нашей цепи.

С другой стороны, цепь A_+ заметается однопараметрическим семейством цепей, аналогичных $A_+^{\downarrow}$ и зависящих от параметра $\tau \in \mathbb{R}_+$. Каждая цепь этого семейства определяется точно так же, как $A_+^{\downarrow}$, лишь со следующим отличием. Условие $f(a_j) = f(a_l)$ (выражаемое нашей неориентированной ломаной $\sqcap$) заменяется в этом определении на следующее: $f_1(a_j) = f_1(a_l)$ (т.е. проекции точек $f(a_j)$ и $f(a_l)$ в $\mathbb{R}^2$ по-прежнему совпадают), но разность проекций $f(a_j)$ и $f(a_l)$ на "вертикальную"прямую в $\mathbb{R}^3$ равна τ. Следовательно, и цепь A_+ равна 0. □

Предложение 8 немедленно следует из этой леммы. □

Итак, $\mathcal{F}$-цепь $A^{\uparrow}$ определяет гомологию между циклом Δ и некоторым циклом строго меньшей фильтрации. Применяя этот прием несколько раз, мы убьем все слагаемые в $\tilde{\Delta}$, $\mathcal{B}$-картинки которых содержат N активных точек и одну неориентированную ломаную $\sqcap$ как в пункте $\bar{\mathbf{1}}$ §2.2. Обозначим через Δ_1 класс в группе $\widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$ получающейся после этого линейной комбинации $\mathcal{B}$-блоков в M. Пусть $\tilde{\Delta}_1 \in \widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$ — произвольный минимальный представитель цепи Δ_1. По построению, он является циклом в M, его класс в $\mathcal{B}_r(M)$ гомологичен Δ, и $\tilde{\Delta}_1$ не имеет слагаемых с N активными точками и вырождением типа $\bar{\mathbf{1}}$.

Рассмотрим все $\mathcal{B}$-блоки в $\tilde{\Delta}_1$, в определении которых участвует условие типа $\bar{\mathbf{2}}$ ($\curvearrowright$). Обозначим через $\tilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$ формальную сумму этих блоков, а через B — соответствующий элемент группы $\mathcal{B}_r(M)$.

Разделим формальную цепь $\tilde{B}$ на две части $\tilde{B}_+$ и $\tilde{B}_-$, состоящие из таких $\mathcal{B}$-блоков, что ориентированная неперекрещенная ломаная, участвующая в обозначении вырождения типа $\bar{\mathbf{2}}$ в каждом из них, направлена от (соответственно, к) центра хорды к (соответственно, от) точке линии Вильсона.

Предложение 9. *Если мы изменим ориентации этих неперекрещенных ориентированных ломаных, участвующих в обозначении вырождений типа* $\bar{\mathbf{2}}$ *во всех слагаемых формальной цепи* $\tilde{B}_+$*, то мы получим элемент группы* $\widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$*, класс которого в* $\mathcal{B}_r(M)$ *равен* $\tilde{B}_-$*, и обратно.*

Доказательство немедленно вытекает из условия $\partial\Delta_1 \cap M = 0$. □

Следствие 1. 1. *Сумма всех $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde{B}$, таких, что лежащий на линии Вильсона конец ориентированной неперекрещенной ломаной, участвующей в соответствующем вырождении типа* $\bar{\mathbf{2}}$, не *лежит между концами соответствующей хорды (также участвующей в этом вырождении), равна 0 в $\mathcal{B}_r(M)$.*

2. *Цепь B можно задать линейной комбинацией $\mathcal{B}$-блоков, для каждого из которых верно следующее:*

а) этот блок правилен (см. определение 14 на стр. 60),

б) его $\mathcal{B}$-картинка содержит не более N активных точек,

в) его фильтрация не превосходит фильтрации цепи B, и

г) единственное условие типа равенства, входящее в его определение, имеет тип $\bar{\mathbf{2}}$**!**, *то есть выражено единожды перекрещенной неориентированной ломаной* *, один из концов которой лежит в центре некоторой хорды, а второй – на линии Вильсона между концами этой хорды.*

В качестве иллюстрации этого следствия см. формулу (11), а также леммы 7, 8 и 9 на стр. 90.

Доказательство. Утверждение 1 следует из предыдущего предложения и из того, что все рассматриваемые в этом утверждении ломаные ориентированы направо (см. определение 14 на стр. 60 и в особенности его утверждение о замечании 12).

Поэтому мы можем выбросить из линейной комбинации $\tilde{B}$ все $\mathcal{B}$-блоки, описанные в утверждении 1, а в оставшейся линейной комбинации заменить то, что осталось от $\tilde{B}_-$, на цепь, полученную из того, что осталось от $\tilde{B}_+$, сменой ориентаций ломаных, как описано в предложении 9. В силу этого предложения и утверждения 1 полученная линейная комбинация задает ту же самую цепь B и удовлетворяет утверждению 2 нашего следствия. □

Выберем минимальную формальную цепь $\tilde{B}$, представляющую B, именно таким образом.

Предложение 10. *Ни один из $\mathcal{B}$-блоков, составляющих $\tilde{B}$, не содержит условия типа* $\bar{\mathbf{2}}$**а** *или* $\bar{\mathbf{2}}$**б**.

Доказательство. Все $\mathcal{B}$-блоки, составляющие цепь $\tilde{B}_+$, возникают как компоненты границ правильных $\mathcal{F}$-блоков. Условия типа $\bar{\mathbf{2}}$**а** или $\bar{\mathbf{2}}$**б** могут возникать только при полном слиянии трех $\times$-пар. Такое вырождение может дать хорду, соединенную ориентированной неперекрещенной ломаной с точкой, находящейся между концами этой хорды, только если эта тройка $\times$-пар состоит из хорды и двух ломаных, и соответствующее простое стягивание превращает их в хорду и две ломаные, соединяющие концы этой хорды с точкой, лежащей *между* этими концами. Поскольку исходный $\mathcal{F}$-блок был правильным, то обе эти ломаные должны быть направлены в одну и ту же сторону в $\mathbb{R}^1_w$, а следовательно это простое стягивание противоречиво, см. левый столбец Рис. 20а. Утверждение предложения доказано для части $\tilde{B}_+$ цепи $\tilde{B}$, а часть $\tilde{B}_-$ симметрична ей. □

Лемма 2. *Сумма всех $\mathcal{B}$-блоков, входящих в формальную линейную комбинацию $\tilde{B}$, $\mathcal{B}$-картинки которых содержат хотя бы одну ориентированную (направо) неперекрещенную ломаную, оба конца которой находятся на линии Вильсона, равна 0 в $\mathcal{B}_r(M)$.*

Доказательство – почти то же, что у леммы 1. А именно, пусть $\{j < l\}$ — лексикографически наименьшая пара индексов такая, что найдется $\mathcal{B}$-блок, входящий в $\tilde{B}$, содержащий ориентированную неперекрещенную ломаную с концами a_j и a_l. Обозначим через β сумму всех $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde{B}$, содержащих такую ломаную с концами a_j и a_l. Граница любого из этих блоков содержит субалгебраическую цепь

коразмерности 2, картинка которой получается из обозначения этого блока забыванием ориентации этой ломаной. Сумма этих цепей коразмерности 2 должна быть равна 0, поскольку ни одну из них нельзя убить никакой из остальных компонент границы никакого блока, входящего в *цикл* $\tilde{B}$. Отсюда (почти дословно повторяя последний абзац доказательства леммы 1) получаем, что и вся цепь β равна 0. □

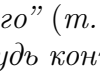
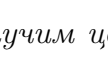
Из этой леммы следует, что мы можем просто отбросить из линейной комбинации $\tilde{B}$ все $\mathcal{B}$-блоки, содержащие такие ломаные: задаваемая ею цепь B от этого не изменится, и максимальная фильтрация участвующих в ней блоков не возрастет.

Переобозначим через $\tilde{\Delta}_1$ и $\tilde{B}$ линейные комбинации $\mathcal{B}$-блоков, получающиеся после этого отбрасывания из прежних комбинаций с теми же названиями.

Предложение 11. *Представитель $\tilde{\Delta}_1$ цепи Δ_1, полученный на предыдущих шагах, можно заменить на другой ее минимальный представитель, такой, что ни один из $\mathcal{B}$-блоков, составляющих его главную часть $\tilde{B}$, не имеет подписей типа*

(46) *или* *или* *или*

(см. (30)), где l — номер лежащего на линии Вильсона конца единожды перекрещенной неориентированной ломаной, участвующей в условии типа **2!** ( ) *в определении этого блока, а j — номер произвольного конца хорды, в центре которой лежит другой конец этой ломаной.*

Лемма 3. *Пусть $\beta^<$ (соответственно, $\beta^>$, соответственно, $\beta^\vee$, соответственно, $\beta^\wedge$) — это сумма всех $\mathcal{B}$-блоков, входящих в линейную комбинацию $\tilde{B}$, картинка которых содержит как единожды перекрещенную неориентированную ломаную, один из концов которой совпадает с центром хорды, так и подпись* *(соответственно,*  *, соответственно,* *, соответственно,* *), где l — это номер "свободного" (т.е. лежащего на линии Вильсона) конца этой ломаной, а j — номер какого-нибудь конца соответствующей хорды. Тогда, заменяя эти подписи* *, возникающие в этой ситуации во всех $\mathcal{B}$-картинках формальной цепи $\beta^<$, на*  *, мы получим цепь, класс которой в $\mathcal{B}_r(M)$ — тот же, что у цепи $\beta^>$; заменяя аналогичные подписи* *во всех $\mathcal{B}$-картинках формальной цепи $\beta^\vee$ на* *, мы получим формальную цепь, класс которой в $\mathcal{B}_r(M)$ — тот же, что у $\beta^\wedge$.*

Доказательство леммы вновь вытекает из условия $\partial\Delta_1 = 0$. Действительно, граница цепи $\beta^<$ (соответственно, $\beta^>$) содержит цепь, состоящую из всех субалгебраических цепей коразмерности 2 в M, обозначения которых получаются из обозначений $\mathcal{B}$-блоков, образующих $\beta^<$ (соответственно, $\beta^>$), заменой подписи (соответственно,) на . Эти две цепи должны совпадать, поскольку никакой

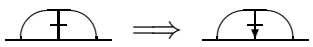
неособый участок носителей последних цепей коразмерности 2 не может возникать в границах никаких $\mathcal{B}$-блоков *с N активными точками* в $\tilde\Delta_1$, не принадлежащих $\beta^<$ или $\beta^>$.

Доказательство утверждения о сравнении цепей $\beta^\vee$ и $\beta^\wedge$ почти такое же и использует участки границы, заданные условием вместо . □

Доказательство предложения 11. В силу леммы 3 мы можем выбрать минимальный представитель $\tilde\Delta_1$ цепи Δ_1 таким образом, что цепь $\beta^>$ равна цепи, полученной из $\beta^<$ при помощи такой замены во всех ее слагаемых, а $\beta^\wedge$ равна цепи, полученной из $\beta^\vee$. Тогда в силу двух равенств (32) мы можем заменить цепь $\beta^> + \beta^< + \beta^\wedge + \beta^\vee$ на сумму аналогичных $\mathcal{B}$-блоков, в которых все подписи типа (46), описанные в предложении 11, заменены на некоторые условия $\|_l^j$ или $\nparallel_l^j$ типа **4a**. □

Мы можем и будем считать, что $\tilde\Delta_1$ и $\tilde B$ выбраны именно таким образом.

Обозначим через B' сумму всех $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde B$, имеющих по N активных точек и наивысшую фильтрацию в смысле §4.1, в частности с условием типа равенства вида $\bar{\mathbf{2}}$**!** ( ). Пусть $B^\uparrow$ — это сумма аналогичных $\mathcal{F}$-блоков, картинки которых получены изо всех картинок $\mathcal{B}$-блоков, составляющих B', заменой каждой единожды перекрещенной неориентированной ломаной, соединяющей центр хорды с некоторой точкой линии Вильсона, на аналогичную единожды перекрещенную ломаную, *ориентированную от центра хорды к этой точке линии Вильсона*:

 .

Предложение 12. *Если класс цепи B в $\mathcal{B}_r(M)$ не равен 0, то фильтрация цикла $\Delta_1 - \partial B^\uparrow$ строго ниже, чем фильтрация цепи Δ_1.*

Доказательство почти повторяет доказательство предложения 8. Действительно, с цепью B' связаны три числа $j < l < k$: j и k — это номера концов a_j, a_k хорды, входящей в условие типа $\bar{\mathbf{2}}$**!** в любом из ее $\mathcal{B}$-блоков, а l — номер конца неперекрещенной неориентированной ломаной, участвующей в этом же условии. По определению цепи B', эти числа одинаковы у всех $\mathcal{B}$-блоков, входящих в B'.

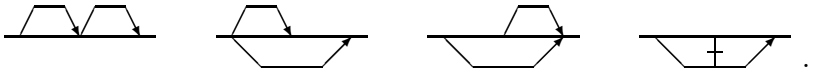
Единственное препятствие к утверждению предложения могло бы состоять в том, что картинки некоторых из $\mathcal{B}$-блоков, входящих в B', содержат хорду, соединяющую некоторые точки $a_{j'}, a_{k'}$, и *ориентированную* неперекрещенную ломаную, соединяющую центр этой хорды с некоторой точкой $a_{l'}$ линии Вильсона, такие, что тройка (j', l', k') лексикографически меньше тройки (j, l, k). Например, могло бы оказаться, что эта хорда — та же, что участвует в вырождении типа $\bar{\mathbf{2}}$**!**, т.е. $j' = j, k' = k$, но $l' < l$. (Так было бы, если бы цепь B' состояла только из первого слагаемого формулы (134) на стр. 89.) Однако это препятствие, выраженное суммой таких $\mathcal{B}$-блоков, обязательно должно обращаться в 0 в $\mathcal{B}_r(M)$, иначе нарушается гомологическое условие $\partial\tilde\Delta = 0$ вблизи множества коразмерности 2, заданного почти теми же картинками с

двумя неориентированными ломаными: это доказывается точно так же, как предложение 8. □

Итак, мы можем убить все слагаемые в $\tilde{\Delta}_1$ с N активными точками и условием типа $\bar{\mathbf{2}}$ или $\bar{\mathbf{2}}\mathbf{!}$. Обозначим через $\tilde{\Delta}_2 \in \widetilde{\mathcal{B}_r(M)}$ оставшуюся после этого линейную комбинацию $\mathcal{B}$-блоков, а через Δ_2 — ее класс в $\mathcal{B}_r(M)$. По построению, все $\mathcal{B}$-блоки, входящие в $\tilde{\Delta}_2$, имеют не более N активных точек, а блоки с N активными точками не имеют вырождений типов $\bar{\mathbf{1}}$ и $\bar{\mathbf{2}}$. Среди этих $\mathcal{B}$-блоков выберем только блоки с N активными точками и вырождением типа $\bar{\mathbf{3}}$. Сумму всех этих $\mathcal{B}$-блоков из $\tilde{\Delta}_2$ обозначим через C.

Предложение 13. *Цепь C равна нулю в группе $\mathcal{B}_r(M)$.*

Лемма 4. *В нашем алгоритме могут возникать только такие условия типа $\bar{\mathbf{3}}$, которые задаются парой ломаных, ориентированных слева направо в $\mathbb{R}^1_w$ или линейные комбинации таких условий, т.е. каждое такое условие может быть лишь одного из типов*

(47)  .

Действительно, $\mathcal{B}$-блок с условием типа $\bar{\mathbf{3}}$ может возникнуть в нашем алгоритме только при частичном столкновении двух возникших ранее неперекрещенных ломаных или при столкновении трех таких ломаных (которые все ориентированы направо в $\mathbb{R}^1_w$). □

Предложение 13 немедленно следует из этой леммы, поскольку иначе не было бы выполнено условие $\partial\Delta_2 = 0$. □

Итак, в действительности цепь Δ_2 можно задать линейной комбинацией $\tilde{\Delta}_2$, не содержащей $\mathcal{B}$-блоков с N активными точками и вырождениями типов $\bar{\mathbf{1}}$, $\bar{\mathbf{2}}$ или $\bar{\mathbf{3}}$.

Для любой такой линейной комбинации $\tilde{\Delta}_2$, обозначим через $\tilde{D}$ сумму $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde{\Delta}_2$ с N активными точками и вырождениями типа $\bar{\mathbf{4}}$ или $\bar{\mathbf{4}}\mathbf{!а}$ или $\bar{\mathbf{4}}\mathbf{!б}$ (т.е. $\vee$ или $\rightleftarrows$ или $\rightleftarrows$).

Предложение 14. *Минимальную формальную цепь $\tilde{\Delta}_2$, реализующую цепь Δ_2, можно выбрать так, что*

а) $\mathcal{B}$-картинки всех блоков, входящих в цепь $\tilde{D}$, не содержат условий типа **1** *или* **2**, *т.е. ни ориентированных неперекрещенных ломаных* , *соединяющих две точки линии Вильсона, ни ориентированных единожды перекрещенных ломаных* , *соединяющих центр хорды с точкой линии Вильсона;*

б) условия типа равенства, участвующие в этих картинках, имеют тип $\bar{\mathbf{4}}\mathbf{!а}$ ($\rightleftarrows$) *или* $\bar{\mathbf{4}}\mathbf{!б}$ ($\rightleftarrows$)*; и*

в) эти условия не снабжены дополнительными условиями типа $\bar{\mathbf{4}}\mathbf{!!}$ ($\rightleftarrows$).

Доказательство вновь вытекает из гомологического условия, проверяемого соответственно вблизи множеств кривых,

а) имеющих вырождения типа $\bar{\mathbf{1}}$ ( ) или $\bar{\mathbf{2}}$ (,),

б) имеющих самокасания в $\mathbb{R}^3$, и

в) проекции которых в $\mathbb{R}^2$ имеют самокасание высокого порядка. □

Выберем $\tilde\Delta_2$ и $\tilde D$ такого вида. Обозначим через D' сумму всех $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde D$, имеющих максимальный порядок в смысле §4.1, т.е. с наиболее левым (лексикографически) положением пары точек, участвующих в этих условиях типов $\bar{\mathbf{4}}$**!а**, $\bar{\mathbf{4}}$**!б**. Обозначим через $D^\uparrow$ сумму аналогичных $\mathcal{B}$-блоков, картинки которых получаются из картинок слагаемых формальной цепи D' заменой всех подписей вида l с $l<j$ на j и заменой всех подписей вида j на j.

Предложение 15. *Если класс цепи $\tilde D$ в $\mathcal{B}_r(M)$ не равен 0, то фильтрация цикла $\Delta_2-\partial D^\uparrow$ строго ниже, чем у Δ_2.*

Доказательство — то же самое, что у предложения 12. □

Повторяя эту редукцию, мы получим цикл Δ_3, гомологичный Δ в M и представимый суммой $\mathcal{B}$-блоков, $\mathcal{B}$-картинки которых имеют не более чем N активных точек, причем те из них, у которых этих точек ровно N, не имеют вырождений типов $\bar{\mathbf{1}}$**,** $\bar{\mathbf{2}}$**,** $\bar{\mathbf{3}}$ или $\bar{\mathbf{4}}$. Пусть $\tilde\Delta_3$ — минимальный представитель цикла Δ_3. Обозначим через $\tilde E$ сумму всех $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde\Delta_3$, картинки которых имеют ровно N активных точек и вырождение типа $\bar{\mathbf{5}}$ ($\mapsto$) или $\bar{\mathbf{5}}$**!** ($\leftrightarrow$).

Предложение 16. *Минимальный представитель $\tilde\Delta_3$ цикла Δ_3 можно выбрать таким образом, что все $\mathcal{B}$-картинки $\mathcal{B}$-блоков, составляющих его главную часть $\tilde E$,*

а) не содержат условий типов **1**, **2** *или* **3** *из §2.2,*

б) имеют только вырождения типа $\bar{\mathbf{5}}$**!**, *и*

в) не имеют дополнительных условий типов $\bar{\mathbf{5}}$**а** ( ) *и* $\bar{\mathbf{5}}$**б** ( ).

Доказательство вытекает из гомологического условия вблизи кривых, имеющих соответственно

а) вырождения типов $\bar{\mathbf{1}}$, $\bar{\mathbf{2}}$ или $\bar{\mathbf{4}}$**!**,

б) вертикальную касательную (то есть условие $f_1'=0$) в конце некоторой хорды,

в) условие $f_2'=f_2''=0$ в конце некоторой хорды. □

Выберем $\tilde\Delta_3$ и $\tilde E$ в таком виде. Упорядочим $\mathcal{B}$-картинки, входящие в $\tilde E$, по номеру (среди всех активных точек в $\mathbb{R}^1_w$) точки, к которой приложено это условие типа $\bar{\mathbf{5}}$**!** ($\leftrightarrow$). Обозначим через E' сумму $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde E$, соответствующих $\mathcal{B}$-картинкам с минимальным значением j этого номера. Обозначим через $E^\uparrow$ сумму $\mathcal{F}$-блоков, картинки которых получаются из картинок $\mathcal{B}$-блоков, входящих в E', заменой этих условий j на $\Uparrow^j$.

Предложение 17. *Если класс цепи $\tilde E$ в $\mathcal{B}_r(M)$ не равен 0, то фильтрация цикла $\Delta_3-\partial E^\uparrow$ строго ниже, чем у Δ_3.*

Доказательство — то же самое, что у предложения 15. □

Повторяя эту редукцию, мы получим цикл Δ_4, минимальный представитель $\tilde\Delta_4$ которого является суммой $\mathcal{B}$-блоков, картинки которых имеют не более чем по N

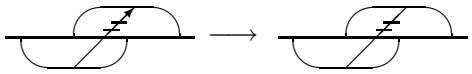


Рис. 26. Затягивание $\mathcal{B}$-блока типа $\bar{\mathbf{6}}$**!**

активных точек, а те, у которых это число равно N, имеют только вырождения типа $\bar{\mathbf{6}}$ или $\bar{\mathbf{6}}$**!**.

Обозначим через F цепь, равную сумме всех $\mathcal{B}$-блоков в $\tilde{\Delta}_4$ с N активными точками.

Предложение 18. *Цепь F можно представить суммой $\mathcal{B}$-блоков, у которых*

а) их картинки не содержат условий типов **1**, **2**, **3** *и* **4**;

б) все их условия типа равенства — это нормальные *пары сцепившихся мостов* *, см. пункт* $\bar{\mathbf{6}}$**!** *§2.4.*

Доказательство вновь состоит в проверке гомологического условия $\partial\Delta_4 = 0$ в окрестности некоторых точек клетки M, лежащих на границе $\mathcal{B}$-блоков, составляющих цепь F. Именно, для утверждения а) это соответственно множества точек, удовлетворяющих условиям $\bar{\mathbf{1}}$, $\bar{\mathbf{2}}$, $\bar{\mathbf{4}}$**!** и $\bar{\mathbf{5}}$**!**. Условия б) и в) из определения нормальной пары следуют немедленно из этого утверждения а), касающегося условий **2** и **1**. Оставшиеся условия из определения нормальной пары вытекают из гомологического условия вблизи множества кривых, у которых пара точек самопересечения (соответствующих нашим хордам) имеет одну и ту же проекцию в $\mathbb{R}^2$. □

Представим цепь F формальной цепью вида, описанного в предложении 18, и отберем те $\mathcal{B}$-блоки, составляющие ее, которые имеют наивысший порядок в иерархии из §4.1 (т.е. с лексикографически самым левым положением четырех точек, участвующих в этом вырождении типа $\bar{\mathbf{6}}$**!**). Обозначим через F' сумму этих выбранных слагаемых. Обозначим через $F^{\uparrow}$ сумму аналогичных $\mathcal{F}$-блоков, в картинках которых сцепившиеся мосты из $\mathcal{B}$-картинок слагаемых цепи F' разводятся следующим образом (см. Рис. 26): лексикографически более левая $\times$-пара в $\mathbb{R}^1_w$ становится *более южной* в $\mathbb{R}^2$, т.е. неориентированная дважды перекрещенная ломаная, соединяющая эти $\times$-пары, становится ориентированной от первой (более левой) $\times$-пары ко второй.

Предложение 19. *Если $F \neq 0$, то фильтрация цикла $\Delta_4 - \partial F^{\uparrow}$ строго ниже, чем у Δ_4.*

Доказательство совпадает с доказательством предложения 17. □

Повторяя, мы наконец убьем все $\mathcal{B}$-блоки с N активными точками, то есть построим гомологию между циклом Δ и суммой $\mathcal{B}$-блоков с $\leq N-1$ такими точками. Продолжая по индукции с параметром N, мы ликвидируем все $\mathcal{B}$-блоки в нашей клетке $M \subset \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Сумма всех $\mathcal{F}$-цепей $A^{\uparrow}, B^{\uparrow}, D^{\uparrow}, E^{\uparrow}$ и $F^{\uparrow}$, участвовавших в этом индуктивном процессе на всех его шагах, — это и есть искомая цепь γ_r^M в клетке M.

Замечание 19. В действительности, на каждом шагу алгоритма мы имеем альтернативные $\mathcal{F}$-блоки, убивающие ведущие (старшей фильтрации) слагаемые цикла коразмерности 1 в M: мы можем ориентировать ломаные в разные стороны, или убивать

условие $\overset{j}{\longleftrightarrow}$ условием $\Downarrow^j$ а не $\Uparrow^j$, или убивать условие $\rightrightarrows \overset{l}{j}$ (соответственно, $\rightrightarrows \overset{l}{j}$) условием $\nwarrow \overset{l}{j}$ (соответственно, $\nwarrow \overset{l}{j}$) а не условием $\nwarrow \overset{l}{j}$ (соответственно, $\nwarrow \overset{l}{j}$), и т.д.

В нашем *прямом* алгоритме этот выбор фиксирован. Более хитрый алгоритм (работающий быстрее и доставляющий более компактные ответы) должен выбирать эти убивающие блоки, используя критерии, которые мне пока не ясны: неформально говоря, кажется правильным, чтобы противоположные способы затягивания перемежались как можно чаще.

Итак, мы можем построить такие затягивающие цепи γ_r^M во всех клетках M максимальной размерности в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ (т.е. в клетках, соответствующих i-хордовым диаграммам). Допустим, что мы это сделали. Сумма этих цепей γ_r^M по всем клеткам M задает гомологию в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ между нашим циклом $d^r(\gamma)$ коразмерности 1 и некоторым циклом в объединении всех остальных клеток. В силу соображений размерности, последний цикл является линейной комбинацией некоторых клеток вице-максимальной размерности. Далее имеется две возможности.

A. *Этот цикл гомологичен нулю в* $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$.[4]

Тогда эта линейная комбинация вице-максимальных клеток равна границе некоторой линейной комбинации максимальных клеток (соответствующих хордовым диаграммам). Нам остается лишь вычесть последнюю линейную комбинацию из построенной ранее цепи $\sum_M \gamma_r^M$. Полученная разность является искомой цепью $\gamma_r \subset \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$, такой, что $\partial\gamma_r = -d^r(\gamma)$ в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$.

Предложение 20 (шаг индукции, ср. с Предположением индукции на стр. 60)**.** *Если все цепи* $\gamma \subset \sigma_k \setminus \sigma_{k-1}$, $\gamma_1 \subset \sigma_{k-1} \setminus \sigma_{k-2}$, $\dots$, $\gamma_r \subset \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ *(где* $i = k-r$*), были построены как указано выше, то следующая граница* $d^{r+1}(\gamma)$ *их суммы* $\gamma+\gamma_1+\dots+\gamma_r$ *в* $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}$ *является субалгебраическим циклом, пересечение которого с каждой максимальной клеткой члена* $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}$ *состоит из конечного числа* правильных $\mathcal{B}$*-блоков, каждый из которых выделен не более чем* r *условиями типа неравенства как в пунктах* **1**–**5** *§2.2 и ровно одним условием типа равенства как в пункте* $\bar{\mathbf{1}}$ *§2.4. При этом число активных точек в любом из этих* $\mathcal{B}$*-блоков не превосходит* $2k$*.*

Конкретнее, сумма $\gamma+\gamma_1+\dots+\gamma_{r-1}$ не дает вклада в эту гомологическую границу (поскольку ее геометрическая граница имеет там слишком маленькую размерность), а вклад любого $\mathcal{F}$-блока, участвующего в γ_r, состоит из ровно i слагаемых, $\mathcal{B}$-картинки которых получаются из $\mathcal{F}$-картинки этого $\mathcal{F}$-блока заменой одной из его хорд на неориентированную неперекрещенную ломаную $\sqcap$ как в пункте $\bar{\mathbf{1}}$ из §2.4, ср. § 3.7. □

Тем самым шаг индукции будет выполнен.

[4] В силу теоремы Концевича о реализации [11] это обязательно произойдет при аналогичном вычислении рациональных инвариантов узлов; истинность гипотезы о гомотопическом расщеплении для дискриминантов узлов (см. например §5.1 в [22]) влекла бы то же самое для любых коэффициентов.

Б. *Наша линейная комбинация вице-максимальных клеток не является границей никакой линейной комбинации максимальных клеток.* Конечно, это означает и что класс нашего цикла $d^r(\gamma)$ в группе гомологий Бореля–Мура коразмерности 1 пространства $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ не равен 0. Вообще говоря, в этом случае не следует отчаиваться. Возможно, это произошло из-за того, что на предыдущих шагах алгоритма мы не оптимальным образом строили затягивающие цепи.

Если подобная неприятность не происходила ни для какой весовой системы γ' степени меньшей, чем k, то ситуация непоправима: наша весовая система γ *не интегрируется* до инварианта узлов. Однако, заботясь о будущем, надо запомнить полученную нами линейную комбинацию вице-максимальных клеток в $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ и в особенности ее класс в группе $\bar{H}_{3\omega-2}(\sigma_i \setminus \sigma_{i-1})$.

Если же мы раньше (интегрируя весовые системы степеней, меньших k) уже встречались с этой ситуацией, то надо сравнить класс этой линейной комбинации в группе $\bar{H}_{3\omega-2}(\sigma_i \setminus \sigma_{i-1})$ с аналогичными элементами этой же группы, порожденными аналогичными линейными комбинациями, возникавшими как такие препятствия к интегрированию. Если этот класс принадлежит подгруппе, порожденной такими прежними препятствиями, то мы можем подправить нашу сумму $\gamma + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{r-1}$, вычитая из нее соответствующую сумму аналогичных цепей, проистекших из других весовых систем степеней $< k$, интегрирование которых также застопорилось в члене $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. Тогда полученная разность $\mathcal{B}$-блоков интегрируема, то есть мы сможем выполнить еще по крайней мере один шаг индукции.

Гипотеза 1. *В нашем алгоритме всегда будет выполняться возможность* **А**, *более того, граничный цикл в объединении вице-максимальных клеток всегда будет* равен *нулю, а не только гомологичен ему.*

Замечание 20. Этот же самый алгоритм будет давать комбинаторные формулы в случае целочисленных инвариантов: остается только зафиксировать (ко)ориентации всех стандартных цепей и условий из §2. Такой выбор будет описан в будущей работе.

Задача. Можно ли всегда выбрать способы затягивания (см. замечание 19) таким образом, чтобы вся последовательность затягивающих цепей $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ реализовалась только суммами $\mathcal{F}$-блоков с условиями типа **1**?

5. Вычисление комбинаторной формулы для инварианта второго порядка

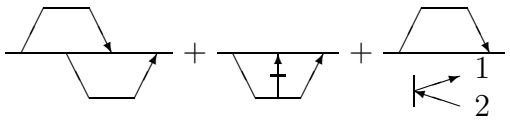
В этом параграфе мы напомним первую иллюстрацию нашего алгоритма: мы покажем, как он вычисляет комбинаторную формулу для единственного инварианта второго порядка v_2, приведенного по модулю двойки.

Теорема 1. *Значение инварианта v_2 на длинном узле $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ общего положения равно (mod 2) сумме трех чисел (см. три слагаемых в (48)):*

а) числа конфигураций $(a < b < c < d) \subset \mathbb{R}^1$ таких, что $f(c)$ выше $f(a)$ в $\mathbb{R}^3$, а $f(d)$ выше $f(b)$;

б) числа конфигураций $(a < b < c)$ таких, что $f(c)$ выше $f(a)$, а проекция точки $f(b)$ в $\mathbb{R}^2$ лежит к востоку от (общей) проекции точек $f(a)$ и $f(c)$;

в) числа конфигураций $(a < b)$ таких, что $f(b)$ выше $f(a)$ и направление "на восток"в $\mathbb{R}^2$ является линейной комбинацией проекций производных $f'(a)$ и $f'(b)$, причем первая из этих проекций участвует в этой линейной комбинации с положительным коэффициентом, а вторая — с отрицательным.

(48) 

Доказательство фактически проведено во Введении на стр. 9–13; перечислим его шаги в терминах нашего алгоритма.

Главная часть инварианта v_2 в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ выражается хордовой диаграммой (7), см. например [17].

Граница главной части (7) в σ_1 равна цепи (8).

Затянем эту границу цепью в максимальной клетке члена σ_1. Прямой алгоритм сопоставляет элементам цепи (8) $\mathcal{F}$-блоки, указанные в левых частях равенств (9), (10). Согласно этим равенствам, сумма этих двух $\mathcal{F}$-блоков определяет гомологию между циклом (8) и цепью (11).

Прямой алгоритм преобразует две последние картинки соответственно в левые части равенств (12) и (13). Согласно этим равенствам, цикл (11) равен границе суммы полуалгебраических множеств, указанных в их левых частях.

Замечание 21. То же самое с необходимостью будет верно и в аналогичных вычислениях с целыми коэффициентами (если мы расставим правильные знаки перед всеми слагаемыми) вследствие гомологических условий: все правые части наших уравнений, а также и цикл, который мы пытаемся убить, не имеют границ.

Окончательно, мы получаем, что сумма четырех $\mathcal{F}$-блоков, указанных в левых частях равенств (9), (10), (12) и (13), определяет гомологию в σ_1 между циклом (8) и вице-максимальной клеткой члена σ_1, взятой с некоторым коэффициентом $\lambda \in \mathbb{Z}_2$. Обозначим эту сумму через γ_1.

Лемма 5. *Упомянутый только что коэффициент λ равен нулю, так что цикл (8) равен $\partial\gamma_1$ в σ_1.*

Эта лемма является прямым следствием предложения 6 (см. стр. 58); для иллюстрации этого предложения дадим прямое доказательство леммы.

Граница цепи γ_1 в вице-максимальной клетке члена σ_1 вычисляется следующим образом. Для каждого из четырех $\mathcal{F}$-блоков, составляющих γ_1, мы устремляем друг к другу в $\mathbb{R}^1_w$ концы единственной хорды $\mathcal{F}$-картинки этого блока и рассматриваем подмножество в вице-максимальной клетке, заметаемое всеми предельными положениями особых узлов из этого блока после столкновения этих точек. Во всех четырех случаях это предельное множество состоит из пар вида (точка $* \in \mathbb{R}^1$, отображение

$f \in \mathcal{K}$, такое что $f'(*) = 0$), удовлетворяющих еще одному условию. Именно, для картинки в левой части равенства (9) (соответственно, (10)) это условие — следующее: найдется точка $a < *$ (соответственно, $a > *$) в $\mathbb{R}^1_w$ такая, что $f(a)$ лежит ниже (соответственно, выше) $f(*)$ в $\mathbb{R}^3$. Для обоих блоков, указанных в левых частях равенств (12) и (13), предельное условие гласит, что вторая производная $f_1''(*)$ направлена "на запад"в $\mathbb{R}^2$.

Все эти дополнительные условия выделяют подмножества коразмерности 1 в вице-максимальной клетке члена σ_1, и лемма доказана. □

Окончание доказательства теоремы 1. Проекция цепи γ_1 в Σ указана в (14). Прямой алгоритм преобразует $\mathcal{B}$-блоки, составляющие эту проекцию, в $\mathcal{F}$-блоки, указанные в левых частях равенств (15)—(17). Сумма правых частей этих трех равенств равна циклу (14), следовательно, сумма $\mathcal{F}$-блоков, указанных в их левых частях, является искомой комбинаторной формулой.

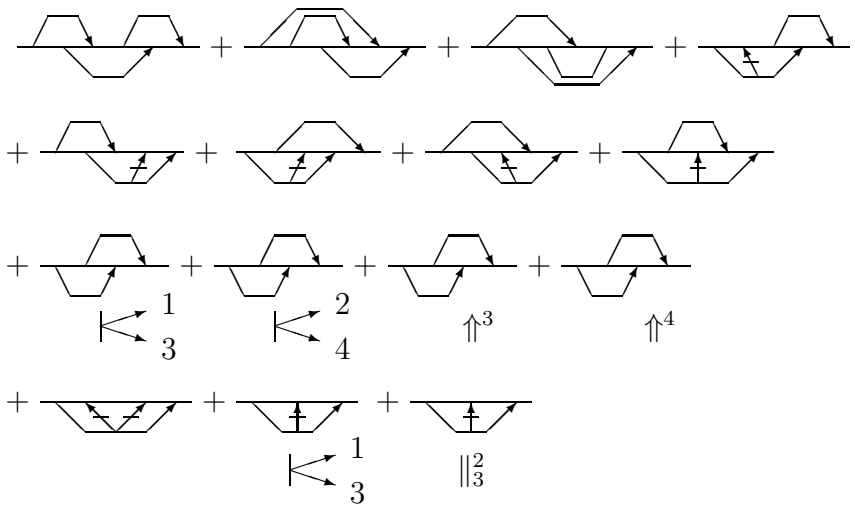
Эта сумма совпадает с формулой (48), и теорема 1 доказана. □

6. Вычисление комбинаторной формулы для v_3

Это — вторая демонстрация алгоритма: вычисление комбинаторной формулы для единственного инварианта v_3 степени 3, приведенного по модулю двойки.

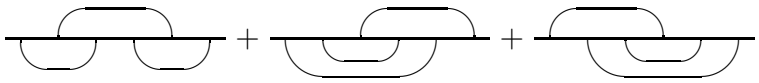
Теорема 2. *Комбинаторная формула для инварианта третьей степени (mod 2) задается суммой пятнадцати $\mathcal{F}$-блоков, указанных в (49).*

(49)



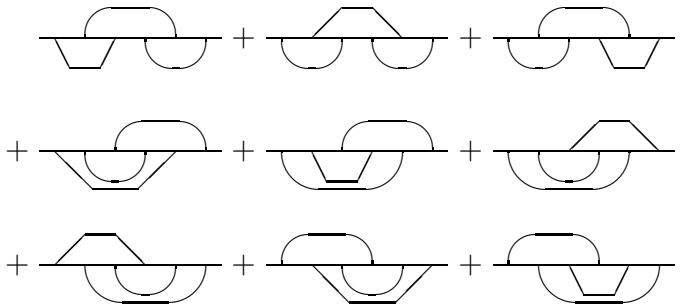
Доказательство этой теоремы (доставляемое нашим алгоритмом) занимает оставшуюся часть §6.

6.1. **Главная часть.** Главная часть γ цикла v_3 в $\sigma_3 \setminus \sigma_2$ равна сумме трех хордовых диаграмм

(50)  .

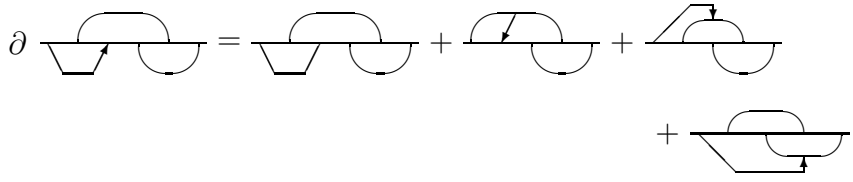
Здесь существенно, что мы рассматриваем гомологии по модулю двойки: аналогичная формула с целыми коэффициентами содержит еще один член с коэффициентом 2, см. [17]. С другой стороны, эта самая формула (50) выражает главную часть некоторого класса когомологий третьей степени пространства узлов в $\mathbb{R}^n$ с произвольным *четным* $n \geq 4$.

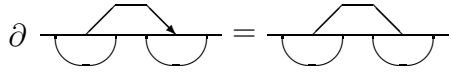
6.2. **Первый дифференциал и его гомология нулю.** Граница $d^1(\gamma)$ этой главной части в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ равна сумме девяти $\mathcal{B}$-блоков

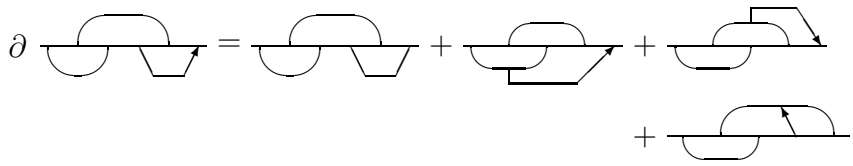
(51)  .

Эти $\mathcal{B}$-блоки лежат во всех трех максимальных клетках члена $\sigma_2 \setminus \sigma_1$: второй блок — во второй клетке из (24), 6-й и 7-й блоки — в третьей, а остальные шесть блоков — в первой клетке (24).

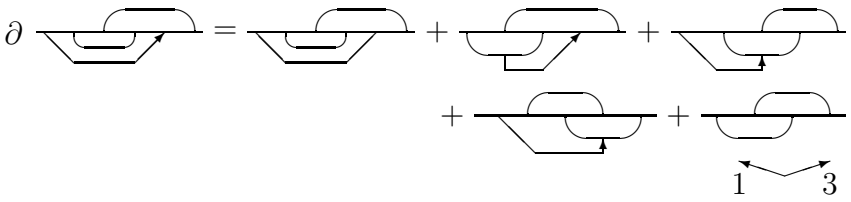
Затянем эту сумму цепью в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$. Прямой алгоритм сопоставляет элементам формулы (51) $\mathcal{F}$-блоки, указанные в левых частях равенств (52)—(60).

(52) 

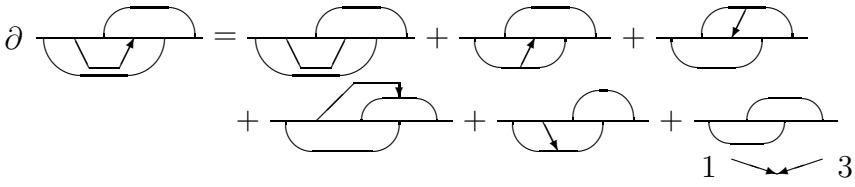
(53) 

(54) 

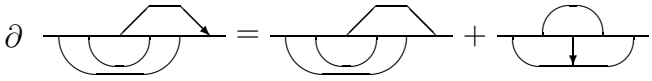
(55)



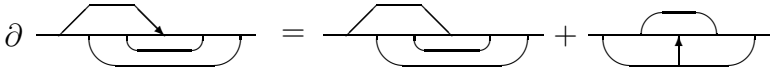
(56)



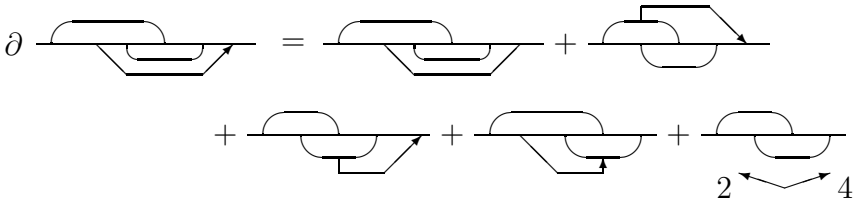
(57)



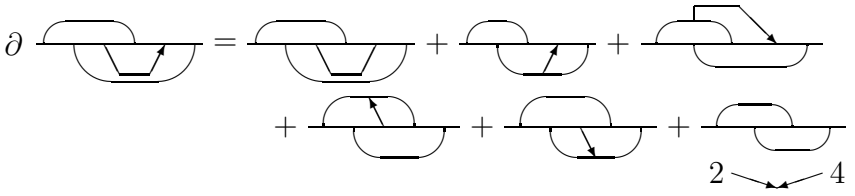
(58)



(59)



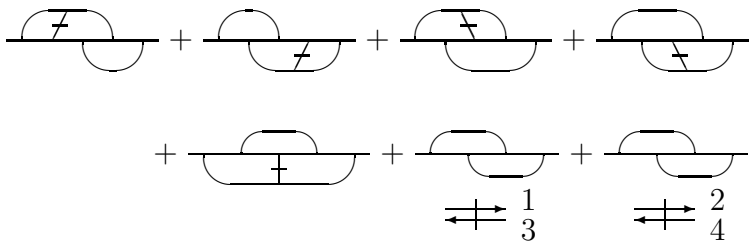
(60)



Эти равенства легко приводят к следующему утверждению.

Предложение 21. *Цикл* (51) *гомологичен цепи* (61) *в объединении максимальных клеток члена* $\sigma_2 \setminus \sigma_1$. *Эта гомология задается девятью* $\mathcal{F}$*-блоками, указанными в левых частях равенств* (52)—(60).

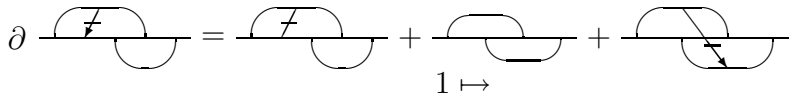
(61)

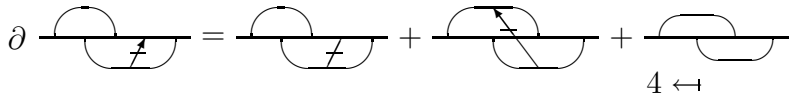


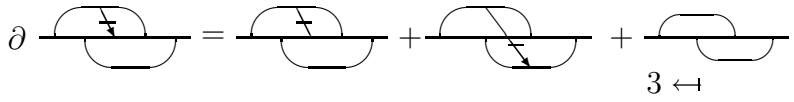
Действительно, слагаемые суммы (51) совпадают с первыми слагаемыми в правых частях равенств (52)—(60). Оставшиеся члены этих равенств удовлетворяют следующим соотношениям (где (a;b) означает b-ю компоненту правой части равенства (a)).

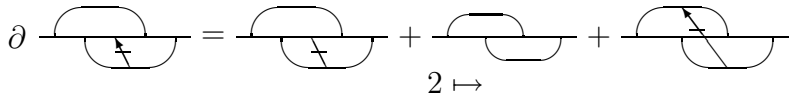
$(52;3)=(55;3)$, $(52;4)=(55;4)$, $(54;2)=(59;2)$, $(54;3)=(59;3)$,
$(55;2)=(60;3)$, $(56;4)=(59;4)$, $(52;2)+(56;5)=(61;1)$,
$(54;4)+(60;2)=(61;2)$, $(55;5)+(56;6)=(61;6)$, $(56;3)+(60;5)=(61;4)$,
$(56;2)+(60;4)=(61;3)$, $(57;2)+(58;2)=(61;5)$, $(59;5)+(60;6)=(61;7)$. □

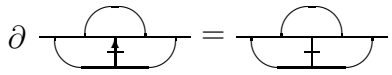
Прямой алгоритм преобразует цепь (61) в сумму левых частей равенств (62)—(68).

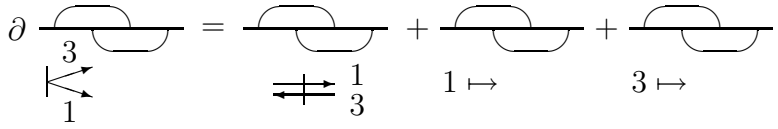
(62)


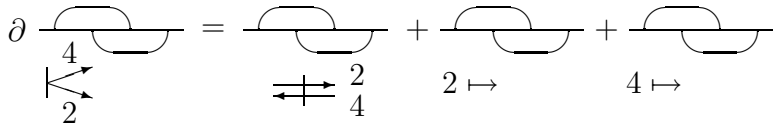
(63)


(64)


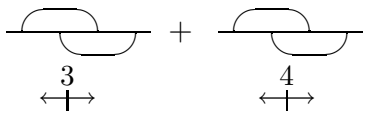
(65)


(66)


(67)


(68)


Из эти равенств следует, что цикл (61) гомологичен цепи

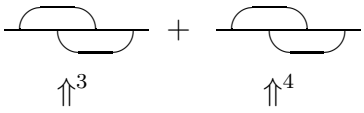
(69)


в некоторой открытой максимальной клетке члена $\sigma_2 \setminus \sigma_1$.

Действительно, слагаемые цикла (61) совпадают с первыми слагаемыми в правых частях этих равенств; кроме того, мы имеем $(62;2)=(67;2)$, $(65;2)=(68;2)$, $(62;3)=(64;2)$, $(63;2)=(65;3)$, $(64;3)+(67;3)=(69;1)$, и $(63;3)+(68;3)=(69;2)$.

Блоки, указанные в (69), совпадают в этой же клетке с границами двух $\mathcal{F}$-блоков, указанных в (70).

(70)



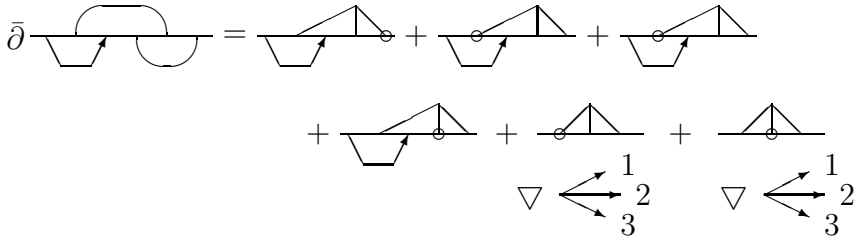
Окончательно, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 22. *Цикл (51) гомологичен в члене $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ некоторой линейной комбинации вице-максимальных членов канонического клеточного разбиения этого члена. Эта гомология задается суммой восемнадцати $\mathcal{F}$-блоков, указанных в левых частях равенств (52)—(60) и (62)—(68), а также в формуле (70).* □

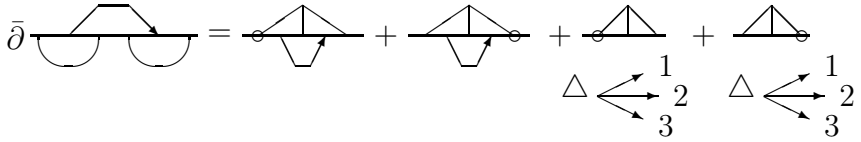
Предложение 23. *Линейная комбинация вице-максимальных клеток, упоминаемая в предыдущем предложении, равна нулю. В частности, цикл (51) равен границе в $\sigma_2 \setminus \sigma_1$ суммы этих восемнадцати $\mathcal{F}$-блоков.*

Доказательство. Обозначим через $\bar{\partial}$ часть граничного оператора, сопоставляющую любому $\mathcal{F}$-блоку пересечение его полной гомологической границы с объединением вице-максимальных клеток того же члена $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ разрешенного дискриминанта (см. начало §3). Согласно §3.6, этот оператор $\bar{\partial}$ действует на наши восемнадцать $\mathcal{F}$-блоков, как указано в следующих формулах (71)—(88).

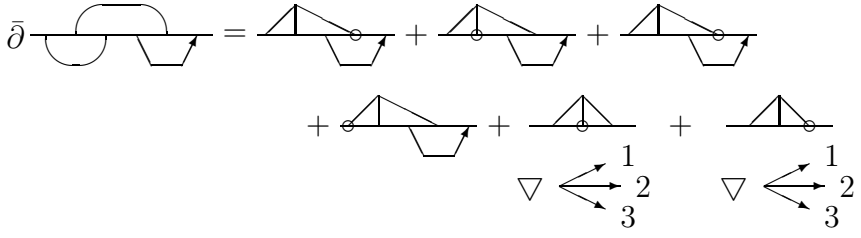
(71)



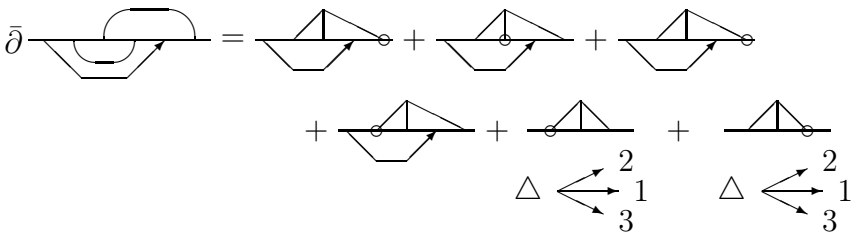
(72)



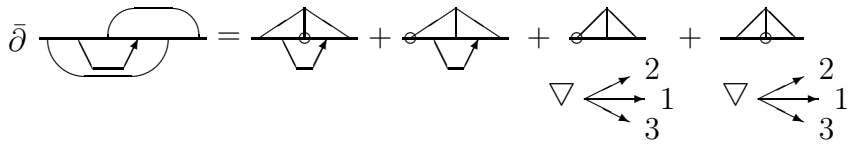
(73)



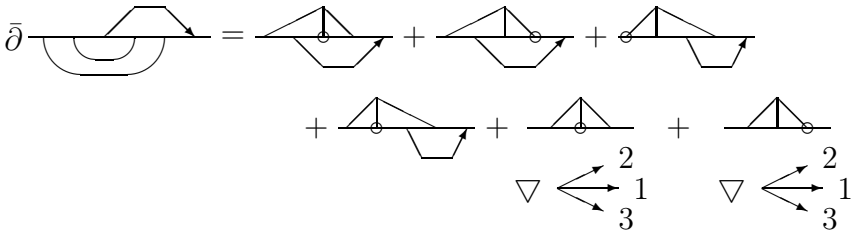
(74)



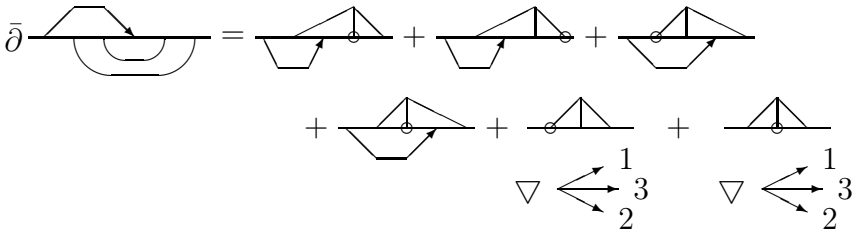
(75)



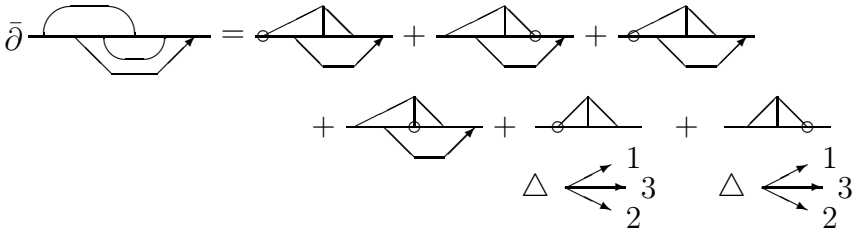
(76)



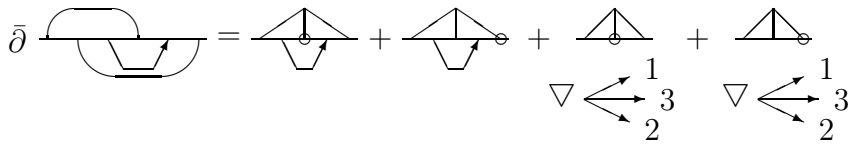
(77)



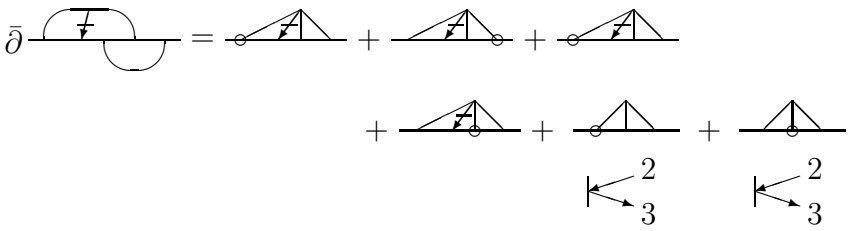
(78)



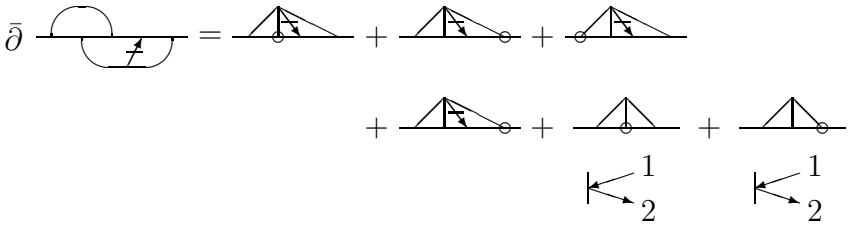
(79)



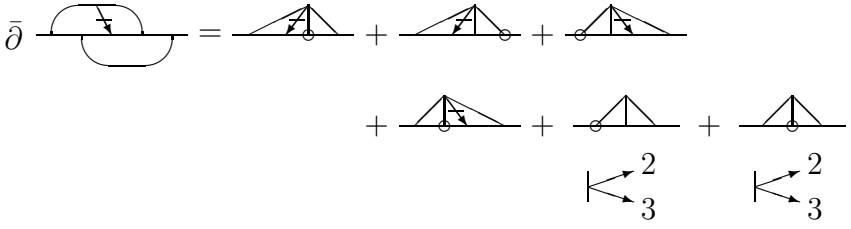
(80)



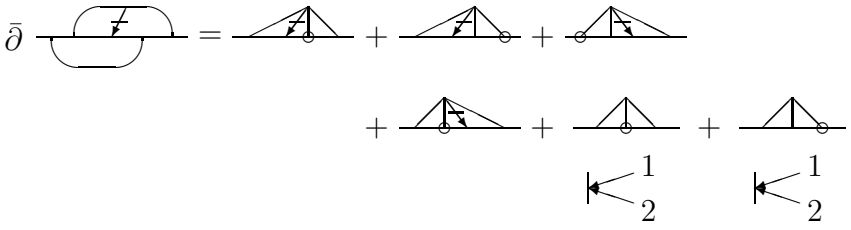
(81)



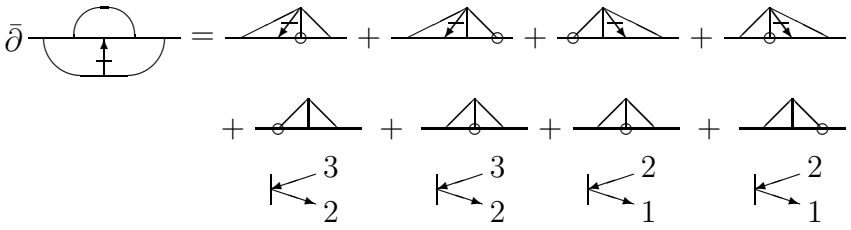
(82)



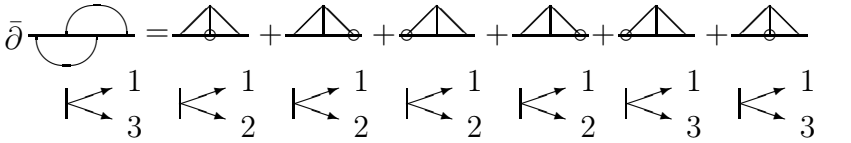
(83)



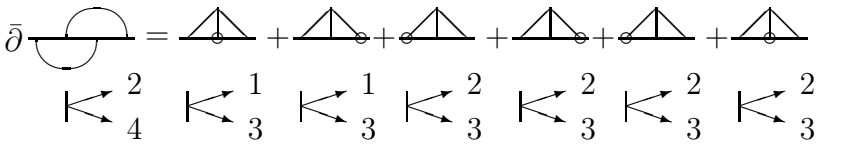
(84)



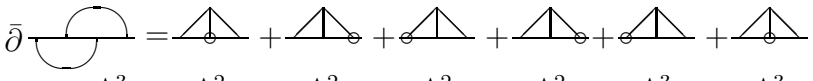
(85)



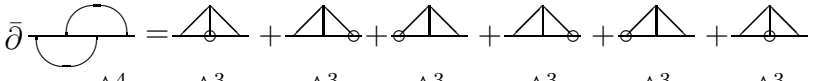
(86)



(87)



(88)

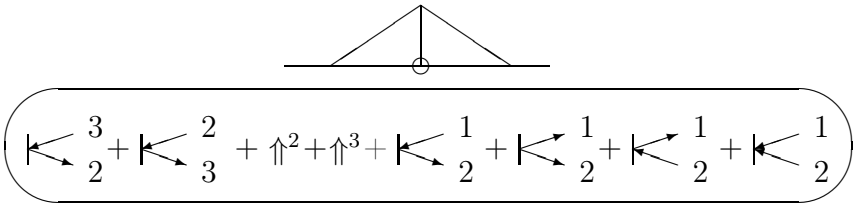


Остается доказать, что сумма правых частей всех этих равенств равна нулю. Их слагаемые удовлетворяют следующим соотношениям, сокращающим эту сумму. Обозначим через $(a;b)$ b-е слагаемое правой части равенства (a). Тогда мы имеем

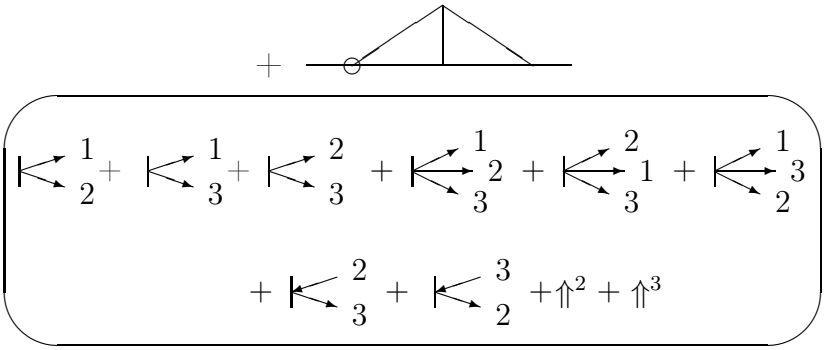
$(71;1)=(77;2)$, $(71;2)=(71;3)$, $(71;4)=(77;1)$, $(71;6)=(73;5)$,
$(72;1)=(75;2)$, $(72;2)=(79;2)$, $(73;1)=(73;3)$, $(73;2)=(76;4)$,
$(73;4)=(76;3)$, $(74;1)=(74;3)$, $(74;2)=(77;4)$, $(74;4)=(77;3)$,
$(75;1)=(79;3)$, $(75;4)=(76;5)$, $(76;1)=(78;4)$, $(76;2)=(78;2)$,
$(77;6)=(79;3)$, $(78;1)=(78;3)$, $(80;1)=(80;3)$, $(81;2)=(81;4)$,
$(80;2)=(82;2)$, $(80;4)=(82;1)$, $(81;1)=(82;4)$, $(81;3)=(82;3)$,
$(82;6)=(86;6)$, $(83;1)=(84;1)$, $(83;2)=(84;2)$, $(83;3)=(84;3)$,
$(83;4)=(84;4)$, $(85;2)=(85;4)$, $(85;6)=(86;1)$, $(86;3)=(86;5)$,
$(87;2)=(87;4)$, $(87;5)=(88;3)$, $(87;6)=(88;1)$, $(88;2)=(88;4)$.

Любому остающемуся после этого слагаемому, содержащему условие $\triangle$, соответствует аналогичное слагаемое, в котором это условие заменено на $\bigtriangledown$, и их сумма равна аналогичному члену без таких условий. Слагаемые, остающиеся после всех этих редукций, можно скомбинировать в сумму, указанную в следующих трех формулах (89)—(91); здесь формула, состоящая из картинки и суммы в картуше под ней, обозначает сумму $\mathcal{F}$-блоков, заданных картинками с одной и той же главной частью, но с разными подписями, перечисленными в этом картуше.

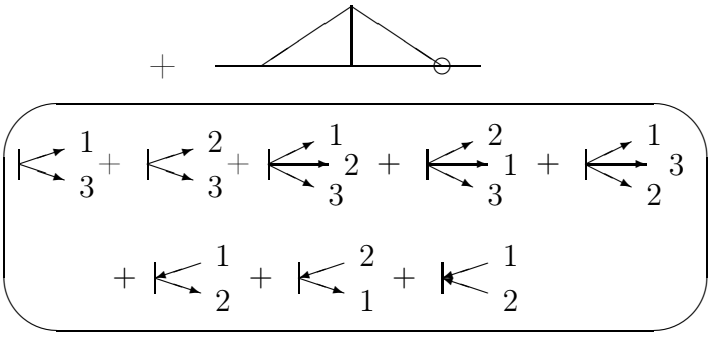
(89)



(90)



(91)



Лемма 6. *Сумма, указанная в любом из трех картушей в формулах (89), (90) и (91), тождественно равна нулю на любом типичном особом узле, уважающем картинку над этим картушем (то есть имеющем тройную точку).*

Доказательство. А. Сумма первых четырех членов в картуше формулы (89) тождественно равна $1 \in \mathbb{Z}_2$. Действительно, сумма первых двух членов (соответственно, третьего и четвертого членов) равна 1 если и только если вектора $f_2'(a_2)$ и $f_2'(a_3)$ направлены в одну сторону (соответственно, в разные стороны) в $\mathbb{R}^1$. Сумма оставшихся четырех членов в (89) очевидным образом также равна 1, так что вся строка (89) обращается в 0.

Б. Сумма шести членов в верхней строке картуша формулы (90) также тождественно равна 1. Действительно, если все три вектора $f_1'(a_1)$, $f_1'(a_2)$, $f_1'(a_3)$ направлены в какую-нибудь полуплоскость в $\mathbb{R}^2$, то выполнено ровно одно из последних трех условий этой строки и два или ни одного из первых трех условий. Если эти три вектора не лежат в одной полуплоскости, то выполнено ровно одно из первых трех условий и ни одного из последних трех.

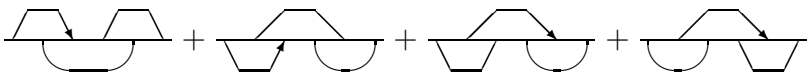
Нижние четыре члена в (90) совпадают с первыми четырьмя членами в (89) и также представляют собой тавтологию.

В. Прибавляя член к обоим уровням картуша (91), мы получим две функции, тождественно равные 1. Лемма 6 и предложение 23 полностью доказаны. □ □

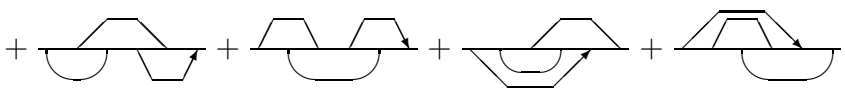
Следовательно, мы можем взять сумму восемнадцати $\mathcal{F}$-блоков, упоминаемых в предложении 23, в качестве цепи γ_1, затягивающей цикл $d^1(\gamma)$ во всем члене $\sigma_2 \setminus \sigma_1$.

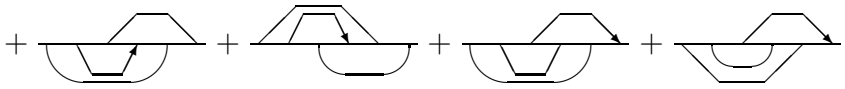
6.3. **Второй дифференциал и его гомология нулю.** Граница этой цепи γ_1 в σ_1 (см. §3.7) равна сумме тридцати шести $\mathcal{B}$-блоков, указанных в следующих девяти строках (92)—(100).

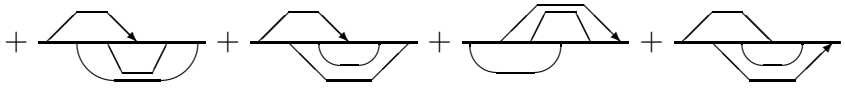
(92)

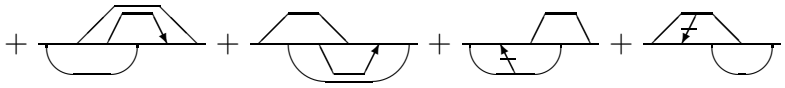


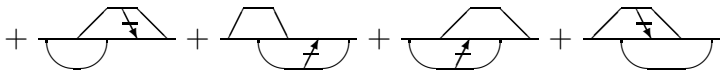
(93)

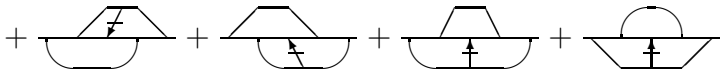


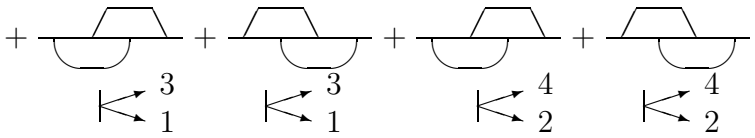
(94) 

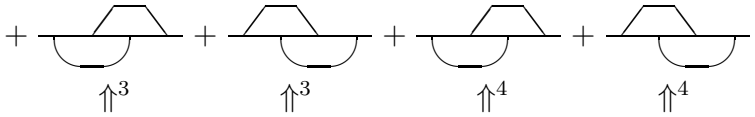
(95) 

(96) 

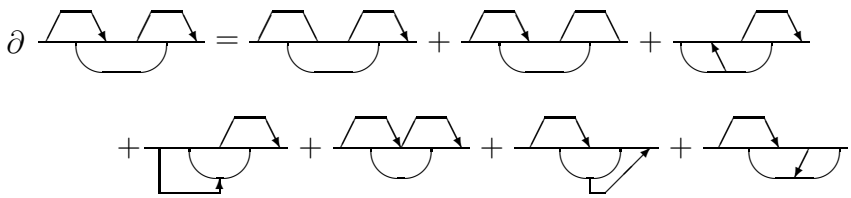
(97) 

(98) 

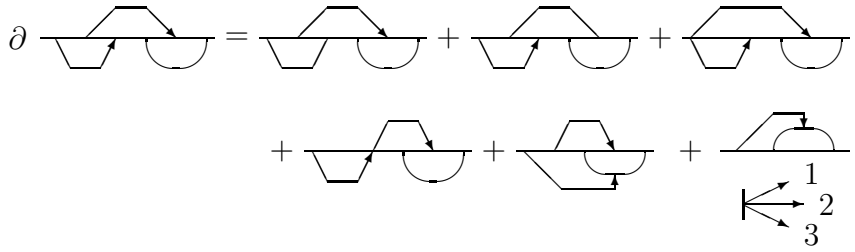
(99) 

(100) 

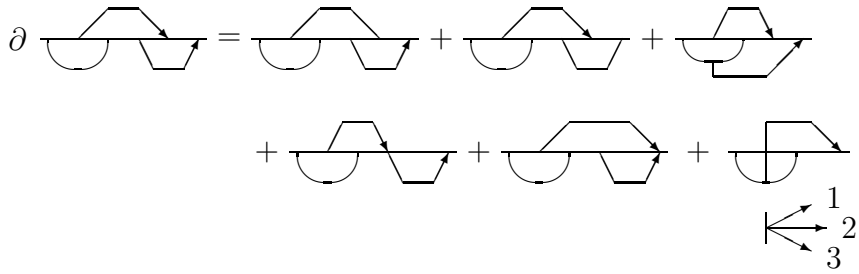
Для того, чтобы затянуть этот цикл, прямой алгоритм снабжает нас $\mathcal{F}$-блоками, указанными в левых частях следующих равенств (101)—(127); отметим, что первые девять из них убивают по два из наших 36 слагаемых суммы (92)—(100).

(101) 

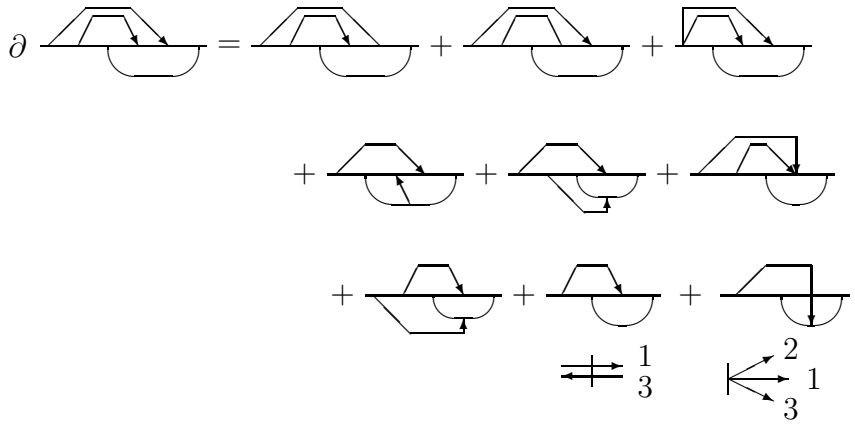
(102)



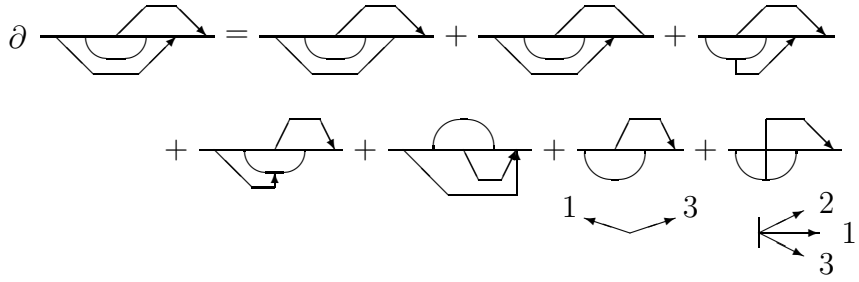
(103)

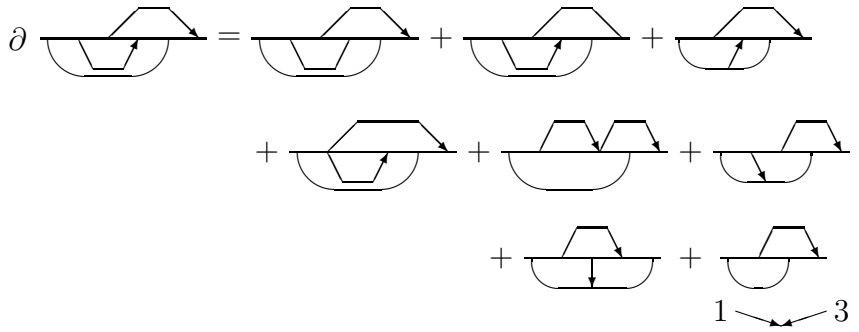


(104)

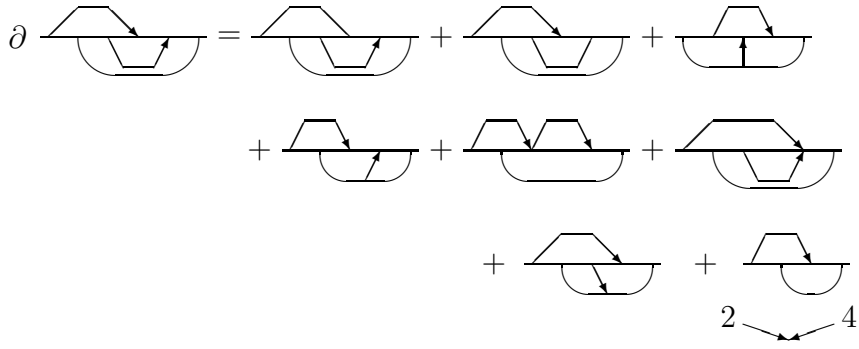


(105)

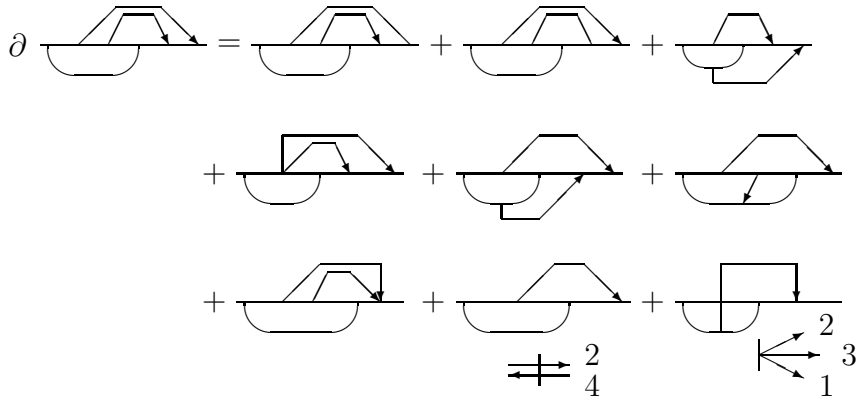




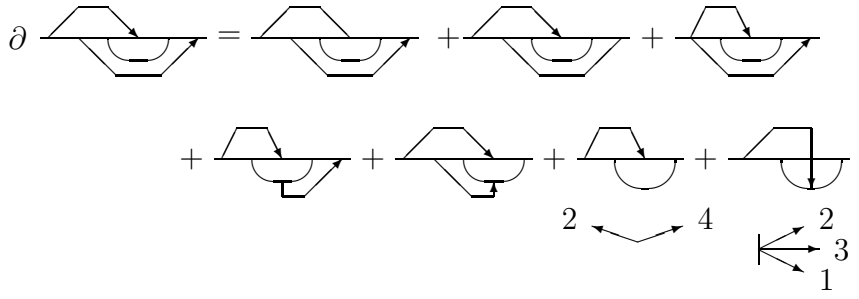
(106)



(107)

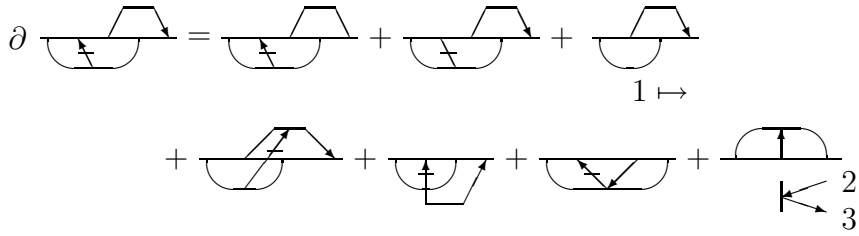


(108)

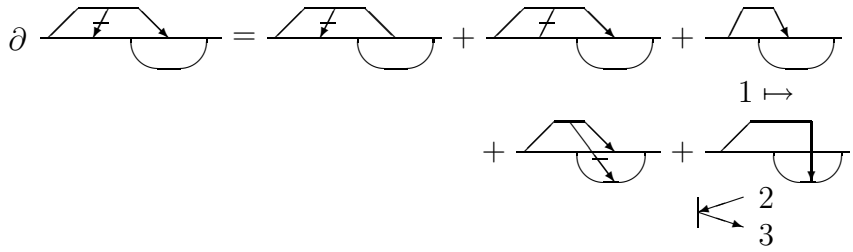


(109)

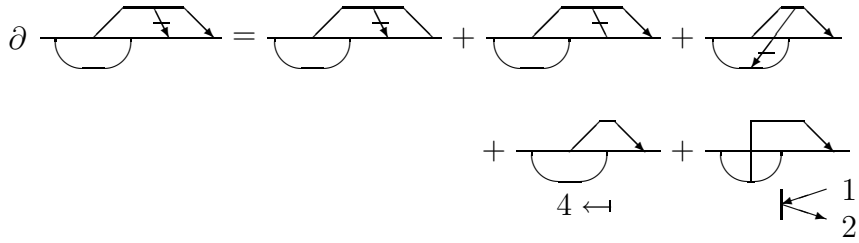
(110)



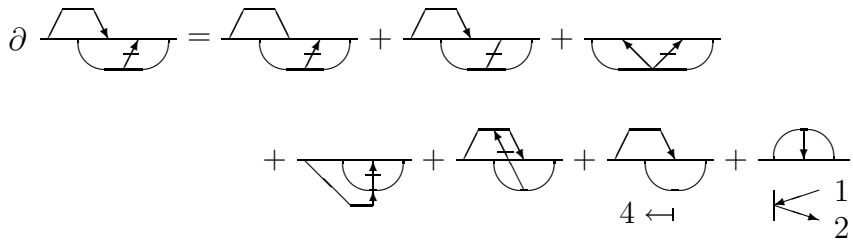
(111)



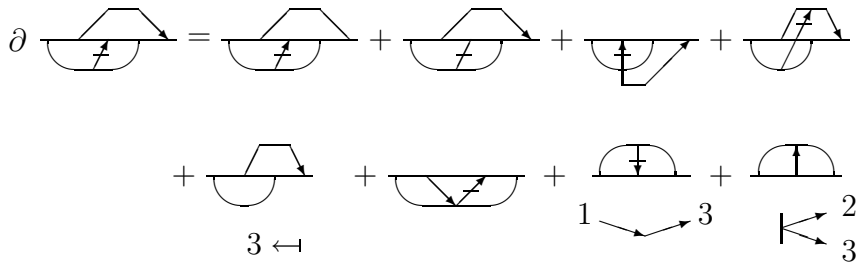
(112)



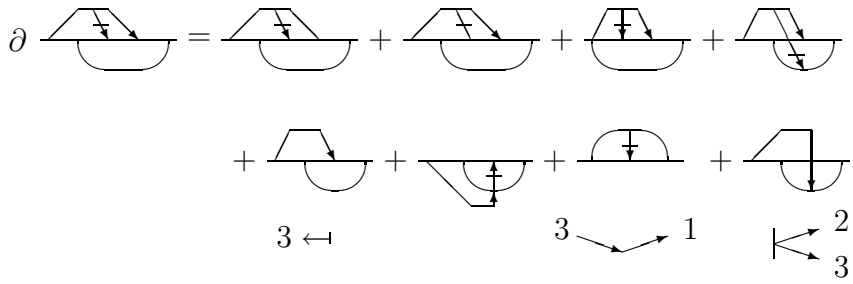
(113)



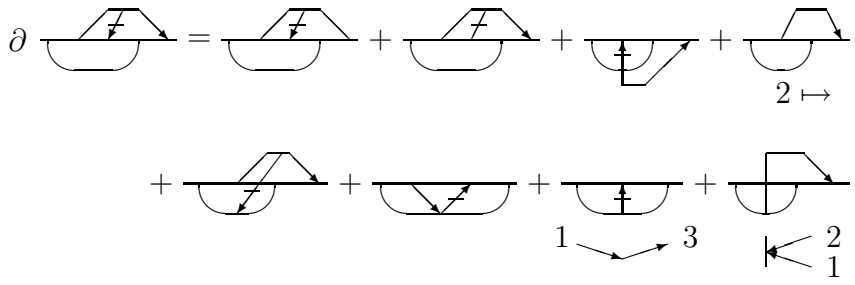
(114)



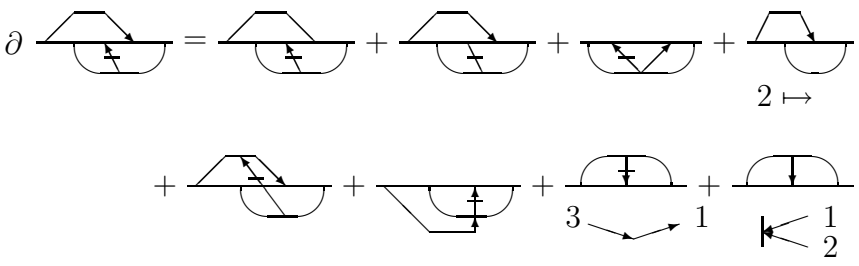
(115)



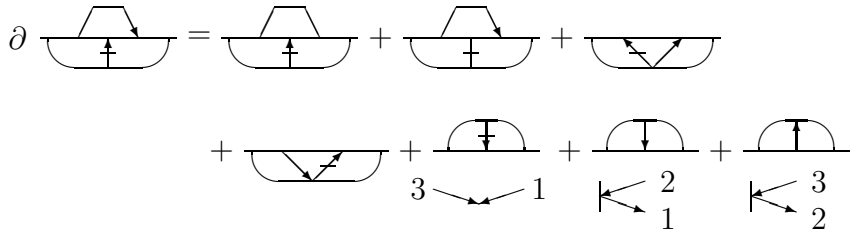
(116)



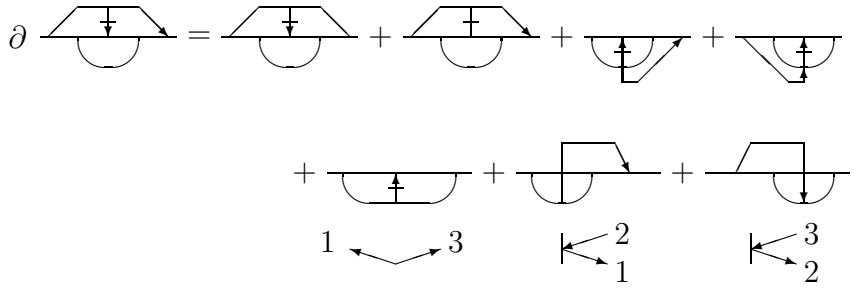
(117)



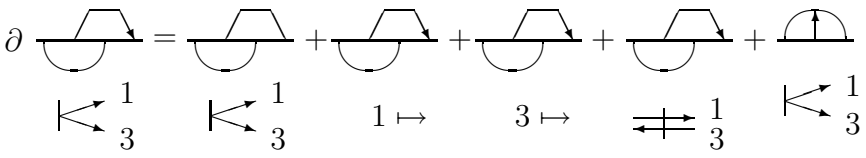
(118)



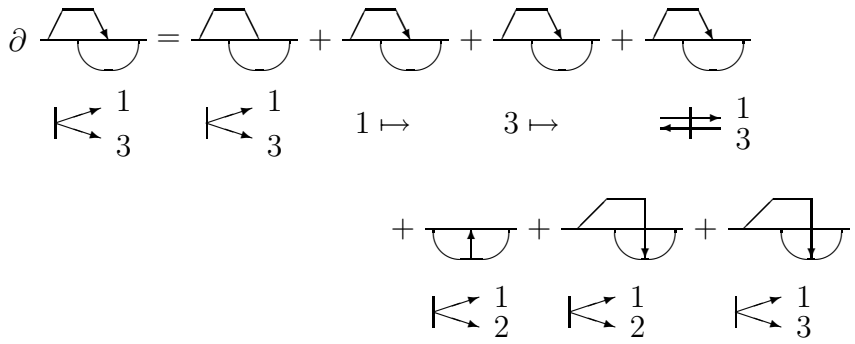
(119)



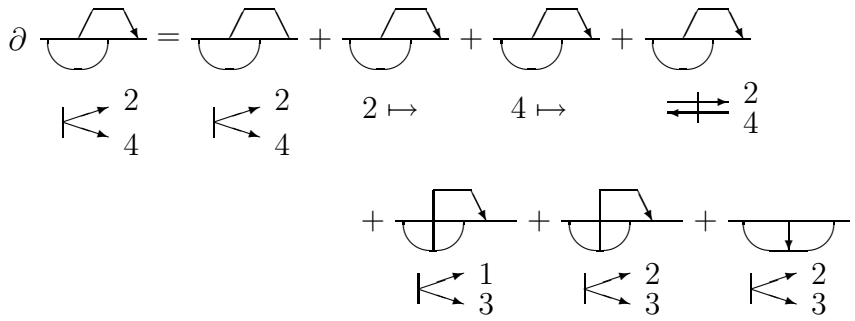
(120)



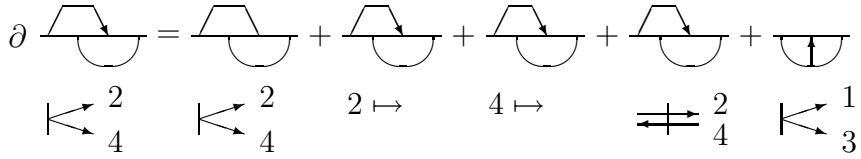
(121)



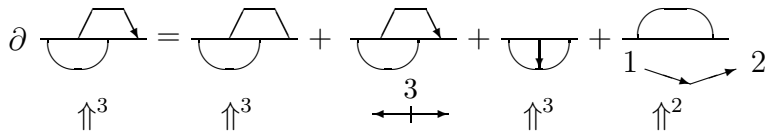
(122)

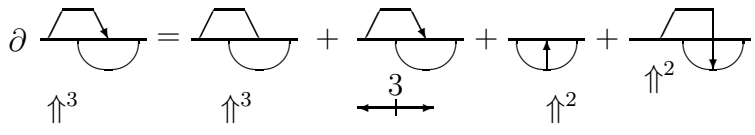


(123)

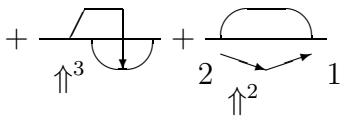


(124)

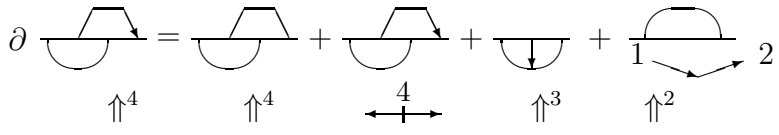




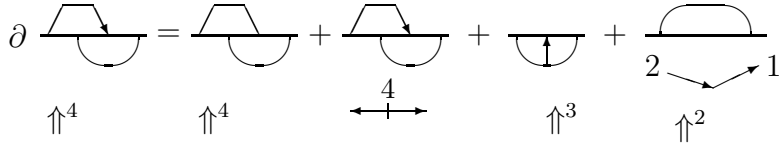
(125)



(126)



(127)



Все члены суммы (92)—(100) содержатся в правых частях равенств (101)—(127). Действительно, обозначим через (a;b) b-е слагаемое правой части равенства (a). Тогда мы имеем

$$
\begin{array}{l}
(92;1)=(101;2),(92;2)=(102;2),(92;3)=(102;1),(92;4)=(103;2),\\
(93;1)=(103;1),(93;2)=(101;1),(93;3)=(105;2),(93;4)=(104;2),\\
(94;1)=(106;2),(94;2)=(104;1),(94;3)=(106;1),(94;4)=(105;1),\\
(95;1)=(107;2),(95;2)=(109;2),(95;3)=(108;2),(95;4)=(109;1),\\
(96;1)=(108;1),(96;2)=(107;1),(96;3)=(110;1),(96;4)=(111;1),\\
(97;1)=(112;1),(97;2)=(113;1),(97;3)=(114;1),(97;4)=(115;1),\\
(98;1)=(116;1),(98;2)=(117;1),(98;3)=(118;1),(98;4)=(119;1),\\
(99;1)=(120;1),(99;2)=(121;1),(99;3)=(122;1),(99;4)=(123;1),\\
(100;1)=(124;1),(100;2)=(125;1),(100;3)=(126;1),(100;4)=(127;1).
\end{array}
\tag{128}
$$

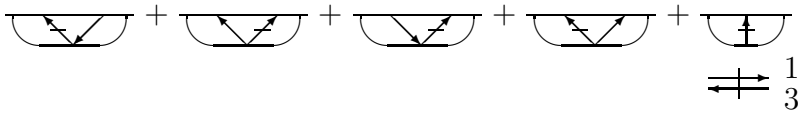
Следовательно, равенства (101)—(127) задают гомологию mod 2 в максимальной клетке члена σ_1 между циклом (92)—(100) и суммой всех остальных членов правых частей этих равенств. Эти члены удовлетворяют большому числу соотношений, которые сильно сокращают их сумму. Именно, мы имеем:

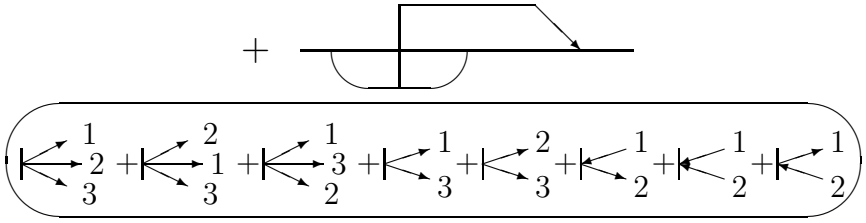
$(101;3)+(106;6)=(110;2)$, $(101;4)=(105;4)$, $(101;5)+(105;5)+(109;3)=(119;2)$, $(101;6)=(109;4)$, $(101;7)+(107;4)=(113;2)$, $(102;3)+(102;4)+(104;6)=(111;2)$, $(102;5)=(104;7)$, $(103;3)=(108;3)$, $(103;4)+(103;5)+(108;4)=(112;2)$, $(104;5)=(109;5)$, $(104;3)+(107;5)+(107;6)=(115;2)$, $(104;4)+(107;7)=(117;2)$, $(104;8)=(121;4)$, $(105;3)=(108;5)$, $(105;6)+(106;8)=(120;4)$, $(106;3)+(108;6)=(114;2)$, $(106;4)+(106;5)+(108;7)=(116;2)$, $(106;7)+(107;3)=(118;2)$, $(107;8)+(109;6)=(123;4)$, $(108;8)=(122;4)$, $(110;3)=(120;2)$, $(110;4)=(114;4)$, $(110;5)=(116;3)$, $(111;3)=(121;2)$, $(111;4)=(115;4)$, $(112;3)=(116;5)$, $(112;4)+(122;3)=(126;2)$, $(113;4)=(117;6)$, $(113;5)=(117;5)$, $(113;6)+(123;3)=(127;2)$, $(114;3)=(119;3)$, $(114;5)+(120;3)=(124;2)$, $(114;7)=(116;7)$, $(114;8)=(122;7)$, $(115;3)=(117;3)$, $(115;5)+(121;3)=(125;2)$, $(115;6)=(119;4)$, $(115;7)=(117;7)$, $(116;4)=(122;2)$, $(116;6)=(118;4)$, $(117;4)=(123;2)$, $(124;3)=(126;3)$, $(124;4)=(126;4)$, $(125;6)=(127;4)$.

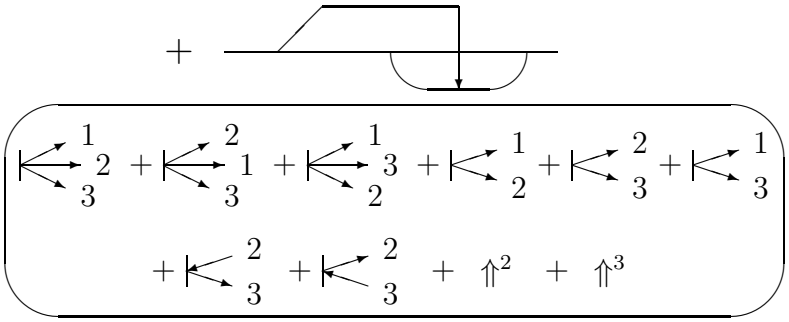
Поэтому цикл (92)—(100) гомологичен в максимальной клетке члена σ_1 цепи, состоящей из всех элементов правых частей равенств (101)—(127), не упоминаемых ни в (128), ни в последних соотношениях. Именно, это следующие члены:

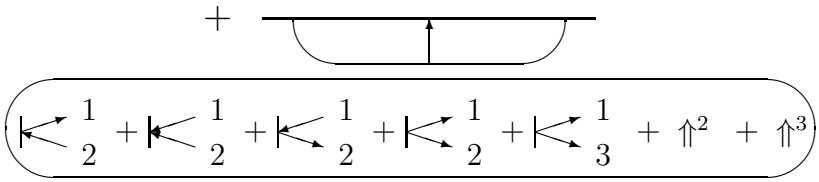
$(102;6)$, $(103;6)$, $(104;9)$, $(105;7)$, $(108;9)$, $(109;7)$, $(110;6)$, $(110;7)$, $(111;5)$, $(112;5)$, $(113;3)$, $(113;7)$, $(114;6)$, $(115;8)$, $(116;8)$, $(117;8)$, $(118;3)$, $(118;5)$, $(118;6)$, $(118;7)$, $(119;5)$, $(119;6)$, $(119;7)$, $(120;5)$, $(121;5)$, $(121;6)$, $(121;7)$, $(122;5)$, $(122;6)$, $(123;5)$, $(125;3)$, $(125;4)$, $(125;5)$, $(127;3)$.

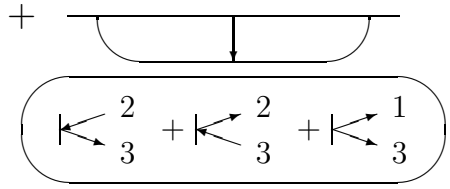
Удобно скомбинировать эти члены в следующие пять строк (129)—(133). Здесь картинка (129;5) стоит вместо суммы (118;5)+(119;5), а любая из строк (130)—(133) представляет сумму нескольких $\mathcal{B}$-блоков, изображения которых состоят из картинок с одной и той же главной частью и разными подписями, перечисленными в картуше под этой строкой.

(129) 

(130) 

(131) 

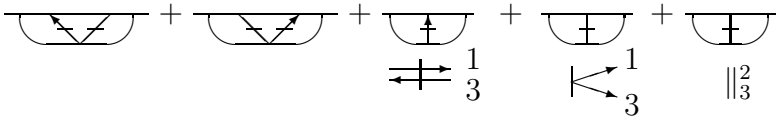
(132) 

(133) 

Удобно думать о подписях (то есть содержимом картушей) под последними четырьмя формулами как о характеристических функциях (mod 2) некоторых цепей в многообразиях, определенных картинками над этими подписями.

Этот цикл (129) + ⋯ + (133) можно очень сильно сократить.

Предложение 24. *Цепь* (129)—(133) *равна в* σ_1 *цепи*

(134) 

Доказательство основано на следующих леммах 7—9.

Лемма 7. *Цепь* (*130*) *равна нулю.*

Первое доказательство — это просто иллюстрация первого утверждения следствия 1 предложения 9 (см. стр. 63). Действительно, граница этой цепи содержит аналогичную цепь, заданную картинкой с тем же самым выражением в картуше, но в главной части которой забыта ориентация ломаной. Эта часть границы не может быть убита границами любых других цепей (129) или (131)—(133). Поэтому вся цепь (129)—(133) имеет шанс оказаться циклом (каковым она является по построению) только если выражение в картуше определяет тождественно нулевую функцию mod 2. □

Второе доказательство. Сумма условий, перечисленных в картуше (130), совпадает с таковой в формуле (91). Поэтому она обращается в 0 на любой типичной кривой, уважающей главную часть картинки формулы (130): доказательство этого совпадает с соответствующей частью доказательства леммы 6 на странице 81.

Лемма 8. *Цепь* (*131*) *равна нулю.*

Первое доказательство этой леммы почти повторяет доказательство леммы 7, а второе использует тривиальность строки (90), см. лемму 6. □

Лемма 9. *Суммы, стоящие в двух картушах под строками* (132) *и* (133)*, определяют одну и ту же функцию на объединении субалгебраических подмножеств в* σ_1*, заданных главными частями картинок, изображенных в этих строках.*

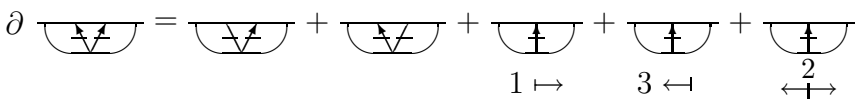
Первое доказательство — это иллюстрация второго утверждения следствия 1 предложения 9. Прямое доказательство состоит в следующем. Сумма первых четырех подписей под строкой (132) определяет функцию, тождественно равную 1. Сумма двух последних подписей под этой строкой и двух первых подписей под (133) также равна этой функции. Наконец, оставшиеся члены номер 5 под (132) и номер 3 под (133) совпадают, и лемма 9 опять доказана. □

Из этих трех лемм следует, что мы можем просто стереть обе строки (130) и (131) и заменить содержимое картуша под (132) таковым под (133). Используя дополнительно первое тождество (32), мы сводим сумму всех строк (130)—(133) к сумме последних двух слагаемых формулы (134).

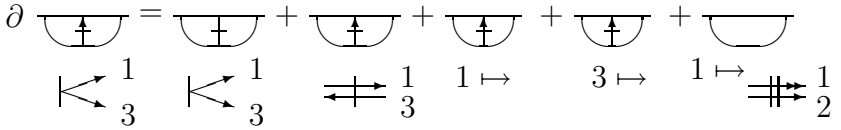
Сумма первых трех слагаемых в (134) очевидно равна (129) (действительно, (129;1) + (129;4) = (134;1) и (129;2) + (129;3) = (134;2)), и предложение 24 доказано. □

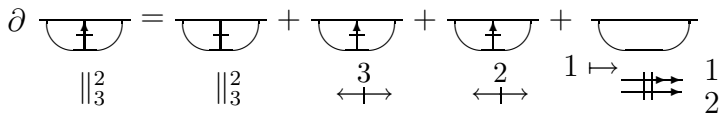
Прямой алгоритм перерабатывает цепь (134) в левые части следующих трех равенств:

(135)



(136)



(137) 

;

здесь (одинаковые) вторые подписи под последними картинками последних двух равенств объяснены в пункте **5!** раздела 2.4.

Легко видеть, что сумма правых частей этих трех равенств равна циклу (134).

Мы доказали следующее утверждение.

Предложение 25. *Цепь, представляющая второй дифференциал $d^2(v_3) \subset \sigma_1$ (и выраженная формулами* (92)—(100)*), гомологична в σ_1 единственной вице-максимальной клетке члена σ_1, взятой с некоторым коэффициентом. Эта гомология задается суммой тридцати $\mathcal{F}$-блоков в σ_1, указанных в левых частях равенств* (101)—(127) *и* (135)—(137). □

Предложение 26. *Коэффициент, упоминаемый в первом утверждении предложения 25, равен нулю. В частности, цепь, представляющая второй дифференциал $d^2(v_3) \subset \sigma_1$, равна гомологической границе суммы тридцати $\mathcal{F}$-блоков в σ_1, указанных в левых частях равенств* (101)—(127) *и* (135)—(137).

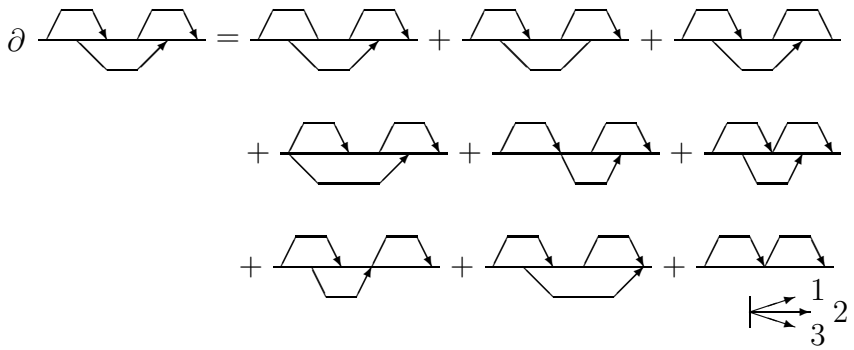
Это предложение является непосредственным следствием предложения 6. Дадим прямое доказательство. Оно очень сходно с доказательством леммы 5 на стр. 72. Действительно, для почти всех из наших тридцати $\mathcal{F}$-блоков интервал, ограниченный концами хорды, содержит точку по меньшей мере одной неперекрещенной ориентированной ломаной. Следовательно, соответствующие предельные множества содержат только особые узлы, имеющие особую точку и одну точку строго ниже или выше ее: это — ситуация коразмерности 2 в σ_1 или коразмерности 1 в вице-максимальной клетке. Оставшиеся члены, для которых это не выполнено, указаны в левых частях равенств (119) и (135)—(137). Предельное множество для (119) состоит из особых узлов, имеющих точку пересечения строго правее особой точки. Предельные множества для блоков, указанных в (135)—(137), можно игнорировать по тем же причинам, что и предельное множество из формулы (12) в доказательстве леммы 5. □

6.4. **Третий дифференциал и затягивающая его цепь.** Третий дифференциал $d^3(v_3) \in \bar{H}_{\omega-1}(\Sigma)$ задается как образ затягивающей цепи, упоминавшейся в предыдущем предложении, при очевидной проекции $\pi : \sigma_1 \to \Sigma$. Он состоит из тридцати $\mathcal{B}$-блоков, картинки которых получаются из картинок в левых частях равенств (101)—(127) и (135)—(137) заменой единственной хорды каждой картинки на неориентированную неперекрещенную ломаную ⊓ .

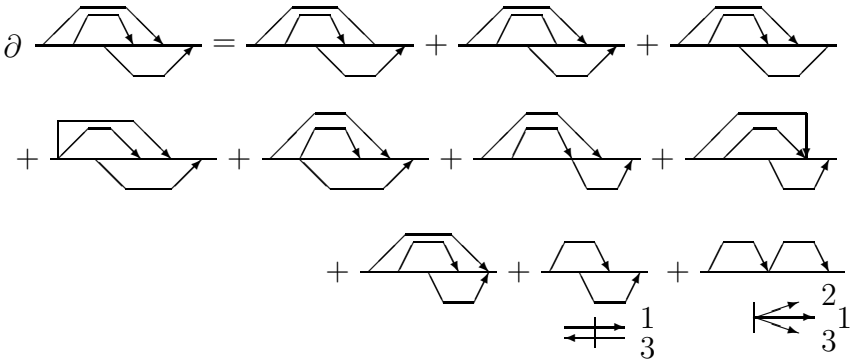
По построению, сумма этих тридцати блоков является циклом в Σ.

Остается *затянуть* этот цикл относительной цепью в $\mathcal{K}$ (т.е. представить его как границу такой цепи). Прямой алгоритм немедленно дает нам левые части следующих равенств (138)—(152).

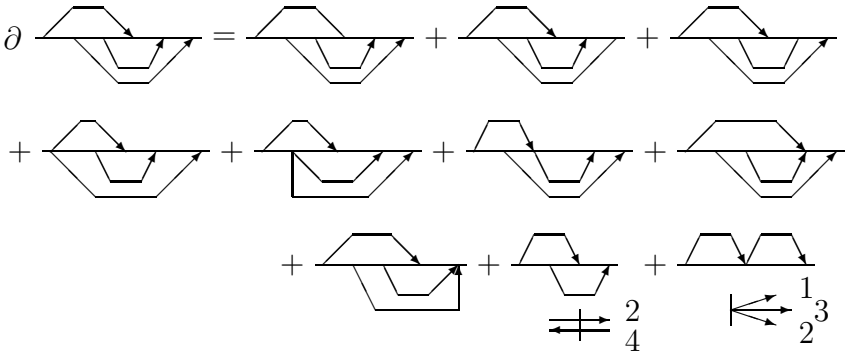
(138)



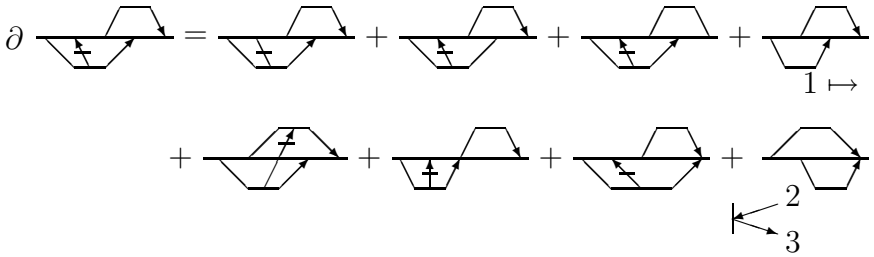
(139)



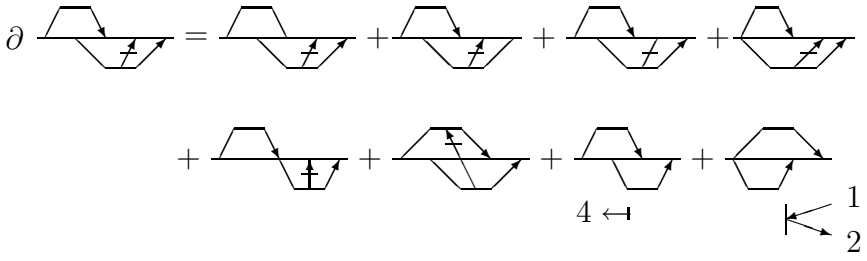
(140)



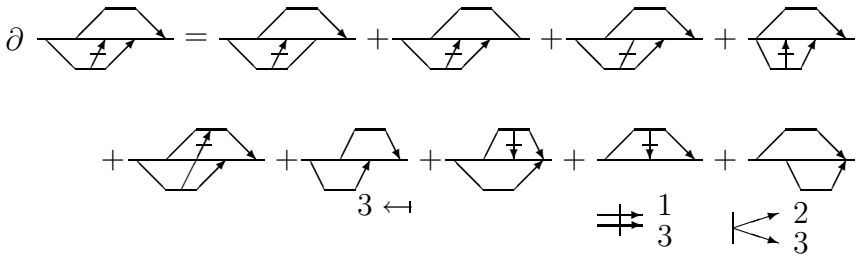
(141)



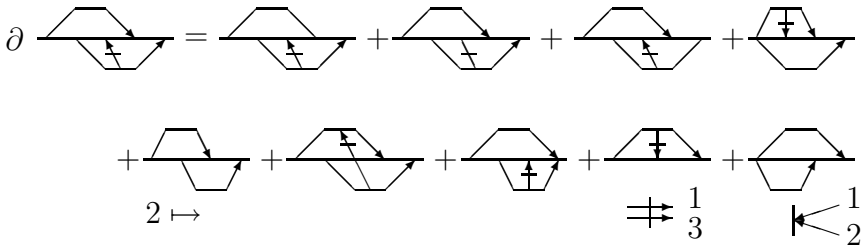
(142)



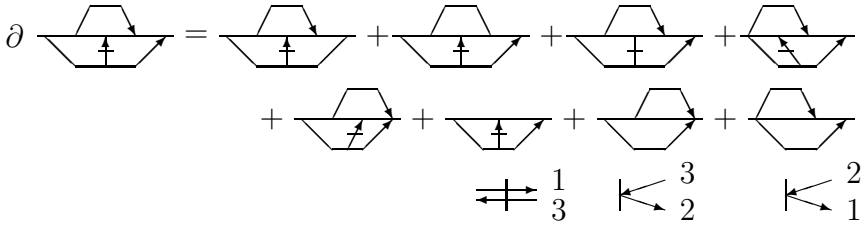
(143)



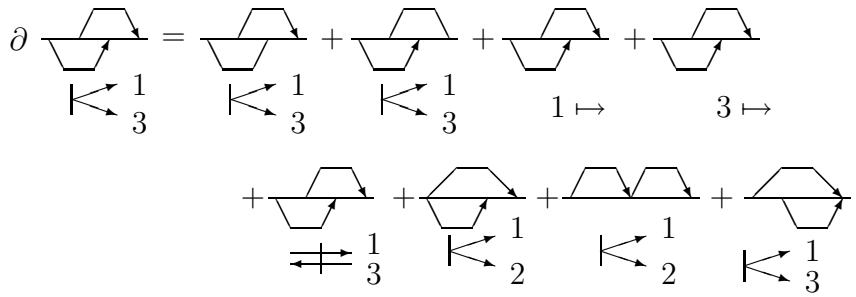
(144)

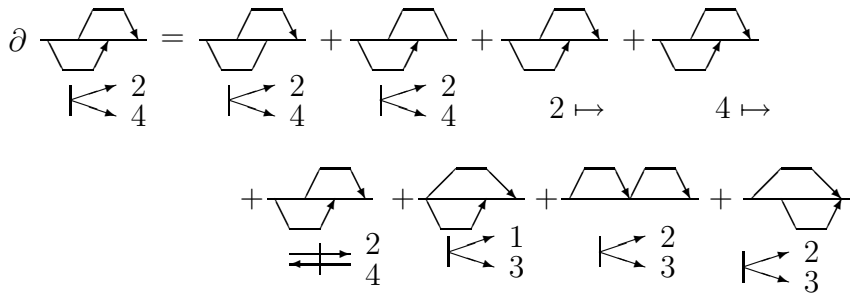


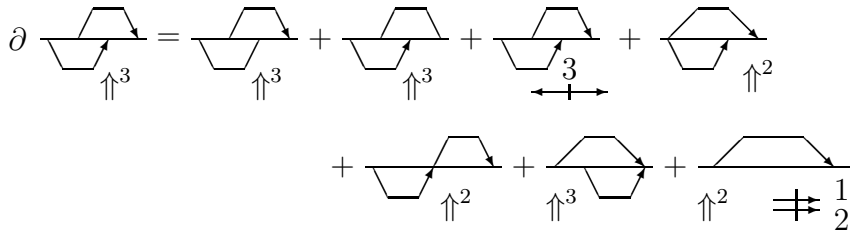
(145)

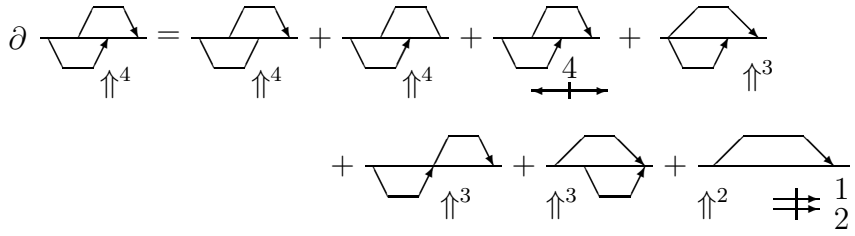


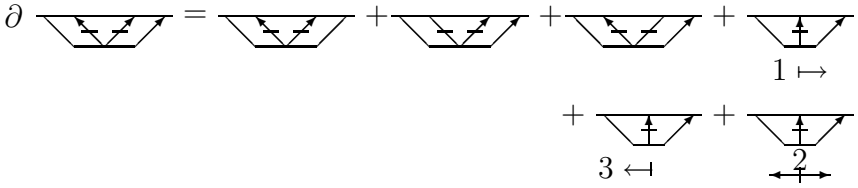
(146)

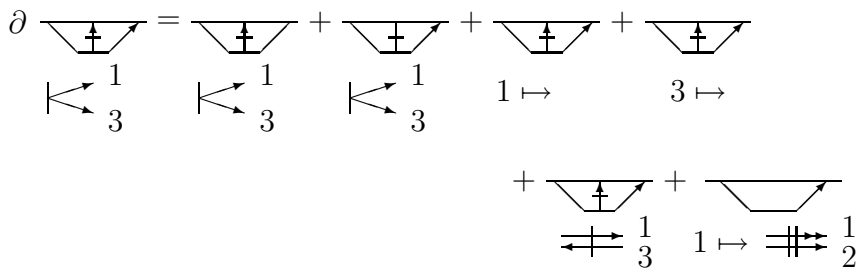


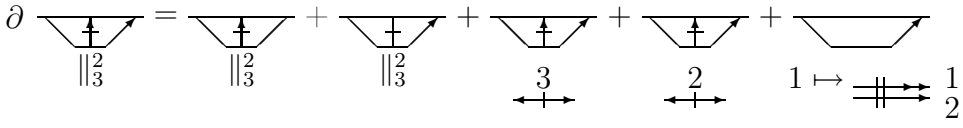
(147) 

(148) 

(149) 

(150) 

(151) 

(152) 

Предложение 27. *Сумма правых частей пятнадцати равенств (138)—(152) равна цепи $d^3(v_3)$, т.е. сумме проекций в Σ субалгебраических цепей члена σ_1, закодированных в левых частях равенств (101)—(127) и (135)—(137).*

Теорема 2 немедленно вытекает из этого предложения, поскольку формула (49) состоит из картинок, данных в левых частях этих пятнадцати равенств.

Доказательство предложения 27. Все эти проекции участвуют в правых частях формул (138)—(152). Именно, для любого a, равного одному из чисел 101, ..., 127 или 135, 136, 137, обозначим через $[a]$ $\mathcal{B}$-блок в Σ, полученный при проектировании $\mathcal{F}$-блока в σ_1, закодированного в левой части равенства (a). Тогда мы имеем

(153)
$$\begin{array}{llll}
(138;1)=[103], & (138;2)=[101], & (138;3)=[102], & (139;1)=[106],\\
(139;2)=[105], & (139;3)=[104], & (140;1)=[108], & (140;2)=[107],\\
(140;3)=[109], & (141;2)=[110], & (141;3)=[111], & (142;1)=[112],\\
(142;2)=[113], & (143;1)=[114], & (143;2)=[115], & (144;1)=[116],\\
(144;3)=[117], & (145;1)=[118], & (145;2)=[119], & (146;1)=[120],\\
(146;2)=[121], & (147;1)=[122], & (147;2)=[123], & (148;1)=[124],\\
(148;2)=[125], & (149;1)=[126], & (149;2)=[127], & (150;1)=[135],\\
(151;1)=[136], & (152;1)=[137]. & &
\end{array}$$

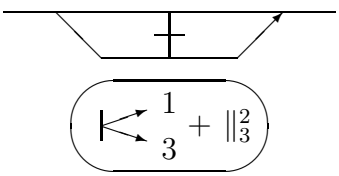
Поэтому нам нужно лишь доказать, что сумма остальных членов правых частей равенств (138)—(152) равна нулю. Эти члены удовлетворяют множеству очевидных соотношений, которые сильно сокращают их сумму. Именно, мы имеем

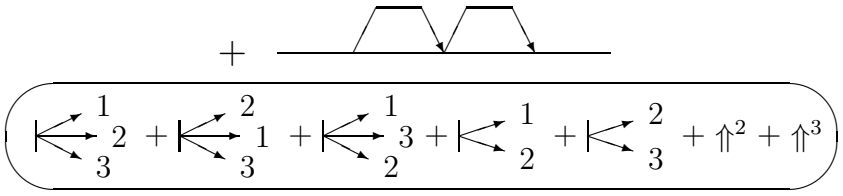
$(138;4)+(138;5)+(139;7)=(141;1)$, $(138;6)+(139;8)+(140;4)=(145;3)$,
$(138;7)+(138;8)+(140;5)=(142;3)$, $(139;4)+(140;6)+(140;7)=(143;3)$,
$(139;5)+(139;6)+(140;8)=(144;2)$, $(141;6)+(141;7)+(143;4)=(150;3)$,
$(142;7)+(147;4)=(149;3)$, $(143;6)+(146;4)=(148;3)$, $(150;4)=(151;3)$,
$(139;9)=(146;5)$, $(140;9)=(147;5)$, $(141;5)=(143;5)$, $(141;4)=(146;3)$,
$(142;6)=(144;6)$, $(143;8)=(144;8)$, $(143;9)=(147;8)$, $(144;4)=(145;4)$,
$(144;5)=(147;3)$, $(144;7)=(145;5)$, $(145;6)=(151;5)$, $(148;6)=(149;6)$,
$(148;7)=(149;7)$, $(150;6)=(152;4)$, $(151;6)=(152;5)$,
$(150;5)+(151;4)=(152;3)$, $(142;4)+(142;5)+(143;7)=(150;2)$.

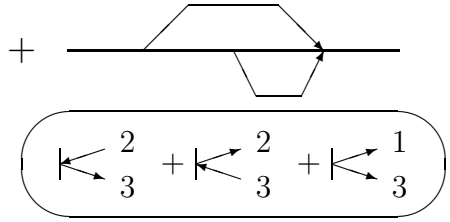
Оставшиеся после этого слагаемые таковы: $(138;9)$, $(139;10)$, $(140;10)$, $(141;8)$, $(142;8)$, $(144;9)$, $(145;7)$, $(145;8)$, $(146;6)$, $(146;7)$, $(146;8)$, $(147;6)$, $(147;7)$, $(148;4)$, $(148;5)$, $(149;4)$, $(149;5)$, $(151;2)$, $(152;2)$.

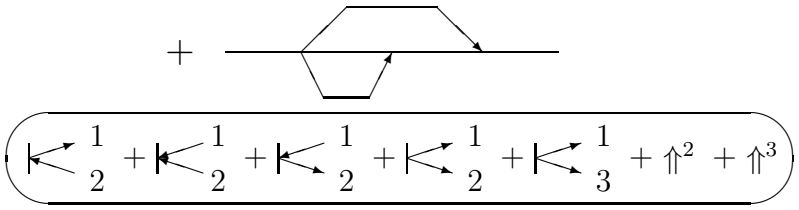
Их можно скомбинировать как указано в следующих четырех формулах (154)—(157).

(154)



(155) 

(156) 

(157) 

В силу замечания 10 на странице 35, подписи под строчками (154) и (156) определяют одинаковые функции. Аналогично прямому доказательству лемм 7, 8, 9 легко показать, что выражения в картушах под остальными двумя строками (155) и (157) также равны этой подписи. Но множества, заданные главными частями (без подписей) картинок (155)—(157) и (154) удовлетворяют соотношению (34) (см. стр. 40).

Предложение 27 доказано, и доказательство теоремы 2 завершено. □ □

7. Другой алгоритм

Пусть некоторый инвариант степени k задается линейной комбинацией нескольких стрелочных диаграмм Поляка–Виро, с $\leq k$ стрелками в каждой. Тогда весовая система этого инварианта легко реконструируется по этим диаграммам: мы берем часть этой линейной комбинации, состоящую из диаграмм с ровно k стрелками, забываем ориентации стрелок в каждой из этих диаграмм (так что они становятся хордовыми диаграммами) и дополнительно умножаем эти диаграммы на подходящие знаки 1 или -1 (если мы вычисляем целочисленные инварианты), см. [15].

Это дает простой алгебраический метод вычисления сумм стрелочных диаграмм, представляющих инвариант с данной k-весовой системой. Действительно, имеется только $\sum_{j=0}^{k}(2j)!/j!$ стрелочных диаграмм с $\leq k$ стрелками. Рассмотрим пространство всех линейных комбинаций этих диаграмм. Тогда мы получим систему линейных уравнений на эти комбинации. Первые $(2k)!/(2^k k!)$ уравнений вообще говоря неоднородны и гарантируют, что весовая система нашего инварианта совпадает с заданной. Оставшиеся уравнения однородны и отражают то, что наша линейная комбинация действительно является инвариантом. Именно, мы рассматриваем эти стрелочные

диаграммы как $\mathcal{F}$-картинки (в которых все стрелки изображены ориентированными неперекрещенными ломаными, см. замечание 4 на стр. 31) и вычисляем границы соответствующих $\mathcal{F}$-блоков как в параграфе 3 выше (и в будущем аналоге этого параграфа "с целыми коэффициентами"). Тогда соответствующая линейная комбинация этих границ должна обращаться в нуль.

Из теоремы Гусарова следует, что эта система линейных уравнений всегда разрешима.

Этот алгоритм элементарнее описанного в §4, но системы линейных уравнений, возникающие при его выполнении, будут больше (ориентировочно в 2^k раз).

Список литературы

[1] Bar-Natan, D. (1994 –) Bibliography of Vassiliev Invariants. Web publication `http://www.math.toronto.edu/~drorbn/VasBib/index.html`

[2] Bar-Natan, D. (1995) On the Vassiliev knot invariants, *Topology*, Vol. 34, 423–472.

[3] Birman, J. (1993) New points of view in knot theory. *Bull. AMS (N.S.)*, **28**:3, 253–287.

[4] R. Budney, J. Conant, K. Scannell, and D. Sinha (2003) *New perspectives of self-linking*, Web publication **math.GT/0303034**

[5] Fiedler, T. (2001) Gauss diagram invariants for knots and links, Mathematics and its Applications, Vol. 552, Kluwer Academic Publishers.

[6] Golubitsky, M., Guillemin, V. (1973) Stable Mappings and Their Singularities. Grad. Texts Math. 14. Springer: New York. Перевод: Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности. Мир, 1977.

[7] M. Goresky and R. MacPherson, *Stratified Morse Theory,* Springer, Berlin a.o., 1988. Русский перевод: Горески М., Р.Макферсон, Стратифицированная теория Морса, Мир, М., 1991.

[8] Goussarov, M., Polyak, M., and Viro, O. (2000) Finite type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39**:5, 1045–1068.

[9] A. Hatcher, Spaces of knots, `http://math.cornell.edu/~hatcher`

[10] Kauffman, L.H. (1999) Virtual Knot Theory, *European Journal of Combinatorics,* **20**:7, 662–690.

[11] Kontsevich, M. (1993) Vassiliev's knot invariants, in *Adv. in Sov. Math.,* **16:2,** AMS, Providence RI, 137–150.

[12] Lannes, J. (1993) Sur l'invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3. *L'Enseignement Mathématique* **39** (3–4), 295–316.

[13] Мерков, А.Б. (2003) Инварианты Васильева классифицируют типичные плоские кривые и наборы плоских кривых, *Матем. Сборник*, **194**:9, 31–62.

[14] Мерков, А.Б. (2000) Сегментно–стрелочные диаграммы и инварианты орнаментов, *Матем. Сборник*, **191**:11, 47–78.

[15] Polyak, M. and Viro, O. (1994) Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants, *Internat. Math. Res. Notes* **11**, 445–453.

[16] Тюрина, С.Д. (1999) О формулах типа Ланна и Виро-Поляка для инвариантов конечного типа, *Матем. Заметки* **66:**4, 635–640.

[17] Vassiliev, V.A. (1990) Cohomology of knot spaces, in: *Theory of Singularities and its Applications* (V. I. Arnold, ed.), Advances in Soviet Math. Vol. 1, 23–69 (AMS, Providence, RI).

[18] Vassiliev, V.A. (1999) Topological order complexes and resolutions of discriminant sets, *Publications de l'Institut Mathématique Belgrade, Nouvelle série* **66(80)**, 165–185.

[19] V.A. Vassiliev, Complexes of connected graphs, in: L. Corvin, I. Gel'fand, J. Lepovsky (eds.), *The I. M. Gel'fand's mathematical seminars 1990–1992,* 1993, Birkhäuser, Basel, 223–235.

[20] Vassiliev, V.A. (1994) *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications, Revised ed.*, Translations of Math. Monographs 98, AMS, Providence RI.