Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

механико-математический факультет

кафедра высшей геометрии и топологии

Об оценке количества периодических биллиардных траекторий для многообразий, вложенных в евклидово пространство

Дипломная работа
студента 506 группы
Ф. С. Дужина

Научный руководитель
профессор С. М. Гусейн-Заде

Москва 2000

1 Введение

Мы будем заниматься нижней оценкой количества периодических биллиардных траекторий в многообразиях, вложенных в евклидово пространство. А именно, p-периодической биллиардной траекторией мы будем называть замкнутую p-звенную ломаную, вершины которой лежат на многообразии, и в каждой вершине "угол падения равен углу отражения“ (точное определение будет дано ниже). Впервые вопрос оценки количества периодических биллиардных траекторий был рассмотрен американским математиком Дж. Биркгофом, который в [1] доказал, что для простого $p > 2$ в окружности, вложенной в плоскость, существует хотя бы по две периодические биллиардные траектории каждого индекса вращения от 1 до $\frac{p-1}{2}$, то есть всего их не менее $p-1$. Затем И. К. Бабенко показал в [2], что в двумерной сфере p-периодических биллиардных траекторий хотя бы p. И, наконец, последние результаты в этой области принадлежат М. Фарберу и С. Табачникову, которые в [3] доказали, что для $n \geqslant 3$ в n-мерной сфере имеется не менее $\log_2(p-1)+n$ p-периодических биллиардных траекторий, а в случае общего положения эта оценка улучшается до $n(p-1)$.

Во второй части мы покажем, как можно применять теорию Морса-Ботта для оценок числа периодических биллиардных траекторий, затем докажем теорему Биркгофа, после этого покажем, что оценка Фарбера-Табачникова верна для сфер любого числа измерений, если рассматривать только общие малые возмущения стандартной круглой сферы, затем найдем оценку на количество 3-периодических биллиардных траекторий в двумерной сфере, а в финале докажем теорему о числе 3-периодических траекторий в произвольном многообразии, правда, довольно грубую.

2 Теория Морса для периодических биллиардных траекторий

Пусть M – гладкое компактное многообразие размерности m, вложенное в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, p — простое число. Скажем, что $(x_1, \ldots, x_p) \in M \times \ldots \times M$ — p-периодическая биллиардная траектория, если

$$\frac{x_i - x_{i+1}}{\|x_i - x_{i+1}\|} + \frac{x_i - x_{i-1}}{\|x_i - x_{i-1}\|} \perp T_{x_i}M$$

для любой точки x_i, $i \in \mathbb{Z}_p$. Наборы точек $(x_1, \ldots, x_p) \in M \times \ldots \times M$ мы будем рассматривать с точностью до действия группы диэдра D_p на $M \times \ldots \times M$ переставлением координат.

Пусть $\Delta = \{(x, x, x_3, \ldots, x_p)\} \subset M \times \ldots \times M/D_p$. Тогда очевидно, что p-периодические биллиардные траектории суть критические точки функции длины замкнутой ломаной, вершины которой лежат на многообразии, вне диагонали Δ:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} \rho(x_i, x_{i+1})$$

Действительно,

$$\frac{\partial f}{x_i} = \frac{x_i - x_{i+1}}{\|x_i - x_{i+1}\|} + \frac{x_i - x_{i-1}}{\|x_i - x_{i-1}\|},\ x_i \in \mathbb{R}^n$$

Равенство нулю производной вдоль любого касательного вектора – то же самое, что ортогональность градиента касательному пространству.

В дальнейшем мы будем предполагать, что многообразие M вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ так, что функция длины f вне Δ морсовская. Минимальное количество p-периодических биллиардных траекторий многообразия M будем обозначать $BT_p(M)$.

Лемма 2.1 *Пусть M – гладкое компактное риманово многообразие размерности m. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $x \in M$ выполнены следующие условия:*

1) Шар $B_\varepsilon(x) \subset M$ диффеоморфен диску $D_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^m$, причем диффеоморфизм устроен так: выпускаем из x во все стороны геодезические на расстояние ε и естественным образом отображаем их в прямые, проходящие через 0 в $\mathbb{R}^m$, с сохранением углов между ними.

2) Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ – попарно различные геодезические, выходящие из x; $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$;

$$h(t) = \rho(x, y_1(\alpha_1 t)) + \sum_{i=1}^{k-1} \rho(y_i(\alpha_i t), y_{i+1}(\alpha_{i+1} t))$$

Тогда если $t > 0$, $\alpha_1 t, \dots, \alpha_k t < \varepsilon$, то $h'(t) \geqslant \alpha_k$.

Доказательство. Сначала выберем нужное ε в окрестности каждой точки. Пусть $x \in M$. Тогда координаты в окрестности точки x введем вдоль геодезических, выходящих из нее. В этих координатах

$$\rho(y, z) = \|y - z\| + O(\|y - z\|^2).$$

Таким образом для введенной функции $h(t)$

$$h'(t) = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \|\alpha_i \mathbf{a}_i - \alpha_{i+1} \mathbf{a}_{i+1}\| + O(t) \geqslant \alpha_k$$

по неравенству треугольника, примененному к точкам $0, \alpha_1\mathbf{a}_1, \ldots, \alpha_k\mathbf{a}_k$, где $\mathbf{a}_i$ – направляющие вектора прямых, в которые переходят геодезические $y_i(t)$. Отсюда и следует существование нужной окрестности точки x.

Теперь каждую точку x поместим в соответствующую окрестность радиуса $\varepsilon/2$, из полученного покрытия выберем конечное подпокрытие, а искомое ε – минимальное из выбранных. □

Замечание *ε можно выбрать так, что второе условие выполнено одновременно для нескольких значений $k = 1, \ldots, K$.*

Теорема 1

$$BT_p(M) \geqslant \sum_{q=1}^{mp} \dim H_q(M \times \ldots \times M/D_p, \Delta; \mathbb{Z}_2)$$

Доказательство. Мы построим на $X = M \times \ldots \times M/D_p$ неотрицательную функцию g, гладкую вне Δ, с теми же критическими точками, что и у f, но с условием $\Delta = \{g = 0\}$. Тогда теорема будет следовать из теории Морса: маленькая окрестность Δ в X/Δ стягиваема, поэтому по функции g можно построить клеточное пространство точно так же, как по функции, морсовской на всем многообразии. Далее остается применить неравенства Морса и утверждение о сведении относительных гомологий к абсолютным:

$$\tilde{H}_*(X/\Delta) = H_*(X, \Delta)$$

Пусть $\varphi(t)$ – такая гладкая функция, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi\mid_{(-\infty,0]} \equiv 0$, $\varphi\mid_{[\varepsilon,+\infty)} \equiv 1$, $\varphi'\mid_{(0,\varepsilon)} > 0$. Покажем, что нужным свойством обладает функция

$$g(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_p) \left(\prod_{i \in \mathbb{Z}_p} \varphi(\rho(x_i, x_{i+1})) \right)$$

при достаточно малом ε.

Пусть $\Delta^{(p-k)} = \{(x_1, \ldots, x_1, x_{k+1}, \ldots, x_p\} \subset \Delta$. Тогда $\Delta^{(0)} \subset \ldots \subset \Delta^{(p-2)} = \Delta$. Найдем сначала ε, подходящий для окрестности $\Delta^{(0)}$. Возьмем ε, выбранный с помощью замечания к лемме для $K = p-1$ и, если понадобится, уменьшим его так, чтобы все критические точки функции f оказались удалены от диагонали Δ на расстояние, большее ε. Маленькая окрестность $\Delta^{(0)}$ имеет вид

$$U^0_\varepsilon(\Delta^{(0)}) = \{(x_1, \ldots, x_p) : \rho(x_1, x_2), \ldots, \rho(x_1, x_p) < \varepsilon\}$$

Произвольная точка этой окрестности получается, если зафиксировать x_1, выпустить из x_1 $p-1$ геодезическую и точки $x_2, \dots, x_p$ выбрать на этих геодезических. Пусть $x_j(\alpha_j t), j \geqslant 2$ – геодезические, выходящие из x_1 с натуральным параметром t, т. е. $\|\frac{d}{dt}x_j(\alpha_j t)\| = \alpha_j$. Тогда $g(x_1, \dots, x_p) = g(t)$.

$$g'(t) = \left(\prod_{i\in\mathbb{Z}_p} \varphi(\rho(x_i, x_{i+1}))\right)' f(t) + \left(\prod_{i\in\mathbb{Z}_p} \varphi(\rho(x_i, x_{i+1}))\right) f'(t)$$

$$\varphi > 0,\ f > 0,\ \rho(x_i, x_{i+1}) > 0$$

$$\varphi' \geqslant 0,\ f'(t) > 0,\ \frac{d}{dt}\rho(x_i(t), x_{i+1}(t)) > 0$$

Поэтому $g'(t) > 0$ просто в силу выбора ε из замечания к лемме. Таким образом в каждой точке окрестности $U^0(\Delta^{(0)})$ мы указали вектор (касательный к кривой $(x_1, x_2(\alpha_2 t), \dots, x_p(\alpha_p t)))$, производная функции g в направлении которого больше 0. Это означает, что ее градиент в этой точке не равен 0, что и требовалось. Заметим, что при дальнейшем уменьшении ε уже построенную окрестность $U^0(\Delta^{(0)})$ можно не уменьшать – критические точки функции g в ней не появятся.

Пусть мы нашли ε, подходящий для окрестности $U^{p-l-1}(\Delta^{(p-l-1)})$. Уменьшим этот ε вдвое. Дальше нам достаточно рассматривать не всю $\Delta^{(p-l)}$, а только $\Delta^{(p-l)} - U^{p-l-1}(\Delta^{(p-l-1)})$, т. е. мы можем считать, что произвольная точка $\Delta^{(p-l)}$ имеет вид $(x_1, \dots, x_1, x_{l+1}, \dots, x_p$, где $\rho(x_1, x_{l+1}) > \varepsilon, \dots, \rho(x_1, x_p) > \varepsilon$. Аналогично предыдущему, вся окрестность Δ^{p-l} получается, если $x_1, x_{l+1}, \dots, x_p$ зафиксировать, а $x_2, \dots, x_l$ пустить по геодезическим, выходящим из x_1. Опять $g(x_1, \dots, x_p) = g(t)$.

$$g'(t) = \underbrace{\left(\prod_{i=l+1}^{p} \varphi(\rho(x_i, x_{i+1}))\right)}_{const} \left(\left(\prod_{i=1}^{l} \varphi(\rho(x_i, x_{i+1}))\right)' f(t) + \left(\prod_{i=1}^{l} \varphi(\rho(x_i, x_{i+1}))\right) f'(t)\right)$$

Остается добавить, что

$$f'(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{p-1} \rho(x_i, x_{i+1})}_{\geqslant \alpha_l} + \underbrace{\frac{d}{dt}\rho(x_l(\alpha_l t), x_{l+1})}_{\geqslant -\alpha_l} \geqslant 0,$$

так как при движении по геодезической расстояние до любой точки не может изменяться со скоростью, большей 1. Из этого следует, что и в этом случае $g'(t) > 0$.

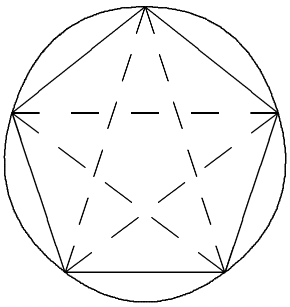
Таким образом, переходя от $\Delta^{(p-l-1)}$ к $\Delta^{(p-l)}$, мы дойдем до $\Delta^{(p-2)} = \Delta$, что и требовалось. $\square$

3 Периодические биллиардные траектории в окружности

Лемма 3.1 *Сущесвует вложение окружности S^1 в плоскость $\mathbb{R}^2$, при котором функция*

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_p} \rho(x_i, x_{i+1})$$

имеет ровно $p-1$ критических точек: $\frac{p-1}{2}$ максимумов и $\frac{p-1}{2}$ точек индекса $p-1$.



Доказательство. Искомое вложение в полярных координатах задается формулой

$$r = 1 - \varepsilon \cos p\varphi$$

при достаточно малом ε. Действительно, покажем это для $p = 3$ (для больших p аналогично). Для невозмущенной окружности $r = 1$ все 3-периодические биллиардные траектории суть вписанные в нее правильные треугольники. Координаты вершин произвольного такого треугольника

$$\varphi_1 = \alpha_0,\ \varphi_2 = \alpha_0 + \frac{2\pi}{3},\ \varphi_3 = \alpha_0 + \frac{4\pi}{3}$$

Таким образом для возмущенной окружности $r = 1 - \varepsilon \cos 3\varphi$ 3-периодические биллиардные траектории будут

$$\varphi_1 = \alpha_0 + \beta_1,\ \varphi_2 = \alpha_0 + \beta_2 + \frac{2\pi}{3},\ \varphi_3 = \alpha_0 + \beta_3 + \frac{4\pi}{3},$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \to 0$ ($\varepsilon \to 0$). Далее нужно выписать функцию длины ломаной и ее производные, а затем разложить их до первого порядка по $\varepsilon, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) =$$

$$= \sqrt{(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)^2 + (1-\varepsilon\cos 3\varphi_2)^2 - 2(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)(1-\varepsilon\cos 3\varphi_2)\cos(\varphi_1-\varphi_2)} +$$
$$+ \sqrt{(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)^2 + (1-\varepsilon\cos 3\varphi_3)^2 - 2(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)(1-\varepsilon\cos 3\varphi_3)\cos(\varphi_1-\varphi_3)} +$$

$$+\sqrt{(1-\varepsilon\cos 3\varphi_2)^2+(1-\varepsilon\cos 3\varphi_3)^2-2(1-\varepsilon\cos 3\varphi_2)(1-\varepsilon\cos 3\varphi_3)\cos(\varphi_2-\varphi_3)}$$

Выпишем для примера производную функции $f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ по φ_1:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_1}f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)=$$

$$=\frac{3\varepsilon(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)\sin 3\varphi_1-(1-\varepsilon\cos 3\varphi_2)(3\varepsilon\sin 3\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)-(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)\sin(\varphi_1-\varphi_2))}{\sqrt{(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)^2+(1-\varepsilon\cos 3\varphi_2)^2-2(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)(1-\varepsilon\cos 3\varphi_2)\cos(\varphi_1-\varphi_2)}}+$$

$$+\frac{3\varepsilon(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)\sin 3\varphi_1-(1-\varepsilon\cos 3\varphi_3)(3\varepsilon\sin 3\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_3)-(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)\sin(\varphi_1-\varphi_3))}{\sqrt{(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)^2+(1-\varepsilon\cos 3\varphi_3)^2-2(1-\varepsilon\cos 3\varphi_1)(1-\varepsilon\cos 3\varphi_3)\cos(\varphi_1-\varphi_3)}}$$

Теперь в эту формулу и аналогичные для $\frac{\partial}{\partial\varphi_2}f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ и $\frac{\partial}{\partial\varphi_3}f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ нужно подставить значения для φ_1, φ_2 и φ_3:

$$\varphi_1=\alpha_0+\beta_1,\ \varphi_2=\alpha_0+\beta_2+\frac{2\pi}{3},\ \varphi_3=\alpha_0+\beta_3+\frac{4\pi}{3},$$

$$\cos 3\varphi_1=\cos 3\alpha_0-3\beta_1\sin 3\alpha_0+\dots$$

$$\cos 3\varphi_2=\cos 3\alpha_0-3\beta_2\sin 3\alpha_0+\dots$$

$$\cos 3\varphi_3=\cos 3\alpha_0-3\beta_3\sin 3\alpha_0+\dots$$

$$\sin 3\varphi_1=\sin 3\alpha_0+3\beta_1\cos 3\alpha_0+\dots$$

$$\sin 3\varphi_2=\sin 3\alpha_0+3\beta_2\cos 3\alpha_0+\dots$$

$$\sin 3\varphi_3=\sin 3\alpha_0+3\beta_3\cos 3\alpha_0+\dots$$

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta_1-\beta_2)+\dots$$

$$\cos(\varphi_2-\varphi_3)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta_2-\beta_3)+\dots$$

$$\cos(\varphi_1-\varphi_3)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta_1-\beta_3)+\dots$$

$$\sin(\varphi_1-\varphi_2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)+\dots$$

$$\sin(\varphi_2-\varphi_3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_3)+\dots$$

$$\sin(\varphi_1-\varphi_3)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_3)+\dots$$

После подстановки в формулы этих значений φ_1, φ_2 и φ_3 уравнения равенства нулю производных функции f примут вид:

$$-2\sqrt{3}\sin 3\alpha_0+\varepsilon\sqrt{3}\sin 3\alpha_0+\beta_1(-6\sqrt{3}\cos 3\alpha_0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 3\alpha_0)+$$

$$+\beta_2(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin 3\alpha_0)+\beta_3(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin 3\alpha_0)+\ldots=0$$

$$-2\sqrt{3}\sin 3\alpha_0+\varepsilon\sqrt{3}\sin 3\alpha_0+\beta_1(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin 3\alpha_0)+$$

$$+\beta_2(-6\sqrt{3}\cos 3\alpha_0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 3\alpha_0)+\beta_3(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin 3\alpha_0)+\ldots=0$$

$$-2\sqrt{3}\sin 3\alpha_0+\varepsilon\sqrt{3}\sin 3\alpha_0+\beta_1(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin 3\alpha_0)+$$

$$+\beta_2(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin 3\alpha_0)+\beta_3(-6\sqrt{3}\cos 3\alpha_0-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 3\alpha_0)+\ldots=0$$

Далее заметим, что свободный член должен быть равен 0, поэтому $\alpha_0=0$ или $\alpha_0=\frac{\pi}{3}$. Ясно, что в этом случае $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$ дает периодическую биллиардную траекторию при любом ε, поэтому коэффициенты при ε^k также равны нулю. Таким образом, члены высшего порядка в этой системе – β_1, β_2 и β_3 с коэффициентами. Линейная система на них имеет только нулевое решение, поэтому всего мы имеем две траектории: $(\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3})$ – максимум и $(0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$ – критическая точка индекса 2. $\square$

Следствие *Эйлерова характеристика пространства $T^p/D_p-\Delta$ равна 0. Кроме того, можно оценить размерности гомологий:*

$$\dim H_p(T^p/D_p,\Delta;\mathbb{Z}_2)=\dim H_{p-1}(T^p/D_p,\Delta;\mathbb{Z}_2)\leqslant\frac{p-1}{2}$$

$$\dim H_q(T^p/D_p,\Delta;\mathbb{Z}_2)=0,\ q\leqslant p-2$$

Лемма 3.2

$$\dim H_p(T^p/D_p,\Delta;\mathbb{Z}_2)\geqslant\frac{p-1}{2}$$

Доказательство. Построим клеточное разбиение тора T^p, инвариантное относительно действия группы подстановок S_p. Тор T^p есть прямое произведение p окружностей. Пусть на i-й окружности введена циклическая координата x_i от 0 до 1. Каждой подстановке $\sigma\in S_p$ сопоставим p-мерную клетку

$$e^p_\sigma=\{x_{\sigma(1)}<\ldots<x_{\sigma(p)}\}$$

Тогда суммы клеток, лежащих в одной компоненте связности $T^p/D_p - \Delta$, образуют базис в группе $H_p(T^p/D_p, \Delta; \mathbb{Z}_2)$. Построим функцию на клетках T^p, постоянную на компонентах связности $T^p/D_p - \Delta$.

Пусть дана клетка $e^p_\sigma \subset T^p$. Для каждой пары индексов $(i, i+1)$, где $i \in \mathbb{Z}_p$, можно определить знак $x_i < x_{i+1}$ или $x_i > x_{i+1}$. Положим

$$I(e^p_\sigma) = |\#(>) - \#(<)|$$

Клетки той же компоненты связности получаются из e^p_σ применением последовательности следующих преобразований:

$$(1)\ e^p_\sigma \mapsto e^p_{t\sigma}, t \in D_p$$

$$(2)\ e^p_\sigma \mapsto \{x_{\sigma(2)} < \ldots < x_{\sigma(p)} < x_{\sigma(1)}\}$$

$$(3)\ e^p_\sigma \mapsto e^p_{\tau_i\sigma}, \tau_i = \begin{pmatrix} 1, \ldots, & i, & i+1, \ldots, p \\ 1, \ldots, i+1, & i, & \ldots, p \end{pmatrix},\ p-2 \geqslant |\sigma(i+1) - \sigma(i)| \geqslant 2,\ i = 1, \ldots, p-1$$

Преобразования (1) и (3), очевидно, не меняют $I(e^p_\sigma)$. Преобразование (2) тоже его не меняет:

$$\begin{matrix} x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(1)+1} \\ x_{\sigma(1)-1} > x_{\sigma(1)} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_{\sigma(1)} > x_{\sigma(1)+1} \\ x_{\sigma(1)-1} < x_{\sigma(1)} \end{matrix}$$

Теперь мы укажем $\frac{p-1}{2}$ p-мерных клеток с разными значениями $I(e^p_\sigma)$. Это клетки:

$$\begin{gathered} \{x_1 < \ldots < x_p\} \\ \{x_1 < x_3 < x_2 < x_4 < \ldots < x_p\} \\ \{x_1 < x_4 < x_3 < x_2 < x_5 < \ldots < x_p\} \\ \vdots \\ \{x_1 < x_{\frac{p+1}{2}} < \ldots < x_2 < x_{\frac{p+1}{2}+1}\ \ldots\ < x_p\} \end{gathered}$$

Значения $I(e^p_\sigma)$ на них равны соответственно $p-2$, $p-4$, $p-6$,…,1. Таким образом $T^p/D_p - \Delta$ имеет не менее $\frac{p-1}{2}$ компонент связности, что и доказывает лемму. □

Из Теоремы 1, этих двух лемм и замечания получается следующий результат:

Теорема 2

$$BT_p(S^1) = p - 1$$

Замечание *Дж. Биркгоф нашел эту оценку, но он не занимался исследованием вопроса о ее точности.*

4 Периодические биллиардные траектории в почти круглых сферах

Рассмотрим стандартную n-мерную сферу, вложенную в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S^n = \{(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum y_i^2 = 1\}$$

На такой круглой сфере у нашей функции $f(x_1, \ldots, x_p)$ имеются $\frac{p-1}{2}$ диффеоморфных невырожденных критических многообразий, каждое из которых представляет собой множество правильных p-угольников (или "звездочек" — это все равно), вписанных в единичные окружности в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в 0. Будем такую компоненту обозначать $V_{n,p}$.

Лемма 4.1

$$\sum_{q=0}^{\infty} \dim H_q(V_{n,p}; \mathbb{Z}_2) = 2n$$

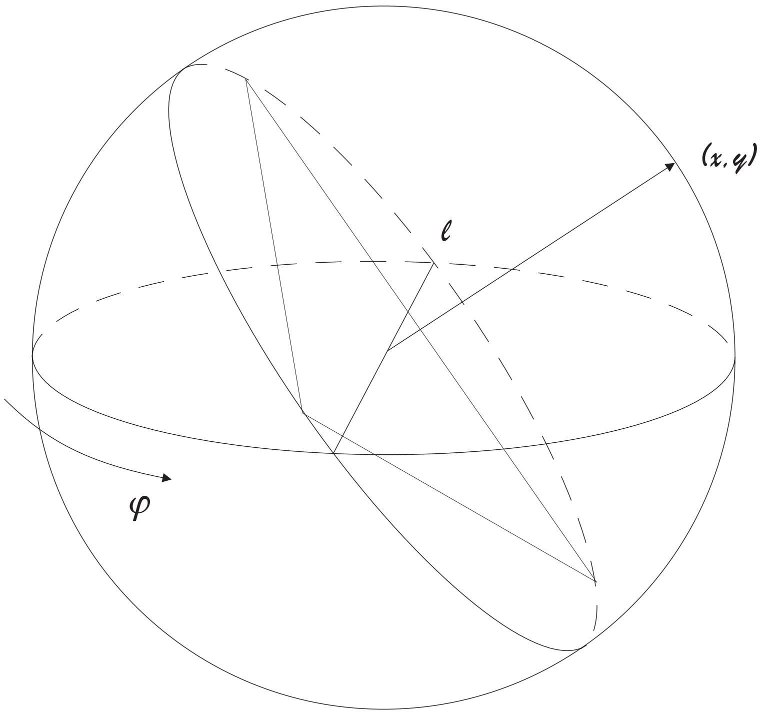
Доказательство. Ясно, что $V_{n,p}$ расслаивается над грассманианом $G_{2,n+1}$ со слоем S^1. Гомологии слоя одномерны, поэтому это расслоение $\mathbb{Z}_2$-гомологически просто. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-когомологическую спектральную последовательность этого расслоения. В члене E_2 дифференциалы - это умножения на характеристический класс $\alpha \in H^2(G_{2,n+1}; \mathbb{Z}_2)$. Грассманиан $G_{2,n+1}$ разбивается на клетки Шуберта $\sigma_{2,\ldots,2,1,\ldots,1}$ - см. [4]. Все граничные операторы в этом клеточном комплексе нулевые, поэтому каждой клетке соответствует гомологический класс. Двойственный ему по Пуанкаре класс когомологий будем обозначать тем же символом $\sigma_{2,\ldots,2,1,\ldots,1}$. Заметим, что

$$\dim H^q(G_{2,n+1}; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} [\frac{q}{2}] + 1, \text{ если } q \leqslant n-1 \\ [\frac{2(n-1)-q}{2}] + 1, \text{ если } q > n-1 \end{cases}$$

Действительно, число q разбить в сумму двоек и единиц можно ровно $[\frac{q}{2}]+1$ способом — задается количество двоек в разбиении. Если $q \leqslant n-1$, то каждому такому разбиению соответствует клетка Шуберта грассманиана $G_{2,n+1}$, а при $q > n-1$ пользуемся тем, что для многообразий $\dim H^q(M^n; \mathbb{Z}_2) = \dim H^{n-q}(M^n; \mathbb{Z}_2)$. Кроме того, имеет место формула Пьери:

$$\sigma_a \smile \sigma_{b_1, b_2, \ldots} = \sum_{\substack{b_i \leqslant c_i \leqslant b_{i-1} \\ \sum c_i = a + \sum b_i}} \sigma_{c_1, c_2, \ldots}$$

Покажем, что характеристический класс нашего расслоения равен σ_2. Пусть сначала $n = 2$, $p = 3$. Тогда $G_{2,n+1}$ — это проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$. $V_{2,3}$ — многообразие больших правильных треугольников, вписанных в двумерную сферу в трехмерном пространстве. Точки $\mathbb{RP}^2$ — базы пресловутого расслоения — это прямые, ортогональные плоскостям этих треугольников. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ разбивается на клетки e^2, e^1 и e^0 размерностей 2, 1 и 0 соответственно. Клетка e^1 состоит из всех прямых, лежащих в координатной плоскости Oxy (кроме оси Ox). Все остальные прямые входят в клетку e_2. Каждая из них определяется точкой на верхней полусфере. Для вычисления характеристического класса нужно построить сечение расслоения $s : e^1 \to V_{2,3}$. Пусть оно состоит из всех вертикальных треугольников, у которых вершина находится в северном полюсе сферы. Пусть $h : \overline{D^2} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — характеристическое отображение, отвечающее клетке e^2. Будем считать, что открытый диск D^2 — это верхняя полусфера. На диске у нас координаты (x, y). Над диском расслоение тривиальное. Введем в нем координаты прямого произведения. Пусть дан треугольник из $V_{2,3}$, не лежащий ни в какой вертикальной плоскости, l — прямая пересечения плоскости этого треугольника с плоскостью Oxy. Повернем его вокруг прямой l до горизонтального положения (см. рисунок).



Теперь пусть $\varphi \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ — наименьший из полярных углов его вершин. Тогда координаты (x, y, φ) задают структуру прямого произведения в расслоении над диском D^2. Теперь рассмотрим расслоение над замкнутым диском $\overline{D^2}$, индуцированное характеристическим отображением h. Можно считать, что его элементами являются те же самые треугольники, но оснащенные нормалью, которая торчит в верхнюю полусферу или лежит в плоскости Oxy. В нем имеются те же самые координаты (x, y, φ). Над границей диска имеем сечение $s' : S^1_{\varphi'} \to \overline{D^2} \times S^1_{\varphi}$, где $\varphi = \varphi' \bmod \frac{2\pi}{3}$ — при одном обходе окружности–границы диска окружность–слой обходится три раза. Таким образом, $\mathbb{Z}_2$-характеристический класс этого расслоения двумерной клетке e^2 ставит в соответствие число 1. Аналогично, если рассматривать $V_{2,p}$ при больших простых p, то этот класс также равен σ_2. При больших n мы имеем вложение $G_{2,3} \to G_{2,n+1}$, сохраняющее клеточное разбиение. Легко видеть, что аналогичное сечение над одномерной клеткой $\sigma_{2,\ldots,2,1}$ не затрагивает клетку $\sigma_{2,\ldots,2,1,1}$, то есть и в этом случае характеристический класс нашего расслоения равен σ_2.

Теперь из формулы Пьери имеем (в $H^*(G_{2,n+1}; \mathbb{Z}_2)$):

$$\sigma_2 \smile \sigma_{b_1,\ldots,b_k} = \sigma_{2,b_1,\ldots,b_k}, \text{ если } k < n-1$$

$$\sigma_2 \smile \sigma_{b_1,\ldots,b_{n-1}} = 0$$

Отсюда видно, что все дифференциалы $d_2^{j,1} : E_2^{j,1} \to E_2^{j+2,0}$ когомологической спектральной последовательности расслоения являются либо мономорфизмами, либо эпиморфизмами, а $d_2^{n-2,1}$ — изоморфизм, то есть член $E_3 = E_\infty$ выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \ldots & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \ldots & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}$$

Таким образом, все $H^q(V_{n,p}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ для $q = 0, \ldots, 2n-1$, откуда и следует утверждение леммы. □

Замечание *Если у нас есть функция f с невырожденным критическим многообразием $V \subset \{f = a\}$, то у ее малого морсовского возмущения $\tilde{f}$ будет не менее $\sum \dim H_q(V; \mathbb{Z}_2)$ критических точек.*

Доказательство. Если мы ограничим морсовскую функцию $\tilde{f}$ на многообразие V, то в общем случае опять получится морсовская функция $\tilde{f}\,|_V$. Критические точки у нее будут там, где $\operatorname{grad} \tilde{f} \perp V$. В окрестности такой точки имеем:

$$f = x_1^2 + \ldots + x_\alpha^2 - x_{\alpha+1}^2 - x_k^2$$

$$\tilde{f} = x_1^2 + \ldots + x_\alpha^2 - x_{\alpha+1}^2 - x_k^2 + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i + o(\mathbf{x})$$

$$V = \{x_{k+1} = \ldots = x_m = 0\}$$

Из того, что $\operatorname{grad} \tilde{f} \perp V$, следует, что $\varepsilon_{k+1} = \ldots = \varepsilon_m = 0$, то есть у функции $\tilde{f}$ в рассматриваемой окрестности имеется ровно одна критическая точка: $x_i \approx \frac{\varepsilon_i}{2}$. Отсюда следует, что у функции $\tilde{f}$ не меньше критических точек, чем у $\tilde{f}\,|_V$, а у нее их в силу неравенств Морса не меньше суммы размерностей групп гомологий многообразия V. $\square$

Итак, мы доказали такой факт:

Теорема 3 *Для простого нечетного p и любого n у общего малого возмущения стандартной круглой n-мерной сферы не меньше $n(p-1)$ p-периодических биллиардных траекторий.*

5 3-периодические биллиардные траектории в двумерной сфере

Теорема 4

$$BT_3(S^2) \geqslant 4$$

Доказательство. Мы построим клеточное разбиение усеченного симметрического куба двумерной сферы, а затем явно вычислим гомологии полученного клеточного комплекса.

Будем считать, что наша сфера — это квадрат с границей, склеенной в точку:

$$S^2 = [0,1]_\varphi \times [0,1]_\psi / \{\varphi = 0, \varphi = 1, \psi = 0, \psi = 1\}$$

Клетки у нас будут такие:

$$\dim = 6$$

$$\omega_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \ \omega_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 < \psi_3 < \psi_2 \end{Bmatrix} \ \omega_3 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_2 < \psi_1 < \psi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_4 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_2 < \psi_3 < \psi_1 \end{Bmatrix} \ \omega_5 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_3 < \psi_1 < \psi_2 \end{Bmatrix} \ \omega_6 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_3 < \psi_2 < \psi_1 \end{Bmatrix}$$

$$\dim = 5$$

$$\sigma_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 = \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \ \sigma_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_3 < \psi_1 = \psi_2 \end{Bmatrix} \ \sigma_3 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 = \psi_3 < \psi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_2 < \psi_1 = \psi_3 \end{Bmatrix} \ \sigma_5 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_2 = \psi_3 < \psi_1 \end{Bmatrix} \ \sigma_6 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 < \psi_2 = \psi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\delta_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \ \delta_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_3 < \varphi_1 = \varphi_2 \\ \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \ \delta_3 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = \varphi_3 < \varphi_2 \\ \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\delta_4 = \begin{Bmatrix} \varphi_2 < \varphi_1 = \varphi_3 \\ \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \; \delta_5 = \begin{Bmatrix} \varphi_2 = \varphi_3 < \varphi_1 \\ \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \; \delta_6 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 = \varphi_3 \\ \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\dim = 4$$

$$\alpha_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \\ \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \; \alpha_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 \end{Bmatrix} \; \beta_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 < \psi_2 = \psi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\beta_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_3 < \varphi_1 = \varphi_2 \\ \psi_1 < \psi_2 = \psi_3 \end{Bmatrix} \; \beta_3 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_2 = \psi_3 < \psi_1 \end{Bmatrix} \; \beta_4 = \begin{Bmatrix} \varphi_3 < \varphi_1 = \varphi_2 \\ \psi_2 = \psi_3 < \psi_1 \end{Bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = 0, \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 = 0, \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \; \gamma_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = 0, \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 = 0, \psi_3 < \psi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\dim = 3$$

$$\kappa_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \varphi_3 \\ \psi_1 = 0, \psi_2 < \psi_3 \end{Bmatrix} \; \kappa_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = 0, \varphi_2 < \varphi_3 \\ \psi_1 = 0, \psi_2 = \psi_3 \end{Bmatrix}$$

Теперь вычислим граничные операторы.

$$\partial_6 : C_6 \to C_5$$

$$\omega_1 \mapsto \delta_1 + \delta_6 + \sigma_1 + \sigma_6, \quad \omega_2 \mapsto \delta_3 + \delta_6 + \sigma_3 + \sigma_6,$$

$$\omega_3 \mapsto \delta_1 + \delta_4 + \sigma_1 + \sigma_4, \quad \omega_4 \mapsto \delta_2 + \delta_3 + \sigma_4 + \sigma_5,$$

$$\omega_5 \mapsto \delta_4 + \delta_5 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad \omega_6 \mapsto \delta_2 + \delta_5 + \sigma_2 + \sigma_5$$

$$\partial_5 : C_5 \to C_4$$

$$\sigma_1 \mapsto \alpha_2 + \beta_4, \quad \sigma_2 \mapsto \alpha_2 + \beta_2, \quad \sigma_3 \mapsto \alpha_2 + \beta_3 + \beta_4,$$

$$\sigma_4 \mapsto \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2, \quad \sigma_5 \mapsto \alpha_2 + \beta_3, \quad \sigma_6 \mapsto \alpha_2 + \beta_1$$

$$\delta_1 \mapsto \alpha_1 + \beta_1, \quad \delta_2 \mapsto \alpha_1 + \beta_2, \quad \delta_3 \mapsto \alpha_1 + \beta_1 + \beta_3,$$

$$\delta_4 \mapsto \alpha_1 + \beta_2 + \beta_4, \quad \delta_5 \mapsto \alpha_1 + \beta_3, \quad \delta_6 \mapsto \alpha_1 + \beta_4,$$

$$\partial_4 : C_4 \to C_3$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \mapsto 0, \quad \gamma_1, \gamma_2 \mapsto \kappa_1 + \kappa_2$$

$$\partial_3 = 0$$

Теперь вычислим ядра и образы граничных операторов и группы гомологий.

$$\ker \partial_6 = \langle \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 \rangle, \quad \operatorname{im} \partial_7 = 0, \quad H_6 = \mathbb{Z}_2$$

$$\ker \partial_5 = \langle \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 \rangle \oplus \operatorname{im} \partial_6, \quad H_5 = \mathbb{Z}_2$$

$$\operatorname{im} \partial_5 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rangle, \quad \ker \partial_4 = \langle \gamma_1 + \gamma_2 \rangle \oplus \operatorname{im} \partial_5, \quad H_4 = \mathbb{Z}_2$$

$$\ker \partial_3 = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle, \quad \operatorname{im} \partial_4 = \langle \gamma_1 + \gamma_2 \rangle, \quad H_3 = \mathbb{Z}_2$$

Таким образом получаем, что

$$H_*(S^2 \times S^2 \times S^2/D_3, \Delta; \mathbb{Z}_2) = \{0, 0, 0, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2\},$$

что и требовалось доказать. □

Замечание *Если воспользоваться целочисленными гомологиями вместо гомологий по модулю 2, то результат получится тот же самый, но придется возиться с ориентациями клеток.*

6 Общая оценка количества 3-периодических биллиардных траекторий

Лемма 6.1 *Пусть имеется точная последовательность векторных пространств:*

$$0 \xrightarrow{i_m} B_m \xrightarrow{j_m} C_m \xrightarrow{\partial_m} A_{m-1} \xrightarrow{i_{m-1}} B_{m-1} \xrightarrow{j_{m-1}} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots$$

Обозначим $a_q = dim A_q,\ b_q = \dim B_q,\ c_q = \dim C_q$. *Тогда* $\sum c_q \geqslant \sum b_q - \sum a_q$.

Доказательство.

$$b_m = \dim \operatorname{im} j_m = \dim \ker \partial_m = c_m - \dim \operatorname{im} \partial_m = c_m - \dim \ker i_{m-1} =$$
$$= c_m - (a_{m-1} - \dim \operatorname{im} i_{m-1}) \leqslant c_m + (a_{m-1} - \dim \operatorname{im} i_{m-1}) =$$
$$= c_m + a_{m-1} - \dim \ker j_{m-1} = c_m + a_{m-1} - b_{m-1} + \dim \operatorname{im} j_{m-1} =$$
$$= c_m + a_{m-1} - b_{m-1} + \dim \ker \partial_{m-1} =$$
$$= c_m + a_{m-1} - b_{m-1} + c_{m-1} - \dim \operatorname{im} \partial_{m-1} \leqslant$$
$$\leqslant c_m + a_{m-1} - b_{m-1} + c_{m-1} + a_{m-2} - \dim \operatorname{im} i_{m-2} \leqslant \dots \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{q=0}^{m} c_q + \sum_{q=0}^{m-1} a_q - \sum_{q=0}^{m-1} b_q$$

□

Теорема 5 *Пусть M — многообразие, вложенное в евклидово пространство,* $B = \sum \dim H_q(M; \mathbb{Z}_3)$. *Тогда имеет место следующая оценка на количество 3-периодических биллиардных траекторий:*

$$BT_3(M) \geqslant \frac{B^3 - 3B^2 + 2B}{6}$$

Доказательство. Группа $\mathbb{Z}_3$ естественным образом действует на декартовом кубе многообразия M:

$$t : M \times M \times M \to M \times M \times M, \quad t(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1), \quad t^3 = id$$

Тогда $\Delta^{(0)} = \{(x, x, x)\} \subset M \times M \times M$ — множество неподвижных точек этого действия. Пусть $X = M \times M \times M/\mathbb{Z}_3$. Тогда теория Смита дает нам следующую оценку на относительные гомологии (см. [5]):

$$\dim H_q(X, \Delta^{(0)}; \mathbb{Z}_3) \geqslant \frac{\dim H_q(M \times M \times M; \mathbb{Z}_3) - \dim H_q(\Delta^{(0)}; \mathbb{Z}_3)}{3}$$

По прежнему $\Delta = \{(x, x, y)\} \subset X$ — диагональ циклического куба многообразия M. Теперь нам нужно оценить размерности других относительных групп гомологий — $H_q(X, \Delta)$. Во первых, мы имеем точную гомологическую последовательность пары $(\Delta, \Delta^{(0)})$, которая есть не что иное, как пара $(M \times M, M = \{(x, x)\} \subset M \times M)$:

$$\ldots \longrightarrow H_q(M) \xrightarrow{i_*} H_q(M \times M) \xrightarrow{j_*} H_q(M \times M, M) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(M) \longrightarrow \ldots$$

Теперь заметим, что $\ker i_* = \{0\}$. Действительно, пусть $p : M \times M \to M$ — проекция на любой из сомножителей. Тогда $p \circ i = id$, следовательно $p_* \circ i_* = id_*$, то есть $\ker i_* = \{0\}$. Далее,

$$H_q(\Delta) \cong H_q(\Delta, \Delta^{(0)}) \oplus H_q(\Delta^{(0)}),$$

откуда ясно, что

$$\sum_q \dim H_q(\Delta, \Delta^{(0)}) = B^2 - B$$

Теперь рассмотрим точную последовательность тройки $(X, \Delta, \Delta^{(0)})$:

$$\ldots \longrightarrow H_q(\Delta, \Delta^{(0)}) \longrightarrow H_q(X, \Delta^{(0)}) \longrightarrow H_q(X, \Delta) \longrightarrow H_{q-1}(\Delta, \Delta^{(0)}) \longrightarrow \ldots$$

Из нее вытекает такая оценка:

$$\sum_q \dim H_q(X, \Delta) \geqslant \sum_q \dim H_q(X, \Delta^{(0)}) - \sum_q \dim H_q(\Delta, \Delta^{(0)})$$

Остается применить Теорему 1 в измененной форме:

$$BT_p(M) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{mp} \dim H_q(M \times \ldots \times M/\mathbb{Z}_p, \Delta; \mathbb{Z}_p)$$

Соединяя все это вместе, получаем нужное утверждение. $\square$

Список литературы

[1] Дж. Биркгоф. Динамические системы. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1941

[2] И. К. Бабенко. Периодические траектории трехмерных биллиардов Биркгофа. Математический сборник – 1990, т. 181, с. 1165 – 1169

[3] M. Farber, S. Tabachnikov. Topology of cyclic configuration spaces and periodic trajectories of multi-dimensional billiards. xxx.itep.ru, November 25, 1999

[4] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии. Издательский Отдел Новокузнецкого Физико-математического института, 1998

[5] О. Я. Виро, Д. Б. Фукс. Топология-2. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Фундаментальные направления, т. 24.

[6] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. Москва: Наука, 1989

[7] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы теории гомологий. Москва: Наука, 1984