Пространства эрмитовых операторов с простыми спектрами и их когомологии конечного порядка

В. А. Васильев*

В. И. Арнольд [3] изучал топологию пространств эрмитовых операторов в $\mathbf{C}^n$ с непростыми спектрами в связи с теорией адиабатических связностей и квантовым эффектом Холла. Естественная фильтрация этих пространств множествами операторов с фиксированным числом собственных значений определяет спектральную последовательность, доставляющую интересную комбинаторную и гомологическую информацию об этой стратификации.

Мы строим другую спектральную последовательность, также вычисляющую группы гомологий этих пространств и основанную на универсальной технике *топологических порядковых комплексов* и *конических разрешений* алгебраических множеств, обобщающей комбинаторную формулу включений-исключений и аналогичную конструкции инвариантов конечного порядка в теории узлов.

Эта спектральная последовательность вырождается в члене E_1, гипотетически мультипликативна, и при растущем n сходится к стабильной спектральной последовательности, вычисляющей когомологии пространства бесконечных эрмитовых операторов без кратных собственных значений, все члены $E_r^{p,q}$ которой конечно порождены. Это позволяет определить когомологии конечного порядка для этого пространства, и применить известные результаты и методы топологической теории флаговых многообразий к проблемам геометрической комбинаторики, в частности к топологии непрерывных частично упорядоченных множеств подпространств и флагов.

1 Введение

Обозначим через $\mathcal{H}(n)$ пространство эрмитовых операторов в $\mathbf{C}^n$; это — n^2-мерное вещественное векторное пространство. *Дискриминантное множество* $\Sigma \equiv \Sigma(n) \subset \mathcal{H}(n)$ состоит из операторов с хотя бы одним собственным значением кратности ≥ 2; это — подмножество коразмерности 3. Двойственность Александера

$$\bar{H}_i(\Sigma(n)) \simeq \tilde{H}^{n^2-i-1}(\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n)) \tag{1}$$

*при частичной поддержке РФФИ (проект 98-01-00555) и INTAS (проект 96-0713)

связывает его гомологии Бореля–Мура (то есть гомологи комплекса локально конечных цепей) с обычными (приведенными) группами когомологий дополнительного пространства матриц с простыми спектрами.

В. И. Арнольд [3] изучал эти группы гомологий, рассматривая естественную фильтрацию пространства $\Sigma(n)$ в соответствии с количеством разных собственных значений операторов. Хотя ответ известен (имеется изоморфизм колец

$$H^*(\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n)) \cong H^*(\mathbf{CP}^{n-1} \times \mathbf{CP}^{n-2} \times \cdots \times \mathbf{CP}^1)), \tag{2}$$

это изучение дает интересную информацию о топологии дискриминантного множества. В частности спектральная последовательность, определенная этой фильтрацией, вырождается во втором члене E^2 (см. [9]), а все ее группы $E^1_{p,q}$ состоят из групп гомологий некоторых комплексных флаговых многообразий.

Мы рассматриваем другую спектральную последовательность, также сходящуюся к той же группе (1), также строящуюся из групп гомологий флаговых многообразий, и основанную на *коническом разрешении* множества Σ. Эта последовательность (и соответствующая фильтрация в кольце (2)) представляется интересной, поскольку

1. она вырождается в *первом* члене $E^1 \equiv E^\infty$ (по крайней мере в характеристике 0);

2. она хорошо согласована с естественными вложениями $\mathcal{H}(n) \hookrightarrow \mathcal{H}(n+1) \hookrightarrow \cdots$, и стабилизируется к аналогичной спектральной последовательности, сходящейся к когомологиям пространства бесконечных эрмитовых матриц без кратных собственных значений, все члены $E_r^{p,q}$ которой конечно порождены;

3. она (гипотетически) мультипликативна;

4. она тесно связана с оператором сдвига спектра, а соответствующая фильтрация в когомологиях инвариантна относительно этого оператора;

5. она позволяет применить более или менее простые или известные факты о топологии флаговых многообразий к проблемам геометрической комбинаторики, в особенности о топологических частично упорядоченных множествах и порядковых комплексах;

6. ее алгебраические свойства очень близки к теории инвариантов конечного порядка узлов (страт операторов с собственными значениями кратностей $a_1, \ldots, a_l$ соответствует страту гладких отображений $S^1 \to \mathbf{R}^3$ с l точками самопересечения тех же кратностей) и переносят в кольцо (2) важные структуры и понятия из этой теории. Это позволяет нам определить *порядки* классов когомологий, и, для всякого такого класса порядка p, его *символ* (или *обобщенный вычет*) на стратах множества $\Sigma(n)$ сложности p аналогично

тому, как это было сделано в [14], [13] для инвариантов узлов и стратов особых узлов.

2 Эрмитовы матрицы с простыми спектрами

Если все собственные значения λ_i эрмитова оператора $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ различны, то они (и соответствующие одномерные комплексные собственные пространства) упорядочиваются по возрастанию. Эти собственные пространства образуют n линейных расслоений над пространством $\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n)$ всех таких операторов; пусть $c^1, \ldots, c^n$ — первые классы Чженя этих расслоений.

Предложение 1 *(см. [5]). Имеется канонический изоморфизм колец*

$$H^*(\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n)) \simeq \mathbf{Z}[c^1, \ldots, c^n]/\{Sym\}, \tag{3}$$

где $\{Sym\}$ *— идеал, порожденный симметрическими полиномами степени* ≥ 1. □

Удобно рассматривать все такие кольца для всех n одновременно, то есть кольцо

$$\mathbf{Z}[[a^0, a^1, a^{-1}, a^2, a^{-2}, \ldots]]/\{Sym\} \tag{4}$$

формальных степенных рядов от бесконечного (в обоих направлениях) числа двумерных переменных a^j, профакторизованное по идеалу, натянутому на симметрические ряды положительных степеней. Это кольцо называется кольцом когомологий пространства *бесконечных* эрмитовых матриц с простыми спектрами.

Кольцо (3) многими способами отождествляется с факторкольцом кольца (4): мы можем выбрать произвольное число $i = 0, 1, -1, \ldots$ и профакторизовать (4) дополнительно по всем элементам a^j с $j \leq i$ или $j > i + n$. Затем отождествим переменные $c^1, \ldots, c^n$ соответственно с $a^{i+1}, \ldots, a^{i+n}$ и получим изоморфизм между этим факторкольцом и (3).

На алгебре (4) действует очевидный оператор, переводящий любую переменную a^i в a^{i+1}; он называется *оператором сдвига.*

3 Топологические частично упорядоченные множества и конические разрешения

Пусть имеется стратифицированное множество V. Имеется два подхода к задаче вычисления его гомологий. Следуя очевидному методу *открытых стратов*, мы фильтруем наше множество объединениями S_i гладких стратов "сложности $\geq i$", и рассматриваем соответствующую спектральную последовательность (член $E^1_{p,q}$ которой — это группа $H_{p+q}(S_i, S_{i+1})$, двойственная по Пуанкаре к группе когомологий гладкого многообразия $S_i \setminus S_{i+1}$).

Другой подход, моделирующий комбинаторную формулу включений–исключений, таков: сначала мы рассматриваем разрешение особенностей $\pi : \tilde{V} \to V$ всего множества V (изменяя его над особыми точками), и последовательно подправляем его над *замыканиями* стратов все меньших и меньших размерностей таким образом, что в результате получим пространство V' с *собственной* проекцией на V и стягиваемыми прообразами всех точек. Тогда V' гомотопически эквивалентно исходному пространству; во всех важных примерах оно имеет прозрачную топологическую структуру, в частности, естественную фильтрацию, спектральная последовательность которой вырождается очень быстро, см. например [11], [13], [15].

ПРИМЕР. Группа $H^2(\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n))$ $(n-1)$-мерна и состоит из всевозможных последовательностей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ целых чисел (т.е. из соответствующих сумм $\sum \alpha_i c^i$), профакторизованных по постоянным последовательностям.

Спектральная последовательность из [3] имеет на соответствующей линии $\{p + q = n^2 - 3\}$ единственный нетривиальный член E_∞^{n-1, n^2-n-2}, изоморфный $\mathbf{Z}^{n-1}$ и порожденный индексами зацепления со всеми $n-1$ гладкими стратами максимальной размерности в $\Sigma(n)$, то есть "δ'-образными" последовательностями вида $(0, \ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0)$. Наша спектральная последовательность, определяемая ниже, имеет на этой же линии $n-1$ одномерных групп, и p-й член соответствующей фильтрации состоит из всех целозначных полиномиальных последовательностей степени $\leq p$ (по модулю констант). Стабильная фильтрация в 2-мерной компоненте кольца (4) также конечно порождена: она пространствами полиномов, в частности инвариантна относительно оператора сдвига.

Явная реализация нашего метода основана на понятии *топологического порядкового комплекса* и на технике *конических разрешений*. Она обобщает метод *симплициальных разрешений*, см. например [10], [13], применимый в случае, когда все существенные особенности множества V исчерпываются конечными (само)пересечениями.

Вместо формальных определений, приведем иллюстрацию, важную для дальнейшего.

3.1 Детерминантное множество и гомологии группы $U(n)$.

Рассмотрим пространство $Mat(\mathbf{C}^n)$ всех комплексных линейных операторов $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ и его *детерминантное подмножество* Det, состоящее из всех вырожденных операторов. Рассмотрим множество всех возможных ядер этих операторов, т.е. несвязное объединение всех грассмановых многообразий $G_1(\mathbf{C}^n), \ldots, G_{n-1}(\mathbf{C}^n)$,

$G_n(\mathbf{C}^n)$. Инцидентность подпространств, соответствующих его точкам, превращает его в частично упорядоченное множество с единственным максимальным элементом $\{\mathbf{C}^n\} \subset G_n(\mathbf{C}^n)$. Затем возьмем джойн $G_1(\mathbf{C}^n) * \ldots * G_n(\mathbf{C}^n)$, т.е., грубо говоря, объединение всех симплексов (различных размерностей), вершины которых принадлежат разным грассманианам. Такой симплекс назовем *когерентным*, если все подпространства в $\mathbf{C}^n$, соответствующие его вершинам, образуют флаг. Наконец, *топологический порядковый комплекс* $\Theta(n)$ — это подмножество нашего джойна, определенное как объединение всех когерентных симплексов. Он стягиваем, поскольку является конусом с вершиной $\{\mathbf{C}^n\}$. Его база $\partial\Theta(n)$ определяется аналогичным образом как объединение всех когерентных симплексов подджойна $G_1(\mathbf{C}^n) * \ldots * G_{n-1}(\mathbf{C}^n)$.

Предложение 2 *(см. [11], [13]). Пространство $\partial\Theta(n)$ PL-гомеоморфно S^{n^2-2}.* $\square$

Замечание. Вероятно, это утверждение (и его обобщения) подразумевается в замечании 1.4 работы [6]. Я благодарен М. М. Капранову за эту ссылку.

Для любого подпространства $L \subset \mathbf{C}^n$ определим конус $\Theta(L)$ как объединение когерентных симплексов, подчиненных L, т.е. таких что все подпространства, соответствующие их вершинам, принадлежат L. В частности, $\Theta(n) \equiv \Theta(\{\mathbf{C}^n\})$. Подпространство $\chi(L) \subset Mat(\mathbf{C}^n)$ определим как пространство всех операторов, ядра которых содержат L.

Искомое *коническое разрешение* Δ_n множества Det строится как подмножество в $Mat(\mathbf{C}^n) \times \Theta(n)$. Именно, для любого подпространства $L \subset \mathbf{C}^n$ любой положительной размерности мы рассматриваем пространство $\chi(L) \times \Theta(L) \subset Mat(\mathbf{C}^n) \times \Theta(n)$ и определяем Δ_n как объединение таких пространств по всем возможным L. Это пространство естественно фильтровано: член F_i этой фильтрации — это объединение множеств $\chi(L) \times \Theta(L)$ по всем L размерностей $\leq i$.

Предложение 3 *Отображение $\Delta_n \to Det$, заданное проекцией $Mat(\mathbf{C}^n) \times \Theta(n) \to Mat(\mathbf{C}^n)$, индуцирует гомотопическую эквивалентность одноточечных компактификаций этих пространств, в частности изоморфизм их групп гомологий Бореля–Мура.*

Теперь рассмотрим спектральную последовательность, вычисляющую эти группы и порожденную нашей фильтрацией $\{F_i\}$ в Δ_n. По построению,

$$E^1_{p,q} \simeq \bar{H}_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1}). \tag{5}$$

$F_p \setminus F_{p-1}$ есть пространство расслоения над $G_p(\mathbf{C}^n)$, слой которого над точкой $\{L\}$ диффеоморфен прямому произведению $\mathbf{C}^{n(n-p)} \times (\Theta(L) \setminus \partial\Theta(L))$. По предложению

2 последний сомножитель в этом произведении гомеоморфен открытому шару размерности p^2-1, поэтому группа (5) изоморфна $H_t(G_p(\mathbf{C}^n))$, $t=p+q-(2n^2-2np+p^2-1)$.

Эта спектральная последовательность вырождается в первом члене: $E^1 \equiv E^\infty$.

Двойственная по Александеру когомологическая спектральная последовательность, определенная тождеством $E_r^{p,q} \equiv E^r_{-p,2n^2-q-1}$, сходится к группе когомологий дополнительного пространства $GL(n,\mathbf{C}) \sim U(n)$. Ее вырождение немедленно дает *расщепление Миллера*

$$H^m(U(n)) \cong \bigoplus_{p=0}^{n} H^{m-p^2}(G_p(\mathbf{C}^n)). \tag{6}$$

Аналогично строятся расщепления и для групп Ли $O(n)$ и $Sp(n)$, ср. [11], [13].

Эта спектральная последовательность мультипликативна. Кольцо $H^*(U(n))$ является внешней алгеброй с n образующими $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-1}$ соответствующих размерностей. Наша спектральная последовательность индуцирует в нем фильтрацию, i-й член которой совпадает с подалгеброй, порожденной произведениями $\le i$ элементов α_j.

4 Коническое разрешение пространства эрмитовых операторов с кратными спектрами

Вновь рассмотрим дискриминантное множество $\Sigma(n) \subset \mathcal{H}(n)$. Соответствующее коническое разрешение, порядковые комплексы и т.д. строятся следующим образом.

Пусть $A = (a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_l)$ — последовательность натуральных чисел с $a_l \ge 2$ и $\sum a_i \le n$. *Сложностью* индекса A называется число $\sum_{i=1}^{l}(a_i-1)$; его *длина* $\#A$ — это число его элементов a_i (обозначенная выше через l), а *раскованность* $\delta(A)$ — число $n - \sum a_i$. Также положим $|A| = \sum a_i$, так что сложность равна $|A| - \#A$.

Обозначим через $\Gamma_A(n)$ пространство *неупорядоченных* наборов из $\#A$ попарно эрмитово–ортогональных подпространств в $\mathbf{C}^n$ размерностей $a_1, \ldots, a_{\#A}$. Если все числа a_i различны, то оно отождествляется с многообразием флагов $\mathcal{F}_{a_1, a_1+a_2, \ldots, |A|}$, а если некоторые из a_i совпадают, то с факторпространством этого флагового многообразия по (свободному) действию соответствующей группы перестановок $S(A)$. В любом случае, это — комплексное компактное многообразие.

Несвязное объединение всех пространств $\Gamma_A(n)$ является частично упорядоченным множеством: точка $\gamma \in \Gamma_A(n)$ подчинена точке $\gamma' \in \Gamma_{A'}(n)$ если любое из $\#A$ подпространств, образующих точку γ, лежит в каком-то из $\#A'$ подпространств, образующих γ'. В этом случае мы говорим также, что точки γ и γ' *инцидентны* друг другу. Это частично упорядоченное множество имеет единственный максимальный элемент: точку $\{\mathbf{C}^n\} \subset \Gamma_{(n)}(n)$.

Соответствующий топологический порядковый комплекс $\Xi(n)$ определяется как в предыдущем параграфе: мы рассматриваем джойн всех пространств $\Gamma_A(n)$ по всем возможным мультииндексам A с $|A| \leq n$ и берем объединение всех его когерентных симплексов, т.е. симплексов, все вершины которых инцидентны друг другу. Оно является конусом с вершиной в точке $\{\mathbf{C}^n\} \subset \Gamma_{(n)}(n)$.

Любой точке $\gamma \in \Gamma_A(n)$ соответствует подкомплекс $\Xi(\gamma) \subset \Xi(n)$: объединение всех когерентных симплексов, все вершины которых подчинены γ. В частности $\Xi(n) \equiv \Xi(\{\mathbf{C}^n\})$.

Также определим *линк* $\partial\Xi(\gamma)$ как объединение всех когерентных симплексов, образующих $\Xi(\gamma)$, но *не* содержащих максимальную вершину $\{\gamma\}$. *Открытый конус* $\breve{\Xi}(\gamma)$ — это разность $\Xi(\gamma) \setminus \partial\Xi(\gamma)$. Их группы гомологий связаны граничным изоморфизмом $\partial : \bar{H}_*(\breve{\Xi}(\gamma)) \tilde{\to} \tilde{H}_{*-1}(\partial\Xi(\gamma))$.

Теорема 1 *Для любого n, приведенная группа гомологий $\tilde{H}_i(\partial\Xi(n), \mathbf{C})$ тривиальна во всех четных размерностях если n четно и во всех нечетных размерностях если n нечетно.*

Примеры. При $n = 3, 4$ и 5, полиномы Пуанкаре групп $\tilde{H}_*(\partial\Xi(n), \mathbf{C})$ равны соответственно $t^2(1+t^2)$, $t^3(1+t^4)(1+t^2+t^4)$ и $t^4(1+t^2+t^4+t^6)(1+t^2+t^4+t^6+t^8+t^{10})$. Эти группы закодированы также в самых правых нетривиальных столбцах в трех таблицах Рис. 1.

Рекуррентный метод вычисления этих групп гомологий будет описан в конце § 5.4, однако я не знаю никакой общей компактной формулы для их размерностей.

Для любого индекса A и точки $\gamma \in \Gamma_A(n)$ обозначим через $\chi(\gamma)$ подпространство в $\mathcal{H}(n)$, состоящее из всех эрмитовых операторов, таких что любое из пространств размерности a_i, определяющих точку γ, лежит в некотором собственном пространстве этого оператора. Это — вещественное векторное пространство размерности $\#A + (\delta(A))^2$.

Коническое разрешение $\sigma(n)$ дискриминантного множества $\Sigma(n) \subset \mathcal{H}(n)$ лежит в прямом произведении $\mathcal{H}(n) \times \Xi(n)$, а именно, это объединение произведений $\chi(\gamma) \times \Xi(\gamma)$ по всем возможным индексам A и всем точкам $\gamma \in \Gamma_A(n)$.

Предложение 4 *Пространство $\sigma(n)$ полуалгебраично. Очевидное отображение $\sigma(n) \to \Sigma(n)$ (заданное проекцией $\mathcal{H}(n) \times \Xi(n) \to \mathcal{H}(n)$) собственно и индуцирует гомотопическую эквивалентность одноточечных компактификаций этих пространств, в частности изоморфизм их групп гомологий Бореля–Мура.* □

В пространстве $\sigma(n)$ имеется *стандартная фильтрация* $\sigma_1(n) \subset \cdots \subset \sigma_{n-1}(n) \equiv \sigma(n)$: ее член $\sigma_i(n)$ — это объединение произведений $\chi(\gamma) \times \Xi(\gamma)$ по всем $\gamma \in \Gamma_A(n)$, где A — некоторый мультииндекс сложности $\leq i$.

Основная спектральная последовательность, вычисляющая группы гомологий Бореля–Мура пространства $\sigma(n)$, порождена этой фильтрацией; по определению ее член $E^1_{p,q}$ изоморфен $\bar{H}_{p+q}(\sigma_p(n) \setminus \sigma_{p-1}(n))$.

Теорема 2 *Основная спектральная последовательность, вычисляющая группу (1) с комплексными коэффициентами, вырождается в первом члене: $E^1 \equiv E^\infty$.*

Эти спектральные последовательности для $n = 3, 4$ и 5 приведены на Рис. 1.

Над целыми числами аналогичное утверждение неверно: см. конец § 5.3.

Теперь опишем члены $E^1_{p,q}$ этой спектральной последовательности. Для любой точки $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{\#A}) \in \Gamma_A(n)$ обозначим через $\gamma^\perp$ эрмитово-ортогональное дополнение в $\mathbf{C}^n$ к линейной оболочке всех подпространств γ_i.

Предложение 5 *Любой пространство $\sigma_p(n) \setminus \sigma_{p-1}(n)$ является несвязным объединением (по всевозможным индексам A сложности p) пространств $\beta_A(n)$ локально тривиальных расслоений $\beta_A(n) \to \Gamma_A(n)$, причем а слой такого расслоения над точкой $\gamma \in \Gamma_A(n)$ канонически расщепляется в прямую сумму трех пространств*

$$\mathbf{R}^{\#A} \times \mathcal{H}(\delta(A)) \times \breve{\Xi}(\gamma). \tag{7}$$

Именно, сомножитель $\mathbf{R}^{\#A}$ задается собственными значениями операторов $\Lambda \subset \chi(\gamma)$ на всех подпространствах γ_i определяющих точку γ; сомножитель $\mathcal{H}(\delta(A))$ задается ограничениями таких операторов на ортогональные подпространства $\gamma^\perp$, а знак $\breve{}$ над $\Xi(\gamma)$ стоит оттого, что подпространство $\chi(\gamma) \times \partial\Xi(\gamma)$ лежит в младшем члене $\sigma_{p-1}(n)$ фильтрации.

Итак, $\beta_A(n) \to \Gamma_A(n)$ есть расслоенное произведение трех расслоений, слои которых — это три сомножителя в (7).

Предложение 6 *Второе расслоение над $\Gamma_A(n)$, образованное пространствами, изоморфными $\mathcal{H}(\delta(A))$, ориентируемо.*

Действительно, оно индуцировано из аналогичного расслоения над односвязным грассмановым многообразием $G_{|A|}(\mathbf{C}^n)$ при очевидном отображении (переводящем любой набор подпространств γ в их линейную оболочку).

С другой стороны, расслоение первых сомножителей в (7) неориентируемо если некоторые из чисел a_i совпадают. Любой такой сомножитель распадается в сумму одномерных подпространств, ассоциированных со всеми $\#A$ подпространствами, определяющими точку основания γ; путь в $\Gamma_A(n)$, задающий нечетную перестановку этих подпространств, нарушает ориентацию этого сомножителя.

Следующее предложение сводит гомологии пространства $\breve{\Xi}(A)$ к гомологиям аналогичных пространств с индексами A' длины 1.

q		
5	$\mathbf{Z}$	
4	0	$\mathbf{Z}$
3	$\mathbf{Z}$	0
2	0	$\mathbf{Z}$
1	$\mathbf{Z}$	0
0	0	
	1	2 p

q			
12	$\mathbf{C}$		
11		$\mathbf{C}$	
10	$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}$
9		$\mathbf{C}^2+\mathbf{C}$	
8	$\mathbf{C}^2$		$\mathbf{C}$
7		$\mathbf{C}^2$	
6	$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}^2$
5		$\mathbf{C}^2+\mathbf{C}$	
4	$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}$
3		$\mathbf{C}$	
2			$\mathbf{C}$
1		$\mathbf{C}$	
	1	2	3 p

q				
21	$\mathbf{C}$			
20		$\mathbf{C}$		
19	$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}$	
18		$\mathbf{C}^2+\mathbf{C}$		$\mathbf{C}$
17	$\mathbf{C}^2$		$\mathbf{C}^2+\mathbf{C}$	
16		$\mathbf{C}^3+\mathbf{C}$		$\mathbf{C}^2$
15	$\mathbf{C}^2$		$\mathbf{C}^4+\mathbf{C}^2$	
14		$\mathbf{C}^4+\mathbf{C}^2$		$\mathbf{C}^3$
13	$\mathbf{C}^2$		$\mathbf{C}^5+\mathbf{C}^3$	
12		$\mathbf{C}^4+\mathbf{C}^2$		$\mathbf{C}^4$
11	$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}^6+\mathbf{C}^4$	
10		$\mathbf{C}^3+\mathbf{C}^3$		$\mathbf{C}^4$
9	$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}^5+\mathbf{C}^4$	
8		$\mathbf{C}^2+\mathbf{C}^2$		$\mathbf{C}^4$
7			$\mathbf{C}^4+\mathbf{C}^3$	
6		$\mathbf{C}+\mathbf{C}^2$		$\mathbf{C}^3$
5			$\mathbf{C}^2+\mathbf{C}^2$	
4		$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}^2$
3			$\mathbf{C}+\mathbf{C}$	
2		$\mathbf{C}$		$\mathbf{C}$
	1	2	3	4 p

Рис. 1: Основные спектральные последовательности для $n = 3$ (слева вверху), $n = 4$ (слева внизу) и $n = 5$ (справа)

Напомним строгое определение джойна $X*Y$ топологических пространств X,Y как факторпространства произведения $X\times[-1,1]\times Y$ по отношениям эквивалентности $(x,-1,y)\sim(x,-1,y')$ и $(x,1,y)\sim(x',1,y)$ для любых $x,x'\in X$ и любых $y,y'\in Y$.

Предложение 7 *Допустим что $A=A'\cup A''$, $\gamma\in\Gamma_A(n)$, и набор подпространств в $\mathbf{C}^n$, определяющий точку γ, распадается в объединение аналогичных наборов, определяющих некоторые точки $\gamma'\in\Gamma_{A'}(n)$ и $\gamma''\in\Gamma_{A''}(n)$. Тогда имеется стандартный гомеоморфизм комплекса $\Xi(A)$ на джойн $\Xi(\gamma')*\Xi(\gamma')$, переводящий вершину $\{\chi(\gamma)\}$ в точку $\{\chi(\gamma')\}\times 0\times\{\chi(\gamma'')\}$ и линк $\partial\Xi(\gamma)$ в образ (при описанном выше отображении факторизации) границы $(\Xi(\gamma')\times[-1,1]\times\partial\Xi(\gamma''))\cup(\partial\Xi(\gamma')\times[-1,1]\times\Xi(\gamma''))$ призмы $\Xi(\gamma')\times[-1,1]\times\Xi(\gamma'')$.*

Доказательство непосредственно. □

Следствие. *Определим градуированную группу $h_*(\gamma)$ уравнением $h_i(\gamma)\equiv\bar{H}_{i-1}(\breve{\Xi}(\gamma),\mathbf{C})$. Тогда для любых $A=(a_1,\ldots,a_{\#A})$ и $\gamma\in\Gamma_A(n)$ имеется* почти *канонический изоморфизм*

$$h_*(\gamma)\simeq\bigotimes_{i=1}^{\#A}h_*(\gamma_i), \tag{8}$$

где все γ_i являются подпространствами размерностей a_i, определяющими точку γ и рассматриваемыми как точки соответствующих грассмановых многообразий $\Gamma_{(a_i)}(n)$.

"Почти" здесь означает следующее. Изоморфизм (8) зависит от порядка подпространств γ_i, образующих набор γ. Перенумерация таких подпространств (одинаковых размерностей a_i) переводит этот изоморфизм в себя с точностью до умножения на $(-1)^s$, где s — четность этой перестановки. В частности, мы не можем реализовать изоморфизм (8) естественной конструкцией, непрерывно зависящей от точки $\gamma\in\Gamma_A(n)$: путь в $\Gamma_A(n)$, задающий такую нечетную перестановку, будет разрушать эту конструкцию.

Кроме расслоения $\beta_A(n)\to\Gamma_A(n)$, удобно рассматривать его "универсальное накрытие"

$$\beta!_A(n)\to\Gamma!_A(n). \tag{9}$$

Здесь $\Gamma!_A(n)$ — универсальное накрывающее пространство над $\Gamma_A(n)$. Это — главное накрытие, группа $S(A)$ которого является прямым произведением групп перестановок S_μ, где μ — кратности, с которыми равные числа a_i участвуют в последовательности A. Пространство $\Gamma!_A(n)$ диффеоморфно многообразию флагов $\mathcal{F}_{a_1,a_1+a_2,\ldots,|A|}$. Расслоение (9) вновь является расслоенным произведением трех расслоений со слоями, указанными в (7); в этом случае первое расслоение со слоями $\mathbf{R}^{\#A}$ тривиально, а расщепление (8) гомологий третьего расслоения можно реализовать так, чтобы оно непрерывно зависело от точки основания $\gamma! \in \Gamma!_A(n)$. Группа накрытия $\Gamma!_A(n) \to \Gamma_A(n)$ естественно действует на пространстве $\beta!_A(n)$, переставляя соответствующие слои, а $\beta_A(n)$ можно рассматривать как факторпространство по этому действию.

5 Примеры

В этом параграфе мы вычисляем наши спектральные последовательности для $n \leq 5$ и определяем нашу фильтрацию в группах $H^2(\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n))$.

5.1 Крайние столбцы спектральной последовательности.

Для любого n, первый член $\sigma_1(n) \subset \sigma(n)$ нашей фильтрации — это *каноническое разрешение* множества $\Sigma(n)$, т.е. множество пар вида {2-мерная плоскость в $\mathbf{C}^n$; оператор, ограничение которого на эту плоскость скалярно}. Его группы гомологий Бореля–Мура совпадают с обычными гомологиями грассманиана $G_2(\mathbf{C}^n)$ с градуировкой, сдвинутой на $(n-2)^2+1$, см. столбцы $\{p=1\}$ всех трех таблиц на Рис. 1.

Теперь рассмотрим самые правые столбцы $\{p = n-1\}$. Единственный индекс A сложности $n-1$ — это (n). Пространство $\Gamma_A(n)$ в этом случае состоит из единственной точки $\{\mathbf{C}^n\}$, поэтому в силу предложения 5 мы имеем изоморфизм групп гомологий

$$\bar{H}_i(\sigma_{n-1}(n) \setminus \sigma_{n-2}(n)) \equiv \bar{H}_i(\breve{\Xi}(n) \times \mathbf{R}^1) \simeq \tilde{H}_{i-2}(\partial \Xi(n)). \tag{10}$$

5.2 Случаи $n = 2$ и 3.

Если $n = 2$, то $\Sigma(n)$ состоит из скалярных матриц $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, поэтому $\mathcal{H}(2) \setminus \Sigma(2) \sim S^2$, см. [3]. Составные части конструкции из § 4 в этом случае таковы. Единственный допустимый индекс A равен (2), соответствующее пространство $\Gamma_A(2)$ — одна точка O, пространство $\Xi(O) \equiv \breve{\Xi}(O)$ — тоже точка, а $\chi(O)$ — вещественная прямая. Поэтому (гомологическая) спектральная последовательность состоит из единственного ненулевого элемента $E_{1,0} \simeq \mathbf{Z}$.

Пусть теперь $n = 3$. В этом случае оба столбца описаны в § 5.1. Именно, столбец $\{p = 1\}$ вновь состоит из групп гомологий канонического разрешения $\sigma_1(3) \to \Sigma(3)$. Это разрешение является локальным диффеоморфизмом над всеми точками множества $\Sigma(3)$ кроме скалярных операторов, а скалярные операторы "раздуваются" до пространств $G_2(\mathbf{C}^3) \equiv \partial\Xi(3)$. Член $\sigma_2(3) \setminus \sigma_1(3)$ состоит из открытых конусов $\breve{C}(G_2(\mathbf{C}^3)) \sim \breve{\Xi}(3)$, затягивающих эти слои $\partial\Xi(3)$. Поэтому мы получаем таблицу в левой верхней части Рис. 1.

5.3 Вычисления для $n = 4$.

При $n = 4$ имеется ровно два индекса A сложности $2 : (3)$ и $(2, 2)$. Соответствующие блоки $\beta_A(4)$ устроены следующим образом.

Для $A = (3)$, пространство $\Gamma_3(n)$ — это грассманово многообразие $G_3(\mathbf{C}^4) \cong \mathbf{CP}^3$, и для любой точки γ этого пространства, пространство $\partial\Xi(\gamma)$ равно $\mathbf{CP}^2$. Поэтому спектральная последовательность расслоения $\beta_{(3)}(4) \to \Gamma_{(3)}(4)$ такова: ее член $\mathcal{E}^2_{a,b}$ изоморфен $H_a(\mathbf{CP}^3, \tilde{H}_{b-3}(\mathbf{CP}^2))$, где число 3 в нижнем индексе $b-3$ равно $\#A + (\delta(A))^2+$ (падение размерности при граничном гомоморфизме). Эта спектральная последовательность очевидно вырождается в этом члене $\mathcal{E}^2$ и дает нам прямое слагаемое столбца $\{p = 2\}$, записанное в его левой части.

Для $A = (2, 2)$, пространство $\Gamma_A(4)$ — это факторпространство грассманова многообразия $G_2(\mathbf{C}^4)$ по инволюции, переводящей любую 2-плоскость в ее эрмитово–ортогональную. Легко вычисляется, что комплексные группы гомологий этого многообразия изоморфны $\mathbf{C}$ в размерностях $0, 4$ и 8 и тривиальны во всех остальных размерностях. Три сомножителя слоя (7) расслоения $\beta_A(4) \to \Gamma_A(4)$ в этом случае равны соответственно $\mathbf{R}^2$, одной точке, и открытому интервалу. (Для любого $\gamma \in \Gamma_{(2,2)}(4)$ этот интервал состоит из двух отрезков, соединяющих точку γ с двумя подчиненными точками в $G_2(\mathbf{C}^4)$. Их концы, лежащие в $G_2(\mathbf{C}^4)$, имеют меньшую фильтрацию и поэтому выбрасываются.) Образующая группы $\pi_1(\Gamma_A(4)) \sim \mathbf{Z}_2$ нарушает ориентацию как расслоения пространств $\mathbf{R}^2$ так и расслоения интервалов, поэтому $\bar{H}_i(\beta_A(4)) \simeq H_{i-3}(\Gamma_A(4))$, что дает нам правую часть столбца $\{p = 2\}$.

Наконец, вычислим столбец $\{p = 3\}$, т.е. группу гомологий линка $\partial\Xi(4)$.

Рассмотрим подмножество Ω этого линка, заметенное всеми когерентными отрезками, соединяющими точки многообразий $G_2(\mathbf{C}^4)$ и $G_3(\mathbf{C}^4)$.

Лемма 1 *Группа $\tilde{H}_a(\Omega)$ изоморфна $\mathbf{Z}$ в размерностях 7, 9, 11, и и тривиальна во всех остальных размерностях.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $\Theta(4)$, изученное в предложении 2 (и, в соответствии с этим предложением, гомеоморфное S^{14}). Пространство Ω канонически вложено в эту сферу, и по построению *двойственно по Спеньеру–Уайтхеду* (см. [11]) пространству $\mathbf{CP}^3$ (также вложенному в нее). Поэтому их приведенные группы гомологий связаны двойственностью Александера в S^{14}, и лемма доказана. □

Далее, пространство $\partial\Xi(4) \setminus \Omega$ является пространством неориентируемого расслоения над $\Gamma_{(2,2)}(4)$, слои которого — открытые интервалы.

Группа комплексных гомологий Бореля–Мура этого пространства M участвует в (расщепляющейся) точной последовательности Смита двулистного накрытия $G_2(\mathbf{C}^4) \to \Gamma_{(2,2)}(4)$,

$$\cdots \xrightarrow{0} \bar{H}_{i+1}(M, \mathbf{C}) \to H_i(G_2(\mathbf{C}^4), \mathbf{C}) \to H_i(\Gamma_{(2,2)}(4), \mathbf{C}) \xrightarrow{0} \bar{H}_i(M, \mathbf{C}) \to \cdots$$

и поэтому легко вычисляется: она равна $\mathbf{C}$ в размерностях 3, 5 и 7, и тривиальна во всех остальных размерностях.

Поскольку $\bar{H}_*(M) \equiv \tilde{H}_*(\partial\Xi(4), \Omega)$, группа гомологий пространства $\partial\Xi(4)$ немедленно находится из точной последовательности этой пары. Результат закодирован в правом столбце нижней левой таблицы на Рис. 1.

Замечание. Аналогичная целозначная спектральная последовательность не вырождается в члене E^1 : правая часть ее столбца $\{p = 2\}$ содержит 2-кручение, исчезающее в предельной группе гомологий.

5.4 Случай $n = 5$.

Здесь мы докажем, что член E^1 основной спектральной последовательности, вычисляющей $\bar{H}_*(\Sigma(5), \mathbf{C})$, устроен как показано в правой таблице на Рис. 1. Столбец $\{p = 1\}$ уже известен: он совпадает с группой гомологий $G_2(\mathbf{C}^5)$ с точностью до сдвига размерностей.

Левая часть столбца $\{p = 2\}$ соответствует блоку $\beta_{(3)}(5)$: ее член на уровне q совпадает с $(q-4)$-мерной компонентой градуированной группы $H_*(G_3(\mathbf{C}^5)) \otimes \tilde{H}_*(G_2(\mathbf{C}^3))$. (Здесь $4 = \#A + (\delta(A))^2 + 1 - p$.)

Правая часть этого же столбца содержит гомологии пространства $\beta_{(2,2)}(5)$. Его база $\Gamma_{(2,2)}(5)$ расслоена над $\mathbf{CP}^4$ со слоем $\Gamma_{(2,2)}(4)$. Спектральная последовательность этого расслоения очевидно вырождается во втором члене, поэтому $H_*(\Gamma_{(2,2)}(5)) \simeq H_*(\mathbf{CP}^4) \otimes H_*(\Gamma_{(2,2)}(4))$. Слой (7) расслоения $\beta_{(2,2)}(5) \to \Gamma_{2,2}(5)$ есть прямое произведение пространства $\mathbf{R}^3$ и открытого интервала, и это расслоение ориентируемо. Поэтому из изоморфизма Тома мы получаем правую часть столбца $\{p = 2\}$.

Левая часть столбца $\{p = 3\}$ содержит группы гомологий пространства $\beta_{(4)}(5)$, расслоенного над $\Gamma_{(4)}(5) \equiv \mathbf{CP}^4$ со слоем $\mathbf{R}^2 \times \breve{\Xi}(4)$. Гомологии последнего пространства $\breve{\Xi}(4)$ вычислены в предыдущем разделе (см. столбец $\{p = 3\}$ спектральной последовательности для $n = 4$). Из этого вычисления следует, что члены $\mathcal{E}^2_{a,b}$ спектральной последовательности расслоения $\beta_{(4)}(5) \to \mathbf{CP}^4$ могут быть нетривиальны только если a четно а b нечетно. Поэтому эта последовательность вырождается и дает нам левую часть столбца $\{p = 3\}$.

Правая часть этого столбца состоит из групп гомологий пространства $\beta_{(3,2)}(5)$. Его базовое пространство $\Gamma_{(3,2)}(5)$ совпадает с $G_3(\mathbf{C}^5)$, а три сомножителя слоя (7) над некоторой его точкой суть соответственно $\mathbf{R}^2$, одна точка и открытый конус над надстройкой $\Sigma(\mathbf{CP}^2)$, см. предложение 7. Поэтому столбец $\{p = 3\}$ также вычислен.

Наконец, вид последнего столбца $\{p = 4\}$ вытекает из формулы (2) (доставляющей все группы $\bar{H}_i(\Sigma(n), \mathbf{C})$), теоремы 2 (утверждающей, что любая такая группа есть прямая сумма групп $E^1_{p,i-p}$), и вычисленных ранее столбцов (дающих все остальные элементы этих сумм).

Это же рассуждение позволяет нам вычислять все группы $\partial\Xi(n)$ если мы знаем аналогичные группы с меньшими значениями n, а также группы гомологий всех пространств $\beta_A(n)$ с A сложности $\leq n-2$. О вычислении этих групп см. § 6 ниже.

5.5 Двумерные когомологии пространства $\mathcal{H}(n)\setminus\Sigma(n)$.

Удобно заменить нашу спектральную последовательность $E^r_{p,q} \to \bar{H}_{p+q}(\Sigma(n))$, определенную в § 4, на "двойственную по Александеру" когомологическую последовательность, получающуюся из нее формальной заменой индексов

$$E_r^{p,q} \equiv E^r_{-p,n^2-q-1}. \tag{11}$$

Эта спектральная последовательность лежит во втором квадранте в угле $\{p \leq 0, p+q \geq 0\}$ и сходится в точности к группе $H^*(\mathcal{H}(n)\setminus\Sigma(n))$.

Предложение 8 *Для любого n целозначная когомологическая спектральная последовательность имеет ровно $n-1$ ненулевой член $E_1^{p,q}$ с $p+q=2$, а именно $E^{-1,3} \simeq E^{-2,4} \simeq \ldots \simeq E^{-n+1,n+1} \simeq \mathbf{Z}$. Соответствующая фильтрация в группе $H^2(\mathcal{H}(n)\setminus\Sigma(n))$ такова: ее член F_p состоит из всех сумм $\sum_{i=1}^n \alpha_i c^i$, где последовательность $\{\alpha_i\}$ совпадает с каким-нибудь полиномом степени $\leq p$, принимающим целые значения в целых точках.*

В частности, факторгруппа $E^{-p,p+2}$ порождена базисным полиномом степени p, $\alpha_i = i(i-1)\cdots(i-p+1)/p!$, или, если мы интересуемся лишь комплексными когомологиями, то просто мономом i^p.

Предложение 9 *Подгруппа $E^{-1,5}$ элементов первого порядка группы $H^4(\mathcal{H}(n)\setminus\Sigma(n),\mathbf{Z})$ при любом n одномерна и порождена последовательностью $\sum_{i=1}^n i(c^i)^2$.*

Доказательства — прямые вычисления. □

6 Доказательство теорем 1, 2

Мы будем доказывать эти теоремы с помощью индукции по n.

Лемма 2 *Допустим, что теорема 1 верна для всех $n \leq n_0$, и все элементы a_i мультииндекса $A=(a_1,\cdots,a_{\#A})$ не превосходят n_0; пусть $\beta_A(N)$ — соответствующий блок разрешения дискриминанта $\Sigma(N)\subset\mathcal{H}(N)$, и $\beta!_A(N)$ — его универсальное накрывающее пространство, см. конец § 4. Тогда*

а) спектральная последовательность расслоения $\beta!_A(N)\to\Gamma!_A(N)$, сходящаяся к группе $\bar{H}_*(\beta!_A(N))$, вырождается во втором члене;

б) группы $\bar{H}_*(\beta!_A(N),\mathbf{C})$ и $\bar{H}_*(\beta_A(N),\mathbf{C})$ тривиальны во всех четных (соответственно, нечетных) размерностях если N четно (соответственно, нечетно).

Доказательство. $\beta!_A(N)$ — пространство расслоения над односвязным многообразием $\Gamma!_A(N)$ (все нечетномерные группы гомологий которого тривиальны), со слоем (7), у которого все ($N-$ *четно*)-мерные группы гомологий Бореля–Мура также тривиальны в силу нашего предположения. Из этого следует утверждение а) леммы, а утверждение б) следует из него, поскольку комплексные группы гомологий базы конечного накрытия всегда "не больше" гомологий пространства накрытия. $\square$

Предложение 10 *Если теорема 1 верна для всех $n < N$, то теорема 2 верна для $n = N$, т.е. спектральная последовательность, вычисляющая $\bar{H}_*(\Sigma(N), \mathbf{C})$, вырождается в первом члене.*

Из этого предложения следует утверждение теоремы 1 для $n = N$, что завершает шаг индукции. Действительно, в силу этого предложения группа $\bar{H}_i(\Sigma(N), \mathbf{C})$ расщепляется в прямую сумму групп $E^1_{p,i-p}$. В силу формул (1), (2) эта группа тривиальна во всех размерностях, сравнимых с N по модулю двух. Следовательно и группа $E^1_{N-1,i-(N-1)} \equiv \bar{H}_i(\beta_{(N)}(N), \mathbf{C}) \equiv \bar{H}_i(\mathbf{R}^1 \times \check{\Xi}(N), \mathbf{C}) \cong \tilde{H}_{i-2}(\partial\Xi(N), \mathbf{C})$ тривиальна при таких i.

При доказательстве предложения 10 мы будем использовать следующий вариант двойственности Пуанкаре в особых полуалгебраических множествах наподобие $\overline{\beta_A(N)}$, $\overline{\beta!_A(N)}$, и $\overline{\sigma(N)}$, ср. [7].

Пусть дано компактное стратифицированное по Уитни множество V. Вложим его в некоторую сферу S^M как абсолютный ретракт некоторой его окрестности $U \subset S^M$, такой что ее граница ∂U — гладкое многообразие. Тогда *квазициклом* в V называется любой относительный цикл пары $(U, \partial U)$, находящийся в общем положении со стратификацией V. Любой комплекснозначный класс когомологий пространства V можно реализовать как индекс пересечения с некоторым таким квазициклом. *Носитель* квазицикла — это множество его пересечения с V.

Доказательство предложения 10. Мы будем доказывать двойственное (и следовательно эквивалентное) утверждение о когомологической спектральной последовательности, вычисляющей *когомологии* Бореля–Мура пространства $\Sigma(N)$ (т.е. приведенные когомологии его одноточечной компактификации $\overline{\Sigma(N)}$). Ее член $e_1^{p,q}$ равен $\tilde{H}^{p+q}\left(\overline{(\sigma_p(N) \setminus \sigma_{p-1}(N))}, \mathbf{C}\right) \equiv \oplus_{|A|-\#A=p}\tilde{H}^{p+q}\left(\overline{\beta_A(N)}, \mathbf{C}\right)$, суммирование по всем индексам A сложности p. Нам нужно доказать, что для любого элемента ω такой группы $\tilde{H}^{p+q}\left(\overline{\beta_A(N)}, \mathbf{C}\right)$, все его дифференциалы $d^i(\omega) \in e^{p+i,q-i+1}$ тривиальны.

Пусть $\omega!$ — поднятие ω в когомологии пространства $\beta!_A(N)$, и $[\omega!]$ — компактный квазицикл в $\beta!_A(N)$, двойственный по Пуанкаре к этому классу. Его проекция $[\omega] \subset \beta_A(N)$ двойственна по Пуанкаре к некоторому ненулевому целому кратному класса ω.

Рассмотрим открытое подмножество $reg\beta!_A(N) \subset \beta!_A(N)$, состоящее из всех пар вида {эрмитов оператор Λ; точка $\xi \in \breve{\Xi}(\gamma!)$} (где $\gamma! \in \Gamma!_A(N)$) таких, что ограничение Λ на ортогональную плоскость $(\gamma!)^\perp \subset \mathbf{C}^N$ — оператор с простым (т.е. $\delta(A)$-элементным) спектром.

Лемма 3 *Для любого класса $\omega! \in \bar{H}^*(\beta!_A(N), \mathbf{C})$, можно выбрать двойственный к нему по Пуанкаре квазицикл $[\omega!]$, носитель которого лежит в множестве $reg\beta!_A(N)$.*

Доказательство. Это утверждение эквивалентно следующему: гомоморфизм

$$\bar{H}^*(\beta!_A(N), \mathbf{C}) \to \bar{H}^*(reg\beta!_A(N), \mathbf{C}), \tag{12}$$

индуцированный тождественным вложением, мономорфен. Чтобы доказать его, обозначим через $\Upsilon_A(N)$ пространство подрасслоения расслоения $\beta!_A(N) \to \Gamma!_A(N)$, слои которого суть произведения только первых и третьих сомножителей в (7). Мы получаем коммутативную диаграмму расслоений

$$\begin{array}{ccc} \beta!_A(N) & \leftarrow & reg\,\beta!_A(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Upsilon_A(N) & \stackrel{Id}{\leftarrow} & \Upsilon_A(N) \end{array} \tag{13}$$

со слоями $\mathcal{H}((\gamma!)^\perp)$ и $\mathcal{H}((\gamma!)^\perp) \setminus \Sigma((\gamma!)^\perp)$ соответственно.

Левое расслоение есть ориентируемое $(\delta(A))^2$-мерное векторное расслоение, поэтому член E^2 соответствующей спектральной последовательности, вычисляющей когомологии Бореля–Мура пространства $\beta!_A(N)$, имеет единственную нетривиальную строку $q = (\delta(A))^2$, совпадающую с градуированной группой $\bar{H}^*(\Upsilon_A(N), \mathbf{C})$; в частности эта последовательность вырождается в этом члене. В силу Следствия из предложения 7 и теоремы 1 (которую мы считаем справедливой для всех значений n, равных элементам a_i мультииндекса A) эта градуированная группа тривиальна в размерностях, сравнимых с $|A|$ по модулю двух.

Аналогичная спектральная последовательность для правого расслоения в (13) также вырождается во втором члене: это вновь следует из размерностных соображений, поскольку группа $\bar{H}^*(\mathcal{H}(\gamma!^\perp) \setminus \Sigma(\gamma!^\perp), \mathbf{C})$ тривиальна в размерностях, не сравнимых с $\delta(A)$ по модулю двух.

Гомоморфизм этих вторых членов спектральных последовательностей задает изоморфизм строк $\{q = (\delta(A))^2\}$, и тривиален при остальных q. Это доказывает нашу лемму.

Далее, рассмотрим подмножество $perf\beta!_A(N) \subset reg\beta!_A(N)$, состоящее из пар вида {оператор Λ; точка $\xi \in \breve{\Xi}(\gamma!)$}, где $\gamma! = (\gamma_1, \dots, \gamma_{\#A})$, таких что дополнительно собственные значения ограничения Λ на пространство γ_1 (соответственно, $\gamma_2, \dots, \gamma_{\#A}, \gamma!^\perp$) лежат в интервале $(0,1)$ (соответственно, $(2,3), \dots, (2\#A-2, 2\#A-1), (2\#A, +\infty)$).

Лемма 4 *Для любого класса* $\omega! \in \bar{H}^*(\beta!_A(N), \mathbf{C})$, *имеется двойственный к нему по Пуанкаре квазицикл* $[\omega!]$, *носитель которого лежит в множестве* $perf\,\beta!_A(N)$.

Доказательство. На пространстве $\beta!_A(N)$ действует группа $\mathbf{R}^{\#A} \oplus \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}^{\#A}$ состоит из сдвигов вдоль первого (тривиального) сомножителя в (7), а $\mathbf{R}$ из прибавлений операторов, скалярных на пространствах $\gamma!^\perp$ и тривиальных на всех γ_i. (Если $\delta(A) = 0$, то последнее действие группы $\mathbf{R}$ тривиально.) Это действие сохраняет все слои расслоения $\beta!_A(N) \to \Gamma!_A(N)$ и подпространство $reg\beta!_A(N)$, и переводит квазициклы в квазициклы.

Любое компактное подмножество в $\beta!_A(N)$ очевидно можно сдвинуть в область $perf\beta!_A(N)$ действием этой группы и дополнительным действием группы $\mathbf{R}_+$ растяжений в $\mathbf{C}^n$. $\Box$.

Итак, наш класс $\omega \in H^*(\beta_A(N), \mathbf{C})$ реализуется проекцией $[\omega]$ некоторого компактного квазицикла $[\omega!] \subset perf\beta!_A(N)$. Но проекция множества $perf\beta!_A(N)$ в $\beta_A(N)$ не пересекается с замыканиями никаких других блоков $\beta_{A'}(N)$ бо́льшей фильтрации (т.е. с $|A'| - \#A' > |A| - \#A$). Поэтому наш квазицикл $[\omega]$ является квазициклом во всем пространстве $\overline{\sigma(n)}$, корректно определен двойственный к нему класс когомологий Бореля–Мура в $\sigma(n)$, и предложение 10 доказано. $\Box$

7 Стабилизация

Определение. *Порядок* элемента группы когомологий (1) — это фильтрация двойственного по Александеру класса гомологий в $\Sigma(n)$, т.е. наименьшее число i такое, что он реализуется локально конечной цепью в σ_i.

Рассмотрим когомологические последовательности $E_r^{p,q}(n) \to H^{p+q}(\mathcal{H}(n)\backslash\Sigma(n))$, см. (11).

Пусть $n < N$ — два натуральных числа, s — одно из чисел $0, \ldots, N-n$, и $i_s : \mathcal{H}(n) \to \mathcal{H}(N)$ — вложение, переводящее любой оператор $\Lambda : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ в оператор $\Lambda + \Lambda'$, где Λ' действует на ортогональном дополнении к $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^N$, гладко зависит от Λ и имеет простой спектр, ровно s (соответственно, $N-n-s$) элементов которого лежат ниже (соответственно, выше) спектра Λ. В частности $\Sigma(n) = i_s^{-1}(\Sigma(N))$.

Предложение 11 *Любое такое вложение индуцирует гомоморфизм когомологических спектральных последовательностей,*

$$E_r^{p,q}(N) \to E_r^{p,q}(n), \tag{14}$$

$r \geq 1$, *который* не зависит *от s и от вложения i_s, эпиморфен при всех p и q, и задает изоморфизм членов $E_r^{p,q}$ если n достаточно велико по сравнению с $|p|+|q|$.*

Поэтому мы можем определить *стабильную когомологическую спектральную последовательность*, член $E_r^{p,q}$ которой есть индуктивный предел групп $E_r^{p,q}(n)$ по всем таким гомоморфизмам. В силу последнего утверждения предложения любой такой стабильный член конечно порожден. Эта последовательность сходится ко всему кольцу (4), тем самым определяя понятие порядка и для элементов этого кольца. Именно, элемент кольца (4) — *порядка* i если для любого достаточно большого n и любой проекции кольца (4) на $H^*(\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n), \mathbf{C})$, описанной в § 2, он переходит в элемент порядка i. Конечно, не все элементы кольца (4) имеют конечный порядок, однако пространства элементов конечного порядка *слабо сходятся* к этому кольцу в следующем точном смысле: для любого n любой класс когомологий пространства $\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n)$ совпадает с ограничением некоторого стабильного класса конечного порядка. Для сходной теории инвариантов узлов аналогичное утверждение (полнота системы инвариантов конечного порядка) пока не доказана.

Вот оценка скорости сходимости групп $E_r^{p,q}$. Для любого мультииндекса A, очевидные вложения флаговых многообразий $\Gamma!_A(n) \hookrightarrow \Gamma!_A(n+1) \hookrightarrow \cdots$ индуцируют отображения их групп когомологий. Для любого i обозначим через $stab(A,i)$ наименьшее число n, при котором стабилизируются все эти группы когомологий размерности $\leq i$, т.е. все последующие вложения индуцируют изоморфизмы в этих размерностях.

Предложение 12 *Для любого бииндекса* (p,q) *с* $p \leq 0, p+q \geq 0$*, группы* $E_1^{p,q}(n)$ *стабилизируются не позднее чем в момент* $n = \max_{|A|-\#A=-p} stab(A, p+q-2\#A)$.

Точная конструкция гомоморфизма, упоминаемого в предложении 11, такова (ср. [12], [13]). Вложение $i_s : (\mathcal{H}(n), \Sigma(n)) \to (\mathcal{H}(N), \Sigma(N))$ тавтологически поднимается до сохраняющего фильтрации отображения разрешений $i_s : \sigma(n) \to \sigma(N)$. Его образ обладает в $\sigma(N)$ открытой окрестностью U, гомеоморфной $\sigma(n)\times\mathbf{R}^{N^2-n^2}$, причем образ любого пространства $* \times \mathbf{R}^{N^2-n^2}$ полностью лежит в одном и том же блоке $\beta_A(N)$. Мы получаем отображение $\bar{H}_*(\sigma(N)) \to \bar{H}_{*-(N^2-n^2)}(\sigma(n))$ как композицию гомоморфизма ограничения $\bar{H}_*(\sigma(N)) \to \bar{H}_*(U)$ и изоморфизма Кюннета $\bar{H}_*(\sigma(n) \times \mathbf{R}^{N^2-n^2}) \to \bar{H}_{*-(N^2-n^2)}(\sigma(n))$. По построению, он согласован с отображением двойственных по Александеру групп $i_s^* : H^*(\mathcal{H}(N) \setminus \Sigma(N)) \to H^*(\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n))$, индуцированным вложением i_s. Гомоморфизм членов E_1 наших спектральных последовательностей определяется ограничениями этой конструкции на каждый блок $\beta_A(N)$.

Для любого A положим $U_A \equiv U \cap \beta_A(N)$. Гомеоморфизм $\beta_A(n) \times \mathbf{R}^{N^2-n^2} \to U_A$ согласован со структурой расслоения в пространствах $\beta_A(\cdot)$, рассматриваемой в предложении 5. А именно, вложение $\mathbf{C}^n \hookrightarrow \mathbf{C}^N$ задает вложения $\Gamma_A(n) \hookrightarrow \Gamma_A(N)$ и $\Gamma!_A(n) \hookrightarrow \Gamma!_A(N)$; имеется трубчатая окрестность W многообразия $\Gamma_A(n)$ в $\Gamma_A(N)$, расслоение которой ориентируемо, а слои гомеоморфны $\mathbf{R}^{2|A|(N-n)}$. Мы получаем диаграммы расслоений

$$
\begin{array}{ccccc}
\beta!_A(n) & \hookrightarrow & U! & \subset & \beta!_A(N) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma!_A(n) & \hookrightarrow & W! & \subset & \Gamma!_A(N),
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\beta_A(n) & \hookrightarrow & U & \subset & \beta_A(N) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_A(n) & \hookrightarrow & W & \subset & \Gamma_A(N).
\end{array}
\tag{15}
$$

Для любой точки $\gamma \in \Gamma_A(n)$ или $\gamma! \in \Gamma!_A(n)$, слои $\mathbf{R}^{\#A}$ и $\breve{\Xi}(\gamma)$ первого и третьего сомножителей расслоенных произведений $\beta_A(n) \to \Gamma_A(n)$, $\beta!_A(n) \to \Gamma!_A(n)$ над этой точкой (см. (7)) тождественно переходят в соответствующие слои аналогичных расслоений над $\Gamma_A(N)$ и $\Gamma!_A(N)$, а слои $\mathcal{H}(n-|A|)$ второго (векторного) расслоения вкладываются в аналогичные слои $\mathcal{H}(N-|A|)$ второго расслоения над $\Gamma!_A(N)$ как подпространства, факторпространства по которым образуют ориентируемое $(N^2-n^2-2|A|(N-n))$-мерное векторное расслоение над образом $\Gamma_A(n)$ или $\Gamma!_A(n)$.

Группа перестановок $S(A)$ действует на левой диаграмме (15), а правая диаграмма образована пространствами ее орбит; поэтому все гомоморфизмы комплексных гомологий, изображенные стрелками в правой диаграмме, определяются аналогичными гомоморфизмами в левой диаграмме. Но эти гомоморфизмы комплексных групп гомологий Бореля–Мура очень просты: нижний гомоморфизм

$$\bar{H}_*(\Gamma!_A(n), \mathbf{C}) \leftarrow \bar{H}_{*+2|A|(N-n)}(\Gamma!_A(N), \mathbf{C}) \tag{16}$$

— это обычное отображение когомологий, индуцированное очевидным вложением и переписанное в терминах двойственных по Пуанкаре групп. Группы гомологий Бореля–Мура пространств обоих расслоений в этой диаграмме — это просто тензорные произведения соответствующих групп (16) их баз и групп гомологий слоев, совпадающих с точностью до сдвига размерностей на $N^2-n^2-2|A|(N-n)$. Соответствующее отображение $\bar{H}_*(\beta!_A(n), \mathbf{C}) \leftarrow \bar{H}_{*+(N^2-n^2)}(\beta!_A(N), \mathbf{C})$ этих тензорных произведений определяется этими действиями на их сомножителях.

Отображение (16) всегда эпиморфно, поэтому эпиморфно и отображение (14).

Доказательство предложения 12. Зафиксируем какой-либо мультииндекс A и число i и оценим наибольшую размерность $J = J(A, i)$ такую что группа $\bar{H}_J(\beta!_A(n))$ зависит от группы $H^i(\Gamma!_A(n))$. В силу предложения 5 и формулы (8) эта размерность J не превосходит суммы четырех чисел: $\dim \Gamma!_A(n) - i$, $\#A$, $(n-|A|)^2$ и $\#A - 1 + \sum_{i=1}^{\#A} \dim_h \breve{\Xi}(a_i)$, где $\dim_h(\cdot)$ — максимальная размерность i такая что группа $\bar{H}_i(\cdot)$ нетривиальна.

Определим $s_2(A)$ как второй симметричный полином от чисел $a_1, \dots, a_{\#A}$: $s_2(A) = a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{\#A-1}a_{\#A}$, тогда $\dim \Gamma!_A(n) = 2(s_2(A) + |A|(n-|A|))$. В силу § 5.1 группа $\bar{H}_i(\breve{\Xi}(a), \mathbf{C})$ является прямым слагаемым группы $\bar{H}_{i+1}(\Sigma(a))$. Поскольку $\dim \Sigma(a) = a^2 - 3$, имеем $\dim_h \breve{\Xi}(a) \leq a^2 - 4$. Следовательно, сумма наших четырех чисел не больше числа $2(s_2(A) + |A|(n-|A|)) - i + \#A + (n-|A|)^2 + \#A - 1 + \sum a_i^2 - 4\#A \equiv n^2 - 1 - 2\#A - i$. Поэтому в силу (11) любая клетка $E_1^{p,q}$ зависит только от таких групп $H^i(\Gamma!_A(n), \mathbf{C})$ что $|A| - \#A = -p$ и $p + q \geq i + 2|A|$. $\square$

Вычеты классов когомологий на стратах $\Sigma(n)$.

Определение. Пусть дан класс $\omega \in H^*(\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n))$ порядка p и мультииндекс A сложности p, тогда соответствующий *символ* $s(A, \omega) \in \bar{H}_*(\beta_A(n))$ — это ограничение соответствующего класса гомологий пространства $\bar{H}_*(\Sigma)$ на блок $\beta_A(n)$. (Более подробно, мы реализуем последний класс циклом, лежащим в $F_p(\sigma(n))$, и приводим по модулю объединения σ_{p-1} и всех остальных блоков $\beta_{A'}(n)$ сложности p, $A' \neq A$.) Аналогично, *!-символ* $s!(A, \omega) \in \bar{H}_*(\beta!_A(n))$ — это класс гомологий полного прообраза этого класса в накрытии $\beta!_A(n)$.

По лемме 2, любой такой !-символ есть элемент группы когомологий многообразия флагов $\Gamma!_A(n)$ с коэффициентами в группе гомологий топологического порядкового комплекса $\partial\Xi(A)$. Аналогично, обычный символ $s(A, \omega)$ является элементом группы когомологий многообразия $\Gamma_A(n)$ с коэффициентами в некоторой локальной системе групп с таким же слоем.

8 Задачи

Задача 1. Наша когомологическая спектральная последовательность определяет фильтрации ("порядки") в кольцах (3), (4). Задача: найти явное выражение для членов этой фильтрации. Я надеюсь, что она совпадает или тесно связана с какой-либо классической структурой в этих кольцах.

В некотором смысле, член F_{-p} этой фильтрации должен состоять из степенных рядов, коэффициенты которых суть "конструктивные функции сложности $\leq p$" от соответствующих показателей, ср. § 5.5. Каков точный смысл этой "сложности"?

Существует ли естественное (и физически мотивированное) представление элементов этой фильтрации в терминах дифференциальных форм в $\mathcal{H}(n) \setminus \Sigma(n)$, ср. [3]?

Вот две подзадачи, которые можно исследовать независимо.

Задача 2. Оператор сдвига $\mathbf{S}$ (см. конец § 2) сохраняет нашу фильтрацию: $\mathbf{S}(F_p) = F_p$. Верно ли, что соответствующая производная, переводящая класс когомологий α в $\mathbf{S}(\alpha) - \alpha$, отображает любой член F_p в F_{p-1}?

Задача 3. Верна ли следующая

Гипотеза мультипликативности: *Наша когомологическая спектральная последовательность мультипликативна, т.е.* $F_{p'} \smile F_{p''} \subset F_{p'+p''}$.

Если это верно, то следующая задача — явно описать соответствующие отображения $E_1^{p',q'} \otimes E_1^{p'',q''} \to E_1^{p'+p'',q'+q''}$.

Имеется очевидное умножение этого типа (в некотором смысле моделирующее формулу Концевича для умножения инвариантов узлов в терминах хордовых диаграмм, см. например [13].) Именно, рассмотрим любые мультииндексы

$A' = (a'_1, \ldots, a'_{\#A'})$ и $A'' = (a''_1, \ldots, a''_{\#A''})$ и положим $A = A' \cup A''$. Ниже мы определим естественное отображение

$$\bar{H}_{n^2-i-1}(\beta_{A'}(n), \mathbf{C}) \otimes \bar{H}_{n^2-j-1}(\beta_{A''}(n), \mathbf{C}) \to \bar{H}_{n^2-i-j+1}(\beta_A(n), \mathbf{C}); \qquad (17)$$

описываемое умножение получается из этих с помощью двойственности Александера (11) и расщепления $\sigma_p(n) \setminus \sigma_{p-1}(n) = \bigsqcup_{|A|-\#A=p} \beta_A(n)$.

Определим группу $\bar{H}_*(\breve{\Xi}(A))$ как $\bar{H}_*(\breve{\Xi}(\gamma))$ для произвольного $\gamma \in \Gamma_A(n)$. Тогда отображение (17) является композицией следующих отображений комплексных групп гомологий:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bar{H}_*(\beta_{A'}(n)) & \stackrel{\triangle}{\to} & \bar{H}_*(\beta!_{A'}(n)) & \stackrel{\sim}{\to} & H_*(\Gamma_{A'}(n)) & & \bar{H}_*(\mathbf{R}^{2\#A'-1+(n-|A'|)^2}) & & \bar{H}_*(\breve{\Xi}(A')) \\
\otimes & & \otimes & & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\
\bar{H}_*(\beta_{A''}(n)) & \stackrel{\triangle}{\to} & \bar{H}_*(\beta!_{A''}(n)) & \stackrel{\sim}{\to} & H_*(\Gamma_{A''}(n)) & & \bar{H}_*(\mathbf{R}^{2\#A''-1+(n-|A''|)^2}) & & \bar{H}_*(\breve{\Xi}(A'')) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{H}_*(\beta_A(n)) & \stackrel{\nabla}{\leftarrow} & \bar{H}_*(\beta!_A(n)) & \stackrel{\sim}{\leftarrow} & H_*(\Gamma_A(n)) & \otimes & \bar{H}_*(\mathbf{R}^{2\#A-1+(n-|A|)^2}) & \otimes & \bar{H}_*(\breve{\Xi}(A)).
\end{array}$$

Здесь отображения $\stackrel{\triangle}{\to}$ — поднятия, представляющие циклы в $\beta_A(n)$ как проекции циклов из $\beta!_A(n)$; все тождества $\stackrel{\sim}{\to}$, $\stackrel{\sim}{\leftarrow}$ вытекают из предложения 5 и утверждения а) леммы 2. Вертикальное отображение $H_*(\Gamma!_{A'}(n)) \otimes H_*(\Gamma!_{A''}(n)) \to H_*(\Gamma!_A(n))$ (внимание! оно не сохраняет размерностей!) — это композиция а) изоморфизмов Пуанкаре в $\Gamma!_{A'}(n)$, $\Gamma!_{A''}(n)$, б) изоморфизма Кюннета $H^*(\Gamma!_{A'}(n)) \otimes H^*(\Gamma!_{A''}(n)) \to H^*(\Gamma!_{A'}(n) \times \Gamma!_{A''}(n))$, в) отображения в когомологиях, заданного тождественным вложением $\Gamma!_A(n)$ в это произведение, и г) изоморфизма Пуанкаре в $\Gamma_A(n)$. Отображение $\bar{H}_*(\mathbf{R}^{2\#A'-1+(n-|A'|)^2}) \otimes \bar{H}_*(\mathbf{R}^{2\#A''-1+(n-|A''|)^2}) \to \bar{H}_*(\mathbf{R}^{2\#A-1+(n-|A|)^2})$ (также не сохраняющее градуировку) переводит произведение канонических образующих двух первых групп в каноническую образующую последней. Вертикальные отображения $\bar{H}_*(\breve{\Xi}(A')) \otimes \bar{H}_*(\breve{\Xi}(A'')) \to \bar{H}_*(\breve{\Xi}(A))$ описаны в предложении 7 (они увеличивают градуировку на 1), наконец, $\stackrel{\nabla}{\leftarrow}$ — очевидная проекция. Эта композиция отображает (n^2-i+1)-мерный цикл пространства $\beta_{A'}(n)$ и (n^2-j+1)-мерный цикл пространства $\beta_{A''}(n)$ в $(n^2-i-j-1)$-мерный класс гомологий в $\beta_A(n)$ и не зависит от выбора поднятий $\stackrel{\triangle}{\to}$ этих циклов в соответствующие пространства $\beta!_\cdot(n)$.

Задача. Если гипотеза мультипликативности верна, то как настоящее умножение в нашей спектральной последовательности связана с только что описанной? Каковы ее мультипликативные образующие?

Помимо нашей возрастающей фильтрации (по порядкам) в кольце (4) есть убывающая фильтрация: ее элемент имеет *связанность* d если для любого $n < d$ он лежит в ядрах всех описанных в § 2 сюръекций на соответствующие кольца (3).

Нельзя ли охарактеризовать примитивные (т.е. неразложимые) элементы нашей спектральной последовательности в терминах этих двух фильтраций?

Задача 4. Найти общую компактную формулу для гомологий пространства $\partial\Xi(n)$ при любом n.

Это пространство не является топологическим многообразием (заметим что правые столбцы таблиц на Рис. 1 описывают *приведенные* гомологии этих пространств). Поэтому очень интересны и их гомологии Горески–МакФерсона.

Последнее замечание

Все результаты этой работы непосредственно переносятся в теорию *гиперэрмитовых* форм (см. [4]), т.е. квадратичных форм на овеществлении $\mathbf{R}^{4n}$ кватернионного пространства $\mathcal{H}^n$, инвариантных относительно умножений слева на кватернионы единичной длины.

В частности, основная спектральная последовательность, вычисляющая рациональные гомологии Бореля–Мура пространства таких форм с $< n$ собственными значениями, вырождается в члене E^1, а приведенные гомологии кватернионного аналога порядкового комплекса $\partial\Xi(n)$ тривиальны в размерностях, не сравнимых с $2n^2 - n + 1$ по модулю 4.

Я очень благодарен В. И. Арнольду за беседы и замечания.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Арнольд, *О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций.* Труды Моск. Матем. Общества 1970 **21**, 27–46.

[2] В. И. Арнольд, *Пространства функций с умеренными особенностями.* Функц. анализ и его прил. 1989 **23** (3), 1–10.

[3] В. И. Арнольд, *Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect*, Selecta Math., New Series, 1995, 1:1, 1–19. Русский перевод в кн: В. И. Арнольд, Избранное, Фазис, 1997.

[4] В. И. Арнольд, *Родственники фактора комплексной проективной плоскости по комплексному сопряжению* Труды МИАН, 1999, в печати.

[5] A. Borel. *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts.* Ann. of Math. 1953 **57** (2), 115–207. Перевод в кн.: Расслоенные пространства и их приложения: Сб. переводов. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958, 163–246.

[6] A. Borel, J.-P. Serre. *Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmetiques.* Topology, 1976, v. 15, No. 3, p. 211–231.

[7] M. Goresky, R. MacPherson, *Intersection homology theory,* Topology, 19 (1980), 135–162.

[8] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic Classes,* Princeton, NJ – Tokyo: Princeton Univ. Press, Univ. of Tokyo Press, 1974, 331 pp. (Ann. of Math. Studies, 76). Перевод.: Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы,* М.: Мир, 1979, 371 с.

[9] M. Z. Shapiro, A. D. Vainshtein, *Proof of the Arnold conjecture...*

[10] В. А. Васильев, *Стабильные когомологии дополнений к дискриминантам особенностей гладких функций.* Соврем. пробл. мат., Новейшие достижения, т. 33, Итоги науки и техн., ВИНИТИ, М.: 1988, 3–29.

[11] В. А. Васильев, *Геометрическая реализация гомологий классических групп Ли и комплексы, S-двойственные к флаговым многообразиям.* Алгебра и Анализ 3:4 (1991), 113–120.

[12] V. A. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications. Revised ed.*, Providence RI: AMS, 1994. (Transl. of Math. Monographs, 98)

[13] В. А. Васильев, *Топология дополнений к дискриминантам,* М.: Фазис, 1997.

[14] V. A. Vassiliev, *Topology of two-connected graphs and homology of spaces of knots,* To appear in: "Differential and symplectic topology of knots and curves," AMS, Providence RI, Ser. Progress in Math. Sciences, S.L.Tabachnikov, ed., 1998.

[15] В. А. Васильев, *Как вычислять гомологии пространств неособых алгебраических гиперповерхностей в* $\mathbf{CP}^n$, Труды МИАН, 1999, в печати.

[16] R. T. Zhivaljevich, *Combinatorics of topological posets,* MSRI preprint 1998–009, to appear in Advances in Appl. Math., 21 (1998).