Замечание о собственных векторах и собственных значениях гиперэрмитовых матриц

(доклад, прочитанный на семинаре В.И. Арнольда 29 сентября 1998г.)

М.Э. Казарян
kazarian@mccme.ru

Одно из проявлений $\mathbb{R}-\mathbb{C}-\mathbb{H}$ тройственности в математике, активно пропагандируемой Арнольдом, приведено в следующей таблице.

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
Классы Штифеля-Уитни w_i	Классы Чженя c_i	Классы Понтрягина p_i
	Тавтологическое векторное расслоение над P^1	
$L_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}P^1 \cong S^1$	$L_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P^1 \cong S^2$	$L_{\mathbb{H}} \to \mathbb{H}P^1 \cong S^4$
одномерное вещественное (Мебиуса)	одномерное комплексное (Хопфа)	одномерное кватернионное (четырехмерное вещественное)
$w_1(L_{\mathbb{R}}) = 1$	$c_1(L_{\mathbb{C}}) = \pm 1$	$p_1(L_{\mathbb{H}}) = \pm 1$
	Расслоение векторов единичной длины	
$\mathrm{O}(1) \cong \mathrm{S}^0 \hookrightarrow S^1 \to S^1$	$\mathrm{U}(1) \cong \mathrm{S}^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$	$\mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{S}^3 \hookrightarrow S^7 \to S^4$
Симметрические матрицы	Эрмитовы матрицы	Гиперэрмитовы матрицы

Цель доклада — объяснить нижний правый угол таблицы, теорию гиперэрмитовых матриц.

Замечание. Знак характеристического числа расслоения Хопфа является нормировкой, входящей в определение классов Чженя. В алгебраической геометрии он, как правило, выбирается отрицательным; в топологии часто используется противоположное соглашение, в котором $c_1(L_{\mathbb{C}}) = 1$. Аналогичное замечание имеет место для классов Понтрягина.

Эрмитовы и симметричные матрицы

Напомним те результаты В.И. Арнольда из теории симметричных и эрмитовых матриц ([1], [2]), которые мы собираемся обобщать на кватернионный случай.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ со стандартной эрмитовой структурой

$$\langle x, y\rangle = \sum x_i \overline{y}_i, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Определение. Линейный оператор $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ называется *эрмитовым* относительно данной эрмитовой структуры, если при всех $x, y \in \mathbb{C}^n$ выполняется равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Матрица эрмитова оператора в стандартном базисе удовлетворяет равенству $A^* = A$, где $A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}}$. Из курса линейной алгебры хорошо известно, что собственные значения эрмитова оператора вещественны, а собственные пространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Иными словами, всякий эрмитов оператор диагонализируется в (эрмитово) ортогональном базисе.

Обозначим через $M = M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ пространство всех эрмитовых операторов. *Дискриминантом* $\Sigma \subset M$ называется множество операторов, имеющих кратные собственные значения. Над дополнением $M^0 = M \subset \Sigma$ имеется n естественных одномерных расслоений $L_1, \ldots, L_n$, слоями которых над точкой $A \in M^0$ являются одномерные собственные подпространства $L_i(A) \subset \mathbb{C}^n$ (занумерованные в порядке возрастания собственных значений).

Замечание. Пространство M^0 гомотопически эквивалентно многообразию флагов F_n. Точнее, имеется естественное расслоение $M^0 \to F_n$ со стягиваемыми слоями (n-мерными клетками). Оператору A сопоставляется флаг $L_1 \subset L_1 \oplus L_2 \subset \cdots \subset L_1 \oplus \cdots \oplus L_n = \mathbb{C}^n$. Классы $u_i = c_1(L_i) \in H^2(M^0)$ порождают когомологии этого пространства. Из формулы Уитни

$$(1+u_1)\cdots(1+u_n) = c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) = c(\mathbb{C}^n) = 1$$

вытекает, что все симметрические функции от u_i обращаются в ноль. В действительности, других соотношений между u_i нет, то есть $H^*(M^0) \cong \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_n]/\mathrm{Sym}$, где через Sym обозначено пространство симметрических функций от переменных u_i.

Одна из основных теорем статьи [2] описывает закрученность расслоений вблизи дискриминанта.

Теорема. *Дискриминант в пространстве эрмитовых операторов является особым подмногообразием вещественной коразмерности три. Рассмотрим маленькую двумерную сферу S^2, зацепленную с дискриминантом, вблизи его точки A такой, что оператор A имеет пару совпадающих собственных значений*

$$\lambda_1 < \ldots < \lambda_k = \lambda_{k+1} < \ldots < \lambda_n$$

(можно рассмотреть трехмерную трансверсаль к дискриминанту в точке A и на ней сферу маленького радиуса с центром в точке A). Тогда ограничения на S^2 расслоений L_i тривиальны при $i \neq k, k+1$, а характеристические числа $c_1(S^2, L_k)$ и $c_1(S^2, L_{k+1})$ противоположны и равны ± 1.

Знаки чисел ± 1 определяются выбором ориентации сферы S^2.

Пример. Пусть $n = 2$. Пространство эрмитовых (2×2)-матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & w \\ \overline{w} & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad w \in \mathbb{C}$$

четырехмерно. Прибавление скалярной матрицы не меняет собственных направлений, поэтому в направлении скалярных матриц расслоения L_1 и L_2 тривиальны, и для изучения этих расслоений достаточно ограничиться трехмерным подпространством матриц со следом ноль, то есть можно считать, что $b = -a$. Аналогично, умножение матрицы на вещественную константу не меняет собственных направлений, поэтому топология этих расслоений определяется их ограниченями на единичную сферу S^2, заданную уравнением $a^2 + |w|^2 = 1$. Заметим, что $a^2 + |w|^2 = -\det(A)$, поэтому сфера S^2 совпадает с множеством эрмитовых матриц с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Рассмотрим отображение $S^2 \to \mathbb{C}P^1$, сопоставляющее матрице собственное направление с собственным значением -1. Это отображение взаимно однозначно. Действительно, по одному собственному направлению второе восстанавливается однозначно как ортогональное. А поскольку собственные значения заданы, то этим оператор A полностью определяется. По построению, при этом отождествлении $S^2 = \mathbb{C}P^1$ *ограничение расслоения L_1 на сферу S^2 совпадает с тавтологическим расслоением над $\mathbb{C}P^1$, то есть оно изоморфно обычному расслоению Хопфа* с характеристическим числом ± 1 (знак зависит от того, совпадает или нет выбранная ориентация сферы S^2 с комплексной ориентацией на $\mathbb{C}P^1$). Аналогичное рассуждение справедливо и для второго расслоения L_2. Заметим, что равенство $c_1(S^2, L_1) + c_1(S^2, L_2) = 0$ в данном контексте сводится к утверждению, что диффеоморфизм $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, сопоставляющий комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$ ее эрмитово ортогональное дополнение, обращает ориентацию.

Доказательство теоремы. Приведенные выше рассуждения доказывают теорему для случая $n = 2$. Доказательство общего случая легко сводится к рассмотренному. Действительно, пусть матрица $A = A^*$ такая, как в условии теоремы. Из того, что собственные значения λ_i не являются кратными при $i \neq k, k+1$ вытекает, что расслоения L_i корректно определены в некоторой окрестности $U \subset M$ точки A. В частности, их ограничения на $M^0 \cap U$ тривиальны. Отсюда вытекает, что двумерное расслоение $\Lambda^2 = (L_1 \oplus \cdots \oplus L_{k-1} \oplus L_{k+2} \oplus \cdots \oplus L_n)^\perp$ также продолжается на все U и, в частности, тривиально. Кроме того, вне дискриминанта имеется разложение $\Lambda^2 = L_k \oplus L_{k+1}$. Рассмотрим какую-нибудь эрмитову тривиализацию этого двумерного расслоения. Ограничение эрмитова оператора $B \in U$ на двумерное инвариантное подпространство $\Lambda^2(B)$ задает субмерсивное отображение $U \to M(2)$ окрестности U на окрестность начала координат в пространстве эрмитовых (2×2)-матриц. Дискриминант и расслоения L_k, L_{k+1} являются обратными образами при этом отображении дискриминанта и соответствующих расслоений на пространстве двумерных эрмитовых матриц. По теореме о неявной функции подмногообразие $\Sigma \cap U$ гладкое, и его коразмерность равна коразмерности дискриминанта в $M(2)$, то есть трем. Кроме того, всякая трехмерная трансверсаль к дискриминанту в U диффеоморфно отображается на трансверсаль к дискриминанту в пространстве $M(2)$. Это рассуждение сводит случай произвольного n к уже рассмотренному случаю $n = 2$. $\square$

Аналогичная теорема имеет место и в вещественном случае ([1]).

Теорема. *В $n(n+1)/2$-мерном пространстве вещественных симметричных матриц дискриминант, образованный матрицами с кратными собственными значениями, является особым подмногообразием коразмерности два. При обходе вокруг дискриминанта в окрестности матрицы с собственными значениями*

$$\lambda_1 < \ldots < \lambda_k = \lambda_{k+1} < \ldots < \lambda_n$$

вещественные прямые L_i собственных векторов сохраняют направление при $i \neq k, k+1$ и меняют направление при $i = k, k+1$. Иными словами, ограничение расслоений L_i на петлю, обходящую дискриминант, тривиально при $i \neq k, k+1$ и изоморфно нетривиальному расслоению Мебиуса при $i = k, k+1$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей. Здесь случай $n = 2$ даже более нагляден, поскольку вещественное двумерное евклидово пространство можно явно «увидеть».

Гиперэрмитовы матрицы

Бо́льшая часть линейной алгебры переносится на случай произвольного некоммутативного тела.

Напомним, что кватернионы образуют двумерное комплексное (четырехмерное вещественное) пространство $\mathbb{H}$ элементов вида $w = a + jb$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Умножение и операция сопряжения задаются правилами

$$j^2 = -1, \quad bj = j\overline{b}, \quad ,\overline{a + jb} = \overline{a} - jb.$$

При этом $|w|^2 = w\overline{w} = \overline{w}w = |a|^2 + |b^2|$, сумма квадратов всех четырех вещественных координат.

Умножение кватернионов ассоциативно, но не коммутативно. Поэтому говоря о линейных операторах в n-мерном кватернионном пространстве, нужно уточнять, какое действие кватернионов имеется ввиду, левое, или правое. Мы будем всегда использовать *правое* действие. Это соглашение удобно тем, что действие оператора A, $x \mapsto Ax$, записывается тогда обычным умножением матрицы A на вектор-столбец x, а условие $\mathbb{H}$-линейности записывается в виде $A(x\lambda) = (Ax)\lambda$, $x \in \mathbb{H}^n$, $\lambda \in \mathbb{H}$.

Всякое линейное преобразование имеет собственные векторы. Действительно, для всякой комплексной структуры, то есть элемента $i \in \mathbb{H}$, такого что $i^2 = -1$ (такие элементы образуют сферу S^2) оператор A: $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{H}^n = \mathbb{C}^{2n}$ является комплексным, и поэтому найдется вектор $x \in \mathbb{H}^n$ такой, что $Ax = x\lambda$ для некоторого кватерниона λ (комплексного относительно выбранной комплексной структуры). Некоммутативность умножения в $\mathbb{H}$ влечет следующее интересное явление. Поскольку

$$A(x\mu) = x\lambda\mu = (x\mu)\mu^{-1}\lambda\mu,$$

то под действием кватернионов собственные векторы переходят в собственные векторы, однако собственные значения при этом могут измениться!

Следствие. *Если кватернион λ вещественный, то множество собственных векторов с собственным значением λ является кватернионно линейным подпространством.*

В общем случае инвариантами сопряжения $\lambda \mapsto \mu^{-1}\lambda\mu$ являются вещественная часть кватерниона λ и модуль его мнимой части. Если для оператора A существует базис из собственных векторов, то этот базис можно выбрать так, чтобы соответствующие собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ были комплексными относительно выбранной комплексной структуры. Тогда «окомплексифицирование» ${}^{\mathbb{C}}\!A$ оператора A (то есть тот же оператор A, рассматриваемый как комплексный оператор $\mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$) также имеет базис из собственных векторов, и соответствующие собственные значения равны $\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_n, \overline{\lambda}_n$.

Определение. *(Гипер)эрмитовой квадратичной формой* на кватернионном n-мерном пространстве $\mathbb{H}^n$ называется *вещественная* квадратичная форма Q, инвариантная относительно действия группы $\mathrm{Sp}(1)$ кватернионов длины 1. Иными словами, $Q(x\lambda) = |\lambda|^2 Q(x)$ при всех $x \in \mathbb{H}^n$ и $\lambda \in \mathbb{H}$.

Определение. *(Гипер)эрмитовой полуторалинейной формой* называется вещественно билинейное отображение $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$: $(x, y) \mapsto B(x, y)$ такое, что выполняются тождества $B(y, x) = \overline{B(x, y)}$, $B(x\lambda, y\mu) = \overline{\lambda} B(x, y)\mu$ при всех $x, y \in \mathbb{H}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{H}$.

Определение. Линейный оператор A называется *(гипер)эрмитовым* относительно стандартной формы $\langle x, y\rangle = \sum x_i \overline{y}_i$, если при всех $x, y \in \mathbb{H}^n$ выполняется равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Матрица гиперэрмитова оператора в стандартном базисе (гипер)эрмитова, $A^* = A$, где $A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}}$.

Все три определения задают изоморфные объекты: ограничение полуторалинейной эрмитовой формы на диагональ является квадратичной эрмитовой формой; у всякой эрмитовой квадратичной формы имеется поляризация, то есть соответствующая ей полуторалинейная форма; кроме того, всякая полуторалинейная эрмитова форма имеет вид $B(x, y) = \langle x, Ay\rangle$, где A — эрмитов оператор.

Лемма. *Все собственные значения эрмитова оператора вещественны, а собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны (относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$).*

Доказательство аналогично комплексному случаю и является простым упражнением.

Определим набор собственных значений $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ эрмитова оператора A, полагая кратность каждого собственного значения равной размерности (над $\mathbb{H}$) соответствующего собственного подпространства. Тогда каждое число λ_i входит в набор собственных значений окомплексифицирования ${}^{\mathbb{C}}\!A\colon \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ с кратностью 2, и в набор собственных значений овеществления ${}^{\mathbb{R}}\!A\colon \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}$ с кратностью 4.

Обозначим через $M = M(n) \cong \mathbb{R}^{2n^2-n}$ пространство всех гиперэрмитовых $(n \times n)$-матриц, то есть эрмитовых операторов в пространстве $\mathbb{H}^n$. Обозаначим через $\Sigma \subset M$ дискриминант, состоящий из операторов с кратными собственными значениями, и через $M^0 = M \setminus \Sigma$ — дополнение к дискриминанту. Над M^0 имеются n кватернионных (вещественно четырехмерных) векторных расслоений $L_1, \ldots, L_n$ собственных векторов. При этом расслоение $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n = \mathbb{H}^n$ — тривиальное вещественно $4n$-мерное.

Теорема. *Дискриминант в пространстве гиперэрмитовых операторов является особым подмногообразием вещественной коразмерности пять. Рассмотрим маленькую 4-мерную сферу S^4, зацепленную с дискриминантом, вблизи его точки A такой, что оператор A имеет пару совпадающих собственных значений*

$$\lambda_1 < \ldots < \lambda_k = \lambda_{k+1} < \ldots < \lambda_n$$

(можно рассмотреть пятимерную трансверсаль к дискриминанту в точке A и на ней сферу маленького радиуса с центром в точке A). Тогда ограничения на S^4 расслоений L_i тривиальны при $i \neq k, k+1$, а характеристические числа $p_1(S^4, L_k)$ и $p_1(S^4, L_{k+1})$ противоположны и равны ± 1.

Как и в комплексном случае, знаки чисел ± 1 определяются выбором ориентации сферы S^4.

Доказательство слово в слово повторяет доказательство аналогичной теоремы в комплексном случае. При $n = 2$ пространство гиперэрмитовых (2×2)-матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & w \\ \overline{w} & b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad w \in \mathbb{H}$$

шестимерно. Единичная сфера S^4 в пространстве таких матриц со следом ноль задается уравнениями $b = -a$, $a^2 + |w|^2 = 1$. Условие $A \in S^4$ равносильно условию того, что оператор A имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 1$ (см. ниже). Поэтому соответствия $S^4 \to \mathbb{H}P^1$, сопоставляющие оператору направления его собственных подпространств, отвечающих собственным значениям $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$, являются взаимно однозначными. Следовательно, ограничения расслоений L_1 и L_2 на сферу S^4 изоморфны тавтологическому расслоением над $\mathbb{H}P^1$, и их характеристические числа равны $p_1(S^4, L_1) = -p_1(S^4, L_2) = \pm 1$ в зависимости от выбора ориентации сферы.

Случай произвольного n сводится к случаю $n = 2$ аналогично тому, как это сделано в комплексном случае.

Кватернионный определитель

Хорошо известно, что определитель $\det_{\mathbb{R}}(A) = \det({}^{\mathbb{R}}\!A)$ овеществления ${}^{\mathbb{R}}\!A$ комплексного оператора $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ равен квадрату модуля комплексного определителя, $\det_{\mathbb{R}}(A) = |\det_{\mathbb{C}}(A)|^2$. С другой стороны, окомплексифицирование ${}^{\mathbb{C}}\!A$ кватернионного оператора

$A\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ вместе с собственным значением λ содержит и собственное значение $\overline{\lambda}$, поэтому определитель $\det_{\mathbb{C}}(A) = \det({}^{\mathbb{C}}\!A)$ всегда вещественный и положительный. В.И.Арнольд предположил, что у формулы $\det_{\mathbb{R}}(A) = |\det_{\mathbb{C}}(A)|^2$ должен существовать кватернионный аналог. Мы продемонстрируем эту аналогию в частном случае гиперэрмитовых операторов.

Определение. Пусть A — гиперэрмитов оператор. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ — собственные значения оператора A (взятые с учетом кратностей). *Кватернионным определителем* оператора называется вещественное число, равное произведению его собственных значений,

$$\det_{\mathbb{H}}(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Следствие (определения). $\det_{\mathbb{C}}(A) = (\det_{\mathbb{H}}(A))^2$, $\det_{\mathbb{R}}(A) = (\det_{\mathbb{C}}(A))^2 = (\det_{\mathbb{H}}(A))^4$.

Пример. Пусть $n = 1$. Тогда (1×1)-матрица $A = (a)$ вещественна, и $\det_{\mathbb{H}}(A) = a$, $\det_{\mathbb{C}}(A) = a^2$, $\det_{\mathbb{R}}(A) = a^4$.

Пример. Пусть $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & w \\ \overline{w} & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{H}$. Приведем квадратичную форму, задаваемую матрицей A, к сумме квадратов,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a^{-1}\overline{w} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & w \\ \overline{w} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}(ab - \overline{w}w) \end{pmatrix}.$$

Матрицы, на которые мы домножали матрицу A слева и справа, диагональные с единицами на диагонали. Поэтому комплексный определитель при этом не изменился, и $\det_{\mathbb{C}}(A) = (ab - \overline{w}w)^2$. Следовательно,

$$\det_{\mathbb{H}}(A) = ab - \overline{w}w.$$

В приведенной выкладке условие $a \neq 0$, конечно, не существенно. Существенным является то, что числа a и a^{-1} вещественны, и поэтому коммутируют со всеми кватернионами.

Пример. Пусть $n = 3$. Аналогичным способом можно получить формулу

$$\det_{\mathbb{H}} \begin{pmatrix} a & w & \overline{v} \\ \overline{w} & b & u \\ v & \overline{u} & c \end{pmatrix} = abc - au\overline{u} - bv\overline{v} - cw\overline{w} + uvw + \overline{w}\,\overline{v}\,\overline{u}.$$

Как и в случае $n = 2$, это выражение совпадает с обычной формулой для определителя. Первые 4 слагаемых вещественны и в них порядок сомножителей несущественен. В последних двух слагаемых порядок сомножителей, вообще говоря, менять нельзя.

Заметим, что для любых двух кватернионов u и v величина $uv + \overline{v}\,\overline{u} = 2\mathrm{Re}(\mathrm{uv})$ вещественна и симметрична относительно u и v,

$$uv + \overline{v}\,\overline{u} = vu + \overline{u}\,\overline{v}. \qquad (*)$$

Поэтому в двух последних слагаемых в приведенной формуле для определителя числа u, v, w можно переставлять циклически.

Теорема. *Величина $\det_{\mathbb{H}}(A)$ полиномиально зависит от коэффициентов эрмитовой матрицы $A = \{a_{ij}\}$. Более того, имеет место формула*

$$\det_{\mathbb{H}}(A) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

где суммирование производится по всем перестановкам множества $\{1, \ldots, n\}$, $(-1)^\sigma$ — *знак перестановки, а порядок, в котором перемножаются элементы, стоящие на одной диагонали, задается комбинаторным правилом, приведенным ниже.*

Правило, задающее порядок умножения элементов, состоит в следующем. Предположим сперва, что перестановка σ — циклическая. Тогда перестановка σ^{-1} — также циклическая, и $(-1)^\sigma = (-1)^{\sigma^{-1}} = (-1)^{n-1}$. Положим сумму слагаемых в выражении для определителя, отвечающих перестановкам σ и σ^{-1}, равной

$$(-1)^{n-1}(a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_n i_1} + a_{i_1 i_n} a_{i_n i_{n-1}} \cdots a_{i_2 i_1}),$$

где перестановка имеет вид $\sigma(i_k) = i_{k+1}$ при $k < n$, и $\sigma(i_n) = i_1$. Из эрмитовости матрицы A вытекает, что эта сумма вещественна (как сумма двух сопряженных чисел), а из тождества $(*)$ вытекает, что эта сумма не зависит от того места, в котором мы разбиваем цикл.

Назовем *частичным определителем* сумму

$$\mathrm{dt}_{\mathbb{H}}(A) = \sum_{\sigma \text{ цикл.}} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

где суммирование производится по всем *циклическим* перестановкам, а элементы, стоящие на одной диагонали, перемножаются согласно приведенному выше правилу.

Общая подстановка является произведением независимых циклов. Положим

$$\det_{\mathbb{H}}(A) = \sum_{I_1, \ldots, I_m} \mathrm{dt}_{\mathbb{H}}(A_{I_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{dt}_{\mathbb{H}}(A_{I_m}).$$

Здесь суммирование производится по всем разбиениям множества $\{1, \ldots, n\}$ на непересекающиеся подмножества $I_1, \ldots, I_m$. Эрмитова матрица A_I является главной подматрицей, образованной пересечением строк и столбцов, номера которых принадлежат множеству I. Порядок, в котором перемножаются частичные определители, несущественен, поскольку они все вещественные. Ясно, что после раскрытия всех скобок в приведенном выражении, получается сумма такого вида, как в формулировке теоремы.

Для кватернионного определителя имеются формулы разложения по строке или столбцу, аналогичные соответствующим формулам коммутативного случая.

Предположим, что задана матрица A и числа k, l, такие, что после вычеркивания k-й строки и l-го столбца остается эрмитова матрица. Назовем в этом случае матрицу A *почти эрмитовой* (относительно k-й строки и l-го столбца). Например, матрица, полученная из эрмитовой вычеркиванием произвольных строки и столбца, почти эрмитова. Аналогично, если из почти эрмитовой (относительно k-й строки и l-го столбца) матрицы вычеркнуть k-ю строку и произвольный столбец, или l-й столбец и произвольную строку, то останется почти эрмитова матрица на единицу меньшего размера. Всякая эрмитова матрица почти эрмитова относительно k-й строки и k-го столбца для произвольного $k \leqslant n$.

Замечание. Номер строки и номер столбца, которые необходимо вычеркивать, входят в определение почти эрмитовой матрицы. Например, почти эрмитова матрица $\begin{pmatrix} a & w \\ v & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{H}$ относительно первой строки и первого столбца, и та же почти эрмитова матрица относительно второй строки и второго столбца, считаются различными, и при $w \neq \overline{v}$ определенные ниже кватернионные определители для них, вообще говоря, различаются.

Определение. Пусть матрица A размера $n \times n$ почти эрмитова относительно k-й строки и l-го столбца. Зададим *определитель почти эрмитовой матрицы* A формулой

$$\det_{\mathbb{H}}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} M_{ki} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} M_{il} a_{il},$$

где *миноры* M_{ki}, M_{il} — определители почти эрмитовых матриц, получающихся из матрицы A вычеркиванием соответствующих строки и столбца.

Теорема. *Приведенное индуктивное определение определителя почти эрмитовой матрицы через определители почти эрмитовых матриц меньших размерностей корректно. В частности, если матрица A эрмитова, то приведенные формулы справедливы для любых k и l.*

Следствие. *Матрица, обратная к эрмитовой матрице A, задается формулой*

$$\{A^{-1}\}_{ij} = \frac{1}{\det_{\mathbb{H}}(A)} (-1)^{i+j} M_{ji}.$$

После того, как эти теоремы сформулированы, их доказательства не составляют труда, и оставляются слушателям в качестве упражнения.

Литература

[1] Арнольд В.И., Моды и квазимоды, ФАН, 6 (1972), 94-101.

[2] Arnold V.I., Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrces, Berry phases, adiabatic connections and quantum Hall effect, Selecta Math., 1995, V.1, p.1–19.

[3] Arnold V.I., Relatives of the quotient of the complex projective plane by complex conjugation, preprint (1998).