ИНВАРИАНТЫ ТИПА j^+, j^-, st ГЛАДКИХ КРИВЫХ НА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ.

А. В. Иншаков

Введение.

Для кривых общего положения на плоскости В. И. Арнольд в [1] определил три базисных инварианта j^+, j^- и st. Эти инварианты являются инвариантами первого порядка в смысле В. А. Васильева относительно соответствующих стратов. Кроме того, инварианты j^+, j^- представимы в виде суммы ("более тонких") инвариантов кривых на плоскости $j^+_{(i_1,i_2)}, j^-_{(\tilde{i}_1,\tilde{i}_2)}$, определенных для всех неупорядоченных пар целых чисел (i_1, i_2) и полуцелых чисел $(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2)$. Эти инварианты введены в [2]. В настоящей работе показывается, что аналоги инвариантов j^+, j^- и st определены и для кривых общего положения на двумерной поверхности. Также определяются "элементарные" инварианты (аналоги инвариантов $j^+_{(i_1,i_2)}, j^-_{(\tilde{i}_1,\tilde{i}_2)}$), на которые распадаются инварианты j^+, j^- и st.

Пусть M^2 — двумерное вещественное многообразие, Ω — пространство C^1-гладких иммерсий окружности S^1 (на которой мы предполагаем зафиксированной точку $\star$) в M^2. Элементы пространства Ω мы будем называть *кривыми* (на поверхности M^2).

Замкнутое подмножество D коразмерности один множества всех кривых Ω мы будем называть *стратом*, если в окрестности любой точки, лежащей в D вне множества коразмерности 2 (в D), пара (Ω, D) локально диффеоморфна произведению $A \times (\mathbb{R}^2, D_0)$, где A — бесконечномерное линейное пространство, D_0 — росток алгебраической кривой в $(\mathbb{R}^2, 0)$.

Коориентация гладкой части страта D — это выбор одной из двух частей, на которые страт делит пространство Ω, в окрестности каждой неособой точки. Эта часть называется *положительной.*

Коориентация гладкой части страта D называется *корректной*, если в окрестности любой особой точки страта D, не лежащей в множестве коразмерности 2 в D, выполняется следующее условие:

Индекс пересечения любой общей стягиваемой ориентированной замкнутой кривой со стратом D (индекс пересечения есть разность количеств положительных и отрицательных пересечений) *равен нулю.*

Страт D называется *коориентируемым*, если существует корректная коориентация его гладкой части, и *коориентированным*, если такая коориентация выбрана.

Кривые общего положения из Ω могут иметь в качестве особенностей только простые самопересечения. В общих однопараметрических семействах кривых на M^2 при отдельных значениях параметров могут встречаться кривые, имеющие (помимо простых самопересечений) одну из следующих особенностей (см. рис. 1): J^+ — сонаправленное самокасание, J^- — несонаправленное самокасание, St — тройное самопересечение. Замыкания множеств кривых, имеющих соответствующие особенности, обозначим через J^+, J^-, St.

Множества J^+, J^-, St являются стратами. Действительно, рассмотрим некоторое двупараметрическое семейство кривых общего положения. В нем кроме кривых с особенностями J^+, J^- и St могут уже встречаться кривые, которые имеют:

(1) либо две особенности в различных точках поверхности M^2;
(2) либо одну из следующих особенностей: а). тройную точку, в которой две ветви касаются; б). точку четырехкратного самопересечения; в). точку самокасания с порядком касания, как у графиков функций $y = 0$ и $y = x^3$ в нуле.

В первом случае, выписав подходящую версальную двупараметрическую деформацию, мы получим на плоскости параметров две трансверсально пересекающиеся в нуле прямые, каждая из которых соответствует кривым на поверхности M^2 с одной из двух рассматриваемых особенностей. Таким

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 96-01-01104 и INTAS 96-0713.

образом, мы имеем дело с трансверсальным пересечением соответствующих стратов. При этом для одного страта кривая D_0 есть либо объединение двух прямых, если в данной точке наблюдается самопересечение этого страта, либо одна прямая, если пересечение происходит с другим стратом. Во втором случае после выписывания подходящих версальных деформаций приведенных особенностей получаем на плоскости параметров: а). две касающиеся в нуле кривые (одна из них соответствует страту St, другая — J^+ или J^-); б). четыре пересекающиеся в нуле прямые (все соответствуют St); в). полукубическую параболу с вершиной в нуле (соответствует J^+ или J^-). При этом для одного страта в каждом случае D_0 является действительно ростком алгебраической кривой. Подробнее особенности а). и б). рассмотрены в [1], §5.

Страты J^+, J^- наделяются *естественной коориентацией*. Путь на Ω пересекает страт в положительном направлении, если при соответствующей перестройке количество точек самопересечения кривой увеличивается на 2. Страт St также наделяется коориентацией. Для значения параметра, предшествующего бифуркационному, рассмотрим на окружности S^1 прообразы трех сливающихся точек самопересечения и соединим по два прообраза каждой точки хордами. Пусть q — количество пар пересекающихся хорд. Знаком (или индексом) пересечения назовем $(-1)^q$. Пример приведен на рис. 2. Нетрудно проверить, что эта коориентация совпадает с коориентацией, введенной В. И. Арнольдом в [1]. Корректность приведенных коориентаций для стратов J^+, J^- и St доказана в [1].

Инвариант кривых общего положения на поверхности M^2 — это локально постоянная функция на дополнении $\Omega \setminus D$ к страту D. *Инвариантом первого порядка* (в смысле В. А. Васильева), *соответствующим коориентированному страту* D, называется инвариант, который имеет фиксированный ненулевой скачок при трансверсальном положительном пересечении страта D. Такой инвариант существует тогда и только тогда, когда индекс пересечения любой петли общего положения со стратом D равен нулю. Это означает, что класс когомологий $[D] \in H^1(\Omega)$, двойственный к страту D, равен нулю. Инвариант первого порядка, соответствующий страту D, определяется величиной скачка при пересечении D и своими значениями для фиксированных принадлежащих $\Omega \setminus D$ представителей из каждой компоненты связности пространства Ω.

Перед формулировкой основных результатов автор выражает благодарность В. И. Арнольду за постановку задачи и полезные обсуждения, а также С. М. Гусейн-Заде за очень продолжительные и плодотворные обсуждения, которые привели в том числе к изменению некоторых результатов.

Формулировки основных результатов.*

Зафиксируем точку $s_0 \in STM^2$ и ее проекции p_0 и m_0 на PTM^2 и M^2 соответственно. Эти точки считаются отмеченными при вычислении соответствующих фундаментальных групп. Зафиксируем также ориентацию поверхности M^2 в малой окрестности точки m_0. Из нее индуцируются ориентации слоев расслоений STM^2 и PTM^2 над точкой m_0 и, следовательно, ориентации в окрестностях точек s_0 и p_0.

Пусть κ — кривая на M^2. Обозначим через κ^s поднятие кривой κ до лежандрова узла в STM^2: $\kappa^s(x) = \big(\kappa(x), \tau(x)\big)$, где $\tau(x)$ — нормированный касательный вектор к кривой κ в точке x; через κ^p обозначим соответствующий лежандров узел в PTM^2.

Пример. Точке самокасания кривой κ соответствует точка самопересечения узла κ^p, и наоборот. При этом самокасание — сонаправленное тогда и только тогда, когда узел κ^s самопересекается.

Далее мы будем формулировать все понятия сначала для узлов в пространствах STM^2 или PTM^2, а потом ограничивать их на лежандровы поднятия кривых. Для кривых с самокасаниями эта конструкция, как следует из примера, естественна. В случае особенности — тройного самопересечения и в некоторых других случаях она будет несколько искусственна, но, как будет видно в дальнейшем, оправдана.

Определим инвариант нулевого порядка.

Определение. *Полный индекс узла* в пространстве STM^2 — это его класс свободной гомотопической эквивалентности в множестве всех петель на STM^2. Множество классов свободной гомотопической эквивалентности петель на STM^2 обозначим через $\pi_1^{св}(STM^2)$.

*В. Чернов независимо получил аналогичные результаты. Они изложены в работе [3].

Замечание. Множество $\pi_1^{cs}(STM^2)$ естественно изоморфно фактору группы $\pi_1(STM^2)$ по действию самой на себе сопряжением.

Определение. *Полным индексом кривой* κ назовем полный индекс узла κ^s.

Пусть γ — некоторый элемент множества $\pi_1^{cs}(STM^2)$. Обозначим через Ω_γ множество всех кривых на поверхности M^2, полный индекс которых равен γ. Из определения полного индекса следует, что для различных элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1^{cs}(STM^2)$ пространства Ω_{γ_1} и Ω_{γ_2} не пересекаются.

Теорема 1. *Для любого элемента $\gamma \in \pi_1^{cs}(STM^2)$ пространство Ω_γ непусто и связно.*

Определение. Страт называется *приводимым*, если он является объединением не совпадающих с ним стратов. В противном случае страт называется *неприводимым*.

Пример. *Индексом оборота* иммерсии ориентированной окружности в плоскость называется количество полных оборотов нормированного касательного вектора (степень отображения, сопоставляющего точке окружности направление производной иммерсии в этой точке). Для случая $M^2 = \mathbb{R}^2$ показано в [2], что страт J^+ является объединением счетного числа неприводимых компонент $J^+_{\bar{i}}$, где $\bar{i} \in S^2\mathbb{Z}$ ($S^2\mathbb{Z}$ — симметрический квадрат $\mathbb{Z}$). Каждая компонента является замыканием множества кривых с сонаправленным самокасанием и фиксированными индексами оборота петель, на которые разбивает кривую точка самокасания. Страт St представляется в виде $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} St_i$, каждая компонента является замыканием множества кривых с тройным самопересечением и индексом оборота, равным i. Компоненты St_i неприводимы.

Обозначим через $\pi_1^+(PTM^2)$ образ $\pi_1(STM^2)$ при естественном накрытии $p : STM^2 \to PTM^2$, $\pi_1^-(PTM^2) = \pi_1(PTM^2) \setminus \pi_1^+(PTM^2)$.

Определение. *Восьмеркой в пространстве PTM^2 с поднятием в STM^2* назовем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} STM^2 \arrow[d, "p"'] & S^1 \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "sc"] \\ PTM^2 & S^1 \vee S^1 \arrow[l, "h"'] \end{tikzcd} .$$

Здесь отображение $sc : S^1 \to S^1 \vee S^1$ является склейкой двух различных точек.

Определение. Две восьмерки с поднятиями, определяемые тройками (g_1, sc_1, h_1) и (g_0, sc_0, h_0) *гомотопически эквивалентны*, если найдется непрерывное семейство восьмерок с поднятиями (g_t, sc_t, h_t), которое их соединяет. Множество соответствующих классов эквивалентности обозначим через AJ, а сам класс эквивалентности восьмерки с поднятием будем называть ее *j-индексом*.

Про каждую восьмерку с поднятием можно сказать, склеиваются или нет при отображении $g : S^1 \to STM^2$ те две точки, которые склеиваются при отображении sc, то есть найдется или нет отображение $\tilde{g} : S^1 \vee S^1 \to STM^2$ такое, что $g = \tilde{g} \circ sc$. Поэтому множество восьмерок с поднятиями естественно распадается на два множества. Аналогично $AJ = AJ^+ \sqcup AJ^-$, множество AJ^+ состоит из j-индексов тех восьмерок, для которых отображение $\tilde{g}$ существует, а AJ^- — из тех, для которых не существует.

Опишем множества $AJ^\pm$. Для этого занумеруем петли восьмерки. Любую восьмерку с поднятием можно гомотопией перевести в такую, что образ при отображении h "двойной" точки букета будет точкой p_0, а склеивающаяся точка, из которой выходит первая петля, под действием отображения g перейдет в точку m_0. Таким образом, каждой восьмерке можно поставить в соответствие некоторый элемент множества $\pi_1(PTM^2) \times \pi_1(PTM^2)$. Но описанных гомотопий много, и любые два получающихся таким образом элемента отличаются сопряжением на какой-то элемент группы $\pi_1^+(PTM^2) \cong \pi_1(STM^2)$. Вспоминая, что в действительности петли восьмерки неупорядочены, а у самих восьмерок есть поднятия, получаем следующее. Множество AJ^+ изоморфно фактору множества $\pi_1(STM^2) \times \pi_1(STM^2)$ по действию групп:

(1) группы $\mathbb{Z}_2$ — симметрией относительно диагонали;
(2) группы $\pi_1(STM^2)$ — сопряжением обоих сомножителей.

Аналогично множество AJ^- изоморфно фактору множества $\pi_1^-(PTM^2) \times \pi_1^-(PTM^2)$ по действию групп:

(1) группы $\mathbb{Z}_2$ — симметрией относительно диагонали;
(2) группы $\pi_1^+(PTM^2)$ — сопряжением обоих сомножителей.

Определение. Элементы множества AJ^+ будем называть *j^+-индексами*, а множества AJ^- — *j^--индексами.*

Определение. Назовем *j^+-индексом точки сонаправленного самокасания кривой к* j^+-индекс восьмерки с поднятием

$$\begin{tikzcd} STM^2 \arrow[d, "p"'] & S^1 \arrow[l, "\kappa^s"'] \arrow[d, "sc"'] \\ PTM^2 & S^1 \vee S^1 \arrow[l, "h"'] \end{tikzcd}.$$

Здесь отображение sc склеивает две точки, в образах которых происходит данное самокасание, отображение h замыкает диаграмму.

Определение. Аналогично *j^--индексом точки несонаправленного самокасания кривой к* назовем j^--индекс соответствующей восьмерки с поднятием.

Определение. *Узлом в пространстве STM^2 с тройным самопересечением проекции на поверхность M^2* назовем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} STM^2 \arrow[d] & S^1 \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "sc"'] \\ M^2 & K \arrow[l, "h"'] \end{tikzcd}.$$

Здесь через K обозначен букет трех окружностей, отображение $sc : S^1 \to K$ является склейкой трех различных точек.

Определение. Два узла с тройным самопересечением проекции, определяемые тройками (g_1, sc_1, h_1) и (g_0, sc_0, h_0) *гомотопически эквивалентны*, если найдется непрерывное семейство узлов с тройными самопересечениями проекций (g_t, sc_t, h_t), которое их соединяет. Множество соответствующих классов эквивалентности обозначим через ASt, а сам класс эквивалентности узла будем называть его *st-индексом.*

Любой узел с тройным самопересечением проекции можно гомотопией превратить в узел с тройным самопересечением в точке s_0 в самом пространстве STM^2, причем любая такая гомотопия будет эквивалентна следующей. Сначала надо сделать так, чтобы в тройное самопересечение проекции проецировалось тройное самопересечение узла, то есть чтобы отображение g "пропускалось" через sc: $g = \tilde{g} \circ sc$. Потом переведем образ при отображении $\tilde{g}$ отмеченной точки букета K в точку s_0.

Поэтому множество ASt изоморфно фактору множества $\pi_1(STM^2) \times \pi_1(STM^2) \times \pi_1(STM^2)$ по действиям следующих групп:

(1) Группа $\mathbb{Z}_3$ действует циклической перестановкой сомножителей, что соответствует циклической перенумерации петель — прообразов окружностей из букета K.
(2) Группа $\pi_1(STM^2)$ действует сопряжением всех сомножителей, что соответствует различным способам приведения точки тройного самопересечения узла в точку s_0.
(3) Группа $\mathbb{Z}^3$ действует следующим образом: $(i_1, i_2, i_3)(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (f^{i_1}\gamma_1 f^{-i_2}, f^{i_2}\gamma_2 f^{-i_3}, f^{i_3}\gamma_3 f^{-i_1})$, где f — класс ориентированного слоя STM^2 над точкой m_0). Это соответствует неоднозначности приведения узла к тройному самопересечению: любую ветвь можно несколько раз пронести вдоль слоя расслоения $STM^2 \to M^2$ — окружности.

Определение. Назовем *st-индексом точки тройного самопересечения кривой* κ st-индекс узла с тройным самопересечением проекции

$$\begin{array}{ccc} STM^2 & \xleftarrow[\kappa^s]{} & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle sc} \\ M^2 & \xleftarrow[h]{} & K \end{array}.$$

Здесь отображение sc склеивает три точки, в образах которых происходит данное самопересечение, отображение h замыкает диаграмму.

Обозначим через D один из стратов J^+, J^- или St, а через AD — множество соответствующих индексов. Пусть $\alpha \in AD$ — какой-либо j^+, j^- или st-индекс. Обозначим через D_α замыкание множества кривых, у которых есть особые точки типа D, индекс которых равен α. Если множество D_α непусто, то оно является стратом. Действительно, рассмотрим те же версальные деформации особенностей, что и для самих стратов J^+, J^- и St. Для этих версальных деформаций можно проверить, что индекс особенности не изменяется вдоль каждой неприводимой компоненты кривой особенностей.

Страт D представляется в виде объединения $\bigcup\limits_{\alpha \in AD} D_\alpha$.

Теорема 2. *Множества D_α непусты и являются неприводимыми стратами.*

Неприводимые компоненты стратов наследуют коориентацию с самих стратов. Кроме этого, в группе когомологий $H^1(\Omega)$ корректно определены коциклы, двойственные к ним. Исследуем их на когомологичность нулю.

Определение. *Точкой самопересечения проекции на поверхность M^2 узла в пространстве STM^2* назовем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} STM^2 & \xleftarrow[g]{} & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle sc} \\ M^2 & \xleftarrow[h]{} & S^1 \vee S^1 \end{array}.$$

Здесь отображение $sc : S^1 \to S^1 \vee S^1$ является склейкой двух различных точек.

Определение. Две точки самопересечения проекций, определяемые тройками (g_1, sc_1, h_1) и (g_0, sc_0, h_0) *гомотопически эквивалентны*, если найдется непрерывное семейство прообразов точек самопересечения проекций (g_t, sc_t, h_t), которое их соединяет. Множество соответствующих классов эквивалентности обозначим через AI, а сам класс эквивалентности точки самопересечения проекции будем называть ее *типом*.

Множество AI описывается аналогично множеству ASt. Оно изоморфно фактору множества $\pi_1(STM^2) \times \pi_1(STM^2)$ по действиям следующих групп:

(1) Группа $\mathbb{Z}_2$ действует симметрией относительно диагонали.
(2) Группа $\pi_1(STM^2)$ действует сопряжением обоих сомножителей.
(3) Группа $\mathbb{Z}^2$ действует следующим образом: $(i_1, i_2)(\gamma_1, \gamma_2) = (f^{i_1}\gamma_1 f^{-i_2}, f^{i_2}\gamma_2 f^{-i_1})$. Через f здесь обозначен класс в $\pi_1(STM^2)$ ориентированного слоя расслоения $STM^2 \to M^2$ над точкой m_0.

Определение. Назовем *типом точки самопересечения кривой* κ тип точки самопересечения проекции на M^2 узла κ^s в пространстве STM^2

$$\begin{array}{ccc} STM^2 & \xleftarrow[\kappa^s]{} & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle sc} \\ M^2 & \xleftarrow[h]{} & S^1 \vee S^1 \end{array}.$$

Здесь отображение sc склеивает две точки, в образах которых происходит данное самопересечение, отображение h замыкает диаграмму.

Любой тип из AI реализуется как тип точки самопересечения некоторой кривой. Действительно, множество AI есть фактор множества AJ^+ по действию группы Z^2 (см. выше). Поэтому для любого элемента из AI можно найти j^+-индекс, который лежит в его прообразе. По теореме 2 этот j^+-индекс реализуется на некоторой кривой, образуя точку самокасания, которая является в том числе точкой самопересечения. Легко проверить, что ее тип будет таким, как нужно.

Рассмотрим некоторый элемент множества AI и кривую общего положения, на которой он реализуется как точка самопересечения. Пусть обе петли, на которые делится кривая точкой этого самопересечения, некоориентируемы. Тогда вся кривая коориентируема. Зафиксируем на ней коориентацию. Тогда точке самопересечения можно приписать знак "+", если направления выхода ветви кривой совпадает с направлением коориентации, заданным на другой ветви. Знак "–" приписывается в противном случае. Определение знака не зависит от того, какую из выходящих ветвей кривой мы рассматриваем. Кроме того, при регулярной гомотопии кривой разность количеств приписанных "+" и "–" сохраняется.

Определение. Тип точки самопересечения кривой, для которого обе отделяемые петли некоориентируемы, называется *некоориентируемо-сбалансированным*, если количества "+" и "–", приписанных точкам данного типа, совпадают. В противном случае назовем этот тип *некоориентируемо-несбалансированным.*

Пример. На рис. 3а изображен многоугольник, из которого склеивается поверхность по сторонам a и b. Точка самопересечения приведенной кривой имеет некоориентируемо-несбалансированный тип.

Рассмотрим некоторый j-индекс β. В силу теоремы 2 найдется общая кривая κ_β с самокасанием, имеющая этот j-индекс. Точка самокасания является и точкой самопересечения этой кривой. Обозначим тип полученной точки самопересечения через α_β.

Определение. Назовем j-индекс β *парным*, если выполняются два условия:

(1) кривая κ_β делится точкой самокасания на некоориентируемые петли;
(2) тип α_β некоориентируемо-несбалансирован.

В противном случае j-индекс β называется *непарным. Парой к парному j-индексу β* является j-индекс кривой с самокасанием, которая получается из кривой κ_β добавлением на свои петли по одной маленькой петле в противоположных направлениях (см. рис. 4а и 4б).

Корректность этого определения, то есть то, что индекс, парный к парному к данному индексу есть исходный, показана на рис. 5.

Пусть теперь обе петли, на которые кривая делится точкой самопересечения данного типа, коориентируемы.

Рассмотрим гомотопию, переводящую в себя некоторую общую точку самопересечения проекции узла в пространстве STM^2:

$$\begin{array}{ccc} STM^2 & \xleftarrow[G]{} & S^1 \times I \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Sc} \\ M^2 & \xleftarrow[H]{} & (S^1 \vee S^1) \times I \end{array}.$$

Здесь отображение Sc действует в слоях над совпадающими точками отрезка I. Прообраз отображения Sc множества $\{pt\} \times I$ (pt — "двойная" точка букета) есть две непересекающиеся кривые на цилиндре $S^1 \times I$. Рассмотрим проекцию одной из них на первый сомножитель произведения $S^1 \times I$. Обозначим ее через $\tilde{pt}$.

Определение. Точку самопересечения проекции на поверхность M^2 узла общего положения в пространстве STM^2 назовем *симметричной*, если существует гомотопия, переводящая ее в себя и для которой полученная кривая $\tilde{pt}$ является незамкнутой, то есть эта гомотопия "переставляет" две сливающиеся точки местами.

Тип $\alpha \in AI$ назовем *симметричным*, если общая точка самопересечения этого типа является симметричной, и *несимметричным* в противном случае.

Рассмотрим несимметричный тип из AI. Пусть он реализуется как тип точки самопересечения некоторой кривой общего положения. В силу несимметричности петли, которые отделяются всевозможными точками самопересечения этого типа, можно глобально разделить на два класса.

Так как обе петли коориентируемы, то и вся кривая коориентируема. Зафиксируем на ней коориентацию. Каждой точке самопересечения данного типа припишем знак "+", если направление выхода ветви кривой в петлю первого класса совпадает с коориентацией, заданной на другой ветви кривой. Знак "–" приписывается в противном случае. Кроме того, при регулярных гомотопиях кривой разность количеств "+" и "–" не изменяется.

Определение. Тип точки самопересечения кривой, для которого обе отделяемые петли коориентируемы, называется *коориентируемо-сбалансированным*, если количество знаков "+" и "–" совпадает, или сам тип симметричен. В противном случае тип точки самопересечения называется *коориентируемо-несбалансированным.*

Пример. На рис. 3б изображен многоугольник, из которого склеивается поверхность по сторонам a и b. Тип точки самопересечения приведенной кривой является коориентируемо-несбалансированным.

Рассмотрим теперь некоторый st-индекс β. В силу теоремы 2 найдется общая кривая κ_β с тройным самопересечением, имеющая этот st-индекс. Приведем эту кривую в общее положение так, чтобы из точки тройного самопересечения родились три точки самопересечения. Если одна из этих точек отделяет стягиваемую по M^2 петлю, то другие две точки самопересечения имеют один и тот же тип. Обозначим его через α_β.

Определение. Назовем st-индекс β *парным первого типа*, если:

(1) одна и только одна из отделяемых петель стягиваема;
(2) все отделяемые петли коориентируемы;
(3) тип α_β коориентируемо-несбалансирован.

Определение. Назовем st-индекс β *парным второго типа*, если:

(1) одна и только одна из отделяемых петель стягиваема;
(2) обе другие отделяемые петли некоориентируемы;
(3) тип α_β некоориентируемо-несбалансирован.

Определение. Если st-индекс не является парным первого или второго типа, то он называется *непарным. Парой к парному st-индексу* является st-индекс кривой, у которой тройное самопересечение отличается от тройного самопересечения кривой κ_β порядком петель (см. рис. 4в).

Обозначим через D один из стратов J^+, J^- или St. Пусть $\beta \in AD$ — какой-либо j^+, j^- или st-индекс.

Теорема 3. *Коцикл, двойственный к страту D_β, когомологичен 0 в одномерной группе когомологий $H^1(\Omega, \mathbb{Z})$ тогда только тогда, когда индекс β непарный.*

Если β — парный j-индекс, а $\tilde{\beta}$ — его пара, то $[J^\pm_\beta] - [J^\pm_{\tilde{\beta}}] = 0$ в $H^1(\Omega, \mathbb{Z})$. Если β — парный st-индекс, а $\tilde{\beta}$ — его пара, то $[St_\beta] \pm [St_{\tilde{\beta}}] = 0$ в $H^1(\Omega, \mathbb{Z})$. В этой формуле надо брать $+$, если β — первого типа; и $-$, если второго.

Далее через T^2 мы будем обозначать двумерный тор, через Kl — бутылку Клейна. Будем говорить, что некоторый гомотопический класс петель на M^2 *коориентируем*, если общая кривая, имеющая этот тип, коориентируема. Аналогично гомотопический класс петель на M^2 *некоориентируем*, если общая кривая, имеющая этот тип, некоориентируема.

Теорема 4. *Рассмотрим элемент $\gamma \in \pi_1^{св}(STM^2)$, $p\gamma \in \pi_1^{св}(M^2)$ — его проекция. Пусть элемент $p\gamma$ нетривиален и коориентируем. Если $M^2 \neq T^2, Kl$, то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z} \leftthreetimes \mathbb{Z}$, если же $M^2 = T^2$ или Kl, то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z} \leftthreetimes (\mathbb{Z} \leftthreetimes \mathbb{Z})$. Если элемент $p\gamma$ некоориентируем, $M^2 \neq \mathbb{R}P^2$, то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z}$.*

Далее пусть $p\gamma$ тривиален, $M^2 \neq S^2, \mathbb{R}P^2$. Если γ нетривиален, то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z} \times \pi_1^{коор}(M^2)$ (здесь под $\pi_1^{коор}(M^2)$ имеется в виду подгруппа всех коориентируемых элементов $\pi_1(M^2)$); в противном случае $\pi_1(\Omega_\gamma) = \pi_1(STM^2)$.

При $M^2 = S^2$ группа $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z}_2$. При $M^2 = \mathbb{R}P^2$ группа $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z}_4$.

Кроме того, при $M^2 \neq \mathbb{R}P^2, S^2$, Ω_γ является пространством типа $K(\pi, 1)$.

Доказательства.

Доказательство теоремы 1.

Пусть Ω^{s_1,s_2} — пространство лежандровых поднятий C^1-иммерсий отрезка в M^2, соединяющих точки $s_1, s_2 \in STM^2$, W^{s_1,s_2} — пространство всех непрерывных путей, соединяющих точки s_1 и s_2. Тогда $\Omega^{s_1,s_2} \subset W^{s_1,s_2}$. Пусть $W_0^{s_1,s_2}$ — какая-нибудь компонента связности пространства W^{s_1,s_2}, $\Omega_0^{s_1,s_2} = \Omega^{s_1,s_2} \cap W_0^{s_1,s_2}$.

Лемма 1. *Пространство $\Omega_0^{s_1,s_2}$ непусто и связно. Для любого $k \geq 1$ группа $\pi_k(\Omega_0^{s_1,s_2})$ изоморфна группе $\pi_{k+1}(STM^2)$.*

Замечание. В работе [4] S. Smale доказал это утверждение в случае $s_1 = s_2$.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим пространство E лежандровых поднятий C^1-иммерсий отрезка в M^2, выходящих из точки s_1. Пространство E гомотопически тривиально ([4, Lemma 6.2]). Рассмотрим отображение $\mathrm{fin} : E \to STM^2$, сопоставляющее пути из E его конечную точку в STM^2. Тройка (E, STM^2, fin) есть расслоение в смысле Серра ([4, Theorem B]). Слой над точкой s_2 есть Ω^{s_1,s_2}. Запишем точную гомотопическую последовательность расслоения в нулевом члене:

$$\cdots \to 0 \to \pi_1(STM^2, s_2) \to \pi_0(\Omega^{s_1,s_2}) \to 0.$$

Группа $\pi_1(STM^2, s_2)$ действует на множестве $\pi_0(\Omega^{s_1,s_2})$ свободно, орбита каждого элемента есть все множество $\pi_0(\Omega^{s_1,s_2})$. Рассмотрим элемент $\sigma \in \pi_1(STM^2)$. Тогда, если элемент $\gamma \in \pi_0(\Omega^{s_1,s_2})$ имеет класс $\tilde{\gamma} \in \pi_0(W^{s_1,s_2})$, то класс в $\pi_0(W^{s_1,s_2})$ элемента $\sigma(\gamma)$ есть $\tilde{\gamma}\sigma$ (имеется ввиду естественное свободное действие группы $\pi_1(STM^2, s_2)$ слева на множестве $\pi_0(W^{s_1,s_2})$). Варьируя σ, получим, что множество классов элементов из $\pi_0(\Omega^{s_1,s_2})$ есть все $\pi_0(W^{s_1,s_2})$. Поэтому множество $\Omega_0^{s_1,s_2}$ непусто. Кроме того, так как действие группы $\pi_1(STM^2)$ свободно на $\pi_0(W^{s_1,s_2})$, то классы различных элементов множества $\pi_0(\Omega^{s_1,s_2})$ различны. Поэтому множество $\Omega_0^{s_1,s_2}$ связно.

Записывая точную гомотопическую последовательность расслоения (E, STM^2, fin) в остальных членах, получаем:

$$\cdots \to 0 \to \pi_{k+1}(STM^2, s_2) \to \pi_k(\Omega_0^{s_1,s_2}) \to 0 \to \ldots,$$

то есть $\pi_k(\Omega_0^{s_1,s_2}) = \pi_{k+1}(STM^2)$, $k \in N$. □

Замечание. В случае $s_1 = s_2 = s_0$ компоненты связности пространства Ω^{s_0,s_0} естественно нумеруются элементами множества $\pi_1(STM^2, s_0) = \pi_0(W^{s_0,s_0})$. Компоненте связности, содержащей некоторый лежандров узел, соответствует просто гомотопический класс этого узла.

Доказательство теоремы 1. Если две кривые регулярно гомотопны, то их лежандровы узлы в пространстве STM^2 также гомотопны, то есть имеют один и тот же полный индекс. Отсюда полные индексы самих кривых тоже совпадают.

Обратно: пусть два лежандровых поднятия κ_1^s и κ_2^s кривых κ_1 и κ_2 имеют один и тот же полный индекс. Обозначим образ отмеченной точки $\star \in S^1$ при отображении κ_1^s через s_1. Пусть W — пространство узлов в STM^2. Рассмотрим общую гомотопию $\sigma : [0,1] \to W$, которая переводит узел κ_2^s в узел κ_1^s. При этой гомотопии отмеченная точка второго узла описывает путь $\sigma(t)(\star)$. Выберем теперь гомотопию $\tilde{\sigma} : [0,1] \to \Omega$ узла κ_2^s так, чтобы при всех $t \in [0,1]$ $\sigma(t)(\star) = \tilde{\sigma}(t)(\star)$. Пусть $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\kappa}_2^s$. Узлы κ_1^s и $\tilde{\kappa}_2^s$ гомотопны в классе обычных узлов, причем эту гомотопию можно выбрать в пространстве W^{s_1,s_1}. Действительно, рассмотрим непрерывное семейство λ гомеоморфизмов пространства STM^2 такое, что $\lambda(t)(\sigma(t)(\star)) = s_1$, $\lambda(1) = id$. Тогда желаемая гомотопия есть при $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ $\lambda(1-2t) \circ \sigma(1-2t)$, при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ $\lambda(2t-1) \circ \tilde{\sigma}(2t-1)$. Так как узлы κ_1^s и $\tilde{\kappa}_2^s$ гомотопны в пространстве W^{s_1,s_1}, то по лемме 1 они гомотопны в пространстве Ω^{s_1,s_1}. Следовательно, узлы κ_1^s и κ_s^2 гомотопны в пространстве Ω. □

Описание группы $\pi_1(STM^2)$.

Сначала выясним структуру группы $\pi_1(STM^2)$, а потом — множества $\pi_1^{cs}(STM^2)$.

Случай $M^2 = S^2$ или $\mathbb{R}P^2$.

В этом случае $\pi_1(STM^2) = \pi_1^{cs}(STM^2)$ есть $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_4$ соответственно. Представители изображены на рис. 6.

Случай $M^2 \neq S^2, \mathbb{R}P^2$.

Рассмотрим расслоение $STM^2 \to M^2$ со слоем S^1. Его точная гомотопическая последовательность в первом члене имеет вид:

$$\dots \to \pi_2(M^2) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(STM^2) \to \pi_1(M^2) \to \pi_0(S^1) \to \dots$$

или $0 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(STM^2) \to \pi_1(M^2) \to 0$. То есть $\pi_1(STM^2, s)$ как множество может быть отождествлено с $\{(i,\beta) | i \in \mathbb{Z}, \beta \in \pi_1(M^2)\}$. Для такого представления надо выбрать из прообразов каждого элемента $\beta \in \pi_1(M^2)$ в группе $\pi_1(STM^2)$ один, соответствующий $(0,\beta)$. Тогда элемент (i,β) представляется в виде $f^i(0,\beta)$, где f — класс ориентированного слоя расслоения $STM^2 \to M^2$ над точкой m_0. Умножение дается формулой $(i_1,\beta_1)(i_2,\beta_2) = (i_1 + i_2 \cdot \varepsilon(\beta_1) + l(\beta_1,\beta_2), \beta_1\beta_2)$, где $\varepsilon(\beta_1) = \pm 1$ в зависимости от того, коориентируем ли β_1. Для определения числа $l(\beta_1,\beta_2)$ используется равенство $(0,\beta_1)(0,\beta_2)(0,\beta_1\beta_2)^{-1} = f^{l(\beta_1,\beta_2)}$. Выберем теперь элементы $(0,\beta)$ специальным образом.

Определение. Точка самопересечения гладкой кривой называется *крайней*, если она отделяет стягиваемую петлю.

Определение. Элемент $\sigma \in \pi_1(STM^2)$ называется *простым*, если выполняется одно и только одно из следующих условий:

(1) класс σ тривиален;
(2) существует лежандров узел с отмеченной точкой s_0, класс которого есть σ, такой, что его проекция на M^2 невырождена и нестягиваема, и никакая точка самопересечения проекции не является крайней.

Множество всех простых элементов обозначим через $\mathcal{S}_0$. Через $\mathcal{S}$ обозначим объединение образов множества $\mathcal{S}_0$ при действии группы $\pi_1(STM^2)$ сопряжением.

Лемма 2. *При естественной проекции $\pi_1(STM^2) \to \pi_1(M^2)$ образ множества $\mathcal{S}$ есть $\pi_1(M^2)$. Прообраз любого коориентируемого элемента множества $\pi_1(M^2)$ единственен. Любые два прообраза каждого некоориентируемого элемента отличаются на f^{2k}, $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $\kappa \in \Omega^{s_0,s_0}$ — некоторая кривая, φ — петля на (STM^2, s_0). Произведем регулярную гомотопию кривой κ так, чтобы отмеченная точка узла κ^s прошла петлю φ. Тогда гомотопический тип полученной кривой в STM^2 есть $[\varphi]^{-1}[\kappa][\varphi]$. Таким образом, сопряжениям класса кривой соответствуют ее деформации. Откуда принадлежность элемента γ из $\pi_1(STM^2)$ множеству $\mathcal{S}$ равносильна тому, что лежандров узел-представитель класса γ можно свободно прогомотопировать до ликвидации крайних точек самопересечения.

Первое утверждение леммы геометрически очевидно. Действительно, мы можем просто "сгладить" крайние точки кривой, не изменяя ее гомотопический тип (см. рис. 7).

Докажем второе утверждение. Пусть β — нетривиальный коориентируемый элемент множества $\pi_1(M^2)$. Построим накрытие $p : B \to M^2$ по подгруппе группы $\pi_1(M^2)$, порожденной элементом β. Из построения следует, что B — ориентированная трубка $S^1 \times \mathbb{R}^1$. Ориентация получается поднятием ориентации из окрестности точки m_0 в окрестность точки u — отмеченной точки B. Теперь каждой кривой общего положения $\kappa \in \Omega^{s_0,s_0}$, имеющей тип β, поставим в соответствие число $\nu(\kappa)$. Для этого поднимем κ на поверхность B с отмеченной точкой u и припишем всем крайним точкам самопересечения числа ± 1: $+1$, если ориентация базиса из касательного вектора к ветви, входящей в стягиваемую петлю, и касательного вектора к ветви, выходящей из стягиваемой петли, совпадает с ориентацией B; -1 в противном случае (см. рис. 8). Число $\nu(\kappa)$ есть сумма построенных ± 1. Легко проверить, что $\nu(\kappa)$ не изменяется при регулярных гомотопиях, оставляющих отмеченную точку кривой неподвижной. Абсолютная величина числа $\nu(\kappa)$ не меняется ни при каких регулярных гомотопиях. С кривой κ снимаются все крайние точки самопересечения тогда и только тогда, когда $\nu(\kappa) = 0$ (см. рис. 9).

Представители одного и того же прообраза элемента β в множестве $\pi_1(STM^2)$ имеют одинаковое число ν, представители различных прообразов — разные. Отсюда немедленно следует утверждение леммы для коориентируемого β.

Пусть элемент β некоориентируем. Тогда положим $\nu(\kappa) \in \mathbb{Z}_2$ равным четности количества крайних точек самопересечения кривой. Легко проверить, что $\nu(\kappa)$ не изменяется при произвольных регулярных гомотопиях. С кривой κ снимаются все крайние точки самопересечения тогда и только тогда, когда $\nu(\kappa) = 0$ (см. рис. 10). Представители одного и того же прообраза элемента β в множестве $\pi_1(STM^2)$ имеют одинаковое число ν. Представители прообразов, отличающихся на f^{2k}, имеют также одинаковое число ν, а на f^{2k+1} — разные ($k \in \mathbb{Z}$). Отсюда немедленно следует утверждение леммы для некоориентируемого β. $\square$

Элементом $(0, \beta)$ назовем один из простых прообразов элемента β.

Замечание. Легко показать, что $|l(\beta, \beta^{-1})|$ есть 0 или 1 в зависимости от того, коориентируем ли β (см. рис. 11). Кроме этого, $l(\beta, \beta^{-1}) = \varepsilon(\beta) \cdot l(\beta^{-1}, \beta)$. Если поверхность M^2 ориентируема, то такие элементы β_1 и β_2, что $l(\beta_1, \beta_2) \neq 0$, также могут существовать (см. рис. 12).

Описание множества $\pi_1^{св}(STM^2)$ в случае $M^2 \neq S^2, \mathbb{R}P^2$.

Лемма 3. *Пусть элемент $\delta \in \pi_1(STM^2)$ коориентируем. Тогда $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta) = (i \cdot \varepsilon(\beta), \beta^{-1}\delta\beta)$. Если δ некоориентируем, то найдется такое $w \in \mathbb{Z}$, что $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta) = (i + 2w, \beta^{-1}\delta\beta)$.*

Доказательство. Из леммы 2 для коориентируемого δ следует, что $(k,\beta)^{-1}(0,\delta)(k,\beta) = (0, \beta^{-1}\delta\beta)$, так как $\mathcal{S}$ инвариантно относительно сопряжений, а простой элемент над $\beta^{-1}\delta\beta$ единственен. Но тогда $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta) = (k,\beta)^{-1} f^i (0,\delta)(k,\beta) = f^{i\cdot\varepsilon(\beta)}(0, \beta^{-1}\delta\beta) = (\varepsilon(\beta) i, \beta^{-1}\delta\beta)$.

Для некоориентируемого δ аналогично из леммы 2 найдется такое $q \in \mathbb{Z}$, что $(k,\beta)^{-1}(0,\delta)(k,\beta) = (2q, \beta^{-1}\delta\beta)$. Но тогда $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta) = (k,\beta)^{-1} f^i (0,\delta)(k,\beta) = f^{i\cdot\varepsilon(\beta)}(2q, \beta^{-1}\delta\beta) = (i \cdot \varepsilon(\beta) + 2q, \beta^{-1}\delta\beta) = (i + 2w, \beta^{-1}\delta\beta)$ для некоторого $w \in \mathbb{Z}$. $\square$

Пусть элемент δ коориентируем. Найдем класс элемента (i, δ) в $\pi_1^{св}(STM^2)$. Это есть множество элементов вида $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta)$, где β и k пробегают $\pi_1(M^2)$ и $\mathbb{Z}$ соответственно. Если β коориентируем, то $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta) = (i, \beta^{-1}\delta\beta)$. Если же β некоориентируем, то $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta) = (-i, \beta^{-1}\delta\beta)$.

Определение. *Множеством классов свободной гомотопической эквивалентности с точностью до сохранения ориентации* назовем фактор множества $\pi_1(M^2, m_0)$ по отношениям эквивалентности вида $\delta\gamma\delta^{-1} \sim \gamma$, где $\delta \in \pi_1(M^2)$ коориентируем. Обозначим это множество через $\pi_1^{op}(M^2)$.

Пусть M^2 неориентируемо. Рассмотрим естественное отображение $a_* : \pi_1^{op}(M^2) \to \pi_1^{св}(M^2)$ факторизации $\pi_1^{op}(M^2)$ по соотношению $\beta\gamma\beta^{-1} = \gamma$, где $\beta \in \pi_1(M^2)$ — некоторый некоориентируемый элемент. Отображение a_* сюръективно, прообраз каждого элемента из $\pi_1^{св}(M^2)$ состоит из одного или двух элементов $\pi_1^{op}(M^2)$. Обозначим соответствующие подмножества $\pi_1^{св}(M^2)$ через $\pi_1^{св}{}'(M^2)$ и $\pi_1^{св}{}''(M^2)$. Из прообразов элементов $\pi_1^{св}{}''(M^2)$ выберем по одному элементу $\pi_1^{op}(M^2)$ и составим из них множество ${\pi_1^{op}}_0(M^2) \subset \pi_1^{op}(M^2)$.

Если M^2 ориентируемо, то $\pi_1^{op}(M^2) = \pi_1^{св}(M^2)$. Будем считать, что $\pi_1^{св}{}'(M^2) = \emptyset$, $\pi_1^{св}{}''(M^2) = {\pi_1^{op}}_0(M^2) = \pi_1^{св}(M^2)$. (Заметим, что определения в ориентируемом и неориентируемом случаях хотя и различны по форме, но имеют один смысл.)

Обозначим через $\pi_1^{св,коор}(M^2) \subset \pi_1^{св}(M^2)$ множество классов коориентируемых элементов $\pi_1(M^2)$, а через $\pi_1^{св,некоор}(M^2) \subset \pi_1^{св}(M^2)$ — некоориентируемых. Заметим, что $\pi_1^{св,некоор}(M^2) \subset \pi_1^{св}{}'(M^2)$.

Тогда подмножество элементов множества $\pi_1^{св}(STM^2)$ с коориентируемыми проекциями в $\pi_1(M^2)$ есть $(\mathbb{Z} \times \pi_1^{св}{}''(M^2)) \cup ((N \cup \{0\}) \times (\pi_1^{св}{}'(M^2) \cap \pi_1^{св,коор}(M^2)))$.

Если элемент δ некоориентируем, то $(0,\beta)^{-1}(i - 2k, \delta)(0,\beta) = (i + 2q, \beta^{-1}\delta\beta)$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}$. Откуда $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta) = (0,\beta)^{-1} f^{-k}(i,\delta) f^k (0,\beta) = (0,\beta)^{-1} f^{-2k}(i,\delta)(0,\beta) = f^{-2k\varepsilon(\beta)}(0,\beta)^{-1}(i,\delta)(0,\beta) = (i + 2q - 2k\varepsilon(\beta), \beta^{-1}\delta\beta)$. Следовательно, подмножество элементов множества $\pi_1^{св}(STM^2)$ с некоориентируемыми проекциями есть $\mathbb{Z}_2 \times \pi_1^{св,некоор}(M^2)$.

Геометрическое определение полного индекса кривой в случае $M^2 \neq S^2, \mathbb{R}P^2$.

Каждой кривой мы ставим в соответствие ее полный индекс. При этом вторая (гомотопическая) часть индекса по кривой определяется геометрически. Определим теперь геометрически первую часть — *индекс оборота кривой*, являющийся аналогом индекса Уитни кривой на плоскости (мы уже определили некий его аналог — число $\nu(\kappa)$).

Пусть $\kappa \in \Omega$ — некоторая кривая общего положения. Она задает класс $[\kappa] = \delta \in \pi_1(M^2, \kappa(\star))$. Построим накрытие $p : B \to M^2$ по подгруппе $\pi_1(M^2)$, порожденной δ. Из построения следует, что B — либо ориентируемая трубка, либо лист Мебиуса, либо плоскость $\mathbb{R}^2$.

Введем в окрестности точки o на поверхности B ориентацию, "продолженную вдоль пути ω", $\omega : [0;1] \to M^2$, $\omega(0) = p(o)$, $\omega(1) = m_0$. Пусть $\tilde{\omega} : [0;1] \to B$ — поднятие на B пути ω, причем $\omega = p \circ \tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}(0) = o$. Ориентация в окрестности точки o получается поднятием ориентации из окрестности точки $m_0 \in M^2$ в окрестность точки $\tilde{\omega}(1)$ и продолжением ее вдоль пути $\tilde{\omega}$.

Пусть $\tilde{\kappa}$ — невырожденное гладкое отображение из S^1 в B, такое, что $\kappa = p \circ \tilde{\kappa}$. Рассмотрим пространство STB. Оно гомотопически эквивалентно либо двумерному тору T^2, либо бутылке Клейна Kl, либо S^1 соответственно. Выделим в их фундаментальных группах образующие: a соответствует одному повороту в положительном направлении касательного вектора в точке $o = \tilde{\kappa}(\star)$, b — обходу горлового сечения B в направлении $\tilde{\kappa}$ (b определяется в случае $B \neq \mathbb{R}^2$). Для определения a воспользуемся введенным положительным направлением поворота в окрестности точки o.

Кривая $\tilde{\kappa}$ задает некоторую петлю на STB. Разложим ее класс в $\pi_1(B)$ по образующим. Пусть k — степень a в этом разложении. *Индексом оборота кривой κ, зависящим от пути ω, $i(\kappa, \omega)$* назовем число k. Представители изображены на рис. 13.

Если гомотопический тип γ кривой κ принадлежит $\pi_1^{cв}{}'$ и кривая некоориентируема, то индекс оборота положим равным $i(\kappa,\omega) \pmod 2$. Если кривая коориентируема, то индексом оборота назовем $|i(\kappa,\omega)|$, ω — произвольный путь. Если же $\gamma \in \pi_1^{cв}{}''$, то индексом оборота назовем число $i(\kappa,\omega)$, где ω — такой путь, что $[\omega^{-1}\kappa\omega] \in \pi_1^{op}{}_0$.

Геометрическое условие принадлежности элемента из $\pi_1^{cв}(M^2)$ множеству $\pi_1^{cв}{}'(M^2)$.

Рассмотрим элемент $\gamma \in \pi_1^{cв}(M^2)$. Его принадлежность множеству $\pi_1^{cв}{}'(M^2)$ эквивалентна существованию некоориентируемого класса в $\pi_1(M^2)$, коммутирующего с представителем γ. Следующие леммы выясняют условия коммутирования элементов группы $\pi_1(M^2)$.

Лемма 4. *Любое гладкое двумерное многообразие, фундаментальная группа которого порождена не более, чем двумя элементами, диффеоморфно одному из следующих:*

$$S^2, S^2 \setminus U_1 \approx \mathbb{R}^2, S^2 \setminus (U_1 \cup U_2), S^2 \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_3), \mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2 \setminus U_1, \mathbb{R}P^2 \setminus (U_1 \cup U_2), T^2, T^2 \setminus U_1, Kl, Kl \setminus U_1,$$

где U_i — непересекающиеся замкнутые диски.

Лемма 5. *Любая подгруппа $\pi_1(M^2)$, $M^2 \neq T^2$, Kl, порожденная двумя элементами с нетривиальным соотношением, изоморфна $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Произвольная подгруппа группы $\pi_1(M^2)$ изоморфна фундаментальной группе некоторого накрытия поверхности M^2. Тогда искомая подгруппа есть фундаментальная группа одного из перечисленных в лемме 4 многообразий. Из этих многообразий фундаментальными группами, порожденными двумя элементами с нетривиальным соотношением, обладают только ориентируемая и неориентируемая трубки, T^2 и Kl. Но T^2 и, следовательно, Kl не могут накрывать поверхности, отличные от T^2 и Kl. Фундаментальные группы ориентируемой и неориентируемой трубок равны $\mathbb{Z}$. $\square$

Рассмотрим некоторый элемент $\gamma \in \pi_1(M^2)$. Пусть $\pi_1(Kl) = \langle a, b \rangle$, причем a коориентируем, b некоориентируем.

Лемма 6. *Если либо $M^2 \neq T^2$, Kl и γ нетривиален, либо $M^2 = Kl$ и γ некоориентируем, то $\exists\, n \in N$, $\theta \in \pi_1(M^2) : \theta^n = \gamma$ и $\forall k \geq n\ \forall \tilde{\theta} \in \pi_1(M^2)\ \tilde{\theta}^k \neq \gamma$. Все коммутирующие с γ элементы являются степенями элемента θ. Если же M^2 есть либо T^2, либо Kl и $\gamma = a^l b^{2j}$, $l \neq 0$, то γ коммутирует со всеми коориентируемыми элементами. Если же $M^2 = Kl$ и $\gamma = b^{2j}$, то γ коммутирует со всеми элементами группы $\pi_1(Kl)$.*

Доказательство. Пусть $M^2 \neq T^2$, Kl. Очевидно, что $\exists n$, $\forall k \geq n\ \forall \tilde{\theta} \in \pi_1(M^2)\ \tilde{\theta}^k \neq \gamma$. Покажем единственность θ. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \pi_1(M^2)$ таковы, что $\theta_1^n = \theta_2^n = \gamma$. Тогда подгруппа $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$ по лемме 5 изоморфна $\mathbb{Z}$. Но в $\mathbb{Z}$ из равенства $\theta_1^n = \theta_2^n$ следует $\theta_1 = \theta_2$.

Пусть теперь $\alpha \in \pi_1(M^2)$ коммутирует с γ. Тогда подгруппа $\langle \theta, \alpha \rangle$ по лемме 5 изоморфна $\mathbb{Z}$. По свойствам θ, θ — образующая $\mathbb{Z}$. Тогда α — некоторая степень θ.

В случае $M^2 = T^2$ группа $\pi_1(T^2)$ абелева.

В случае $M^2 = Kl$ проведем вычисления:

$$a^{k_1} b^{w_1} a^{k_2} b^{w_2} = a^{k_1 + (-1)^{w_1} k_2} b^{w_1 + w_2};$$

$$a^{k_2}b^{w_2}a^{k_1}b^{w_1} = a^{k_2+(-1)^{w_2}k_1}b^{w_2+w_1};$$

Поэтому два элемента коммутируют тогда и только тогда, когда $k_1(1-(-1)^{w_2}) = k_2(1-(-1)^{w_1})$. Равенство достигается в пяти случаях:

(1) числа w_1 и w_2 четны;
(2) число w_1 четно и $k_1 = 0$;
(3) число w_2 четно и $k_2 = 0$;
(4) $k_1 = k_2 = 0$;
(5) числа w_1 и w_2 нечетны и $k_1 = k_2$.

Откуда если w_1 нечетно, то $a^{k_1}b^{w_1}$ коммутирует только с $a^{k_1}b^{w_2}$, w_2 — нечетно, и b^{w_2}, w_2 — четно. Все эти элементы есть степени элемента $\theta = a^{k_1}b$. Если w_1 — четно, то $a^{k_1}b^{w_1}$ коммутирует с $a^{k_2}b^{w_2}$, w_2 — четно. Если же еще и $k_1 = 0$, то b^{w_1} коммутирует со всеми элементами. □

Следствие. *Пусть M^2 неориентируемо и не является RP^2. Элемент $\gamma \in \pi_1^{св}(M^2)$ лежит в $\pi_1^{св\prime}(M^2)$ тогда и только тогда, когда он либо тривиален, либо свободно гомотопически эквивалентен несколько раз пройденной некоориентируемой петле.*

Доказательство. Пусть γ нетривиален, $\tilde{\gamma} \in \pi_1(M^2)$ — представитель γ, $M^2 \neq Kl$. Элемент $\gamma \in \pi_1^{св\prime}(M^2)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\gamma}$ коммутирует с некоторым некоориентируемым элементом из $\pi_1(M^2)$. Рассмотрим θ из леммы 6 для $\tilde{\gamma}$. Тогда предыдущее условие равносильно тому, что некоторая степень θ некоориентируема, то есть сам θ некоориентируем. Что, безусловно, равносильно тому, что $\tilde{\gamma}$, а, значит, и γ гомотопически эквивалентен несколько раз пройденной некоориентируемой петле.

В случае $M^2 = Kl$ элемент коммутирует с некоориентируемым тогда и только тогда, когда он либо сам некоориентируем, либо есть b^{2j}, b — некоориентируемая образующая. □

Доказательство теоремы 2.

Снова обозначим через D один из стратов J^+, J^- или St, а через AD — множество соответствующих индексов. Пусть $\alpha \in AD$ — какой-либо j^+, j^- или st-индекс. Множество D_α является замыканием множества кривых, на которых есть особые точки типа D, которые имеют индекс α.

Обозначим через $\tilde{D}$ множество коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} STM^2 \arrow[d] & S^1 \arrow[l, "\kappa^s"'] \arrow[d, "sc"] \\ X & K \arrow[l, "h"'] \end{tikzcd}.$$

В ней участвует проекция $sc : S^1 \to K$, где K есть букет q окружностей. Здесь число q равно 2 (случай j-индекса) или 3 (случай st-индекса). Под многообразием X мы подразумеваем либо PTM^2, либо M^2 соответственно. Далее, κ^s — лежандров узел, соответствующий кривой $\kappa \in \Omega$. Пусть $\tilde{D}_\alpha \subset \tilde{D}$ — множество соответствующих диаграмм индекса α.

Лемма 7. *Пространство $\tilde{D}_\alpha$ непусто.*

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь коммутативную диаграмму, представляющую индекс α:

$$\begin{tikzcd} STM^2 \arrow[d] & S^1 \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "sc"] \\ X & K \arrow[l, "h"'] \end{tikzcd}.$$

Выделим те точки, которые склеиваются при отображении sc. Выделенные точки делят окружность S^1 на несколько дуг: $S^1 = I_1 \cup \dots \cup I_q$. Эти дуги являются прообразами окружностей из букета K. Отображение $g : S^1 \to STM^2$ при ограничении на эти дуги дает q путей в пространстве STM^2. По лемме 1 эти пути гомотопией, не двигающей концы путей, можно сделать лежандровыми поднятиями

C^1-гладких путей на M^2. Так как концы путей остались теми же, то можно склеить новое отображение $\tilde{g} : S^1 \to STM^2$, которое будет уже лежандровым поднятием C^1-гладкой кривой. Образы при отображении $\tilde{g}$ q склеивающихся при отображении sc точек те же, что при отображении g. Поэтому при проекции $STM^2 \to X$ они также склеиваются. Следовательно, существует отображение $\tilde{h} : K \to X$, замыкающее диаграмму. Итак, соответствующая точка полученной кривой имеет индекс α. $\square$

В пространстве $\tilde{D_\alpha}$ выделяется подмножество $\tilde{D_\alpha^0}$ диаграмм, соответствующих кривым, у которых:

(1) либо не более двух простых особенностей типа D и индекса α;
(2) либо одна не более чем сдвоенная особенность типа D и индекса α.

Ограничения на особенности других типов или индексов не накладываются. Множество $\tilde{D_\alpha^0}$ открыто и всюду плотно в $\tilde{D_\alpha}$. Кроме того, любой путь, соединяющий две точки из $\tilde{D_\alpha^0}$, можно пошевелить так, чтобы он целиком лежал в $\tilde{D_\alpha^0}$. Поэтому коразмерность множества $\tilde{D_\alpha} \setminus \tilde{D_\alpha^0}$ в $\tilde{D_\alpha}$ не меньше двух.

Рассмотрим естественное отображение $N : \tilde{D_\alpha} \to D_\alpha$. Оно ставит в соответствие диаграмме, построенной по кривой κ, саму кривую κ. В окрестности любой точки из $\tilde{D_\alpha^0}$ отображение N переводит $\tilde{D_\alpha}$ в одну из локально неприводимых компонент страта D_α. Это можно проверить, выписав версальные деформации данных особенностей. Следовательно, в силу открытости множества $\tilde{D_\alpha^0}$, образ каждой его компоненты связности лежит в какой-то неприводимой компоненте страта D_α. Так как коразмерность множества $\tilde{D_\alpha} \setminus \tilde{D_\alpha^0}$ не меньше двух, то компонентам связности множества $\tilde{D_\alpha^0}$ соответствуют компоненты связности множества $\tilde{D_\alpha}$. Поэтому отображение N устанавливает взаимооднозначное соответствие между компонентами связности множества $\tilde{D_\alpha}$ и неприводимыми подстратами страта D_α.

Лемма 8. *Пространство $\tilde{D_\alpha}$ связно.*

Доказательство. Поступим также, как и при доказательстве теоремы 1. Пусть две диаграммы, полученные из кривых κ_0 $(g_0 = \kappa_0^s)$ и κ_1 $(g_1 = \kappa_1^s)$, имеют один и тот же индекс. Рассмотрим соответствующую гомотопию (g_t, sc_t, h_t). Обозначим отмеченную точку букета K через b. Пусть $x_1(t), \dots, x_q(t) \in S^1$ — прообразы точки b при отображении sc_t. Произведем регулярную гомотопию κ_t $(0 \le t \le \frac{1}{2})$ кривой κ_0 так, чтобы $\kappa_t^s(x_i(t)) \equiv g_{2t}(x_i(2t))$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$. Она порождает гомотопию $(\kappa_t^s, sc_{2t}, \tilde{h}_t)$. Здесь отображение $\tilde{h}_t$ замыкает соответствующую диаграмму.

Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что диаграммы $(\kappa^s_{\frac{1}{2}}, sc_1, \tilde{h}_{\frac{1}{2}})$ и (κ_1^s, sc_1, h_1) гомотопны в классе диаграмм с постоянной проекцией $S^1 \to K$ и неподвижными образами точек $x_i(1)$ при отображении g.

Рассмотрим один из тех отрезков, на которые делят окружность S^1 точки $x_i(1)$. Для него по лемме 1 такая гомотопия может быть выбрана уже в классе лежандровых поднятий C^1-иммерсий этого отрезка в M^2. Склеивая из отрезков окружность, получаем, что такая гомотопия $(\frac{1}{2} \le t \le 1)$ может быть выбрана в классе диаграмм, построенных по кривым на M^2.

Результирующая гомотопия соединяет две точки из $\tilde{D_\alpha}$ путем внутри $\tilde{D_\alpha}$. $\square$

Итак, компонента связности множества $\tilde{D_\alpha}$ только одна. Поэтому неприводимый подстрат страта D_α также только один, то есть страт D_α неприводим.

Доказательство теоремы 4.

Мы найдем $\pi_1(\Omega_\gamma)$, где γ — некоторый полный индекс. Затем при доказательстве теоремы 3 проверим равенство нулю значений требуемых коциклов на образующих группы $\pi_1(\Omega_\gamma)$.

Отметим точку в Ω_γ — некоторую кривую κ_0, такую, что $\kappa_0^s(\star) = s_0$. Узел κ_0^s задает класс $\tilde{\gamma} \in \pi_1(STM^2, s_0)$.

Приведем пример нетривиальной петли на пространстве Ω_γ.

Определение. Операция *"прогон петли" вдоль коориентируемой кривой* (рис. 14) состоит из трех этапов:

(1) "рождения" пары петель (рис. 14a);

(2) прогона рожденной петли по кривой (рис. 14б);
(3) "смерти" получившейся пары петель (рис. 14в).

Пространство Ω_γ естественно расслоено над STM^2 отображением fp, которое сопоставляет кривой отмеченную точку ее лежандрова узла. При этом $fp(\kappa_0) = s_0$. Поэтому определен гомоморфизм $fp_* : \pi_1(\Omega_\gamma, \kappa_0) \to \pi_1(STM^2, s_0)$.

Пример. Для "прогона петли" соответствующая петля, описываемая отмеченной точкой лежандрова узла кривой, является одним обходом слоя расслоения $STM^2 \to M^2$ над точкой s_0 в положительном направлении.

Лемма 9. *Гомоморфизм fp_* инъективен.*

Доказательство. Пусть $\sigma : [0,1] \to \Omega_\gamma$ — петля, $\sigma(0) = \sigma(1) = \kappa_0$, причем петля $\sigma(t)(\star)$ стягиваема. Рассмотрим стягивающую гомотопию $\tilde{\sigma} : [0,1] \times [0,1] \to STM^2$, $\tilde{\sigma}(t,0) = \sigma(t)(\star)$, $\tilde{\sigma}(t,1) = \tilde{\sigma}(1,t) = \tilde{\sigma}(0,t) = s_0$ для любого $0 \leq t \leq 1$. Построим непрерывное отображение $\lambda : [0,1] \times [0,1] \to diff(M^2)$, такое, что при любых $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ выполняется $d\lambda(t_1,t_2)(\sigma(t_1)(\star)) = \tilde{\sigma}(t_1,t_2)$, $\lambda(0,t_2) = \lambda(1,t_2) = \lambda(t_1,0) = id$. Здесь через $diff(M^2)$ обозначено пространство диффеоморфизмов поверхности M^2, id — тождественный диффеоморфизм, $d\lambda$ — естественное поднятие λ до диффеоморфизма пространства STM^2. Гомотопия $(t_1,t_2) \mapsto \lambda(t_1,t_2) \circ \sigma(t_1)$ переводит петлю $\lambda(t_1,0) \circ \sigma(t_1) = \sigma(t_1)$ в петлю $\lambda(t_1,1) \circ \sigma(t_1)$. Но петля $\lambda(t_1,1) \circ \sigma(t_1)$ задает регулярную гомотопию кривой κ_0, не двигающую отмеченную точку узла κ_0^s. То есть для любого $0 \leq t_1 \leq 1$ $\lambda(t_1,1) \circ \sigma(t_1) \in \Omega^{s_0,s_0}$. Но такая петля стягиваема, что следует из следующей леммы. Поэтому стягиваема и петля σ. $\square$

Лемма 10. *Все компоненты связности пространства $\Omega_\gamma^{s_0,s_0}$ имеют тривиальные фундаментальные группы.*

Доказательство. По лемме 1 $\pi_1(\Omega_\gamma^{s_0,s_0}) = \pi_2(STM^2)$. Так как поверхность M^2 накрывается либо плоскостью $\mathbb{R}^2$, либо сферой S^2, то пространство STM^2 накрывается либо $S^1 \times \mathbb{R}^2$, либо $\mathbb{R}P^3 = STS^2$. У обоих этих пространств группы π_2 тривиальны. $\square$

Лемма 11. *Образ мономорфизма fp_* состоит из всех элементов группы $\pi_1(STM^2)$, коммутирующих с $\tilde{\gamma}$.*

Доказательство. Пусть элемент $\tilde{\beta}$ принадлежит образу мономорфизма fp_*. Тогда существует регулярная гомотопия, при которой отмеченная точка лежандрова узла кривой описывает петлю типа $\tilde{\beta}$. После такой регулярной гомотопии тип узла будет равен $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\gamma}\tilde{\beta}$, который должен совпадать с $\tilde{\gamma}$. Откуда получаем: $\tilde{\beta}^{-1}\tilde{\gamma}\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$.

Теперь надо выяснить, какие из полученных элементов могут быть реализованы петлями на Ω_γ.

Случай $M^2 \neq \mathbb{R}P^2, S^2$.

Пусть $\tilde{\gamma} = (i,\delta)$, $\tilde{\beta} = (k,\beta)$, $\delta,\beta \in \pi_1(M^2)$. Так как элементы (k,β) и (i,δ) коммутируют, то элементы δ и β также должны коммутировать. Получим теперь ограничения на индекс оборота и проверим, реализуются ли петли, удовлетворяющие этим ограничениям.

A). Элемент δ коориентируем. Тогда по лемме 3 $(k,\beta)^{-1}(i,\delta)(k,\beta) = (i \cdot \varepsilon(\beta), \beta^{-1}\delta\beta)$. Если β коориентируем, то имеем: $-k + i + k = i$ — всегда выполняется. Если β некоориентируем, то получаем: $k - i - k = i$, или $i = 0$, то есть коммутирующие элементы (k,β) с некоориентируемым β существуют только тогда, когда $i = 0$.

Класс петли-проекции "прогона петли" есть $(1,e)$, где $e \in \pi_1(M^2)$ — тривиальный элемент. Поэтому везде требуется построить петли, дающие в проекции $(0,\beta)$. Элементы β выделяются приведенным выше условием. Далее разбираются случаи, выделенные в лемме 6, и случаи равенства нулю числа i.

1. Поверхность M^2 не является тором или бутылкой Клейна, элемент δ нетривиален, $i \neq 0$. Рассмотрим θ из леммы 6. Тогда $\beta = \theta^j$ для некоторого j. Так как $i \neq 0$, то β — коориентируем, k — любое. Итак, по лемме 6 образ отображения fp_* порожден коммутирующими элементами $(1,e)$ и $(0,\tilde{\theta})$. Здесь $\tilde{\theta}$ есть θ, если θ коориентируем, или в θ^2 в противном случае. Предъявим петлю для $(0,\tilde{\theta})$. Построим накрытие $p : B \to M^2$, $\pi_1(B) = \mathbb{Z}$ ($B = \mathbb{R} \times S^1$ — ориентируемая трубка), и ее образующая при накрытии переходит в $\tilde{\theta}$. Тогда требуемая петля на Ω_γ получается композицией полного поворота трубки и проектирования на M^2. Таким образом в данном случае $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. Поверхность M^2 не является тором или бутылкой Клейна, элемент δ нетривиален, $i = 0$. Тогда возьмем θ из леммы 6. Тогда $\beta = \theta^j$ для некоторого j. Так как $i = 0$, то β — любой, k — любое. Итак, по лемме 6 образ отображения fp_* порожден некоммутирующими элементами $(1, e)$ и $(0, \theta)$; $(0, \tilde{\theta})(1, e)(0, \tilde{\theta})^{-1} = (\varepsilon(\theta), e)$. Предъявим петлю для $(0, \theta)$. Построим накрытие $p : B \to M^2$, $\pi_1(B) = \mathbb{Z}$, и ее образующая при накрытии переходит в θ. Тогда требуемая петля на Ω_γ получается композицией регулярной гомотопии кривой на горловое сечение трубки B, инвариантное при поворотах; полного поворота трубки; обратной регулярной гомотопии и проектирования всего на M^2. Таким образом, если θ коориентируем, то $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Если же θ некоориентируем, то $\pi_1 = \pi_1(Kl) = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

3. Элемент δ тривиален, $i \neq 0$. Так как $i \neq 0$, то β — любой коориентируемый элемент, k — любое. Образ отображения fp_* порожден $(1, e)$ и коммутирующими с ним элементами вида $(0, \theta)$, $\theta \in \pi_1^{\text{коор}}(M^2)$. Здесь через $\pi_1^{\text{коор}}(M^2)$ обозначена подгруппа всех коориентируемых элементов группы $\pi_1(M^2)$. Предъявим петлю для $(0, \theta)$. Построим накрытие $p : \mathbb{R}^2 \to M^2$. Тогда требуемая петля на Ω_γ получается композицией "сжатия" кривой "почти в точку"; переноса ее по $\mathbb{R}^2$ в соответствующий прообраз точки m_0; "растяжения" и проектирования этой регулярной гомотопии на M^2. Таким образом, в данном случае $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \pi_1^{\text{коор}}(M^2)$.

4. Элемент δ тривиален, $i = 0$. Тогда β — любой элемент, k — любое. Образ отображения fp_* есть вся группа $\pi_1(STM^2)$. Предъявим петлю для $(0, \theta)$. Построим накрытие $p : \mathbb{R}^2 \to M^2$. Тогда требуемая петля на Ω_γ получается композицией "сжатия" кривой "почти в точку"; переноса ее по $\mathbb{R}^2$ в соответствующий прообраз точки m_0; "растяжения"; "обращения" (рис. 15), если θ — некоориентируем, и проектирования всей регулярной гомотопии на M^2. Итак, $\pi_1 = \pi_1(STM^2)$.

5. Поверхность M^2 есть тор или бутылка Клейна, δ и i — любые кроме того случая, когда $M^2 = Kl$, $i = 0$, $\delta = b^{2j}$. Здесь через b снова обозначена некоориентируемая образующая группы $\pi_1(Kl)$. Тогда либо из-за того, что $i \neq 0$, либо по лемме 6, когда $i = 0$, β — любой коориентируемый элемент, k — любое. Образ отображения fp_* есть $\pi_1^{\text{коор}}(STM^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Петля для $(0, \theta)$ реализуется естественным сдвигом из группы движений T^2 (в случае Kl — двулистно накрывающего). Таким образом, в данном случае $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6. Поверхность M^2 есть бутылка Клейна Kl, $i = 0$, $\delta = b^{2j}$. Тогда по лемме 6 β — любой элемент, k — любое число. Образ отображения fp_* есть все $\pi_1(STM^2)$. Предъявим петлю для $(0, \theta)$. Она получается композицией регулярной гомотопии кривой на окружность бутылки Клейна, реализующую образующую b; движения бутылки Клейна; обратной регулярной гомотопии и проектирования всего на Kl. Таким образом, $\pi_1 = \pi_1(STKl)$.

Б). Элемент δ некоориентируем. Возьмем элемент $\theta \in \pi_1(M^2)$ и число n, удовлетворяющие условию леммы 6. Очевидно, что θ некоориентируем, и число n нечетно. Пусть $n = 2w + 1$.

Лемма 12. $(i, \delta) = (i, \theta)^n$.

Доказательство. Так как $n = 2w + 1$, то $(i, \theta)^n = (i, \theta)^{2w}(i, \theta)$. Так как положительная степень простого элемента $(0, \theta)$ является также простым элементом, и простой элемент над θ^{2w} единственен (лемма 2), то $(0, \theta)^{2w} = (0, \theta^{2w})$. Далее, $(i, \theta)(i, \theta) = f^i(0, \theta)f^i(0, \theta) = f^{i-i}(0, \theta)^2 = (0, \theta^2)$. Поэтому $(i, \theta)^{2w} = (0, \theta^{2w})$. Откуда $(i, \theta)^n = (i, \theta)^{2w}(i, \theta) = (0, \theta^{2w})(i, \theta) = (i + l(\theta^{2w}, \theta), \delta)$. Следовательно, равенство $(i, \theta)^n = (i, \delta)$ равносильно равенству $l(\theta^{2w}, \theta) = 0$ (см. рис. 16). $\square$

Лемма 13. *Элемент группы $\pi_1(STM^2)$ коммутирует с (i, δ) тогда и только тогда, когда он является степенью элемента (i, θ).*

Доказательство. Очевидно, что все степени элемента (i, θ) коммутируют с (i, δ). Пусть элемент (k, β) также коммутирует с (i, δ). Тогда по лемме 6 $\beta = \theta^r$. Пусть $(k, \beta) = f^d(i, \theta)^r$. Выпишем условие коммутирования, учитывая, что $\varepsilon(\delta) = -1$: $(0, e) = (k, \beta)^{-1}(i, \delta)(k, \beta)(i, \delta)^{-1} = (i, \theta)^{-r} f^{-d}(i, \delta) f^d (i, \theta)^r (i, \delta)^{-1} = (i, \theta)^{-r} f^{-d} f^{-d}(i, \delta)(i, \theta)^r (i, \delta)^{-1} = f^{-2d \cdot \varepsilon(\theta^r)}(i, \theta)^{-r}(i, \delta)(i, \theta)^r(i, \delta)^{-1} = f^{-2d \cdot \varepsilon(\theta^r)}(0, e)$. Откуда $d = 0$, то есть любой элемент, коммутирующий с (i, δ), является степенью элемента (i, θ). $\square$

Итак, образ отображения fp_* порожден элементом (i, θ). Предъявим петлю для (i, θ). Построим накрытие $p : B \to M^2$ по подгруппе группы $\pi_1(M^2)$, порожденной θ. Поверхность B является листом Мебиуса. Требуемая петля на Ω_γ получается композицией (см. рис. 17) регулярной гомотопии кривой к простейшему виду; полного поворота листа Мебиуса; продвижения i петель через отмеченную точку; обратной регулярной гомотопии; проектирования всего на M^2. Таким образом, в данном случае $\pi_1 = \mathbb{Z}$.

Случай $M^2 = S^2$. Здесь $\pi_1(STS^2) = \mathbb{Z}_2$ абелева, откуда $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z}_2$. Нетривиальный элемент действует просто поворотом S^2, сохраняющим касательное пространство в точке m_0.

Случай $M^2 = \mathbb{R}P^2$. Здесь $\pi_1(ST\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_4$ абелева, поэтому $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z}_4$. Действие нетривиального коориентируемого элемента (2 в аддитивной записи $\mathbb{Z}_4$) на некоориентируемую кривую (1) приведено на рис. 18. Действие некоориентируемого элемента, соответствующего 1, на кривой типа 2 приведено на рис. 19. Остальные действия на остальных типах кривых либо аналогичны, либо получаются композицией уже описанных.

Доказательство теоремы 3 в случае $M^2 \neq S^2$, $\mathbb{R}P^2$.

Проверим равенство нулю значений коциклов теоремы 3 на образующих группы $\pi_1(\Omega_\gamma)$.

В случае А-1 элемент δ есть $\tilde{\theta}^n$ (n есть либо $\frac{j}{2}$, либо j). Композицию n сдвигов можно заменить на композицию перепараметризации (это петля на Ω_γ, индуцируемая поворотом окружности-прообраза S^1: если $S^1 = \mathbb{R}/\mathrm{mod}\ 1$, то $\varphi(t)(x) = \kappa_0(x+t)$) и нескольких "прогонов петли". Петля параметризации не пересекается ни с одним из стратов, поэтому требуемое равенство нулю значения коциклов на сдвигах следует из равенства нулю значения коциклов на "прогонах петли", что будет показано далее.

В случае А-2 элемент δ есть θ^j. Композиция j сдвигов, соответствующих $(0, \theta)$, также заменяется на композицию перепараметризации и нескольких "прогонов петли".

В случае Б $(i, \delta) = (i, \theta)^n$. Композиция n сдвигов, соответствующих $(0, \theta)$, есть просто перепараметризация кривой.

В случаях А-3, А-4 (θ — коориентируем), А-5, А-6 построенные петли при правильном выборе отмеченной кривой κ_0 не пересекаются со стратами, поэтому значения на них равны нулю в силу определений. В случае А-4, θ — некоориентируем, значение коциклов на петле, соответствующей $(0, \theta^2)$, равно нулю. Поэтому значение и на петле, соответствующей $(0, \theta)$, равно нулю.

Проверка для "прогона петли".

Теперь рассмотрим операцию "прогона петли" по кривой. Сначала проверим, что сумма значений коциклов на этапах "рождения" и "смерти" пары петель равна нулю (рис. 20). Так как петля может быть сделана сколь угодно малой, то нас будут интересовать только проходы прогоняемой петли через точки самопересечения кривой. Так как "прогон петли" определялся только для коориентируемых кривых, то далее будем рассматривать только коориентируемые кривые.

Обе петли, отделяемые точкой самопересечения, коориентируемы.

Пересечения со стратом J^+, возникающие из данной точки самопересечения, приведены на рис. 21. Деформация пересекается с одной и той же компонентой страта по одному разу в противоположных направлениях. Поэтому коциклы, двойственные к компонентам J^+, которые соответствуют кривым с двумя коориентируемыми петлями, когомологичны нулю.

Пересечения со стратом J^-, возникающие из данной точки самопересечения, ведут себя аналогично.

Для тройных самопересечений см. рис. 22. Регулярная гомотопия пересекается с двумя компонентами страта St по одному разу в различных направлениях. Индексы α_1 и α_2 этих компонент содержат тривиальный класс и отличаются порядком петель. При прохождении маленькой петли через точку самопересечения того же типа, но "противоположного" знака, происходит пересечение деформации с компонентами тех же индексов, но в противоположном направлении (см. рис. 23). Поэтому для того, чтобы были когомологичны нулю коциклы, двойственные к компонентам страта St индексов α_1 и α_2, необходимо и достаточно, чтобы либо оба индекса совпадали, либо на всей кривой число точек самопересечения типа α_i, которым приписан знак "+", совпадало с числом точек, которым приписан знак "–". Совпадение индексов α_1 и α_2 происходит тогда и только тогда, когда либо еще одна петля тривиальна, либо тип точки самопересечения симметричен.

Это и отражено в определении коориентируемой сбалансированности типов точек самопересечения кривой и парности st-индексов первого типа. В случае коориентируемой несбалансированности когомологична нулю будет только сумма соответствующих коциклов, ибо таким образом вклады одной точки самопересечения компенсируются.

Обе петли, отделяемые точкой самопересечения, некоориентируемы.

Пересечения со стратом J^+, возникающие из данной точки самопересечения, изображены на рис. 24. Регулярная гомотопия пересекается с двумя компонентами страта J^+ по одному разу в одном и том же направлении. Индексы α_1 и α_2 этих компонент отличаются индексами оборота петель. При прохождении маленькой петли через точку самопересечения кривой того же типа, но "противоположного" знака, происходит пересечение деформации с компонентами страта J^+ тех же индексов, но в противоположном направлении (см. рис. 25). Поэтому для того, чтобы были когомологичны нулю коциклы, двойственные к компонентам страта индексов α_1 и α_2, необходимо, чтобы на всей кривой число точек самопересечения типа α_i, которым приписан знак "+", совпадало с числом точек, которым приписан знак "–".

Это и отражено в определении некоориентируемой сбалансированности точек самопересечения кривой и парности j^+-индексов. В случае некоориентируемой несбалансированности когомологична нулю будет только разность соответствующих коциклов, ибо таким образом вклады одной точки самопересечения компенсируются.

Ситуация с J^- разбирается аналогично.

Случай страта St разбирается аналогично случаю коориентируемых петель. Различие состоит в том, что каждая точка самопересечения "дает вклад" не $+$ и $-$, как ранее, а $+$ и $+$ или $-$ и $-$ в различные компоненты. Поэтому для того, чтобы были когомологичны нулю коциклы, двойственные к компонентам страта индексов α_1 и α_2, необходимо, чтобы на всей кривой число точек самопересечения типа α_i, которым приписан знак "+", совпадало с числом точек, которым приписан знак "–". Поэтому в случае некоориентируемой несбалансированности когомологична нулю будет только разность соответствующих коциклов.

Доказательство теоремы 3 в случае $M^2 = S^2$ или $\mathbb{R}P^2$.

В случае $M^2 = S^2$ приведенные образующие группы $\pi_1(\Omega_\gamma)$ не пересекают стратов.

В случае $M^2 = \mathbb{R}P^2$ вдоль всех петель можно выписать приращения всех рассматриваемых коциклов и получить, что все они равны 0 (см. рис. 18, 19).

Отыскание старших гомотопических групп.

Теперь найдем группу $\pi_k(\Omega_\gamma)$ при $k > 1$. Для этого снова рассмотрим локально тривиальное расслоение $fp : \Omega_\gamma \to STM^2$ со слоем $\Omega_\gamma \cap \Omega^{s,s}$. Так как $\pi_k(\Omega^{s,s}) = \pi_{k+1}(STM^2) = 0$ при $M^2 \neq \mathbb{R}P^2, S^2$, то из точной гомотопической последовательности расслоения получаем, что $\pi_k(\Omega_\gamma)$ тривиальны, $k > 1$.

Список литературы.

1. Arnold V.I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications // Singularities and Bifurcations, Advances in Soviet Mathematics, 21, 1994.

2. Aicardi F. Invariant polynomial of framed knots in the solid torus and its application to wave fronts and legendrian knots // Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol. 5, N.6 (1996).

3. Tchernov V. Arnold-type invariants of curves on surfaces and homotopic groups of the space of curves // Preprint, Uppsala University, 1997/21.

4. Smale S. Regular curves on Riemannian manifolds // Transactions of AMS, 87, 1958, 492–512.

115573, Москва, ул. Мусы Джалиля, д. 32, корп. 2, кв. 254.

E-mail address: ainsh@ium.ips.ras.ru