О координатных векторных полях отображения Ляшко-Лоенги.

Карпенков О. Н.

Введение.

В предлагаемой работе выводятся формулы координатных полей отображения Ляшко-Лоенги в некотором специальном сечении пространства многочленов.

Автор выражает благодарность В. И. Арнольду, В. М. Закалюкину и П. Е. Пушкарю за оказанную помощь.

Рассмотрим пространство многочленов вида $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x$.

Определение 1. Отображение Ляшко-Лоенги (см. [1,3,4]) ставит многочлену степени n с комплексными (действительными) коэффициентами ставит в соответствие многочлен на единицу меньшей степени, корнями которого являются критические значения исходного. Можно дать равносильное определение: многочлену ставится в соответствие неупорядоченный набор критических значений.

Определение 2. Назовём координатным векторным полем отображения Ляшко-Лоенги такое поле на прообразе отображения, при движении по траекториям которого одно критическое значение линейно увеличивается, а остальные остаются постоянными.

О применении координатных полей скажем, что они используются, например, при изучении топологических свойств устойчивых лагранжевых многообразий с особенностями [2].

Обычно размерность пространства (прообраза) уменьшают на один, полагая сумму корней многочлена равной нулю ($a_{n-1} = 0$). Мы же рассмотрим гиперплоскость многочленов с одной из критических точек в нуле и со значением ноль ($a_1 = 0$). Таким образом мы имеем выделенное критическое значение, при равноправных остальных.

Нужно заметить, что любую критическую точку многочлена можно линейными заменами прообраза ($x' = x + a$) и образа (добавлением констант к $f(x)$) привести в $(0, 0)$ (то есть к многочлену следующего вида: $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2$). Сделать это можно несколькими различными способами, в зависимости от того, какую критическую точку сдвигаем в ноль. (Если построенное ниже поле "сдвинуть" обратно, то мы получим столько полей, сколько имеется различных простых критических точек у данного многочлена). В вещественном случае мы приводим в начало координат лишь вещественные критические точки.

Формулы координатных векторных полей и их вычисление.

В этом разделе мы будем рассматривать комплексный случай. В вещественном — необходимо следить за комплексной сопряжённостью, а, в остальном, всё аналогично.

Теорема 1. В области $a_2 \neq 0$ ($a_1 = 0$), каждой точке которой соответствует многочлен с простой критической точкой в нуле, можно задать векторное поле, сохраняющее все разности между критическими значениями в критических точках отличных от нуля. Критическое значение в нуле изменяется на действительное число t по отношению к другим критическим значениям при движении по траектории поля за время t, если таковое возможно.

(В комплексном случае необходимо рассматривать ещё мнимое изменение it. В результате, координаты полученного поля для изменения t нужно домножить на i.)

Доказательство. Зафиксируем некоторый многочлен с $a_2 = 0$. Пусть $0, k_2, \ldots, k_{n-1}$ — критические точки исходного многочлена.

Запишем приращение критических значений в виде системы уравнений. Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2$ — исходный многочлен, $f_{\Delta(\varepsilon)}(x) = x^n + (a_{n-1} + \Delta_{n-1}(\varepsilon))x^{n-1} + \ldots + (a_2 + \Delta_2(\varepsilon))x^2$ — изменённый.

Заметим, что при малых ε критические точки сдвинутся на $\circ(1)$. Так как в критических точках производная равна нулю, то разности значений в критических точках старого и нового многочленов будут различаться на $\circ(\varepsilon)$, поэтому при малых ε можно не учитывать движения самой критической точки, т.е. считать, что они остаются на одном месте.

$$\left\{\begin{array}{ccc} (f_{\Delta(\varepsilon)}(k_2)-f_{\Delta(\varepsilon)}(0))-(f(k_2)-f(0)) & = & \varepsilon \\ (f_{\Delta(\varepsilon)}(k_3)-f_{\Delta(\varepsilon)}(0))-(f(k_3)-f(0)) & = & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_{\Delta}(k_{n-1}(\varepsilon))-f_{\Delta(\varepsilon)}(0))-(f(k_{n-1})-f(0)) & = & \varepsilon \end{array}\right. .$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\left\{\begin{array}{ccc} k_2^{n-1}\Delta_{n-2}(\varepsilon)+k_2^{n-2}\Delta_{n-3}(\varepsilon)+\cdots+k_2^2\Delta_1(\varepsilon) & = & \varepsilon \\ k_3^{n-1}\Delta_{n-2}(\varepsilon)+k_3^{n-2}\Delta_{n-3}(\varepsilon)+\cdots+k_3^2\Delta_1(\varepsilon) & = & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n-1}^{n-1}\Delta_{n-2}(\varepsilon)+k_{n-1}^{n-2}\Delta_{n-3}(\varepsilon)+\cdots+k_{n-1}^2\Delta_1(\varepsilon) & = & \varepsilon \end{array}\right. .$$

Решим явно систему, используя формулу Крамера.

$$\Delta_l(\varepsilon)=\frac{\begin{vmatrix} k_2^{n-1} & \dots & \varepsilon & \dots & k_2^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n-1}^{n-1} & \dots & \varepsilon & \dots & k_{n-1}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_2^{n-1} & \dots & k_2^{l+1} & \dots & k_2^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n-1}^{n-1} & \dots & k_{n-1}^{l+1} & \dots & k_{n-1}^2 \end{vmatrix}}.$$

Решение данной системы существует и единственно , когда определитель, стоящий в знаменателе, отличен от нуля. Отметим, что это почти определитель Вандермонда:

$$(\prod_{j=2}^{n}k_j^2)(\prod_{s=2}^{n}\prod_{t>s}^{n}(k_t-k_s)).$$

Следовательно, решений нет лишь при совпадении критических точек. Однако в числителе стоит кососимметрический многочлен, поэтому опредилитель Вандермонда сокращается. В знаменателе остаётся $a_2^2\neq 0$. Теорема доказана.

Введём следующие обозначения $(\Delta_{n-2},\dots,\Delta_1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{(\Delta_{n-2}(\varepsilon),\dots,\Delta_1(\varepsilon))}{\varepsilon}$ (решение системы при $\varepsilon=1$).

Построим такое поле для многочленов четвёртой степени вида $x^4+ax^3+bx^2$.

$$\left\{\begin{array}{ccc} k_2^3\Delta_2+k_2^2\Delta_1 & = & \varepsilon \\ k_3^3\Delta_2+k_3^2\Delta_1 & = & \varepsilon \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} \Delta_1 & = & \frac{9a^2-8b}{4b^2} \\ \Delta_2 & = & \frac{3a}{b^2} \end{array}\right. .$$

Найдём явное выражение координат векторов через коэффициенты.

Теорема 2. $\Delta_l=\frac{(3l+6)a_{l+2}a_3-(2l+6)a_{l+3}a_2}{4a_2^2}$.

Чтобы доказать теорему, нам необходимо проверить две леммы, но сначала мы введём следующее определение.

Определение 3. Пусть дана (i_l) — возрастающая последовательность k неотрицательных целых чисел $(k\geq 0)$. Тогда $i_1,\dots,i_k$-определителем Вандермонда от n переменных называется определитель матрицы, полученной из матрицы Вандермонда размера $(n+k)\times(n+k)$ при вычёркивании последних k столбцов и строк, в которых стоят i_l-ые степени переменных. Обозначение: $V^n_{i_1,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_n)$ или просто $V^n_{i_1\dots i_k}$.

Лемма 1. $V^n_k = \sigma_{n-k}V^n$ (σ_k — многочлены Виета степени k).

Идея доказательства: вычесть из всех столбцов последний, затем вынести сомножители вида $(x_k - x_n)$, затем построчно вычесть из n-ой $n-1$-ую строку и т.д., наконец, разложить по строчке, в которой остались суммы из двух мономов (т.е. представить в виде суммы двух определителей). Таким образом, мы получаем рекурентную формулу. Теперь утверждение леммы не сложно доказать, воспользовавшись индукцией по n: $V^n_i = \prod_{k=1}^{n-1}(x_k - x_n)(a_n V_i^{n-1} + V_{i-1}^{n-1})$.

Лемма 2. $V^n_{1,k} = (\sigma_{n-1}\sigma_{n-k+1} - \sigma_n\sigma_{n-k})V^n$

Идея доказательства аналогична, рекурентная формула следующая: $V^n_{1,j} = \prod_{k=1}^{n-1}(x_k - x_n)(x_n^2 V^{n-1}_{1,j} + x_n(V^{n-1}_{0,j} + V^{n-1}_{1,j-1}) + V^{n-1}_{0,j-1})$.

Теперь можно Δ_l выразить через σ и V^{n-2}:

$$\Delta_l = \frac{(-1)^{l+1}(\sigma_{l-3}\sigma_{n-l-2} - \sigma_{n-2}\sigma_{n-l-3})V^{n-2}}{\sigma^2_{n-2}V^{n-2}}.$$

V^{n-2} — сокращаются, $\sigma_i = \frac{n-i}{n}a_{n-i}(-1)^i$ при $0 < i < n-1$ (в остальных случаях равна нулю). Подставим σ_i:

$$\Delta_l = \frac{(3l+6)a_{l+2}a_3 - (2l+6)a_{l+3}a_2}{4a_2^2}.$$

Теорема доказана.

Следствие. На гиперплоскости $a_1 = 0$ определено поле $\delta_l = (3l+6)a_{l+2}a_3 - (2l+6)a_{l+3}a_2$, которое имеет особенности (обращается в ноль) только на плоскости $a_2 = a_3 = 0$.

В заключение рассмотрим пространство функций: $x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x$. Будем искать поле, которое на критические значения действует следующим образом $\Big(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \lambda\varepsilon\Big)$. Тогда в исходных координатах поле имеет вид:

$$\frac{1}{\sigma_{n-2}}\Big((-1)^{n-3}, (-1)^{n-4}\sigma_1, \ldots, (-1)^0\sigma_{n-3}\Big),$$

где σ находятся из системы:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma_2 - \sigma_1^2 &=& \frac{n-2}{n}a_{n-2} \\ \sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 &=& -\frac{n-3}{n}a_{n-3} \\ \sigma_4 - \sigma_1\sigma_3 &=& \frac{n-4}{n}a_{n-4} \\ &\vdots& \\ \sigma_{n-2}\sigma_1 &=& \frac{1}{n}a_1 \end{array}\right. .$$

Литература.

[1] В. И. Арнольд, *Критические точки функций и классификация каустик,* Успехи матем. наук, 1974, 29(3), 243-244.

[2] В. М. Закалюкин, Р. М. Робертс, *Об устойчивых лагранжевых многообразиях с особенностями,* Функц. анализ и его приложения, 1996, 26(3), 28-34.

[3] E. J. N. Looijenga, *The complement of the bifurcation variety of a simple singularity,* Invent. Math, 1974, 23, 105-116.

[4] О. В. Ляшко, *Геометрия бифуркационных диаграм,* Сов. матем, 1984, 27, 2736-2759.