Московский Государственный Университет
им.М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.9

Карпенков Олег Николаевич

О многомерных цепных дробях модели Клейна: классификация двумерных граней, алгоритмы, примеры.

Специальность 01.01.04. -
геометрия и топология

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители
академик, профессор
В.И.Арнольд
д.ф.-м.н., профессор
В.М.Закалюкин

Москва - 2004

Содержание

Введение. **7**

0.1 Об одном обобщении одномерных цепных дробей на многомерный случай. 7

0.2 Результаты работы. 10

0.3 Задача о двумерных гранях парусов многомерных цепных дробей. 11

0.4 Об алгоритмах построения парусов многомерных цепных дробей. 13

0.5 Примеры фундаментальных областей парусов двумерных цепных дробей. 16

0.6 Организация работы. 16

Глава I. Основные определения. **19**

1 Общие определения. **19**

2 Определение многомерной цепной дроби. **22**

2.1 Многомерные цепные дроби по Клейну. 22

2.2 О взаимосвязи между одномерными цепными дробями по Клейну и обыкновенными цепными дробями. 22

2.3 Многомерные цепные дроби, связанные с общим гиперболическим оператором. 23

2.4 Определение n-мерной цепной дроби $(n+1)$-алгебраической иррациональности. Обобщения теоремы Лагранжа. 25

3 Целочисленные инварианты и разбиения торов. **27**

3.1 Некоторые примеры целочисленно-линейных и целочисленно-аффинных инвариантов. 27

3.2 Целочисленные расстояния и углы между целыми плоскостями, разбиения тора. 29

Глава II. Двумерные грани. 32

4 Формулировка основной теоремы. 34

5 Предварительные определения и утверждения. 36

5.1 Предварительные определения и обозначения. 36

5.2 Утверждение о специальных сечениях целого параллелепипеда. . 37

5.2.1 Лемма о специальных сечениях целого параллелепипеда с пустой гранью. 38

5.2.2 Доказательство утверждения 5.5. 39

5.3 Следствие о целочисленных расстояниях между противоположными вершинами и плоскостями граней пустого тетраэдра. 40

6 Вспомогательное следствие о пустых целых тетраэдрах. 42

6.1 Лемма об одном узле решётки 43

6.2 Доказательство следствия 6.2. 44

6.3 Классификация пустых треугольных отмеченных пирамид. 47

6.4 Классификация пустых тетраэдров. 50

7 Доказательство теоремы 4.1: многоугольные отмеченные пирамиды. 52

7.1 Утверждение о целом параллелограмме внутри целого многоугольника. 53

7.2 Случай пустой отмеченной пирамиды с пустым параллелограммом в основании. 55

7.3 Случай вполне пустой отмеченной пирамиды с целым параллелограммом в основании с единственной целой точкой внутри. 56

7.4 Общий случай. 58

8 Доказательство теоремы 4.1: треугольные отмеченные пирамиды. 61

8.1 Случай 1: треугольное основание содержит целый многоугольник. 61

8.2 Случай 2: целые точки основания, отличные от его вершин, не лежат на одной прямой. 62

8.3 Случай 3: целые точки основания, отличные от его вершин, лежат на одной прямой, первый вариант расположения прямой. 65

8.4 Случай 4: целые точки основания, отличные от его вершин, лежат на одной прямой, второй вариант расположения прямой. 71

8.5 Случай 5: целые точки основания, отличные от его вершин, лежат на одной стороне основания. 77

8.6 Неизбыточность списка "M-W" теоремы 4.1. 81

9 Классификация компактных двумерных граней. 81

9.1 Теорема Муссафира. 81

9.2 Формулировки классификационных утверждений о двумерных гранях. 82

10 Доказательство теоремы 9.2. 87

10.1 Полнота списков "α_n" теоремы 9.2 при $n \geq 2$. 87

10.2 Реализуемость граней из списков "α_n" при $n \geq 2$. 90

10.2.1 Реализуемость треугольных граней. 90

10.2.2 О реализуемости многоугольных граней. 91

10.2.3 О реализуемости граней из списков "α_n" при $n \geq 2$. 92

10.3 Неэквивалентность граней из списка "α_n" (при $n \geq 2$). 92

10.4 О многоугольных гранях двумерных цепных дробей. 93

11 Неисследованные задачи. 93

Глава III. О новом алгоритме. 101

12 Описание нового алгоритма. 101

12.1 Основная схема алгоритма. 101

12.2 Основные элементы алгоритма. 102

13 Общие вопросы, относящиеся к базисам решётки. 104

13.1 Теорема о специальном базисе внутри целого параллелепипеда. . . 104

13.2 Шаг 1. Вычисление базиса аддитивной группы кольца $\Xi(A)$. . . . 106

13.3 Шаг 2. Вычислить базис группы $\overline{\overline{\Xi}}(A)$. 109

14 О фундаментальных областях и аппроксимациях парусов. 110

14.1 Шаг 3. Нахождение некоторой вершины паруса. 110

14.2 Шаг 4. Выдвижение гипотезы о фундаментальной области паруса. 111

15 Проверка выдвинутых гипотез в двумерном случае. 113

15.1 Краткое описание этапов проверки и формулировка основных результатов этого раздела. 113

15.2 Доказательство теоремы 15.1: проверка условия i). 115

15.3 Доказательство теоремы 15.1: проверка условия ii). 117

15.4 Доказательство теоремы 15.1: вычисление целочисленных расстояний от начала координат до двумерных плоскостей двумерных граней. 118

15.5 Доказательство теоремы 15.1: проверка наличия целых точек внутри отмеченных пирамид с вершинами в начале координат и с основаниями в двумерных гранях F_i. 121

15.6 Доказательство теоремы 15.1: проверка выпуклости при двугранных углах. 122

15.7 Доказательство теоремы 15.1: проверка правильности 2-звёзд при вершинах. 123

15.8 Проверка принадлежности всех нульмерных граней набора D одному ортанту; завершение доказательства теоремы 15.1. 124

15.9 Доказательство теоремы 15.3: лемма об инъективности проекции на гранях. 125

15.10 Доказательство теоремы 15.3: лемма о конечном покрытии фундаментальной области. 127

15.11 Доказательство теоремы 15.3: лемма о взаимно-однозначности проекции. 128
15.12 Доказательство теоремы 15.3: лемма о выпуклости. 130
15.13 Завершение доказательства теоремы 15.3: основная часть. 131

16 О проверке гипотез для многомерного случая. 132

Глава IV. Примеры. 134

17 Семейство фробениусовых операторов и его свойства. 134
17.1 Определение фробениусовых операторов. 134
17.2 Простейшие свойства фробениусовых операторов. 136
17.3 Цепные дроби и характеристические многочлены соответствующих операторов. 138

18 Фундаментальные области некоторых серий операторов $A_{m,n}$ 139
18.1 Фундаментальные области первого двупараметрического семейства: формулировка результата и выдвижение гипотезы. 139
18.2 Проверка гипотезы теоремы 18.1. 140
18.3 Фундаментальные области первого однопараметрического семейства. 148
18.4 Фундаментальные области второго однопараметрического семейства. 149
18.5 Фундаментальные области третьего однопараметрического семейства. 151
18.6 Фундаментальные области второго двупараметрического семейства. 152
18.7 О построении парусов новых серий двумерных цепных дробей. . . 154

Введение.

В этой работе изучаются свойства и способы построения парусов многомерных цепных дробей по Клейну, а также строится большое количество примеров парусов двумерных цепных дробей.

0.1 Об одном обобщении одномерных цепных дробей на многомерный случай.

Проблема об обобщении понятия обыкновенной цепной дроби на многомерный случай была поставлена Ш. Эрмитом в 1839 году [62]. Множество попыток решить эту проблему привело к возникновению нескольких замечательных теорий многомерных цепных дробей. Одной из наиболее известных моделей обобщения одномерных цепных дробей на многомерный случай является модель Клейна. Определение многомерной цепной дроби по Клейну было дано Ф. Клейном в работах 1895 и 1896 годов [26] и [27]. В дальнейшем многомерные цепные дроби по Клейну будем называть просто многомерными цепными дробями. Предположим, что квадратичная форма $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с целыми коэффициентами является произведением двух линейных необязательно целочисленных сомножителей. Клейн рассмотрел следующую модель одномерной цепной дроби для данной квадратичной формы. Линейные сомножители квадратичной формы $f(x,y)$ порождают четыре конуса с центром в начале координат. В каждом конусе строим выпуклую оболочку множества всех целых точек, содержащихся в этом конусе. Границы таких выпуклых оболочек называются парусами. Одномерная цепная дробь — множество четырёх построенных парусов. В первой главе работы обсуждается разница между понятиями обыкновенной цепной дроби и одномерной цепной дроби для модели Клейна.

Только на вершинах парусов одномерной цепной дроби достигается минимальное значение модуля формы $f(x,y)$ на множестве целых точек без начала координат, см. более подробно в [18]. Это свойство позволяет строить рациональные приближения решений уравнения $f(x,y)=0$, которые являются наилучшими приближениями среди рациональных чисел с небольшими по модулю числителями и знаменателями. Отметим, что, если уравнение $f(x, y) = 0$ не имеет рациональных решений, то, по теореме Лагранжа, паруса соответствующей цепной дроби являются алгебраически периодическими, что позволяет просто описывать множество вершин парусов дроби.

Пусть теперь $F(x, y, z)$ — кубическая форма с целыми коэффициентами, представимая в виде произведения трёх линейных однородных форм. По аналогии Клейн построил "двумерную цепную дробь". Линейные сомножители квадратичной формы $F(x, y, z)$ порождают восемь конусов с центром в начале координат. В каждом конусе Клейн рассмотрел выпуклую оболочку множества всех целых точек, содержащихся в этом конусе. Двумерная цепная дробь по Клейну — множество всех восьми построенных выпуклых оболочек, которые также называются парусами. Вершины границы этой выпуклой оболочки также доставляют минимальное значение функции $|F(x, y, z)|$ на множестве целых точек без начала координат и, тем самым, наилучшие целочисленные и рациональные приближения для решений уравнения $F(x, y, z) = 0$. Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ не имеет рациональных решений, то из теоремы Дирихле об единицах (см. [12]) следует, что все парусы соответствующей цепной дроби являются алгебраически периодическими. Это позволяет просто описывать множество вершин на парусах дроби.

Конструкция Клейна двумерной цепной дроби непосредственно обобщается на многомерный случай.

Ряд свойств одномерных цепных дробей имеет многомерные аналоги. Х. Цутихаси [57] обнаружил связь между периодическими многомерными цепными дробями и многомерными касповыми особенностями. Связь между многомерными цепными дробями и базисами Гильберта описана Ж.-О. Муссафиром [41] и О. Н. Германом [19]. М. Л. Концевич и Ю. М. Сухов изучили некоторые статистические свойства парусов случайно выбранной многомерной цепной дроби [28]. Обобщению одномерных цепных дробей с ограниченными целочисленными длинами рёбер (числа отвечающие таким цепным дробям хуже всего приближаются подходящими дробями) на многомерный случай и исследованию их свойств посвящены работы Б. Ф. Скубенко [51] и [52] и О. Н. Германа [20]. Классическая теория обыкновенных цепных дробей описана в книге А. Я. Хинчина [56]. В своей книге [6] В. И. Арнольд представил обзор теорем и задач, связанных с одномерными и многомерными цепными дробями.

Большое количество примеров парусов двумерных цепных дробей было построено в работах Е. И. Коркиной [30], [32] и [33], Ж. Лашо [34] и [35], А. Д. Брюно и В. И. Парусникова [14], [44], [45], [46] и [47], автора [64] и [65]. Интересная коллекция двумерных цепных дробей собрана в работе К. Бриггса [13].

Все необходимые определения приведены в следующей главе.

Кроме геометрического обобщения многомерных цепных дробей, предложенного Клейном, и, исследуемого в этой работе, существует несколько других интересных обобщений. Взаимосвязи между этими обобщениями на настоящий момент практически не изучены, их нахождение несомненно приведёт к новым открытиям в разных областях математики. Перечислим наиболее известные из обобщений обыкновенных цепных дробей.

Первое знаменитое обобщение обыкновенных цепных дробей на многомерный случай было предложено К. Якоби [63] в 1869 году. Он рассмотрел алгоритм построения приближения произвольных векторов в двумерном пространстве рациональными векторами и обобщил его на векторы в n-мерном пространстве. В дальнейшем алгоритм К. Якоби был изучен и модифицирован О. Перроном [48]. Полученные в работах К. Якоби и О. Перрона алгоритмы называются *алгоритмами Якоби-Перрона*, а рациональные приближения — *многомерными цепными дробями* (по Якоби и Перрону). Некоторые эргодические свойства обыкновенных цепных дробей имеют обобщения для многомерных цепных дробей Якоби-Перрона [58], [49] и [59]. В дальнейшем, различные версии алгоритмов Якоби-Перрона были представлены и изучены в работах Д. М. Хардкастла и К. Ханина [55], Т. Гаррити [23] и [10], Л. Д. Пустыльникова [50] и многих других работах (см. также книги Л. Бернштейна [11] и Ф. Швейгера [60]).

В своих работах Г. Минковский [38] и Г. Ф. Вороной [17] предложили ещё одно обобщение обыкновенных цепных дробей. Многомерные цепные дроби, построенные этими авторами обладают некоторыми геометрически-алгоритмическими свойствами, аналогичными свойствам обыкновенных цепных дробей. Их идеи получили развитие в работах А. Д. Брюно и В. И. Парусникова [15] и [16]. Недавно в работах А. К. Миттал и А. К. Гапты. [39] и [40] было построено теоретико-числовое обобщение одномерных цепных дробей.

0.2 Результаты работы.

В этой работе решены следующие задачи.

1. Классифицированы все двумерные грани парусов многомерных цепных дробей на плоскостях, расположенных на целочисленном расстоянии, большем единицы от начала координат, с точностью до целочисленно-линейного отношения эквивалентности.

2. Описан новый эффективный алгоритм построения фундаментальных областей двумерных периодических парусов цепных дробей. Все шаги алгоритма, кроме последнего, буквально обобщаются на многомерный случай. Обобщение последнего шага упирается в сложные задачи общей топологии. В работе предложено некоторое обобщение последнего шага, которое не является эффективным.

3. Построено два двупараметрических и три однопараметрических семейства фундаментальных областей парусов периодических двумерных цепных дробей. Параметры этих семейств — положительные целые числа.

Первые два результата практически независимы и полезны сами по себе. Однако классификация двумерных граней сильно облегчает последний шаг алгоритма результата 2 в двумерном случае.

Построение семейств фундаментальных областей парусов периодических двумерных цепных дробей п. 3 целиком базируется на алгоритме результата 2.

Опишем полученные результаты более подробно.

0.3 Задача о двумерных гранях парусов многомерных цепных дробей.

Интерес к геометрическим свойствам многомерных цепных дробей был инициирован работой В. И. Арнольда [3] и последующей работой Е. И. Коркиной [30]. Начиная с 1989 года, В. И. Арнольд сформулировал серию проблем и гипотез, связанных с геометрическими свойствами многомерных цепных дробей. Многие из этих проблем до сих пор остаются открытыми, а геометрические свойства многомерных цепных дробей практически не изученными. Задачи о геометрических свойствах многомерных цепных дробей по Клейну вошли в качестве одного из разделов в программу по изучению "псевдопериодической топологии", разработанную В. И. Арнольдом [5] и представленную в книге [4] под редакцией В. И. Арнольда, А. В. Зорича и М. Л. Концевича.

В предлагаемой работе предпринимаются первые шаги по изучению геометрических свойств многомерных цепных дробей. Одним из первостепенных естественно возникающих геометрических вопросов является вопрос о гранях: *какие компактные грани бывают у парусов многомерных цепных дробей?*

Компактные грани парусов многомерных цепных дробей являются выпуклыми многогранниками, вершины которых — целые точки. Такие объекты правильно изучать с точностью до целочисленно-линейной эквивалентности. Два многогранника называются *целочисленно-линейно* (*целочисленно-аффинно*) *эквивалентными*, если существует линейное (аффинное) преобразование пространства, сохраняющее решётку целых точек, которое переводит один многогранник в другой. Итак, переформулируем задачу.

Какие компактные грани бывают у парусов многомерных цепных дробей с точностью до целочисленно-линейного отношения эквивалентности?

Полный ответ на этот вопрос был известен только для одномерных компактных граней. *Одномерные компактные грани парусов многомерных цепных дробей могут содержать любое конечное число целых точек. Две одномерные компактные грани целочисленно-линейно эквивалентны тогда и только то-*

гда, когда количества целых точек на них совпадают.

Прежде чем осветить ситуацию с двумерным случаем, приведём нужные определения. Точка пространства называется *целой*, если все координаты этой точки являются целыми числами. Плоскость называется *целой*, если она целочисленно-аффинно эквивалентна некоторой проходящей через начало координат плоскости, содержащей подрешётку решётки целых точек, ранг которой равен размерности плоскости. Рассмотрим целую k-мерную плоскость и целую точку в дополнении к этой плоскости. Пусть евклидово расстояние от данной точки до данной плоскости равно l. Обозначим через l_0 минимальное ненулевое евклидово расстояние до рассматриваемой плоскости от целых точек, лежащих в $(k+1)$-мерной плоскости, натянутой на данные k-мерную плоскость и целую точку. Отношение l/l_0 называется *целочисленным расстоянием* от данной целой точки до данной целой плоскости. Целочисленное расстояние является целочисленно-аффинным инвариантом. Целочисленное расстояние до начала координат является целочисленно-линейным инвариантом.

Итак, в двумерном случае исходная задача распадается на две задачи.

Какие компактные грани, расположенные на плоскостях с единичным целочисленным расстоянием от начала координат, бывают у парусов многомерных цепных дробей (с точностью до целочисленно-линейного отношения эквивалентности граней дробей)?

Какие компактные грани бывают у парусов многомерных цепных дробей (с точностью до целочисленно-линейного отношения эквивалентности граней цепных дробей) на данном целочисленном расстоянии от начала координат?

Ответ на первый вопрос довольно прост. Для любого выпуклого многоугольника, расположенного на плоскости на единичном расстоянии от начала координат, существует такое положительное целое k, что существует некоторая k-мерная цепная дробь, у которой есть парус, одна из граней которого целочисленно-линейно эквивалентна данному многоугольнику. Кроме того, две двумерные грани, плоскости которых расположены на единичном расстоянии от начала координат, целочисленно-линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие многоугольники целочисленно-аффинно эквивалентны.

До настоящего момента про компактные двумерные грани парусов многомерных цепных дробей, плоскости которых расположены на целочисленном расстоянии, большем единицы от начала координат, было лишь известно, что они либо треугольные, либо четырёхугольные (см. работу Ж.-О. Муссафира [42]).

В настоящей работе классифицированы компактные двумерные грани парусов многомерных цепных дробей (размерности многомерных дробей не фиксированы), плоскости которых расположены на заданном целочисленном расстоянии от начала координат, большем единицы, с точностью до целочисленно-линейного отношения эквивалентности. Классификация опирается на классификацию трёхмерных многоэтажных вполне пустых выпуклых пирамид с отмеченной вершиной.

0.4 Об алгоритмах построения парусов многомерных цепных дробей.

Многомерная периодическая алгебраическая цепная дробь является совокупностью нескольких бесконечных многогранных поверхностей, на каждой из которых свободно действует некоторая специальная дискретная группа, переставляющая многомерные грани, причём фактор каждой многогранной поверхности по этой группе гомеоморфен тору соответствующей размерности. (См. точные определения в подразделе 2.3.) *Фундаментальной областью* многогранника относительно действия группы называется объединение нескольких граней, содержащее ровно по одной грани из каждого класса эквивалентности. Алгебраическая периодичность парусов многомерной цепной дроби позволяет восстановить любой из парусов цепной дроби по его фундаментальной области. Эта фундаментальная область содержит лишь конечное число граней. Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой нахождения эффективного метода, при помощи которого можно перечислить все грани какой-либо фундаментальной области.

Алгоритма построения фундаментальных областей для парусов многомерных цепных дробей не существовало до работы Т. Шинтани [61], написанной в 1976 году. Пусть F— абсолютно вещественное алгебраическое поле степени n. Рассмотрим все различные вложения поля F в $\mathbb{R}$ и обозначим их через φ_i, $i = 1, \cdots, n$ (их ровно n, поскольку поле F абсолютно вещественно). Рассмотрим следующее вложение поля F в $\mathbb{R}^n$. Для произвольного элемента x поля F полагаем

$$x \to (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Т. Шинтани рассматривал группу всех абсолютно положительных элементов кольца целых чисел в алгебраическом поле F и её действие (покомпонентное умножение на абсолютно положительные элементы x_+) на $(\mathbb{R}_+)^n$ при описанном вложении. Он показал, что фундаментальная область этого действия является конечным объединением симплициальных конусов специального типа. (Отметим, что при перенумерации вложений φ_i поля F в $\mathbb{R}$ фундаментальные области заменяются целочисленно-линейно эквивалентными.) Утверждение Т. Шинтани о строении фундаментальной области (с доказательством) фактически и лежит в основе одного из алгоритмов построения парусов одномерных периодических цепных дробей. Следуя работе Т. Шинтани, Е. Томас и А. Т. Васкес построили несколько фундаментальных областей для двумерного случая в работе [53]. Окончательная версия алгоритма, позволяющего строить фундаментальные области для алгебраических расширений поля $\mathbb{Q}$, представлена Р. Оказаки в его работе [43]. Е. И. Коркина в работах [30], [32], [33] и Ж. Лашо в работах [34], [35] посчитали бесконечное количество фундаментальных областей парусов для периодических алгебраических двумерных цепных дробей. Алгоритм построения фундаментальных областей парусов многомерных цепных дробей, использованный в перечисленных выше работах, базируется на принципе математической индукции. Этот алгоритм последовательно вычисляет грани фундаментальной области, при этом приходится проверять, что построенная на i-ом шаге грань не лежит в одной орбите (действия описанной выше группы) с некоторой гранью, построенной раньше i-ого шага. Оказывается (см. [43]), при помощи такого алгоритма фундаментальная область паруса цепной дроби строится за конечное число шагов.

Немного позже Ж.-О. Муссафир разработал алгоритм, который существенно отличается от алгоритма Оказаки (см. [42]). Алгоритм работает для произвольного (не обязательно периодического) паруса: он вычисляет любую ограниченную часть паруса. Такой алгоритм основан на дедукции. А именно, сначала выдвигается гипотеза о структуре граней для большой части паруса, затем проверяется, являются ли предположительные грани настоящими гранями паруса. Этот алгоритм также применим и для случая периодических парусов.

В третьей главе настоящей работы описан новый усовершенствованный дедуктивный алгоритм, который предназначается специально для случая фундаментальных областей периодических парусов (впервые напечатан в работе автора [25]). Алгоритм позволяет дать ответ на первоначальный вопрос Ф. Клейна о построении парусов периодических цепных дробей для исследовании кубических форм с целыми коэффициентами. Основное преимущество предложенного автором алгоритма заключается в следующем: количество "ложных" вершин конечного приближения многогранника гораздо меньше по сравнению с количеством "ложных" вершин, получаемых при использовании алгоритма Ж. Муссафира. Это на порядок сокращает время вычисления соответствующих выпуклых оболочек.

Отметим, что предлагаемый алгоритм существенно использует периодичность парусов периодических многомерных цепных дробей, и, следовательно, он неприменим к парусам непериодических многомерных цепных дробей.

Для двумерного случая в настоящей работе доказано следующее утверждение.

Проверка гипотезы о фундаментальной области паруса двумерной периодической цепной дроби, содержащей N граней всех размерностей, проходит не более чем за CN^4 действий сложения, умножения и сравнения, где универсальная константа C не зависит от числа N и цепной дроби.

0.5 Примеры фундаментальных областей парусов двумерных цепных дробей.

При помощи описанного в этой работе алгоритма автор обобщил известные ранее частные примеры и бесконечные серии примеров вычисления фундаментальных областей парусов двумерных периодических цепных дробей, а также построил множество новых примеров и серий примеров фундаментальных областей (см. также [64] и [65]). Пользуясь результатами экспериментов, автор выписал полный список всех периодических двумерных цепных дробей кубических иррациональностей, построенных по целочисленным матрицам с нормой, меньшей семи, с точностью до целочисленно-линейного отношения эквивалентности (см. работу [24]). (Под нормой матрицы здесь понимается сумма модулей её коэффициентов.)

0.6 Организация работы.

Настоящая работа организована следующим образом.

Первая глава посвящена основным определениям. Некоторые общие определения приведены в разделе 1. В разделе 2 вводится понятие многомерных цепных дробей по Клейну и определяются алгебраически периодические многомерные цепные дроби алгебраических иррациональностей. В этом разделе также обсуждается связь между одномерными цепными дробями и обыкновенными цепными дробями. В разделе 3 приведены определения разбиения многомерного тора, связанного с парусом многомерной периодической цепной дроби, и фундаментальной области паруса периодической цепной дроби. Кроме того в этом разделе обсуждаются определения инвариантов действия группы $SL(n+1,\mathbb{Z})$, такие как целочисленные длины и углы между плоскостями.

Во второй главе работы формулируются и доказываются теорема о целочисленно-линейной и следствие о целочисленно-аффинной классификациях двумерных граней парусов многомерных цепных дробей. Эти утверждения выводятся из теоремы о целочисленно-аффинной классификации многоэтажных вполне пустых выпуклых трёхмерных пирамид с отмеченной вершиной. В разделе 4 сформулирована теорема о классификации многоэтажных вполне пустых выпуклых пирамид с отмеченной вершиной. В разделе 5 приведены понятия и определения, необходимые для понимания второй главы, а также доказаны несколько вспомогательных утверждений, которые понадобятся при доказательстве основной теоремы второй главы. В разделе 6 формулируется и доказывается частный случай теоремы раздела 4 — теорема о пустых тетраэдрах. В следующих двух разделах доказывается теорема о классификации многоэтажных вполне пустых выпуклых пирамид с отмеченной вершиной: в разделе 7 разбирается случай многоугольных пирамид с отмеченной вершиной; в разделе 8 — случай треугольных пирамид с отмеченной вершиной. В разделе 9 сформулированы теорема о целочисленно-линейной классификации и следствие о целочисленно-аффинной классификации двумерных граней парусов многомерных цепных дробей. В разделе 10 приводится доказательство сформулированной в разделе 9 теоремы. Формулировки нерешённых проблем, связанных с доказанными теоремами, приведены в разделе 11.

В третьей главе работы описан новый алгоритм построения фундаментальных областей парусов периодических многомерных цепных дробей, в частности разобраны методы выдвижения гипотез о фундаментальных областях и их проверки. Весь алгоритм построения проходит в шесть шагов, его план обсуждается в разделе 12. В разделе 13 приводится описание двух общих шагов для индуктивных и дедуктивных методов. В этом разделе показывается, как находятся образующие группы $SL(n,\mathbb{Z})$-матриц, коммутирующих с заданной. Все результаты раздела 13 не являются новыми и приводятся лишь для полноты изложения (см. книги Х. Кохена [22] и Ж. Лашо [35]). В разделах 14, 15 и 16 описана основная новая часть алгоритма. В разделе 14 показано, как следует выдвигать гипотезы о фундаментальных областях. Раздел 15 посвящён проверке гипотез о фундаментальных областях для парусов двумерных цепных дробей. Проверка гипотез для парусов многомерных цепных дробей обсуждается в разделе 16.

Четвёртая глава работы посвящена многочисленным примерам, полученным при помощи метода, описанного в третьей главе. В разделе 17 изучаются свойства двумерных цепных дробей, построенных по фробениусовым операторам, обсуждается связь классов эквивалентностей триангуляций торов с кубическими расширениями поля рациональных чисел. (Подробный анализ свойств кубических расширений поля рациональных чисел и их классификации проводится Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеевым в работе [21].) В разделе 18 разобраны примеры возникающих фундаментальных областей двумерных дробей кубических иррациональностей. Вычисление первого примера приведено полностью со всеми деталями. Остальные примеры сформулированы в виде конечных результатов с полным описанием фундаментальных областей и необходимых целочисленно-линейных инвариантов. Каждый пример предоставляет собой сразу целое однопараметрическое или двупараметрическое бесконечное семейство двумерных цепных дробей кубических иррациональностей (параметры пробегают все положительные целые числа). В заключение этого раздела разобран метод построения фундаментальных областей новых (аналогичных) бесконечных однопараметрических семейств парусов двумерных цепных дробей.

Автор выражает огромную благодарность и признательность академику профессору В. И. Арнольду за постановку задачи, постоянное внимание к работе и моральную поддержку. Автор благодарит профессора В. М. Закалюкина, Е. И. Коркину, профессора Ж. Лашо, М. А. Цфасмана, Р. Урибе и Г. А. Кабатянского за полезные обсуждения и замечания.

Глава I.

Основные определения.

В этой главе приводятся нужные понятия и формулируются основные определения работы (см. также [64]). В разделе 1 определяются общие понятия целости объектов, их эквивалентности, а также вводятся определения отмеченных пирамид, вполне пустоты и многоэтажности отмеченных пирамид. В разделе 2 даётся определение многомерных цепных дробей по Клейну и обсуждается связь таких цепных дробей с обыкновенными цепными дробями. В разделе 3 приведены определения целочисленно-аффинных инвариантов (целочисленных углов, площадей фигур, расстояний).

1 Общие определения.

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ над полем действительных чисел. Точка пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ называется *целой*, если все координаты этой точки являются целыми числами. Вектор называется *целым*, если он имеет целочисленные координаты.

Рассмотрим k-мерную плоскость $(n+1)$-мерного пространства. Пересечение конечного числа замкнутых k-мерных полуплоскостей этой k-мерной плоскости, гомеоморфное k-мерному замкнутому диску, называется *выпуклым* (*телесным*) *k-мерным многогранником.* При $k = 2$ выпуклый многогранник называется *выпуклым многоугольником*, при $k = 1$ — *отрезком*, а при $k = 0$ — *точкой.*

Замечание 1.1. Иногда выпуклым многогранником называется только граница описанной выпуклой оболочки. В этой работе под выпуклым многогранником понимается выпуклый телесный k-мерным многогранник, то есть вся выпуклая оболочка.

Назовём *разбиением множества на выпуклые многогранники* — набор выпуклых многогранников, обладающих следующими свойствами:

1) любые два многогранника одной размерности либо не пересекаются, либо пересекаются по границе, при этом выпуклый многогранник в пересечении также лежит в разбиении;
2) любые два многогранника разной размерности либо не пересекаются, либо пересекаются по границе, при этом выпуклый многогранник в пересечении также лежит в разбиении, либо многогранник меньшей размерности целиком содержится в границе большей размерности.

На границе выпуклого многогранника единственным образом определено разбиение на минимальное конечное число выпуклых многогранников. Такие выпуклые многогранники называются *гранями* выпуклого многогранника. Одномерные грани называются *рёбрами*, а нульмерные грани — *вершинами*.

Выпуклый многогранник называется *выпуклой отмеченной пирамидой* с выделенными гранью и вершиной вне плоскости этой грани, если он совпадает (как множество точек) с объединением всех отрезков, одни из концов которых являются выделенной вершиной, а другие концы принадлежат выделенной грани. Выделенная грань называется *основанием* отмеченной выпуклой пирамиды, выделенная вершина — *вершиной* отмеченной выпуклой пирамиды.

Выпуклой пирамидой называется выпуклый многогранник, на котором можно ввести структуру отмеченной выпуклой пирамиды.

Выпуклый многогранник (многоугольник, отрезок) называется *целым*, если все его вершины — целые точки. Выпуклая (отмеченная) пирамида называется *целой*, если она является целым выпуклым многогранником.

Определение 1.2. Целая выпуклая отмеченная пирамида называется *вполне пустой*, если она не содержит целых точек, отличных от вершины и целых точек основания.

Два множества называются *целочисленно-аффинно эквивалентными* (или, что то же самое, имеют одинаковый *целочисленный аффинный тип*), если существует аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющее множество всех его целых точек, которое переводит одно множество в другое.

Определение 1.3. Плоскость, проходящая через начало координат называется целой, если она содержит подрешётку решётки целых точек, ранг которой равен размерности плоскости.
Плоскость называется *целой*, если существует целая плоскость, проходящая через начало координат, которая целочисленно-аффинно эквивалентна данной.

Два множества называются *целочисленно-линейно эквивалентными* (или, что то же самое, имеют одинаковый *целочисленный линейный тип*), если существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющее решётку всех целых точек, которое переводит одно множество в другое.

Рассмотрим целую k-мерную плоскость и целую точку в дополнении к этой плоскости. Пусть евклидово расстояние от данной точки до данной плоскости равно l. Обозначим через l_0 минимальное ненулевое евклидово расстояние до рассматриваемой плоскости от целых точек, лежащих в $(k+1)$-мерной плоскости, натянутой на данные k-мерную плоскость и целую точку. Отношение l/l_0 называется *целочисленным расстоянием* от данной целой точки до данной целой плоскости.

Утверждение 1.4. *Целочисленное расстояние корректно определено (то есть точная нижняя грань евклидовых расстояний от описанных точек $(k+1)$-плоскости отлична от нуля и достигается в некоторой целой точке этой плоскости).* □

Определение 1.5. Целая отмеченная пирамида называется *l-этажной* (для некоторого натурального числа l), если целочисленное расстояние от вершины этой пирамиды до плоскости её основания равно l.
Целая отмеченная пирамида называется *многоэтажной*, если целочисленное расстояние от вершины этой пирамиды до плоскости её основания больше 1.
Целая отмеченная пирамида называется *одноэтажной*, если целочисленное расстояние от вершины этой пирамиды до плоскости её основания равно 1.

2 Определение многомерной цепной дроби.

2.1 Многомерные цепные дроби по Клейну.

Рассмотрим набор из $n + 1$ гиперплоскостей общего положения в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. (Под общностью положения гиперплоскостей понимается следующее: в некоторых координатах их уравнения линейно независимы.) Дополнение к этим гиперплоскостям состоит из 2^{n+1} открытых ортантов. Выберем произвольный ортант.

Определение 2.1. Граница выпуклой оболочки множества всех целых точек за исключением начала координат, входящих в замыкание ортанта, называется *парусом*. Множество всех 2^{n+1} парусов $(n+1)$-мерного пространства называется *n-мерной цепной дробью*, построенной по $n + 1$ заданным проходящим через начало координат гиперплоскостям.

Две многомерные цепные дроби называются *эквивалентными*, если объединение всех парусов первой многомерной цепной дроби целочисленно-линейно эквивалентно объединению всех парусов второй многомерной цепной дроби.

Замечание 2.2. Набор плоскостей, проходящих через начало координат, а также решётка целых чисел, центрально-симметричны относительно начала координат. Следовательно, объединение всех парусов многомерной цепной дроби также центрально-симметрично относительно начала координат. Таким образом, любая n-мерная цепная дробь содержит не более 2^n целочисленно-линейно неэквивалентных парусов.

2.2 О взаимосвязи между одномерными цепными дробями по Клейну и обыкновенными цепными дробями.

Отметим, что определение одномерных цепных дробей отличается от классического геометрического определения обыкновенных цепных дробей. Сформулируем понятие обыкновенной цепной дроби и вкратце обсудим связь между определениями одномерных и обыкновенных цепных дробей. Обыкновенная цепная дробь положительного вещественного числа a строится следующим образом. Рассмотрим луч $\{(x, y)|\ y{=}ax, x{>}0\}$ на плоскости OXY (O — начало координат, (x, y) — координаты точек плоскости). Луч делит первый квадрант $Q = \{(x, y)|\ x{>}0, y{>}0\}$ на две части. Построим границу выпуклой оболочки множества всех целочисленных точек замыкания каждой из частей без начала координат. Граница такой выпуклой оболочки — ломаная, состоящая из бесконечного числа отрезков и одного луча (если число a иррационально) или из конечного числа отрезков и двух лучей (если число a рационально). Объединим построенные выше границы обеих частей. Из полученного множества выкидываем все открытые лучи, входящие в него. Эти лучи лежат на осях координат, а при рациональном a ещё и на луче $\{(x, y)|\ y{=}ax, x{>}0\}$. Построенное множество является геометрической моделью обыкновенной цепной дроби для вещественного числа a.

Рассмотрим произвольную одномерную цепную дробь L, построенную по прямым, которые задаются уравнениями $y = a_1x$ и $y = a_2x$, где a_1 и a_2 — произвольные положительные иррациональные числа, причём $a_1 \neq a_2$. Верно следующее классическое утверждение.

Утверждение 2.3. *Существует такое положительное число $R > 0$, что объединение обыкновенных цепных дробей чисел a_1 и a_2 (как множество точек на полуплоскости) совпадает с объединением парусов одномерной цепной дроби L в первом квадранте Q вне круга с центром в начале координат радиуса R.*

$\square$

Случай отрицательных чисел a_1 и/или a_2 полностью аналогичен рассмотренному.

2.3 Многомерные цепные дроби, связанные с общим гиперболическим оператором.

Определение 2.4. Оператор группы $GL(n + 1, \mathbb{R})$ называется *общим гиперболическим оператором*, если все собственные значения оператора различны и вещественны.

Рассмотрим общий гиперболический оператор $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$. Натянем на всевозможные наборы из n независимых собственных векторов оператора A n-мерные пространства. Так как собственные векторы линейно независимы, полученные $n+1$ гиперплоскости будет $n+1$ гиперплоскостями общего положения. (Напомним, что под общностью положения гиперплоскостей понимается следующее: в некоторых координатах их уравнения линейно независимы.) По этим гиперплоскостям строится n-мерная цепная дробь. Построенная многомерная цепная дробь называется *n-мерной цепной дробью, связанной с оператором A.*

Утверждение 2.5. *Цепные дроби, построенные по общим гиперболическим операторам A и B из группы $GL(n+1, \mathbb{R})$ с иррациональными собственными значениями, эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такой целочисленный оператор X с определителем ± 1, что оператор $\tilde{A}$, полученный из оператора A посредством сопряжения оператором X, коммутирует с оператором B.*

Доказательство. Пусть цепные дроби, построенные по общим гиперболическим операторам A и B из группы $GL(n+1, \mathbb{R})$ с иррациональными собственными значениями, эквивалентны, то есть существует линейное преобразование пространства, сохраняющее целочисленную решётку, переводящее объединение всех парусов цепной дроби оператора A в объединение всех парусов цепной дроби оператора B (а ортанты первой цепной дроби в ортанты второй). При этом преобразовании пространства оператор A сопрягается некоторым целочисленным оператором X с определителем ± 1. У полученного оператора $\tilde{A}$ все собственные значения различны и вещественны (поскольку характеристический многочлен при сопряжении не изменяется). Поскольку ортанты первой цепной дроби переходят в ортанты второй, наборы собственных направлений у операторов $\tilde{A}$ и B совпадают. Таким образом, данные операторы одновременно диагонализуемы в некотором базисе, а, следовательно, коммутируют.

Докажем утверждение в другую сторону. Пусть существует такой целочисленный оператор X с определителем ± 1, что оператор $\tilde{A}$, полученный из A посредством сопряжения оператором X, коммутирует с B. Отметим, что собственные значения операторов A и $\tilde{A}$ совпадают. Следовательно, у оператора $\tilde{A}$ (как и у оператора B) все собственные значения вещественны, различны и иррациональны. Рассмотрим базис, в котором оператор $\tilde{A}$ диагонален. Поскольку все коэффициенты матриц $\tilde{A}B$ и $B\tilde{A}$ совпадают в любом базисе, оператор B в диагональном для $\tilde{A}$ базисе также диагонален. Следовательно, операторы $\tilde{A}$ и B задают одинаковое разбиение $(n+1)$-мерного пространства на ортанты, а соответствующие этим операторам цепные дроби совпадают. Остаётся только отметить следующее. Поскольку определитель целочисленного оператора X равен ± 1, он является линейным преобразованием $(n+1)$-мерного пространства, сохраняющим решётку целых точек. $\square$

2.4 Определение n-мерной цепной дроби $(n+1)$-алгебраической иррациональности. Обобщения теоремы Лагранжа.

Рассмотрим отдельно случай n-мерных цепных дробей, построенных по некоторым обратимым целочисленным операторам из группы $SL(n+1, \mathbb{Z})$.

Определение 2.6. Оператор группы $SL(n+1, \mathbb{Z})$ называется *целочисленным неприводимым гиперболическим оператором*, если выполнены следующие условия:

i) все собственные значения оператора различны и вещественны;

ii) характеристический многочлен оператора неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

Пусть A — некоторый целочисленный неприводимый гиперболический оператор. Поскольку все собственные значения оператора A вещественны, различны и иррациональны, корректно следующее определение.

Определение 2.7. Назовём n-мерную цепную дробь, связанную с целочисленным неприводимым гиперболическим оператором A, *n-мерной цепной дро-*

бью $(n+1)$-алгебраической иррациональности. Случаю $n = 1(2)$ отвечают *одно(дву)мерные цепные дроби квадратичных (кубических) иррациональностей.*

Введём теперь понятие периодической цепной дроби, связанной с алгебраической иррациональностью. Пусть A — целочисленный неприводимый гиперболический оператор. Обозначим через $\Xi(A)$ множество всех целочисленных операторов, коммутирующих с A. Эти операторы образуют кольцо со стандартными матричными сложением и умножением. (Как группа по сложению, $\Xi(A)$ изоморфно $\mathbb{Z}^{n+1}$.)

Рассмотрим подмножество множества $SL(n+1,\mathbb{Z}) \cap \Xi(A)$, которое состоит из всех операторов с положительными вещественными собственными значениями. Обозначим это подмножество через $\overline{\Xi}(A)$. Из теоремы Дирихле об единицах (см. [12]) следует, что подмножество $\overline{\Xi}(A)$ образует мультипликативную абелеву группу, изоморфную $\mathbb{Z}^n$, и, что действие этой группы свободно. Каждый оператор этой группы сохраняет решётку целых точек и объединение всех $n+1$ гиперплоскостей. Следовательно, этот оператор взаимно-однозначно переводит объединение всех парусов n-мерной цепной дроби в себя. Поскольку все собственные значения оператора положительны, все паруса также переходят в себя взаимно-однозначно. Кроме того, при факторизации любого паруса по действию группы $\overline{\Xi}(A)$ получается n-мерный тор (более подробно см. в [35]). Эти утверждения следуют из обобщений теоремы Лагранжа для обыкновенных цепных дробей.

Теорема Лагранжа. *Обыкновенная цепная дробь периодична тогда и только тогда, когда число, по которому она строится, является квадратической иррациональностью (то есть числом вида $a + b\sqrt{c}$, где a и b — рациональные числа, а c — целое свободное от квадратов число, большее единицы).*

Комбинаторно-топологическое обобщение теоремы Лагранжа было предложено Е. И. Коркиной в [31], а алгебраическое обобщение — Ж. Лашо в [34].

Теорема 2.8. (Е. И. Коркина, [31].) *Рассмотрим некоторый ортант C*

в $\mathbb{R}^{n+1}$ и отвечающий этому ортанту парус $V(C)$. Предположим, существует комбинаторный автоморфизм паруса $V(C)$, сохраняющий комбинаторную структуру паруса. Тогда существует некоторый оператор группы $GL(n+1,\mathbb{Z})$, переводящий ортант C и парус $V(C)$ в себя таким образом, что действие оператора на парусе совпадает с данным автоморфизмом.

К сожалению, доказательство теоремы 2.8 всё ещё не опубликовано.

Алгебраическое обобщение теоремы Лагранжа было сделано Ж. Лашо. Формулировка предложенной Ж. Лашо теоремы требует введения большого количества специальных определений и обозначений. По этой причине ограничимся ссылкой на работу [34].

Более подробно об обобщениях теоремы Лагранжа для обыкновенных цепных дробей на многомерный случай смотрите в работах [31], [57], [34] и [36].

Фундаментальной областью паруса многомерной цепной дроби, связанной с целочисленным неприводимым гиперболическим оператором A, называется объединение нескольких открытых граней, содержащее ровно по одной грани из каждой орбиты действия группы $\overline{\Xi}(A)$ на гранях этого паруса.

3 О Целочисленно-линейных и целочисленно-аффинных инвариантах и разбиениях торов.

3.1 Некоторые примеры целочисленно-линейных и целочисленно-аффинных инвариантов.

Введём определения, связанные с инвариантами действия группы $SL(n+1,\mathbb{Z})$.

Предположим, что некоторая величина (или множество точек) инвариантна относительно действия всех операторов группы $SL(n+1,\mathbb{Z})$. Тогда эта величина (или множество) инвариантна относительно действия группы $\overline{\Xi}(A)$. Таким образом, наша величина (или множество) естественным образом соответствует некоторой индуцированной величине (или множеству), определённой на торе, полученном при факторизации паруса по действию группы $\overline{\Xi}(A)$.

Первым примером множества, инвариантного относительно действия $SL(n+1,\mathbb{Z})$, является множество всех (всех целых) k-мерных аффинных (или линейных) плоскостей пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ при некотором фиксированном $k \le n$. Под действием любого оператора группы $SL(n+1,\mathbb{Z})$ любая k-мерная плоскость взаимно-однозначно отображается в некоторую k-мерную плоскость. Вторым естественным примером множества является множество подрешёток целых точек, содержащихся в k-мерных плоскостях. Под действием любого оператора группы $SL(n+1,\mathbb{Z})$ любая k-мерная плоскость взаимно-однозначно отображается в некоторую k-мерную плоскость, при этом целочисленная подрешётка первой плоскости взаимно-однозначно отображается на целочисленную подрешётку второй плоскости. Более того, множество всех k-мерных плоскостей с отмеченным множеством целых точек на них инвариантно относительно группы всех аффинных преобразований, сохраняющих решётку целых точек в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. (Группа таких аффинных преобразований содержит группу $SL(n+1,\mathbb{Z})$ в качестве подгруппы.)

Как целочисленно-аффинные, так и целочисленно-линейные типы множеств инвариантны относительно действия операторов группы $SL(n+1,\mathbb{Z})$, а, следовательно, и операторов группы $\overline{\overline{\Xi}}(A)$ для любого целочисленного неприводимого гиперболического оператора A.

В качестве примера естественно рассмотреть целочисленно-аффинные и целочисленно-линейные типы парусов многомерных граней n-мерной цепной дроби. Эти типы индуцируют разбиение n-мерного тора, полученного при факторизации паруса по действию группы $\overline{\overline{\Xi}}(A)$, на многогранные грани, оснащённые соответствующими целочисленно-аффинными и целочисленно-линейными типами многогранников.

В целочисленно-аффинный и целочисленно-линейный типы многогранников входят, например, следующие целочисленно-аффинные и целочисленно-линейные инварианты.

Целочисленным k-мерным объёмом целочисленного k-мерного многогранника, лежащего в n-мерном пространстве (при $k=1$ — *целочисленной длиной* отрезка, при $k = 2$ — *целочисленной площадью многоугольника*), называется отношение его евклидова объёма к евклидову объёму минимального целого симплекса, лежащего в том же k-мерном подпространстве.

Целочисленным углом между двумя целочисленными лучами (то есть, содержащими больше одной целочисленной точки) с вершиной в одной и той же целочисленной точке называется величина $S(u, v)/(|u| \cdot |v|)$, где u и v — произвольные целочисленные векторы, идущие вдоль лучей, и $S(u, v)$ — целочисленная площадь треугольника со сторонами u и v.

Замечание. Наш целочисленный объём является целым числом (при стандартном измерении объёма параллелепипедами получится в $k!$ раз меньшее значение). Целочисленный k-мерный объём симплекса равен индексу подгруппы решётки, порождённой его рёбрами, исходящими из одной вершины.

3.2 Целочисленные расстояния и углы между целыми плоскостями, разбиения тора.

Перепишем определение целочисленного расстояния от целой точки до целой k-мерной плоскости в терминах целочисленно-аффинных инвариантов. Рассмотрим параллельный перенос, переводящий заданную точку в начало координат. При этом параллельном переносе заданная целая плоскость перейдёт в некоторую целую плоскость, обозначим её через π. Рассмотрим решётку целых точек в $(k+1)$-мерном пространстве, натянутом на целую плоскость π (и начало координат). Рассмотрим подрешётку этой решётки, порождённую всеми целыми точками k-мерной плоскости π. Индекс такой подрешётки совпадает с целочисленным расстоянием от заданной целой точки до заданной целой k-мерной плоскости. С очевидностью этот индекс является целочисленно-аффинным инвариантом пары: точка, плоскость. Таким образом, целочисленные расстояния от целых точек (например, от начала координат) до плоскостей граней паруса являются также целочисленно-аффинными инвариантами пары: точка, плоскость. Следовательно, целочисленные расстояния от начала координат до плоскостей граней паруса индуцируют соответствующие “целочисленные расстояния” от начала координат до граней n-мерного тора, полученного при факторизации паруса по действию группы $\overline{\Xi}(A)$.

Обобщим понятие целочисленного расстояния на случай двух целых плоскостей размерностей k_1 и k_2. Рассмотрим параллельный перенос, переводящий заданную целую точку первой плоскости в начало координат. При этом параллельном переносе заданные целые плоскости перейдут в некоторые целые плоскости π_1 и π_2. Рассмотрим решётку целых точек в пространстве, натянутом на плоскости π_1 и π_2. Выделим подрешётку, порождённую всеми целыми точками, содержащимися в плоскостях π_1 и π_2.

Определение 3.1. Если пересечение двух данных плоскостей пусто, то индекс соответствующей подрешётки называется *целочисленным расстоянием* между данными плоскостями. Если пересечение двух данных плоскостей непусто, то индекс соответствующей подрешётки называется *целочисленным углом* между данными плоскостями.

Утверждение 3.2. *Введённые в определении 3.1 величины не зависят от выбора порядка плоскостей и выбора целой точки на первой плоскости.* □

Все построенные индексы являются целочисленно-аффинными инвариантами пар прямых.

Целочисленные углы между плоскостями граней являются целочисленно-линейными инвариантами пар плоскостей и поэтому индуцируют соответствующие целочисленные углы между плоскостями граней разбиения n-мерного тора.

Замечание 3.3. Последнее определение имеет естественное обобщение на случай l различных плоскостей размерностей $k_1, \ldots, k_l$.

Определение 3.4. Назовём *разбиением тора для паруса некоторой n-мерной цепной дроби $(n+1)$-алгебраической иррациональности* для оператора A (или, для краткости, разбиением тора) построенное выше разбиение n-мерного тора на многогранные грани, полученное при факторизации паруса по действию группы $\Xi(A)$. При этом все грани разбиения оснащены целочисленно-линейными и целочисленно-аффинными типами, а пары соседних граней целочисленными углами между плоскостями, содержащими эти грани.

Глава II.

Целочисленно-линейная и целочисленно-аффинная классификации двумерных граней, расположенных на расстоянии, большем единицы от начала координат.

Во второй главе приводятся полные целочисленно-линейная и целочисленно-аффинная классификации компактных двумерных граней парусов многомерных цепных дробей, лежащих в двумерных плоскостях на целочисленных расстояниях, больших единицы от начала координат.

На странице 82 для каждой размерности $n \geq 2$ многомерной цепной дроби приведён список "α_n" всех целочисленно-линейных классов компактных двумерных граней парусов. Для размерности 2 он состоит из одной трёхпараметрической серии граней с двумя целочисленными параметрами и одним конечным, одной однопараметрической серии с одним целочисленным параметром и двух отдельных граней. Для размерностей $n \geq 3$ списки "α_n" состоят из одной трёхпараметрической серии граней с двумя целочисленными параметрами и одним конечным, одной двупараметрической серии граней с двумя целочисленными параметрами, одной однопараметрической серии с одним целочисленным параметром и двумя частными гранями. На странице 84 для целых $r \geq 2$ приведены списки "β_r" всех целочисленно-аффинных классов компактных двумерных граней парусов, лежащих на двумерных плоскостях, расположенных на целочисленном расстоянии r от начала координат. Список "β_2" состоит из одной двупараметрической серии граней (два целочисленных параметра), двух однопараметрических серий (с одним целочисленным параметром каждая) и одной отдельной грани. Список "β_3" состоит из одной однопараметрической серии граней (с одним целочисленным параметром каждая) и одной отдельной грани. Список "β_r" при $r \geq 4$ состоит из одной двупараметрической серии граней (целочисленный параметр и один конечный параметр).

Опишем в двух словах идею доказательства теоремы о целочисленно-линейной классификации. Целочисленно-линейная классификация двумерных граней парусов многомерных цепных дробей сводится к аффинной целочисленной классификации выпуклых трёхмерных отмеченных пирамид в трёхмерном пространстве обладающих следующими двумя свойствами: во-первых, все вершины основания отмеченной пирамиды, а также вершина отмеченной пирамиды — целые точки; во-вторых, все отличные от вершины отмеченной пирамиды целые точки отмеченной пирамиды лежат на основании отмеченной пирамиды. На странице 35 приведён список "M-W" всех целочисленно-аффинных классов таких отмеченных пирамид, он состоит из одной трёхпараметрической серии пирамид с двумя целочисленными параметрами и одним конечным, одной двупараметрической серии с двумя целочисленными параметрами, одной однопараметрической серии с одним целочисленным параметром и двух отдельных пирамид. При решении задачи целочисленно-аффинной классификации выпуклых трёхмерных отмеченных пирамид изучается расположение целых подрешёток на плоскостях, параллельных основаниям отмеченных пирамид.

Целочисленно-аффинная классификация двумерных граней, расположенных на двумерных плоскостях на расстоянии, большем единицы от начала координат, является следствием целочисленно-линейной классификации двумерных граней, расположенных на двумерных плоскостях на расстоянии, большем единицы, от начала координат.

Вторая глава организована следующим образом. Теорема о классификации многоэтажных вполне пустых выпуклых отмеченных пирамид сформулирована в разделе 4. В разделе 5 приведены определения, а также доказаны несколько вспомогательных утверждений, которые понадобятся при доказательстве теоремы второго раздела. В разделе 6 формулируется и доказывается частный случай основной теоремы: теорема о пустых многоэтажных тетраэдрах. В следующих двух разделах доказывается теорема о классификации многоэтажных вполне пустых трёхмерных выпуклых отмеченных пирамид: в разделе 7 разбирается случай многоугольных отмеченных пирамид; в разделе 8 — случай треугольных отмеченных пирамид. В разделе 9 сформулированы теорема о целочисленно-линейной классификации и следствие о целочисленно-аффинной классификации двумерных граней парусов многомерных цепных дробей. В разделе 10 приводится доказательство теоремы раздела 9. И, наконец, в разделе 11 приводятся формулировки нерешённых проблем, связанных с доказанными теоремами.

4 Формулировка основной теоремы.

Для удобства изложения введём следующие обозначения. В n-мерном пространстве через $(a_1, \ldots, a_k)$ при $k < n$ обозначим точку с координатами $(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$.

Обозначим отмеченную пирамиду с вершиной в начале координат и с четырёхугольником в основании с вершинами $(2, -1, 0)$, $(2, -a-1, 1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, b-1, 1)$, где $b \geq a \geq 1$, через $M_{a,b}$.

Обозначим отмеченную пирамиду с вершиной в начале координат и с треугольником в основании с вершинами

$(\xi, r-1, -r)$, $(a+\xi, r-1, -r)$, $(\xi, r, -r)$, где $a \geq 1$, $r \geq 1$, через $T^{\xi}_{a,r}$;

$(2, 1, b-1)$, $(2, 2, -1)$, $(2, 0, -1)$, где $b \geq 1$, через U_b;

$(2, -2, 1)$, $(2, -1, -1)$, $(2, 1, 2)$ через V;

$(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2, 3)$ через W.

На рисунке 1 изображены целочисленно-аффинные типы оснований перечисленных выше четырёхугольных и треугольных отмеченных пирамид.

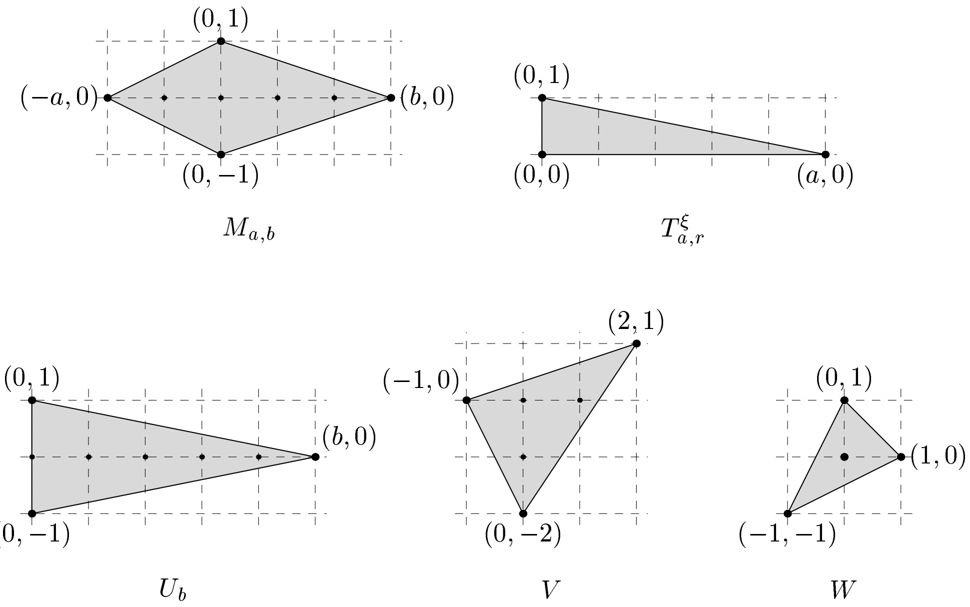

Рис. 1: Целочисленно-аффинные типы оснований отмеченных пирамид списка "M-W".

Теорема 4.1. О целочисленно-аффинной классификации многоэтажных вполне пустых выпуклых трёхмерных отмеченных пирамид.

Любая многоэтажная вполне пустая выпуклая отмеченная трёхмерная пирамида целочисленно-аффинно эквивалентна ровно одной из отмеченных пирамид следующего списка.

Список "M-W":

— *четырёхугольная отмеченная пирамида* $M_{a,b}$*, где* $b \geq a \geq 1$*;*

— *треугольная отмеченная пирамида* $T^{\xi}_{a,r,}$*, где* $a \geq 1$*, целые числа* ξ *и* r *взаимно-просты и удовлетворяют неравенствам:* $a \geq 1$*,* $r \geq 2$ *и* $0 < \xi \leq r/2$*;*

— *треугольная отмеченная пирамида* U_b*, где* $b \geq 1$*;*

— *треугольная отмеченная пирамида* V*;*

— *треугольная отмеченная пирамида* W*.*

5 Предварительные определения и утверждения.

Прежде, чем приступить к доказательству основной теоремы, введём несколько определений и обозначений, а также сформулируем и докажем необходимые для дальнейшего общие утверждения.

5.1 Предварительные определения и обозначения.

Целочисленной площадью целочисленного многоугольника, лежащего в некоторой двумерной плоскости в $\mathbb{R}^n$, называется отношение его евклидовой площади к минимально-возможной евклидовой площади целого треугольника, лежащего в той же двумерной плоскости.

Целый многогранник (многоугольник) называется *пустым*, если он не имеет целых точек внутри, а все целые точки его граней являются вершинами многогранника (многоугольника).

Пусть $ABCD$ — тетраэдр с упорядоченными вершинами в точках A, B, C и D. Обозначим через $P(ABCD)$ параллелепипед:

$$\{A + \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC} + \gamma\overline{AD} |\ \ 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1, 0 \le \gamma \le 1\}.$$

Определение 5.1. Рассмотрим (полезные) координаты в трёхмерном пространстве, натянутом на точки A, B, C и D пространства $\mathbb{R}^n$, эти координаты строятся по параллелепипеду $P(ABCD)$ следующим образом. Пусть b, c и d — целочисленные расстояния от точек B, C и D до двумерных плоскостей граней ACD, ABD и ACD соответственно. Возьмём точку A в качестве начала координат, а точкам B, C и D присвоим координаты $(b, 0, 0)$, $(0, c, 0)$ и $(0, 0, d)$ соответственно. Далее, координаты во всех остальных точках рассматриваемого трёхмерного пространства определяем по линейности. Будем говорить, что такая система координат является *целочисленно-дистанционной* по отношению к параллелепипеду $P(ABCD)$.

Замечание 5.2. Отметим особо, что в параллелепипеде $P(ABCD)$ набор точек A, B, C и D — упорядочен. По упорядоченному набору точек A, B, C и D целочисленно-дистанционная система координат строится однозначно.

При использовании целочисленно-дистанционной системы координат мы будем называть целые точки основной системы координат пространства $\mathbb{R}^n$ *узлами целочисленной решётки пространства* $\mathbb{R}^n$ (или, для краткости, просто *узлами решётки*).

Замечание 5.3. Отметим, что любой узел решётки из рассматриваемого трёхмерного пространства в построенной целочисленно-дистанционной системе координат имеет целые координаты. Обратное утверждение не верно: в некоторых целочисленно-дистанционных системах координат существуют точки с целыми координатами, не являющиеся узлами решётки. Для узлов решётки эти координаты по модулю совпадают с целочисленными расстояниями от узла решётки до плоскостей соответствующих граней параллелепипеда.

5.2 Утверждение о специальных сечениях целого параллелепипеда.

Прежде, чем сформулировать и доказать утверждение о целых точках сечения целого параллелепипеда, параллельного одной из его граней, введём следующее определение.

Определение 5.4. Точки P и Q пространства называются *эквивалентными относительно целого параллелограмма* $ABCD$, если существуют такие целые числа λ и β, что $P = Q + \lambda\overline{AB} + \beta\overline{AC}$. *Факторрешёткой* пространства по целому параллелограмму $ABCD$ называется множество классов эквивалентности узлов решётки относительно этого параллелограмма.

Отметим, что каждый класс эквивалентности целиком лежит в одной из двумерных плоскостей, параллельных плоскости параллелограмма. Каждая из таких плоскостей содержит лишь конечное число классов эквивалентности узлов решётки. Их число равно индексу плоской подрешётки, образованной векторами этого параллелограмма, в решётке всех целых векторов, лежащих в этой плоскости.

Утверждение 5.5. *Рассмотрим целый параллелепипед* $ABCDA'B'C'D'$ *в трёхмерном пространстве и некоторую целую плоскость* π, *параллельную грани* $ABCD$. *Пусть плоскость* π *пересекает параллелепипед (по параллелограмму). Тогда выполняются следующие два утверждения.*

Во-первых, плоскость π *содержит конечное число классов эквивалентности узлов решётки относительно параллелограмма* $ABCD$. *Это число равно индексу плоской подрешётки, образованной векторами* $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, *в решётке всех целых точек двумерного подпространства, натянутого на векторы* $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.

Во-вторых, для каждого класса эквивалентности узлов решётки относительно параллелограмма $ABCD$, *лежащего в плоскости* π, *выполняется ровно одно из следующих условий:*

а) на параллелограмме лежит всего одна целая точка класса эквивалентности узлов решётки, она расположена во внутренней части параллелограмма;

б) на параллелограмме лежат ровно две точки класса эквивалентности узлов решётки, расположенные на противоположных сторонах параллелограмма (не в вершинах);

в) на параллелограмме лежат четыре точки, совпадающие с вершинам параллелограмма.

5.2.1 Лемма о специальных сечениях целого параллелепипеда с пустой гранью.

Докажем сначала частный случай утверждения 5.5, когда целый параллелепипед содержит пустую грань, а сечение параллелепипеда параллельно этой грани.

Лемма 5.6. *Рассмотрим целый параллелепипед, одна из граней которого является пустой. Если целая плоскость, параллельная пустой грани, пересекает параллелепипед (по некоторому параллелограмму), то выполняется ровно одно из следующих трёх условий:*

а) на параллелограмме пересечения лежит всего одна целочисленная точка, она расположена во внутренней части параллелограмма;

б) на параллелограмме пересечения лежат две точки, расположенные на противоположных сторонах параллелограмма (не в вершинах);

в) на параллелограмме пересечения лежат четыре точки, совпадающие с вершинами параллелограмма.

Доказательство. Рассмотрим пустую грань F параллелепипеда и целую плоскость π, параллельную грани F и пересекающую параллелепипед. Поскольку плоскость π параллельна грани F, параллелограмм в сечении параллелепипеда плоскостью π конгруэнтен грани F.

Параллельный перенос на вектор с началом в вершине грани F и с концом в некоторой целой точке плоскости π взаимно-однозначно отображает множество целых точек двумерной плоскости грани F на множество целых точек плоскости π, поскольку вектор параллельного переноса имеет целые координаты. При этом целый пустой параллелограмм F переходит в некоторый конгруэнтный целый пустой параллелограмм на плоскости π.

Итак, утверждение леммы свелось к следующему утверждению на плоскости. Пусть некоторый параллелограмм получается при помощи параллельного переноса на вектор, лежащий в плоскости параллелограмма, из некоторого целого пустого параллелограмма. Тогда такой параллелограмм удовлетворяет одному из условий а) — в). Это утверждение является простым следствием того, что векторы, соответствующие сторонам пустого параллелограмма, порождают решётку целых точек на плоскости. □

5.2.2 Доказательство утверждения 5.5.

Возьмём некоторую целую точку K плоскости π. Вектор $\overline{AK}$ задаёт взаимно-однозначное отображение из множества классов эквивалентности узлов решётки, лежащих в плоскости ABC, во множество классов эквивалентности узлов решётки, лежащих в плоскости π. Число классов эквивалентности узлов решётки в плоскости ABC по определению равно индексу плоской подрешётки, образованной векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, в подрешётке всех целых векторов, параллельных плоскости ABC. Первая часть утверждения доказана.

Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим произвольный класс эквивалентности узлов решётки относительно параллелограмма $ABCD$. Обозначим плоскость, содержащую весь класс эквивалентности узлов решётки, через π, а через P — одну из точек этого класса эквивалентности узлов решётки. Предположим, плоскость π пересекает параллелепипед.

Пусть плоскость π не содержит параллелограмма $ABCD$. Рассмотрим подрешётку решётки целых точек трёхмерного пространства, порождённую векторами $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OP}$, где через O обозначено начало координат. Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с такой подрешёткой удовлетворяет условиям леммы 5.6, и поэтому наше утверждение является следствием леммы 5.6.

Если плоскость π содержит параллелограмм $ABCD$, то выбираем подрешётку порождённую векторами $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$ и $\overline{OP}$ и применяем лемму 5.6 к параллелепипеду $A'B'C'D'ABCD$ с такой подрешёткой. □

5.3 Следствие о целочисленных расстояниях между противоположными вершинами и плоскостями граней пустого тетраэдра.

Следствие 5.7. *Все целочисленные расстояния от вершин пустого целого тетраэдра до двумерных плоскостей противоположных граней равны.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый пустой целый тетраэдр $OABC$. Пусть целочисленное расстояние от точки A до двумерной плоскости грани OBC равно n. Покажем, например, что целочисленное расстояние от точки B до двумерной плоскости грани OAC также равно n.

Построим параллелепипед $P(OABC)$. Поскольку треугольники OBC, OAB и OAC пустые, соответствующие им грани параллелепипеда также пустые. Следовательно, все двумерные грани параллелепипеда пустые. Рассмотрим все целые плоскости, параллельные грани OBC и разбивающие параллелепипед на две непустые части. Поскольку целочисленное расстояние от точки A до двумерной плоскости грани OBC равно n, количество таких плоскостей равно $n-1$.

По лемме 5.6 каждая из построенных $n-1$ плоскостей высекает в параллелепипеде параллелограмм, который удовлетворяет одному из условий а) – в) леммы 5.6. Поскольку все боковые двумерные грани параллелепипеда пустые (то есть не содержат целых точек, отличных от вершин), все рассматриваемые параллелограммы не удовлетворяют условиям б) и в) леммы 5.6. Следовательно, каждый такой параллелограмм содержит ровно одну целую точку, причём эта точка лежит внутри параллелограмма. Итак, внутри параллелепипеда $P(OABC)$ содержится ровно $n-1$ целых точек, так как целых плоскостей и параллельных грани OBC, пересекающих пирамиду, ровно $n-1$, причём одна из них проходит через OBC, а одна через точку A.

Если целочисленное расстояние от точки B до двумерной плоскости грани OAC равно m, то аналогичные рассуждения показывают, что внутри параллелепипеда содержится ровно $m-1$ целых точек. Следовательно, $n-1=m-1$, то есть $n=m$.

Аналогично доказываются равенства остальных целочисленных расстояний.

□

Следствие 5.8. Рассмотрим целочисленный параллелепипед, натянутый на некоторый пустой тетраэдр, и целую плоскость, параллельную одной из граней параллелепипеда. Пусть эта плоскость разбивает параллелепипед на две непустые части. Тогда на параллелограмме в пересечении плоскости с параллелепипедом лежит всего одна целая точка, она расположена во внутренней части параллелограмма. □

6 Вспомогательное следствие о пустых целых тетраэдрах.

В этом разделе пойдёт речь о следствии о пустых целых тетраэдрах теоремы Уайта [54] (см. также [19]). Сформулируем сначала саму теорему.

Теорема 6.1. **(Г. К. Уайт, 1964 [54].)** *Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ — целочисленный трёхмерный симплекс, пусть $E_i = \{\sigma_i, \sigma'_i\}$, $i = 1, 2, 3$ — множество точек, принадлежащих паре противоположных рёбер σ_i, σ'_i симплекса Δ. Тогда множество $(\Delta \setminus E_i) \cap \mathbb{Z}^3$ пусто, если и только если существует такое j и такие две соседние целые плоскости π_j, π'_j (соседние в том смысле, что нет целых точек, лежащих строго между π_j и π'_j), что*

$$\sigma_i \subset \pi_j \qquad \sigma'_i \subset \pi'_j.$$

Следствие о пустых целых тетраэдрах — полезное утверждение: кроме того, что на нём базируется классификация пустых выпуклых многоэтажных тетраэдров, это утверждение многократно используется при доказательстве теоремы 4.1. В этом разделе размерность пространства без потери общности полагается равной трём.

Следствие 6.2. *Пусть $ADBA'$ — некоторый пустой целый тетраэдр. Тогда все целые точки натянутого на него параллелепипеда $P(ADBA')$ лежат на одной из плоскостей, проходящих через пары центрально-симметричных рёбер параллелепипеда, ни одно из которых не является ребром тетраэдра.*

Замечание 6.3. Всего плоскостей, проходящих через пары центрально-симметричных рёбер параллелепипеда, — шесть. Однако три из них проходят через общие рёбра параллелепипеда и тетраэдра и, следовательно, не подходят под условия теоремы. Таким образом, под условия теоремы подходят только три плоскости.

Для полноты изложения мы приводим здесь исчерпывающее доказательство следствия о пустых целых тетраэдрах.

6.1 Лемма об одном узле решётки

Для доказательства следствия 6.2 понадобится следующая лемма. Предположим, что точка B лежит на расстоянии $r > 1$ от плоскости грани ACD. Рассмотрим целочисленно-дистанционную систему координат по отношению к параллелепипеду $P(ADBA')$ (с целочисленно-дистанционными координатами (x, y, z)). Обозначим через B', C, C' и D' вершины с координатами $(0, r, r)$, $(r, r, 0)$, (r, r, r) и $(r, 0, r)$ соответственно.

Лемма 6.4. *На плоскости, заданной уравнением $x + y + z = r + 1$ (где $r > 1$), лежит ровно один внутренний узел решётки параллелепипеда.*

Доказательство. Покажем, что плоскость $x+y+z = r+1$ является целой. Перенесём пустой целый параллелограмм $A'B'CD$ на вектор $(0, 0, 1)$. Полученный параллелограмм лежит на плоскости, заданной уравнением $x + y + z = r + 1$. Поскольку целочисленное расстояние от начала координат (то есть от точки A) до целой плоскости грани $A'B'CD$ равно r, а, кроме того, эта плоскость задаётся уравнением $x + y + z = r$, все плоскости $x + y + z = n$ при целых n являются целыми. Следовательно, плоскость $x + y + z = r + 1$ — целая. Рёбра сдвинутого параллелограмма лежат на плоскостях граней параллелепипеда и не проходят через вершины. Следовательно, по лемме 5.6 параллелограмм содержит ровно один узел решётки, который является внутренней точкой параллелограмма. Обозначим этот узел через $\mathrm{K}(x_0, y_0, z_0)$. Следовательно, условиям леммы удовлетворяет не более одного узла решётки.

Покажем, что такая точка существует, то есть, что описанный выше узел решётки лежит внутри параллелепипеда. Сдвинутый параллелограмм задаётся неравенствами $0 \leq x \leq r$, $0 \leq y \leq r$ и уравнением $x + y + z = r + 1$. Поскольку единственная точка $(0, 0, r + 1)$ параллелограмма с целой координатой $z > r$ не является узлом решётки (так как $r + 1$ не делится нацело на r при $r > 1$), выполняется $z_0 \leq r$. Предположим теперь, что $z_0 \leq 0$. В этом случае вектор $\overline{KC}$ является целым, а, следовательно, точка $K' = A + \overline{KC}$ является узлом решётки. Кроме того, точка K' лежит в тетраэдре $ADBA'$ и не совпадает ни с

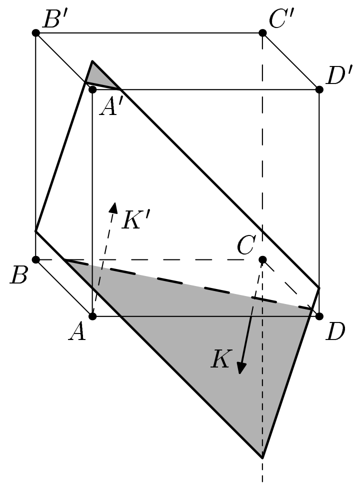

Рис. 2: Точки K и K' являются узлами решётки.

одной вершиной (см. рис. 2). Следовательно, тетраэдр $ADBA'$ — не пустой. Мы пришли к противоречию.

Таким образом, верны следующие неравенства $0 \leq x_0 \leq r$, $0 \leq y_0 \leq r$ и $0 \leq z_0 \leq r$. Поскольку рёбра параллелограмма не проходят через вершины параллелепипеда, все нестрогие неравенства заменяем на строгие. Из этого вытекает, что K — внутренняя точка параллелепипеда.

Утверждение леммы доказано. □

6.2 Доказательство следствия 6.2.

Докажем утверждение теоремы индукцией по количеству точек внутри параллелепипеда.

База индукции. Если целая точка всего одна, то она лежит в центре симметрии параллелепипеда на пересечении всех трёх плоскостей, удовлетворяющих условию теоремы.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение теоремы доказано для всех пустых целых тетраэдров с целочисленными расстояниями от вершин до двумерных плоскостей противоположных граней, не превосходящими $r - 1$ (напомним, что в пустом тетраэдре все целочисленные расстояния от вершин до двумерных плоскостей противоположных граней равны по следствию 5.7). Докажем утверждение для произвольного тетраэдра с целочисленными расстояниями от вершин до двумерных плоскостей противоположных граней, равными r.

По лемме 6.4 существует ровно один узел решётки $A''(x_0, y_0, z_0)$ на плоскости $x + y + z = r + 1$, который лежит внутри параллелепипеда. Предположим, что z_0 — наибольшая координата точки A''. (Случаи, когда x_0 или y_0 — наибольшие координаты полностью аналогичны по следствию 5.7.)

Тетраэдр $ADCA''$ является пустым целым тетраэдром, поскольку все точки тетраэдра $ADBA''$ с целыми целочисленно-дистанционными координатами (за исключением точки A'') лежат в пустом тетраэдре $ADBA'$. Целочисленное расстояние от точки A'' до плоскости ADC равно $z_0 < r$. Рассмотрим параллелепипед $P(ADBA'')$. По предположению индукции все целые точки параллелепипеда лежат либо в плоскости $A''CD$, либо в плоскости $A''BC$, либо в плоскости $B''BD$ (здесь $B'' = A'' + \overline{AB}$). Рассмотрим поочерёдно пересечения этих трёх плоскостей с плоскостью $z = 1$.

Случай 1. Плоскость $A''CD$. Плоскость $A''CD$ задаётся уравнением

$$x + \frac{r - x_0}{z_0} z = r.$$

Пересечение плоскости $A''CD$ с плоскостью $z = 1$ есть прямая $(x_1, t, 1)$, где t — параметр, а x_1 — константа, равная $r - \frac{r-x_0}{z_0}$. Эта прямая содержит точки с целыми координатами только в том случае, если x_1 — целое число. Оценим его (используя предположение $y_0 \leq z_0$).

$$x_1 = r - \tfrac{r-x_0}{z_0} = r - \tfrac{r-(r+1-z_0-y_0)}{z_0} = r + \tfrac{1}{z_0} - 1 - \tfrac{y_0}{z_0} \geq$$
$$r - 2 + \tfrac{1}{z_0} > r - 2.$$

С другой стороны, выполняется неравенство $x_1 < r$. Из целости x_1 и неравенств $r - 2 < x_1 < r$ следует, что $x_1 = r - 1$. Таким образом, существуют узлы решётки с координатами $(r - 1, t, 1)$, а значит, по утверждению 5.5, один из них (с координатами $(r-1, t_0, 1)$, для некоторого целого t_0) лежит в параллелепипеде $P(ADBA')$. Следовательно, все остальные узлы параллелепипеда $P(ADBA')$ имеют координаты $(r - k, (k \cdot t_0 \mod r), k)$, то есть лежат на грани $A'B'CD$.

Случай 2. Плоскость $A''BC$. Плоскость $A''BC$ задаётся уравнением

$$y + \frac{r - y_0}{z_0} z = r.$$

Пересечение плоскости $A''BC$ с плоскостью $z = 1$ есть прямая $(t, y_1, 1)$, где t — параметр, а y_1 — константа, равная $r - \frac{r - x_0}{z_0}$. Эта прямая содержит точки с целыми координатами только в том случае, если y_1 — целое число. Оценим его (используя предположение $x_0 \leq z_0$).

$$y_1 = r - \tfrac{r-y_0}{z_0} = r - \tfrac{r-(r+1-z_0-x_0)}{z_0} = r + \tfrac{1}{z_0} - 1 - \tfrac{x_0}{z_0} \geq$$
$$r - 2 + \tfrac{1}{z_0} > r - 2.$$

С другой стороны, выполняется неравенство $y_1 < r$. Из целости y_1 и неравенств $r - 2 < y_1 < r$ следует, что $y_1 = r - 1$. Таким образом, существуют узлы решётки с координатами $(t, r-1, 1)$, а значит по утверждению 5.5 один из них (с координатами $(t_0, r-1, 1)$, для некоторого целого t_0) лежит в параллелепипеде $P(ADBA')$. Следовательно, все остальные узлы параллелепипеда $P(ADBA')$ имеют координаты $((k \cdot t_0 \mod r), r - k, k)$, то есть лежат на грани $A'BCD'$.

Добавление. Плоскость $B''BD$. Покажем, что случай плоскости $B''BD$ невозможен. Эта плоскость задаётся уравнением

$$x + y + \frac{r - y_0 - x_0}{z_0} z = r.$$

Пересечение плоскости $B''BD$ с плоскостью $z = 1$ есть прямая $(\frac{a+t}{2}, \frac{a-t}{2}, 1)$, где t — параметр, а a — константа, равная $r - \frac{r-x_0-y_0}{z_0}$. Такая прямая содержит точки с целыми координатами только в том случае, если a — целое число. Оценим его.

$$a = r - \frac{r - y_0 - x_0}{z_0} = r - \frac{z_0 - 1}{z_0} > r - 1.$$

С другой стороны, выполняется неравенство $a < r$. Таким образом, на пересечении параллелепипеда $P(ADBA')$ с плоскостью $z = 1$ нет узлов решётки, что невозможно. Следовательно, первые два случая целиком исчерпывают все варианты.

Итак, для произвольного тетраэдра с целочисленными расстояниями от вершин до двумерных плоскостей противоположных граней, равными r, наше утверждение доказано.

Таким образом, утверждение теоремы доказано по индукции. □

Замечание 6.5. Отсутствие третьего случая при доказательстве теоремы обусловлен требованием того, что третья координата точки A'' не меньше первой и второй координаты этой точки.

6.3 Классификация пустых треугольных отмеченных пирамид.

Следствие 6.2 позволяет описать все различные целочисленные аффинные типы пустых треугольных отмеченных пирамид, то есть тетраэдров с отмеченной вершиной.

Введём следующее обозначение. Пусть r — некоторое натуральное число, ξ — натуральное число или ноль. Обозначим через P_r^ξ отмеченную пирамиду с вершиной в точке $(0,0,0)$ и основанием с вершинами $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ и $(\xi, r-\xi, r)$.

Следствие 6.6. *Целая пустая треугольная отмеченная пирамида целочисленно-аффинно эквивалентна одной из пирамид следующего списка.*

Список "P":

— P_1^0*;*

— P_r^ξ*, где целые числа* ξ *и* r *взаимно-просты и удовлетворяют следующим неравенствам:* $r \geq 2$*,* $0 < \xi \leq r/2$.

Приведённые в списке "P" целые треугольные отмеченные пирамиды все пустые и попарно целочисленно-аффинно неэквивалентны.

Доказательство. **1. Полнота списка "P".** Покажем, что произвольная пустая целочисленная отмеченная пирамида $ADBA'$ (с вершиной A) целочисленно-аффинно эквивалентна одной из отмеченных пирамид списка "P".

Предположим, что целочисленное расстояние от её вершины до двумерной плоскости основания равно положительному натуральному числу r. Если $r = 1$, то вершины отмеченной пирамиды порождают всю трёхмерную решётку целых точек, и поэтому такая отмеченная пирамида некоторым целочисленным аффинным преобразованием переводится в отмеченную пирамиду P_1^0 (при этом преобразовании точка A перейдёт в точку $(0,0,0)$).

Предположим теперь, что $r > 1$. По следствию 6.2 все целые точки параллелепипеда $P(ADBA')$ лежат на одной из трёх плоскостей, проходящих через центрально-симметричные рёбра параллелепипеда, не являющиеся рёбрами отмеченной пирамиды $ADBA'$. Переобозначим вершины основания отмеченной пирамиды DBA' буквами $\overline{B}$, $\overline{D}$ и $\overline{A}'$ так, чтобы все внутренние точки параллелепипеда $P(A\overline{DBA}')$ лежали на плоскости, проходящей через ребро $\overline{BD}$ и центрально-симметричное ребро.

Рассмотрим пересечение этого параллелепипеда с плоскостью $z = 1$ в целочисленно-дистанционной системе координат, связанной с параллелепипедом $P(A\overline{DBA}')$. На этой плоскости лежит ровно один узел решётки, который по следствию 6.2 имеет координаты $(r-\xi, \xi, 1)$. Обозначим его через K.

Если числа ξ и r имеют некоторый натуральный общий делитель $c \geq 1$, то точка с координатами $(\frac{r-\xi}{c}r, \frac{\xi}{c}r, c)$ является узлом решётки. Следовательно, точка $(0,0,c)$ является узлом решётки, и тогда отмеченная пирамида $A\overline{DBA}'$ не является пустой. Таким образом, целые числа ξ и r взаимно-просты.

Поскольку целочисленное расстояние от точки K до двумерной плоскости грани $A\overline{DB}$ равно единице, тетраэдр $A\overline{BD}K$ некоторым целочисленным аффинным преобразованием переводится в тетраэдр с вершинами $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ и $(1,1,1)$. При таком преобразовании вершина $\overline{A}'$ перейдёт в точку с координатами $(\xi, r-\xi, r)$. Следовательно, отмеченная пирамида $ABDA'$ (которая переводится в отмеченную пирамиду $A\overline{BDA}'$ целочисленно-аффинной заменой координат, сохраняющей вершину и переставляющей вершины основания) целочисленно-аффинно эквивалентна отмеченной пирамиде P_r^ξ, где $0 < \xi < r$, а числа ξ и r взаимно-просты. Остаётся только отметить, что отмеченные пирамиды P_r^ξ и $P_r^{r-\xi}$ получаются друг из друга при помощи симметрии относительно плоскости $x = y$, которая сохраняет решётку и отмеченную вершину — начало координат. Следовательно, отмеченные пирамиды P_r^ξ и $P_r^{r-\xi}$ целочисленно-аффинно эквивалентны.

2. Пустота отмеченных пирамид списка "P". Покажем, что перечисленные отмеченные пирамиды P_ξ^r являются пустыми.

Пересечение плоскости $z = b$ (для $1 \leq b \leq (r-1)$) и отмеченные пирамиды P_ξ^r есть треугольник $A_kB_kD_k$ с координатами

$$\left(\frac{b}{r}\xi, \frac{b}{r}(r-\xi), b\right), \quad \left(\frac{b}{r}, \frac{b}{r}(r-\xi)+\frac{r-b}{r}, b\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{b}{r}\xi+\frac{r-b}{r}, \frac{b}{r}(r-a), b\right).$$

Треугольник $A_kB_kD_k$ лежит в ленте $b \leq x+y \leq b+\frac{r-b}{r}$, $z = b$. Эта лента содержит только целые точки с координатами $(t, b-t, b)$. Таким образом, остаётся проверить, что точка A_k не является целой. Так как числа ξ и r взаимно-просты, а $d < r$, первая координата точки A_k не является целой. Следовательно, все отмеченные пирамиды P_ξ^r, перечисленные в формулировке следствия 6.6, являются пустыми.

3. Неизбыточность списка "P". Докажем, что все отмеченные пирамиды P_ξ^r следствия 6.6 попарно целочисленно-аффинно неэквивалентны. Заметим, что целочисленное расстояние от вершины до двумерной плоскости основания является целочисленно-аффинным инвариантом, поэтому отмеченные пирамиды с разными r неэквивалентны.

Для того, чтобы различить отмеченные пирамиды при одинаковых r, построим следующий целочисленно-аффинный инвариант. Рассмотрим произвольную пустую отмеченную пирамиду $ABDA'$ с вершиной A и связанный с ней трёхгранный угол с вершиной A и с треугольником DBA' в основании. По лемме 6.4 в этом трёхгранном угле лежит всего одна точка (обозначим её через K), расположенная на двумерной плоскости, параллельной грани DBA', на целочисленном расстоянии $r+1$ от вершины A. По следствию 6.2 целочисленные расстояния от точки K до двумерных плоскостей граней угла равны 1, ξ, $r-\xi$ (для некоторого натурального числа ξ). Трёхгранный угол и точка K определяются по отмеченной пирамиде однозначно с точностью до симметрий отмеченной пирамиды, сохраняющих вершину. Группа таких симметрий действует на наборе целочисленных расстояний от K до двумерных плоскостей граней угла перестановками. Тем самым, неупорядоченный набор $[1, \xi, r-\xi]$ является инвариантом. Этот инвариант с очевидностью различает все отмеченные пирамиды P^r_ξ при одинаковом целочисленном расстоянии r.

Все утверждения следствия доказаны. $\square$

Утверждение 6.7. *Пусть целые числа ξ и r взаимно-просты и удовлетворяют следующим неравенствам: $r \geq 2$, $0 < \xi \leq r/2$. Тогда отмеченная пирамида P^ξ_r целочисленно-аффинно эквивалентна отмеченной пирамиде $T^\xi_{1,r}$.*

Доказательство. Отмеченная пирамида $T^\xi_{1,r}$ получается из отмеченной пирамиды P^ξ_r при помощи целочисленного линейного преобразования, задаваемого матрицей

$$\begin{pmatrix} \xi+1 & \xi & -\xi \\ r-1 & r-1 & 2-r \\ -r & -r & r-1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Следствие 6.8. *Любая целая пустая r-этажная ($r \geq 2$) треугольная отмеченная пирамида целочисленно-аффинно эквивалентна одной из отмеченных пирамид вида $T^\xi_{1,r}$, где целые числа ξ и r взаимно-просты, причём $0 < \xi \leq r/2$. Перечисленные целые треугольные отмеченные пирамиды пусты и попарно целочисленно-аффинно неэквивалентны (кроме того, они попарно целочисленно-аффинно неэквивалентны при разных r).* $\square$

6.4 Классификация пустых тетраэдров.

Отметим, что имеется различие между классификацией пустых треугольных отмеченных пирамид (с выделенной вершиной) и пустых тетраэдров (без выделенной вершины).

Первые шаги для классификации пустых тетраэдров алгебраическими методами предпринял Ж.-О. Муссафир в своей работе [42]. В работе Муссафира пустые тетраэдры приводятся к эрмитовым нормальным формам.

Теорема 6.9. **(Ж.-О. Муссафир [42].)** *Целый пустой тетраэдр целочисленно-аффинно эквивалентен тетраэдру с вершиной в начале координат и основанием с вершинами* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *и* (u,v,d), *для некоторых целых чисел* u, v *и* d, *где* u, v *и* $u+v-1$ *взаимно-просты с* d, *а одно из чисел* $u+v$, $u-1$, $v-1$ *делится на* d. (*Такие тетраэдры иногда называют эрмитовыми нормальными формами симплексов.*)

Однако многие из эрмитовых нормальных форм тетраэдров являются целочисленно-аффинно эквивалентными между собой. Существуют дополнительные соотношения на числа u, v и d. Приведённое ниже следствие следствия 6.2 уточняет теорему Ж.-О. Муссафира.

Следствие 6.10. *Целый пустой тетраэдр целочисленно-аффинно эквивалентен одному из следующих тетраэдров:*

— P_1^0;

— P_r^ξ, *где* $r \geq 2$, $0 < \xi < r$, *при этом элемент* $(\xi \mod r)$ *аддитивной группы* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *входит в связанную с ней мультипликативную группу* $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ (*то есть целые числа* ξ *и* r *взаимно-простые*).

Все приведённые в этом списке целые тетраэдры пустые. Тетраэдры $P_{r_1}^\xi$ *и* $P_{r_2}^\nu$ *целочисленно эквивалентны тогда и только тогда, когда* $r_1 = r_2$, *и, кроме того, при* $r_1 > 1$ *выполняется хотя бы одно из четырёх равенств* (*в группе* $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$):

$$(\xi \mod r_1) = (\pm 1) \cdot (\nu \mod r_1)^{\pm 1}.$$

Доказательство. **1. Полнота списка.** По следствию 6.6 все пустые целые тетраэдры целочисленно-аффинно эквивалентны одному из тетраэдров, приведённых в списке следствия 6.10.

2. Пустота тетраэдров списка. По следствию 6.6 тетраэдры P_ξ^r пусты при взаимно-простых r и ξ, где $r \geq 2$, а $\xi \leq r/2$. Поскольку тетраэдры P_ξ^r и $P_\xi^{r-\xi}$ эквивалентны, и P_1^0 — пустой, все тетраэдры следствия 6.10 пустые.

3. Доказательство последнего утверждения следствия 6.10. (Аффинная) группа симметрий правильного тетраэдра S_4 строго включает в себя (аффинную) группу симметрий тетраэдра с отмеченной вершиной S_3. Теперь однозначно определён не какой-нибудь один выделенный трёхгранный угол, соответствующий некоторой вершине тетраэдра, а неупорядоченный набор всех четырёх углов. В каждом из этих четырёх углов однозначно выделяется по целой точке (аналогично доказательству предыдущего следствия). Прямые вычисления показывают, что целочисленные расстояния от них до четырёх двумерных плоскостей граней равны

$$(1,1,\xi,r-\xi), \quad (1,1,\xi,r-\xi), \quad (\nu,r-\nu,1,1) \quad \text{и} \quad (\nu,r-\nu,1,1),$$

где $(\xi \mod r)\cdot(\nu \mod r) = 1$ (в группе $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$). При этом целочисленные расстояния до двумерных плоскостей граней согласованно переставляются во всех точках. Тетраэдры $P^{\xi}_{r_1}$, $P^{\nu}_{r_2}$, $P^{r-\xi}_{r}$ и $P^{r-\nu}_{r}$ эквивалентны, а построенный инвариант различает разные четвёрки тетраэдров.

Утверждения следствия доказаны. □

Замечание 6.11. Классификации пустых треугольных отмеченных пирамид и пустых тетраэдров совпадают только при $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 24$. (Для этого необходимо, чтобы квадрат любого элемента в соответствующей мультипликативной группе был равен ± 1. Следовательно, все прямые слагаемые мультипликативной группы либо $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Таких мультипликативных групп всего пятнадцать. Из них удовлетворяют нашему условию только девять перечисленных, и дополнительно добавляется случай $r = 1$.)

7 Доказательство теоремы 4.1: многоугольные отмеченные пирамиды.

Приступаем к доказательству теоремы о целочисленно-аффинной классификации многоэтажных вполне пустых выпуклых трёхмерных отмеченных пирамид. В этом разделе описан случай отмеченных пирамид с многоугольниками (обладающими не менее четырёх углов, отличных от развёрнутых) в основании. В следующем разделе разбирается случай треугольных отмеченных пирамид.

7.1 Утверждение о целом параллелограмме внутри целого многоугольника.

Покажем сначала, что любой целый выпуклый многоугольник (без развёрнутых углов), начиная с четырёхугольника, содержит целый параллелограмм.

Утверждение 7.1. *Пусть четыре вершины некоторого выпуклого многоугольника являются целыми точками. Тогда этот многоугольник содержит в себе некоторый параллелограмм с целыми вершинами, целочисленно-аффинно эквивалентный либо стандартному единичному параллелограмму на рисунке 3a), либо параллелограмму с вершинами* $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ *и* $(0, -1)$ *на рисунке 3b):*

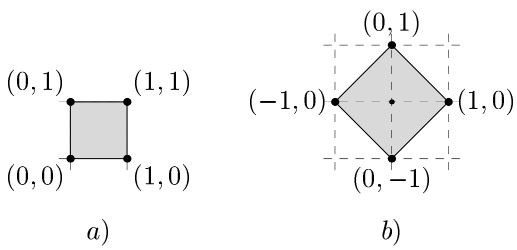

Рис. 3: В каждом целом многоугольнике содержится параллелограмм, целочисленно-аффинно эквивалентный одному из данных.

Доказательство. Предположим, что целый выпуклый многоугольник содержит четыре целые вершины. Рассмотрим четырёхугольник, образованный этими четырьмя вершинами, и обозначим его $KLMN$. Докажем, что в нём содержится некоторый параллелограмм с целыми вершинами.

Рассмотрим четырёхугольник $KLMN$ и параллелограмм $P(KLN)$, обозначим его через $P(KLM'N)$. Точка M может быть расположена четырьмя разными способами относительно прямых, проходящих через стороны $M'N$ и $M'L$. На рис. 4 разобраны все четыре случая расположения.

Для всех четырёх вариантов расположения явно указывается параллелограмм с целыми вершинами, вписанный в четырёхугольник. На рисунке че-

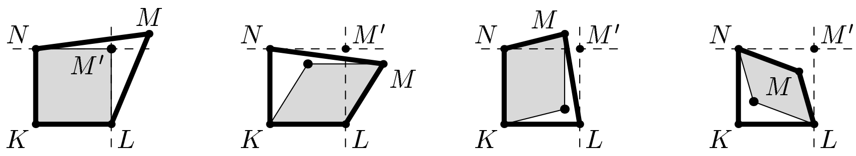

Рис. 4: Случаи расположения выпуклого четырёхугольника $KLMN$ относительно параллелограмма $P(KNL)$ (то есть $KLM'N$).

тырёхугольник $KLMN$ выделен жирной линией, а параллелограмм закрашен серым.

Заметим, что если некоторая точка целого параллелограмма целая, то и центрально-симметричная ей точка относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма по очевидным соображениям также является целой (эта точка также принадлежит параллелограмму).

Рассмотрим построенный параллелограмм и обозначим его через $ABCD$.

1. Пустой параллелограмм. Если параллелограмм $ABCD$ пуст, то его рёбра порождают решётку целых чисел и тем самым сам он аффинно-эквивалентен стандартному единичному параллелограмму.

2. Параллелограмм с единственной целой точкой, отличной от вершин. Если параллелограмм $ABCD$ содержит ровно одну целую точку O, отличную от вершин параллелограмма, то эта точка совпадает с центрально-симметричной относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма целой точкой и тем самым является точкой пересечения диагоналей. Таким образом, целый треугольник OAB пустой, и некоторым целочисленным аффинным преобразованием переводится в стандартный единичный треугольник. При этом $ABCD$ переходит в параллелограмм с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$.

3. Остальные случаи. Пусть параллелограмм $ABCD$ содержит более одной целой точки, отличной от вершин параллелограмма. Тогда среди этих точек существует некоторая точка O, отличная от пересечения диагоналей параллелограмма. Обозначим через O' целую точку параллелограмма, центрально-симметричную точке O относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма. Без потери общности полагаем, что отрезок OO' не лежит на диагонали AC (в противном случае OO' не лежит на диагонали BD). Следовательно, $AOCO'$ (либо $AO'CO$) является целым параллелограммом, содержащимся в исходном. Рассмотрим этот параллелограмм. Количество его целых точек, отличных от вершин, меньше, чем у параллелограмма $ABCD$, как минимум на две. Поскольку исходный параллелограмм содержал лишь конечное число целых точек, итерационно применяя описанное в этом пункте построение, приходим к одному из параллелограммов пунктов **1.** или **2.**

Следовательно, любой выпуклый многоугольник с четырьмя целыми вершинами содержит в себе параллелограмм с целыми вершинами, целочисленно-аффинно эквивалентный параллелограмму, описанному в формулировке утверждения. Утверждение доказано. $\square$

7.2 Случай пустой отмеченной пирамиды с пустым параллелограммом в основании.

Утверждение 7.2. *Пусть в основании целой отмеченной пирамиды лежит пустой* (*целый*) *параллелограмм. Если отмеченная пирамида пустая, то она одноэтажная.*

Доказательство. Докажем утверждение от противного. Пусть дана пустая отмеченная пирамида $A'ABCD$ с вершиной A' и пустым параллелограммом $ABCD$ в основании. Предположим, что целочисленное расстояние от точки A' до плоскости $ABCD$ равно $r > 1$. Достроим отмеченную пирамиду до параллелепипеда $P(AA'BC)$. Рассмотрим соответствующую целочисленно-дистанционную систему координат (будем обозначать координаты точек в этой системе через (x, y, z)). По утверждению 5.5 координаты точек A', B и C равны соответственно $(r, 0, 0)$, $(0, r, 0)$ и $(0, 0, r)$. Напомним, что координаты узлов старой решётки целых точек в новой системе координат целые.

Найдём узел решётки параллелепипеда на расстоянии 1 от плоскости ABC, то есть узел решётки с координатами $(1, y, z)$, где $0 \leq y \leq r$, $0 \leq z \leq r$. С одной стороны, мы знаем, что он не принадлежит отмеченной пирамиде $A'ABCD$, а, следовательно, $y+1>r$ или $z+1>r$. С другой стороны, по следствию 5.8 на двумерных гранях параллелепипеда нет целых точек, отличных от вершин, поскольку параллелепипед $P(AA'BC)$ натянут на пустой тетраэдр $AA'BC$. Таким образом, координаты y и z не равны r. Следовательно, узлов решётки параллелепипеда, лежащих на расстоянии 1 от плоскости ABC, не существует. Мы пришли к противоречию с леммой 5.6. Утверждение доказано. □

7.3 Случай вполне пустой отмеченной пирамиды с целым параллелограммом в основании с единственной целой точкой внутри.

Лемма 7.3. Рассмотрим целую отмеченную пирамиду с вершиной в точке O и параллелограммом $ABCD$ в основании. Пусть целочисленный аффинный тип основания $ABCD$ совпадает с целочисленным аффинным типом параллелограмма с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$ (см. рис. 5). Если отмеченная пирамида $OABCD$ вполне пустая и многоэтажная, то она двухэтажная. Аффинный целочисленный тип такой отмеченной пирамиды однозначно определяется и совпадает с аффинным целочисленным типом отмеченной пирамиды с вершиной в $(0,0,0)$ и основанием $(2,-1,0)$, $(2,-2,1)$, $(2,-1,2)$, $(2,0,1)$.

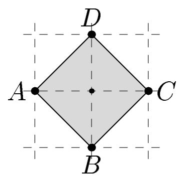

Рис. 5: Четырёхугольник с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$.

Доказательство. Предположим, что аффинный целочисленный тип основания $ABCD$ вполне пустой r-этажной отмеченной пирамиды $OABCD$ ($r \geq 2$) совпадает с целочисленным аффинным типом параллелограмма с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$.

Построим параллелепипед $P(AOBC)$ и рассмотрим соответствующую целочисленно-дистанционную систему координат (будем обозначать координаты точек в этой системе через (x, y, z)). По утверждению 5.5 координаты точек O, B, C и D равны соответственно $(r, 0, 0)$, $(0, 2r, 0)$, $(0, 0, 2r)$ и $(0, 2r, 2r)$.

Рассмотрим параллелограмм в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Найдём все узлы решётки, расположенные в этом параллелограмме. По утверждению 5.5 в параллелограмме пересечения таких узлов ровно два. Опишем все возможные варианты расположения этих узлов на параллелограмме пересечения параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Во-первых, узлов решётки нет на пересечении отмеченной пирамиды $AOBCD$ с плоскостью $x = 1$, то есть в замкнутом параллелограмме с вершинами $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 2r-2)$, $(1, 2r-2, 2r-2)$ и $(1, 2r-2, 0)$. Во-вторых, узлов решётки нет в параллелограммах, полученных из данного при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0, 2r, 0) + \mu(0, r, r)$, где λ и μ — целые числа. На рисунке 6 изображено несколько параллелограммов, в объединении которых нет узлов решётки. Эти параллелограммы закрашены серым цветом.

Таким образом, узлы решётки параллелограмма в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$ могут располагаться только в целых точках, полученных из целых точек (открытого) параллелограмма с вершинами $K(1, r-2, 2r-2)$, $L(1, r, 2r-2)$, $M(1, r, 2r)$ и $N(1, r-2, 2r)$ при помощи симметрии относительно плоскости $y = z$ и параллельных переносов на векторы $\lambda(0, 2r, 0) + \mu(0, r, r)$, где λ и μ — целые числа. Внутри этого параллелограмма всего одна точка с целыми координатами $(1, r-1, 2r-1)$, см. рис 6.

Предположим, эта точка является узлом решётки. Точка, симметричная выбранной относительно плоскости $y = z$, также является узлом решётки, поскольку в пересечении плоскости $x = 1$ и открытого параллелепипеда должно находиться ровно два узла решётки (других непокрытых целых точек параллелограмма в пересечении, кроме двух рассмотренных, не существует). Тогда точка $(2, 2r-2, 4r-2)$ является узлом решётки. Следовательно, точка $(2, 2r-2, 2r-2)$ является узлом решётки, а, следовательно, и точка $(2, r-2, r-2)$

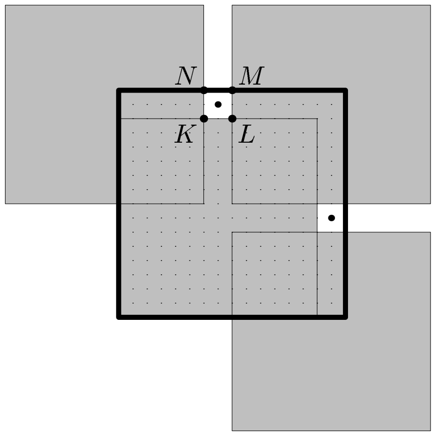

Рис. 6: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$.

также является узлом решётки. Однако, такая точка при $r \geq 3$ входит в замкнутый параллелограмм, полученный при пересечении нашей отмеченной пирамиды плоскостью $x = 2$ (вершины этого параллелограмма таковы: $(2, 0, 0)$, $(1, 0, 2r-4)$, $(1, 2r-4, 2r-4)$ и $(1, 2r-4, 0)$). Следовательно, при $r \geq 3$ отмеченной пирамиды, удовлетворяющей условиям леммы, не существует.

Рассмотрим случай $r = 2$. Целые точки A, B, C и $(1, 1, 3)$ однозначно задают целочисленную решётку. Следовательно, все отмеченные пирамиды, удовлетворяющие условиям леммы, имеют целочисленный аффинный тип отмеченной пирамиды с вершиной в $(0, 0, 0)$ и основанием $(2, -1, 0)$, $(2, -2, 1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, 0, 1)$ в старых координатах.

Таким образом, все утверждения леммы доказаны. $\square$

7.4 Общий случай.

Разберём теперь общий случай целых отмеченных пирамид с выпуклыми многоугольниками в основании, которые не содержат целых точек, отличных от вершины отмеченной пирамиды и целых точек основания.

Лемма 7.4. Рассмотрим целую многоэтажную отмеченную пирамиду с вершиной в точке O и с выпуклым многоугольником M в основании. Если эта отмеченная пирамида вполне пустая, то она двухэтажная, а в её основании ле-

жит четырёхугольник целочисленно-аффинно эквивалентный четырёхугольнику с вершинами $(b, 0)$, $(0, 1)$, $(-a, 0)$ и $(0, -1)$, где $b \geq a \geq 1$ (на рисунке 7 изображён случай $a = 2$, $b = 3$). Целочисленный аффинный тип отмеченной

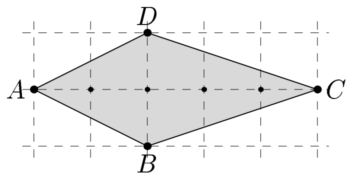

Рис. 7: Четырёхугольник с вершинами $(b, 0)$, $(0, 1)$, $(-a, 0)$ и $(0, -1)$, где $b \geq a \geq 1$.

пирамиды M определяется однозначно и совпадает с аффинным целочисленным типом отмеченной пирамиды $M_{a',b'}$ (где $b' \geq a' \geq 1$) тогда и только тогда, когда $a' = a$ и $b' = b$.

Доказательство. По условию целочисленное расстояние от двумерной плоскости многоугольника M до вершины O не меньше двух. Следовательно, по утверждению 7.1 многоугольник M содержит либо пустой целый параллелограмм, либо целый параллелограмм с единственной целой точкой внутри, отличной от вершин. По утверждению 7.2 случай пустого параллелограмма исключается. Рассмотрим случай параллелограмма P с целой точкой внутри.

Введём на плоскости основания M систему координат, в которой вершины параллелограмма P имеют координаты $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$. Заметим, что в такой системе координат точка плоскости является целой тогда и только тогда, когда эта точка является целой точкой плоскости грани F в старой системе координат.

Предположим, что целая точка с координатами (x, y) входит в основание M при некоторых целых $x, y > 0$. Поскольку многоугольник M — выпуклый, точка $(1, 1)$ также входит в M. Таким образом, пустой целый параллелограмм с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 1)$ входит в многоугольник M. Следовательно, по утверждению 7.2 расстояние до двумерной плоскости, содержащей многоугольник M, равно единице.

Аналогично, рассматриваются случаи $x > 0$, $y < 0$; $x < 0$, $y > 0$ и $x, y < 0$. Вместо запрещённой точки $(1, 1)$ в многоугольнике содержатся запрещённые точки $(1, -1)$, $(-1, 1)$ и $(-1, -1)$ соответственно.

Предположим, что в многоугольник M входят точки $(x, 0)$ и $(0, y)$, где $|x| > 1$ и $|y| > 1$. Тогда в многоугольнике M (поскольку M — выпуклый) содержится одна из запрещённых четырёх точек: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ и $(-1, -1)$.

Без ограничения общности полагаем, что в многоугольник M не входят точки с координатами $(0, y)$, где $|y| > 1$. Тогда многоугольник M целочисленно-аффинно эквивалентен четырёхугольнику с вершинами $(b, 0)$, $(0, 1)$, $(-a, 0)$ и $(0, -1)$, где $b \geq a \geq 1$.

Поскольку многоугольник M содержит параллелограмм P, по лемме 7.3 целочисленное расстояние от вершины отмеченной пирамиды O до двумерной плоскости её основания M равно двум. Параллелограмм P однозначно определяется по многоугольнику с вершинами $(b, 0)$, $(0, 1)$, $(-a, 0)$ и $(0, -1)$, где $b \geq a \geq 1$ (такой многоугольник содержит единственный целый параллелограмм с единственной целой точкой, отличной от его вершин). Следовательно, по лемме 7.3 наша отмеченной пирамида целочисленно аффинно-эквивалентна отмеченной пирамиде с вершиной в $(0, 0, 0)$ и основанием $(2, -1, 0)$, $(2, -a-1, 1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, b-1, 1)$.

Остаётся только отметить, что точка пересечения диагоналей построенного четырёхугольника делит эти диагонали на отрезки с целочисленными длинами 1, 1, a и b. Следовательно, неупорядоченный набор $[a, b]$ является целочисленно-аффинным инвариантом отмеченных пирамид.

Таким образом, все утверждения леммы доказаны. $\square$

Тем самым классификация многоугольных многоэтажных вполне пустых выпуклых отмеченных пирамид завершена.

8 Случай треугольных отмеченных пирамид, завершение доказательства теоремы 4.1.

В ходе доказательства перебирается несколько случаев. На протяжении этого раздела через $OABC$ будем обозначать рассматриваемую треугольную отмеченную пирамиду с основанием в треугольнике ABC.

8.1 Случай 1: треугольное основание содержит целый многоугольник.

Предположим, что на основании ABC существуют такие две целые точки D и E, что прямая DE пересекает стороны треугольника ABC не в вершинах. Без потери общности предполагаем, что открытый луч DE пересекает сторону AB, а открытый луч ED пересекает сторону BC. Следовательно, треугольник ABC содержит выпуклый целый четырёхугольник $AEDC$. По утверждению 7.1 треугольник ABC содержит либо целый пустой параллелограмм, либо целый пустой параллелограмм целочисленно-аффинно эквивалентный параллелограмму с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$.

Если треугольник ABC содержит пустой целый параллелограмм, то по утверждению 7.2 отмеченная пирамида $OABC$ — одноэтажная.

Предположим, что треугольное основание ABC содержит целый параллелограмм целочисленно-аффинно эквивалентный параллелограмму с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ и не содержит пустого целого параллелограмма. Введём на плоскости основания систему координат, в которой вершины рассматриваемого параллелограмма имеют координаты $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$. Тогда точки $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ и $(-1, -1)$ не принадлежат основанию ABC. Следовательно, отмеченная пирамида многоугольная (не треугольная).

Таким образом, все отмеченные пирамиды случая 1 содержат в себе пустой параллелограмм и по утверждению 7.2 являются одноэтажными.

8.2 Случай 2: целые точки основания, отличные от его вершин, не лежат на одной прямой.

Предположим теперь, что в треугольнике ABC не существует двух целых точек D и E, что прямая DE пересекает стороны треугольника ABC не в вершинах. Рассмотрим случай, когда все целые точки треугольника ABC, отличные от его вершин, не лежат на одной прямой. Возможен ровно один такой аффинный тип, он изображён на рисунке 8:

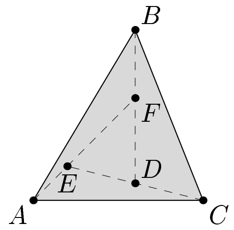

Рис. 8: Аффинный тип треугольника случая 2.

Найдём все возможные аффинные целочисленные типы такого треугольника. Поскольку треугольник FED — пустой, некоторым целочисленным аффинным преобразованием он переводится в любой другой пустой треугольник. Переведём FED в треугольник с вершинами $(1,0)$, $(0,0)$ и $(0,1)$ соответственно. Тогда точки A, B и C перейдут в точки $(-1,0)$, $(2,1)$ и $(0,-2)$ соответственно. Таким образом, целочисленный аффинный тип треугольника определяется единственным образом.

Лемма 8.1. *Рассмотрим многоэтажную вполне пустую отмеченную пирамиду с вершиной в точке O и с треугольником ABC в основании. Пусть целочисленный аффинный тип основания ABC совпадает с целочисленным аффинным типом треугольника с вершинами $(-2,1)$, $(-1,-1)$ и $(1,2)$, изображённого ан рисунке 9. Тогда отмеченная пирамида $OABC$ — двухэтажная и аффинно-целочисленно эквивалентна отмеченной пирамиде V из списка "M-W".*

Доказательство. Пусть основание r-этажной $(r \geq 2)$ вполне пустой отмеченной пирамиды $OABC$ имеет заданный в условии леммы целочисленный аффинный

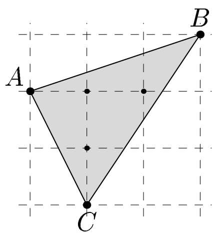

Рис. 9: Треугольник с вершинами $(-2, 1)$, $(-1, -1)$ и $(1, 2)$.

тип.

Построим параллелепипед $P(AOBC)$ и рассмотрим соответствующую целочисленно-дистанционную систему координат (будем обозначать координаты точек в этой системе через (x, y, z)). По утверждению 5.5 координаты точек O, B и C равны соответственно $(r, 0, 0)$, $(0, 7r, 0)$ и $(0, 0, 7r)$.

Рассмотрим параллелограмм в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Найдём все узлы решётки, расположенные в этом параллелограмме. По утверждению 5.5 в параллелограмме пересечения таких узлов ровно семь. Опишем все возможные варианты расположения этих узлов на параллелограмме пересечения параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Во-первых, узлов решётки нет на пересечении отмеченной пирамиды $OABC$ с плоскостью $x = 1$, то есть в замкнутом треугольнике с вершинами $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 7r - 7)$ и $(1, 7r - 7, 0)$. Во-вторых, узлов решётки нет в треугольниках, полученных из данных при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0, r, 2r) + \mu(0, 4r, r)$, где λ и μ — целые числа. На рисунках 10 ($r \geq 4$) и 11 ($r = 2, 3$) изображено несколько треугольников, в объединении которых нет узлов решётки. Эти треугольники закрашены серым цветом.

Таким образом, узлы решётки параллелограмма в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$ могут располагаться только в целых точках, полученных из целых точек двух (открытых) треугольников при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0, r, 2r) + \mu(0, 4r, r)$, где λ и μ — целые числа. Первый треугольник имеет вершины в точках $K(1, 3r, 4r - 7)$, $L(1, 3r, 2r)$ и $M(1, 5r - 7, 2r)$, причём точки $(1, 0, 0)$ и L должны быть расположены в разных полуплоскостях относительно прямой LM. Это возможно только при $2r > 4r-7$, то есть $r < 7/2$. Второй треугольник имеет вершины в точках $P(1, 4r-7, 3r)$, $Q(1, r, 3r)$ и $R(1, r, 6r-7)$, причём точки $(1, 0, 0)$ и Q должны быть расположены в разных полуплоскостях относительно прямой PR. Это возможно только при $(4r - 7 < r)$, то есть $r < 7/3$.

Итак, при $r > 3$ покрыты все точки параллелограмма в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$, см. рис. 10. В случае $r = 2$ в тре-

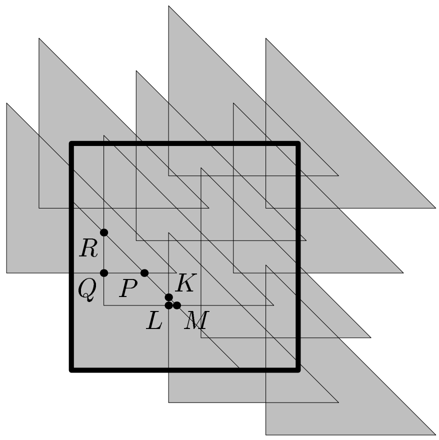

Рис. 10: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$ (случай $r > 3$).

угольнике KLM содержится всего одна целая точка с координатами $(1, 5, 3)$, см. рис. 11a). В случае $r = 3$ в треугольнике KLM нет целых точек, см. рис. 11b).

Поскольку в пересечении плоскости $x = 1$ и открытого параллелепипеда должно находиться семь узлов решётки, возможен лишь случай $r = 2$. Все семь целых точек этого параллелограмма, расположенные в дополнении к описанным выше треугольникам, являются узлами решётки. Следовательно, целочисленный аффинный тип отмеченной пирамиды, удовлетворяющий условиям леммы, определяется однозначно и совпадает с целочисленным аффинным типом отмеченной пирамиды с вершиной в $(0, 0, 0)$ и основанием $(2, -2, 1)$, $(2, -1, -1)$, $(2, 1, 2)$. Все утверждения леммы доказаны. $\square$

Остаётся разобрать случаи треугольников, у которых все целые точки, от-

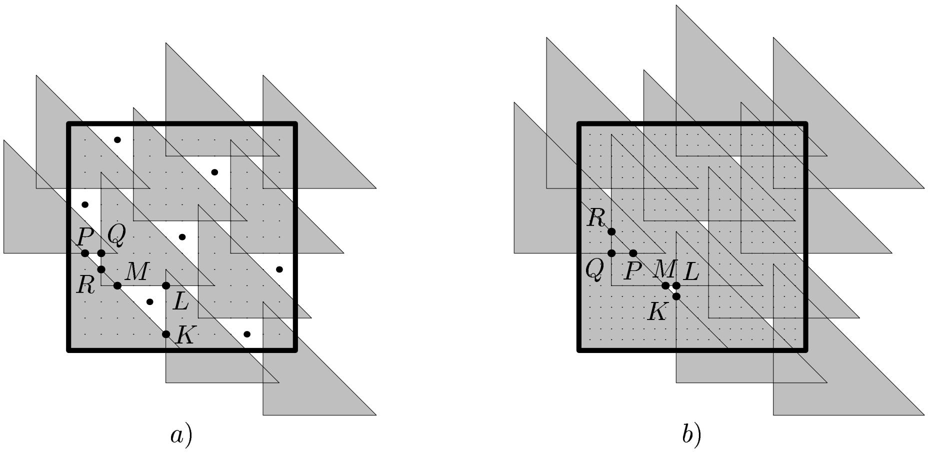

Рис. 11: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$: a) $r = 2$; b) $r = 3$.

личные от вершин, лежат на одной прямой, проходящей через одну из вершин.

8.3 Случай 3: целые точки основания, отличные от его вершин, лежат на одной прямой, первый вариант расположения прямой.

Предположим, что все целые точки треугольника ABC лежат на луче, исходящем из A, количество точек c ($c \geq 1$), причём все точки внутренние. Обозначим внутренние точки через $D_1, \ldots, D_c$, начиная от ближайшей к A целой точки и нумеруя по направлению от A. Оказывается, для каждого c существует ровно один целочисленный аффинный тип.

Поскольку треугольник BD_cC — пустой, целочисленным аффинным преобразованием он переводится в любой другой пустой треугольник. Переведём BD_cC в треугольник $\tilde{B}\tilde{D}_c\tilde{C}$ с вершинами $(0,1)$, $(0,0)$ и $(1,0)$ соответственно. Определим образ точки A. Поскольку точка $\tilde{D}_c(0,0)$ — внутренняя точка треугольника, точка $\tilde{A}$ лежит в полуплоскостях $x < 0$ и $y < 0$, то есть в открытом третьем ортанте. Поскольку точка $(-1,0)$ не входит в наш треугольник, $\tilde{A}$ лежит строго в полуплоскости $y < x+1$. Поскольку точка $(0,-1)$ не входит в наш треугольник, $\tilde{A}$ лежит в полуплоскости $y > x - 1$. Так как точка $\tilde{A}$ целая, она имеет координаты $(-t,-t)$ для некоторого положительного целого t. Поскольку у треугольника $\tilde{B}\tilde{D}_c\tilde{C}$ ровно c внутренних целых точек, получаем $t=c$. Следовательно, треугольник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ имеет целочисленный аффинный тип треугольника с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$ и $(-c,-c)$ (на рисунке 12 изображён случай $c=4$).

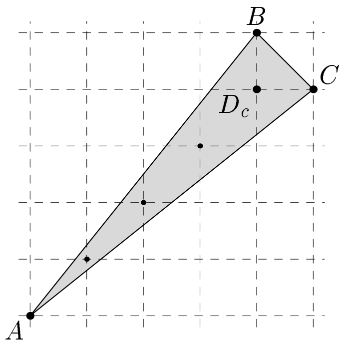

Рис. 12: Треугольник с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$ и $(-c,-c)$.

Рассмотрим случай самого простого треугольника этой серии.

Лемма 8.2. Рассмотрим многоэтажную вполне пустую отмеченную пирамиду с вершиной в точке O и с треугольником ABC в основании. Пусть основание ABC отмеченной пирамиды целочисленно-аффинно эквивалентно треугольнику с вершинами $(-1,-1)$, $(0,1)$ и $(1,0)$, см. рис. 13. Тогда отмеченная

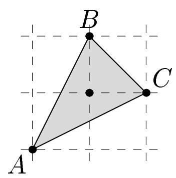

Рис. 13: Треугольник с вершинами $(-1,-1)$, $(0,1)$ и $(1,0)$.

пирамида $OABC$ — трёхэтажная и аффинно-целочисленно эквивалентна отмеченной пирамиде W из списка "M-W".

Доказательство. Пусть основание r-этажной ($r \geq 2$) вполне пустой отмеченной пирамиды $OABC$ имеет заданный в условии леммы целочисленный аффинный тип.

Построим параллелепипед $P(AOBC)$ и рассмотрим соответствующую целочисленно-дистанционную систему координат (будем обозначать координаты точек в этой системе через (x, y, z)). По утверждению 5.5 координаты точек O, B и C равны соответственно $(r, 0, 0)$, $(0, 3r, 0)$ и $(0, 0, 3r)$.

Рассмотрим параллелограмм в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Найдём все узлы решётки, расположенные в этом параллелограмме. По утверждению 5.5 в параллелограмме пересечения таких узлов ровно три. Опишем все возможные варианты расположения этих узлов на параллелограмме пересечения параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Во-первых, узлов решётки нет на пересечении отмеченной пирамиды $AOBC$ с плоскостью $x = 1$, то есть в замкнутом треугольнике с вершинами $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 3r - 3)$ и $(1, 3r - 3, 0)$. Во-вторых, узлов решётки нет в треугольниках, полученных из данного при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0, 3r, 0) + \mu(0, r, r)$, где λ и μ — целые числа. На рисунке 14 изображено несколько параллелограммов, в объединении которых нет узлов решётки. Эти параллелограммы закрашены серым цветом.

Таким образом, узлы решётки параллелограмма в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$ могут располагаться только в целых точках, полученных из целых точек (открытого) треугольника с вершинами $K(1, 3r, r - 3)$, $L(1, 3r, r)$ и $M(1, 3r - 3, r)$ при помощи симметрии относительно плоскости $y = z$ и параллельных переносов на векторы $\lambda(0, r, 2r) + \mu(0, 4r, r)$, где λ и μ — целые числа. Внутри этого треугольника всего одна точка с целыми координатами $(1, 3r - 1, r - 1)$ см. рис 14.

Треугольники описанного семейства покрывают практически все целые точки пересечения плоскости $x = 1$ и открытого параллелепипеда. Непокрытыми остаются лишь две тройки целых точек: $(1, 3r - 1, r - 1)$, $(1, r - 1, 2r - 1)$ и $(1, 2r - 1, 3r - 1)$; и $(1, r - 1, 3r - 1)$, $(1, 2r - 1, r - 1)$ и $(1, 3r - 1, 2r - 1)$. Узлами решётки является либо точки первой тройки целых точек, либо второй.

Предположим, что точка $(1, 3r - 1, r - 1)$ является узлом решётки. (Если эта точка не является узлом решётки, то узел решётки — симметричная ей

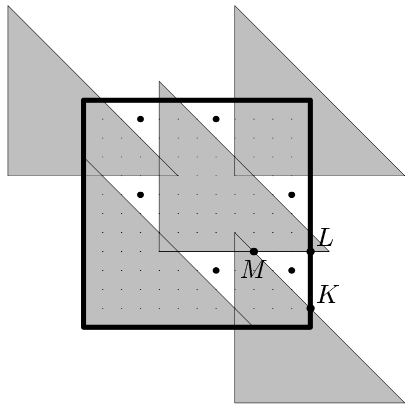

Рис. 14: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$.

относительно плоскости $y = z$ точка $(1, r-1, 3r-1)$. Поскольку симметрия, переводящая точку (x, y, z) в точку (x, z, y), является целочисленно-аффинным преобразованием, которое сохраняет параллелепипед $P(AOBC)$ и отмеченную пирамиду $OABC$, этот случай полностью сводится к рассматриваемому.) Тогда точка $(r, (3r-1)r, (r-1)r)$ является узлом решётки. Следовательно, $(3r-1)r - (r-1)r$ делится на три, тогда и $2r^2$ делится на три. Таким образом, r делится на три.

Если $r = 3$, то такая отмеченная пирамида существует и целочисленно-аффинно эквивалентна отмеченной пирамиде, приведённой в лемме.

Рассмотрим случай $r = 3k$, где $k \geq 2$. Рассмотрим параллелограмм в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 3$. Найдём все узлы решётки, расположенные в этом параллелограмме. По утверждению 5.5 в параллелограмме пересечения таких узлов ровно три. Опишем все возможные варианты расположения этих узлов на параллелограмме пересечения параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Во-первых, узлов решётки нет на пересечении отмеченной пирамиды $AOBCD$ с плоскостью $x = 3$, то есть в замкнутом треугольнике с вершинами $(3, 0, 0)$, $(3, 3r-9, 0)$ и $(3, 3r-9, 0)$. Во-вторых, узлов решётки нет в треугольниках, полученных из данного при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0, r, 0) + \mu(0, r, r)$, где λ и μ — целые числа. В том числе и в треугольнике с вершинами $P(3, 2r, 2r)$, $Q(3, 5r-9, 2r)$ и $R(3, 2r, 5r-9)$, см. рис. 15. Поскольку $(1, 3r-1, r-1)$ — узел решётки, точка $(3, 9r-3, 3r-3)$

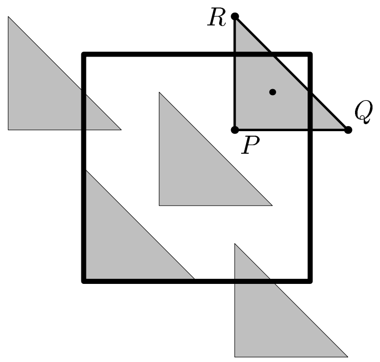

Рис. 15: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 3$.

— также узел решётки. Следовательно, точка $(3, 3r-3, 3r-3)$ — узел решётки. Однако эта точка не может быть узлом решётки (при $r > 3$), поскольку она входит в треугольник KLM (при $r > 1$). Мы пришли к противоречию.

Таким образом, все утверждения леммы доказаны. $\square$

Лемма 8.3. *Рассмотрим многоэтажную отмеченную пирамиду с вершиной в точке O и с треугольником ABC в основании. Пусть основание ABC отмеченной пирамиды целочисленно-аффинно эквивалентно треугольнику с вершинами $(-c, -c)$, $(0, -1)$ и $(-1, 0)$, где $c \geq 2$. Тогда пирамида $OABC$ не является вполне пустой.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть основание r-этажной ($r \geq 2$) вполне пустой отмеченной пирамиды $OABC$ имеет заданный в условии леммы целочисленный аффинный тип. Поскольку треугольник с вершинами $(-c, -c)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$ содержит треугольник с вершинами $(-1, -1)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$, то отмеченная пирамида $OABC$ содержит отмеченную подпирамиду, целочисленно-аффинно эквивалентную одной из отмеченных пирамид леммы 8.2. (Под *отмеченной пирамидой* некоторой отмеченной пирамиды P понимается целая отмеченная пирамида, вершина которой совпадает с вершиной пирамиды P, а основание содержится в основании пирамиды P.) Таким образом, по лемме 8.2 следует, что $r = 3$.

Покажем, что целочисленное расстояние r не может равняться трём. Итак, пусть $r = 3$. Поскольку $c \geq 2$, отмеченная пирамида $OABC$ содержит отмеченную подпирамиду $OA'BC$, где основание $A'BC$ имеет целочисленный аффинный тип треугольника с вершинами $(-2,-2)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Покажем, что $OA'BC$ не является вполне пустой.

Построим параллелепипед $P(A'OBC)$ и рассмотрим соответствующую целочисленно-дистанционную систему координат (будем обозначать координаты точек в этой системе через (x,y,z)). По утверждению 5.5 координаты точек O, B и C равны соответственно $(3,0,0)$, $(0,15,0)$ и $(0,0,15)$. Рассмотрим пересечение параллелепипеда $P(A'OBC)$ с плоскостью $x = 1$. Узлов решётки нет на пересечении отмеченной пирамиды $OA'BC$ с плоскостью $x = 1$, то есть в замкнутом треугольнике с вершинами $(1,0,0)$, $(1,0,12)$ и $(1,12,0)$. Кроме того, узлов решётки нет в треугольниках, полученных из данного при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0,15,0)+\mu(0,3,3)$, где λ и μ — целые числа. Эти треугольники покрывают все целые точки пересечения плоскости $x = 1$ и параллелепипеда $P(A'OBC)$, см. рис. 16.

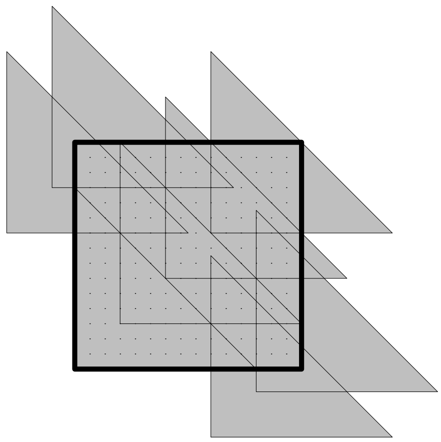

Рис. 16: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$.

Таким образом, отмеченная пирамида $OA'BC$ не является вполне пустой. Следовательно, отмеченная пирамида $OABC$ не является вполне пустой. Случай целочисленного расстояния от вершины отмеченной пирамиды до двумерной плоскости основания, равного трём, отпадает.

Следовательно, при $r \geq 2$ основание r-этажной вполне пустой отмеченной пирамиды $OABC$ не имеет заданный в условии леммы целочисленный аффинный тип. Мы пришли к противоречию.

Утверждение доказано. $\square$

8.4 Случай 4: целые точки основания, отличные от его вершин, лежат на одной прямой, второй вариант расположения прямой.

Предположим, что все отличные от вершин целые точки треугольника ABC лежат на луче, исходящем из A. Количество точек равно b, где $b \geq 2$, причём последняя точка лежит на стороне BC. Обозначим эти точки через $D_1, \ldots, D_b$, начиная от ближайшей к A целой точки и нумеруя по направлению от A. Оказывается, для каждого b существует ровно один целочисленный аффинный тип.

Поскольку треугольник $D_b D_{b-1} B$ — пустой, то некоторым целочисленным аффинным преобразованием он переводится в любой другой пустой треугольник. Переведём $D_b D_{b-1} B$ в треугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,-1)$ соответственно. Тогда точка C переходит в точку $(0,1)$, а точка A — в $(b,0)$. Следовательно, треугольник ABC имеет целочисленный аффинный тип треугольника с вершинами $(0,-1)$, $(b,0)$, $(0,1)$ (на рисунке 17 изображён случай $b=5$).

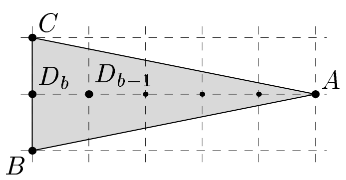

Рис. 17: Треугольник с вершинами $(0,-1)$, $(b,0)$, $(0,1)$.

Рассмотрим, как и в прошлом случае, самый простой треугольник этой серии.

Лемма 8.4. Рассмотрим многоэтажную вполне пустую отмеченную пирамиду с вершиной в точке O и с треугольником ABC в основании. Пусть основание ABC отмеченной пирамиды целочисленно-аффинно эквивалентно треугольнику с вершинами $(2,0)$, $(0,-1)$ и $(0,1)$, см. рис. 18. Тогда отмеченная

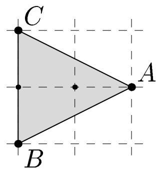

Рис. 18: Треугольник с вершинами $(2,0)$, $(0,-1)$ и $(0,1)$.

пирамида $OABC$ — двухэтажная и аффинно-целочисленно эквивалентна отмеченной пирамиде U_2 из списка "M-W".

Доказательство. Пусть основание r-этажной ($r \geq 2$) вполне пустой отмеченной пирамиды $OABC$ имеет заданный в условии леммы целочисленный аффинный тип.

Построим параллелепипед $P(AOBC)$ и рассмотрим соответствующую целочисленно-дистанционную систему координат (будем обозначать координаты точек в этой системе через (x,y,z)). По утверждению 5.5 координаты точек O, B и C равны соответственно $(r,0,0)$, $(0,4r,0)$ и $(0,0,4r)$.

Рассмотрим параллелограмм в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x=1$. Найдём все узлы решётки, расположенные в этом параллелограмме. По утверждению 5.5 в параллелограмме пересечения таких узлов ровно четыре. Опишем все возможные варианты расположения этих узлов на параллелограмме пересечения параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x=1$. Узлов решётки нет на пересечении отмеченной пирамиды $OABC$ с плоскостью $x=1$, то есть в замкнутом треугольнике с вершинами $(1,0,0)$, $(1,0,4r-4)$ и $(1,4r-4,0)$, а также в треугольниках, полученных из данного при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0,4r,0)+\mu(0,r,r)$, где λ и μ — целые числа. На рисунке 19 изображено несколько параллелограммов, в объединении которых нет узлов решётки. Эти параллелограммы закрашены серым цветом.

Таким образом, узлы решётки параллелограмма в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$ могут располагаться только в целых точках, полученных из целых точек (открытого) треугольника с вершинами $K(1, 4r, 2r-3)$, $L(1, 4r, 2r)$ и $M(1, 4r-3, 2r)$ при помощи симметрии относительно плоскости $y = z$ и параллельных переносов на векторы $\lambda(0, 4r, 0) + \mu(0, r, r)$, где λ и μ — целые числа. Внутри этого треугольника всего три точки с целыми координатами $(1, 4r-2, 2r-1)$, $(1, 4r-1, 2r-1)$ и $(1, 4r-1, 2r-2)$, см. рис. 19.

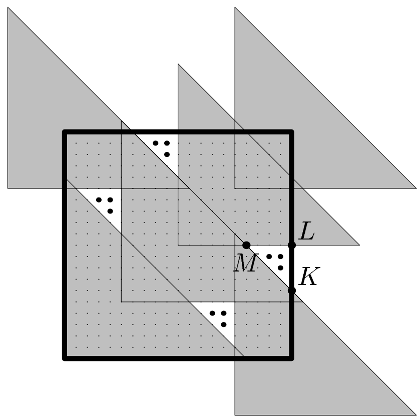

Рис. 19: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$.

Докажем от противного, что одна из этих точек является узлом решётки. Пусть ни одна из этих точек не является узлом решётки. Тогда нет узлов решётки ни в одном из треугольников которые получаются из данного при помощи параллельных переносов на целые векторы вида $\lambda(0, 4r, 0)+\mu(0, r, r)$ для любых целых λ и μ. Таким образом,пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$ не содержит узлов решётки. Противоречие. Итак, одна из точек с целыми координатами $(1, 4r-2, 2r-1)$, $(1, 4r-1, 2r-1)$ и $(1, 4r-1, 2r-2)$ является узлом решётки.

Предположим, $r \geq 3$. Рассмотрим плоскость $x = 2$. Узлов решётки нет на пересечении отмеченной пирамиды $OABC$ с плоскостью $x = 2$, то есть в замкнутом треугольнике с вершинами $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 4r-8)$ и $(1, 4r-8, 0)$, а также в треугольниках, полученных из данного при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0, 4r, 0) + \mu(0, r, r)$, где λ и μ — целые числа. В том числе и в треугольнике с вершинами $P(2, 3r, 3r)$, $Q(2, 7r-8, 3r)$ и $R(2, 3r, 7r-8)$ узлов решётки нет.

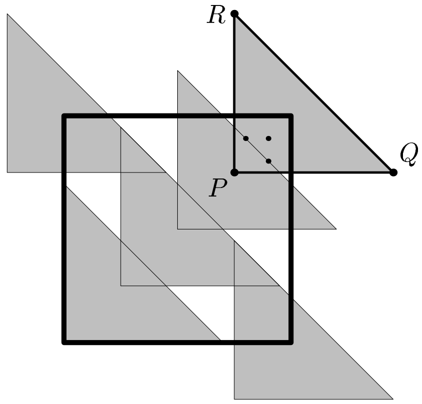

Рис. 20: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x=2$.

Если одна из точек $(1, 4r-2, 2r-1)$, $(1, 4r-1, 2r-1)$ и $(1, 4r-1, 2r-2)$ — узел решётки, то одна из точек $(2, 8r-4, 4r-2)$, $(2, 8r-2, 4r-2)$ и $(2, 8r-2, 4r-4)$ — также узел решётки. Следовательно, одна из точек $(2, 4r-4, 4r-2)$, $(2, 4r-2, 4r-2)$ и $(2, 4r-2, 4r-4)$ — узел решётки. Однако все эти точки входят в треугольник с вершинами $P(2, 3r, 3r)$, $Q(2, 7r-8, 3r)$ и $R(2, 3r, 7r-8)$ при $r > 3$ (см. рис. 20), и поэтому не могут быть узлами решётки. При $r = 3$ точка $(1, 11, 5)$ не является узлом решётки по той же причине. Точки $(1, 10, 5)$ и $(1, 11, 4)$ не являются узлами решётки, поскольку векторы $(3, 30, 15)$ и $(3, 33, 12)$ не заканчиваются в узлах решётки плоскости $x = 3$ (все такие узлы имеют координаты $(3, 4m, 4n)$ для некоторых целых m и n, а $30-15$ и $33-12$ не делятся на 4), то есть они не являются целыми. Следовательно, $r \leq 2$.

Рассмотрим случай $r = 2$. Из трёх точек $(1, 6, 4)$, $(1, 7, 3)$ и $(1, 7, 4)$ первые две заведомо не являются узлами решётки, поскольку векторы $(2, 12, 6)$ и $(2, 14, 8)$ не заканчиваются в узлах решётки плоскости $x = 2$ (все такие узлы имеют координаты $(2, 4m, 4n)$, где m и n — произвольные целые числа). Последняя точка $(1, 7, 4)$ задаёт единственно-возможный целочисленный аффинный тип отмеченной пирамиды, который приведён в формулировке леммы.

Таким образом, все утверждения леммы доказаны. $\square$

Проверим теперь остальные треугольники изучаемого семейства.

Лемма 8.5. *Рассмотрим многоэтажную отмеченную пирамиду с вершиной в точке O и с треугольником ABC в основании. Пусть основание ABC отмеченной пирамиды целочисленно-аффинно эквивалентно треугольнику с вершинами $(b, 0)$, $(0, -1)$ и $(0, 1)$, где $b \geq 2$. Тогда отмеченная пирамида $OABC$ целочисленно-аффинно эквивалентна отмеченной пирамиде U_b из списка "M-W".*

Доказательство. Пусть основание r-этажной ($r \geq 2$) вполне пустой отмеченной пирамиды $OABC$ имеет заданный в условии леммы целочисленный аффинный тип. Поскольку треугольник с вершинами $(b, 0)$, $(0, -1)$ и $(0, 1)$ содержит треугольник с вершинами $(2, 0)$, $(0, -1)$ и $(0, 1)$, отмеченная пирамида $OABC$ содержит отмеченную подпирамиду, целочисленно-аффинно эквивалентную одной из отмеченных пирамид леммы 8.4. Поскольку эта отмеченная подпирамида также вполне пуста, по лемме 8.4 следует, что отмеченная подпирамида является двухэтажной.

Итак, пусть целочисленное расстояние от вершины O до двумерной плоскости грани ABC вполне пустой отмеченной пирамиды $OABC$ равно двум. Построим параллелепипед $P(AOBC)$ и рассмотрим соответствующую целочисленно-дистанционную систему координат (будем обозначать координаты точек в этой системе через (x, y, z)). По утверждению 5.5 координаты точек O, B и C равны соответственно $(2, 0, 0)$, $(0, 4b, 0)$ и $(0, 0, 4b)$.

Рассмотрим параллелограмм в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Найдём все узлы решётки, расположенные в этом параллелограмме. По утверждению 5.5 в параллелограмме пересечения таких узлов ровно $2b$. Опишем все возможные варианты расположения этих узлов на параллелограмме пересечения параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$. Во-первых, узлов решётки нет на пересечении отмеченной пирамиды $AOBC$ с плоскостью $x = 1$, то есть в замкнутом треугольнике с вершинами $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 2b)$ и $(1, 2b, 0)$, а также в треугольниках, полученных из данного при помощи параллельных переносов на векторы $\lambda(0, 4b, 0) + \mu(0, 2, 2)$, где λ и μ — целые числа. На рисунке 21 изображено несколько параллелограммов, в объединении которых нет узлов решётки. Эти параллелограммы закрашены серым цветом.

Таким образом, узлы решётки параллелограмма в пересечении параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$ могут располагаться только в целых точках, полученных из целых точек (открытого) треугольника с вершинами $K(1, 4b, 2b-4)$, $L(1, 4b, 2b)$ и $M(1, 4b-4, 2b)$ при помощи симметрии относительно плоскости $y = z$ и параллельных переносов на векторы $\lambda(0, 4b, 0) + \mu(0, 2, 2)$, где λ и μ — целые числа. Внутри этого треугольника всего три точки с целыми координатами $(1, 4b-2, 2b-1)$, $(1, 4b-1, 2b-1)$ и $(1, 4b-1, 2b-2)$ (на рисунке 21 изображён случай $b = 3$).

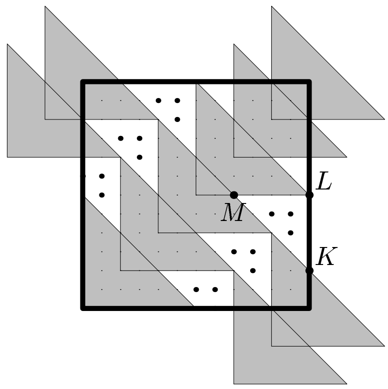

Рис. 21: Пересечение параллелепипеда $P(AOBC)$ с плоскостью $x = 1$.

Одна из точек этого треугольника является узлом решётки. (Остальные непокрытые части сечения получаются из данного треугольника при помощи параллельных переносов на целые векторы вида $\lambda(0, 4b, 0) + \mu(0, 2, 2)$ для некоторых целых λ и μ.)

Рассмотрим плоскость $x = 2$. Точка вида $(2, y, z)$ является узлом решётки тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа m и n, что $z = 2m$, $y = 2m + 2bn$.

Покажем, что точка $(1, 4b-2, 2b-1)$ не является узлом решётки от противного. Пусть эта точка — узел решётки. Тогда точка $(2, 8b-4, 4b-2)$ — также узел решётки. Найдём целые числа m и n, что $4b-2 = 2m$ и $8b-4 = 2m + 2bn$.

$m = 2b - 1$, $n = \frac{2b-1}{b}$. При $b \geq 2$ число n не является целым. Мы пришли к противоречию. Следовательно, точка $(1, 4b-2, 2b-1)$ не является узлом решётки.

Покажем, что точка $(1, 4b-1, 2b-2)$ не является узлом решётки от противного. Пусть эта точка — узел решётки. Тогда точка $(2, 8b-2, 4b-4)$ — также узел решётки. Найдём целые числа m и n, что $4b - 4 = 2m$ и $8b - 2 = 2m + 2bn$. $m = 2b - 2$, $n = \frac{2b+1}{b}$. При $b \geq 2$ число n не является целым. Мы пришли к противоречию. Следовательно, точка $(1, 4b-1, 2b-2)$ не является узлом решётки.

Последняя точка треугольника $(1, 4b-1, 2b-1)$ задаёт единственно-возможный целочисленный аффинный тип отмеченной пирамиды, который приведён в формулировке леммы.

Таким образом, утверждение леммы доказано. $\square$

8.5 Случай 5: целые точки основания, отличные от его вершин, лежат на одной стороне основания.

Остаётся разобрать случай последней самой простой серии треугольных отмеченных пирамид. Предположим, что все отличные от вершин целые точки основания ABC лежат на одной из сторон треугольника ABC, причём количество целых внутренних точек на этой стороне равно $a - 1$, где $a \geq 2$. Случай пустой отмеченной пирамиды (то есть $a = 1$) полностью разобран в следствии 6.8. Пусть все отличные от вершин целые точки треугольника лежат на стороне AC. Пронумеруем их, начиная от ближайшей к вершине A, см. рис. 22.

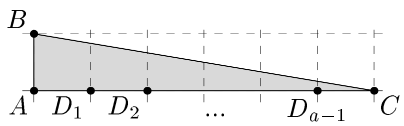

Рис. 22: Треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(a, 0)$.

Рассмотрим целую вполне пустую отмеченную пирамиду с вершиной в точке O и с треугольником ABC в основании. Предположим, что основание ABC отмеченной пирамиды целочисленно-аффинно эквивалентно треугольнику с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(a, 0)$, где $a \geq 2$.

Лемма 8.6. Отмеченная пирамида $OABC$ целочисленно-аффинно эквивалентна одной из отмеченных пирамид следующего списка.

Список "T":

— $T^0_{a,1}$;

— $T^\xi_{a,r}$, *где целые взаимно-простые числа ξ и r удовлетворяют следующим неравенствам: $r \geq 2$, $0 < \xi \leq r/2$.*

Приведённые в списке T целочисленные отмеченные пирамиды все пусты и попарно целочисленно-аффинно неэквивалентны.

Доказательство. **1. Предварительное утверждение.** Покажем, что отмеченная пирамида $OABC$ целочисленно-аффинно эквивалентна одной из отмеченных пирамид $T^\xi_{a,r}$ для некоторого положительного $\xi \leq r/2$.

Все одноэтажные отмеченные пирамиды целочисленно-аффинно эквивалентны между собой при одинаковых a, поскольку целые точки рёбер отмеченной пирамиды в этом случае порождают всю решётку.

Рассмотрим r-этажную ($r \geq 2$) вполне пустую отмеченную пирамиду $OABC$. Построим параллелепипед $P(AOBD_1)$ и рассмотрим соответствующую целочисленно-дистанционную систему координат (будем обозначать координаты точек в этой системе через (x, y, z)). По утверждению 5.5 координаты точек O, B и C равны соответственно $(r, 0, 0)$, $(0, r, 0)$ и $(0, 0, r)$.

По следствию 6.2 (поскольку тетраэдр $AOBD_1$ — пустой) все внутренние узлы решётки лежат на одной из трёх диагональных плоскостей, проходящих через симметричные рёбра тетраэдра, которые отличны от рёбер. Рассмотрим все эти три случая.

Пусть все внутренние узлы решётки лежат на плоскости $x + z = r$. По лемме 5.6 существует ровно один узел решётки K на плоскости $x = 1$. Точка K лежит в пересечении этих двух плоскостей, а, следовательно, она имеет координаты $(1, \xi, r - 1)$, где $0 < \xi < r$. Вернёмся к системе координат, связанной с решёткой. Поскольку целочисленное расстояние от точки K до двумерной плоскости грани AD_1B равно единице, тетраэдр AD_1BK некоторым целочисленным аффинным преобразованием переводится в тетраэдр с вершинами $(0, 0, 0)$,

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$. При таком преобразовании вершина O перейдёт в точку с координатами $(-\xi, 1-r, r)$, а точка C в точку с координатами $(a,0,0)$. Сдвинем полученную отмеченную пирамиду на целый вектор с координатами $(\xi, r-1, r)$. В результате получим отмеченную пирамиду $T^{\xi}_{a,r}$. Следовательно, отмеченная пирамида $OACB$ целочисленно-аффинно эквивалентна отмеченной пирамиде $T^{\xi}_{a,r}$, где $0<\xi<r$. Рассмотрим целочисленное аффинное преобразование, переводящее точки O, A, B, C в точки O, C, B, A соответственно, при таком преобразовании K перейдёт в точку с координатами $(r-\xi, 1-r, r)$. Выбираем из ξ и $r-\xi$ наименьшее, оно очевидно не превосходит $r/2$.

Пусть все внутренние узлы решётки лежат на плоскости $y+z=r$ в целочисленно-дистанционной системе координат. По лемме 5.6 существует ровно один узел решётки K на плоскости $x=1$. Точка K лежит в пересечении этих двух плоскостей, и, следовательно, она имеет координаты $(1, \xi, r-\xi)$, где $0<\xi<r$. Пересечение отмеченной пирамиды $OABC$ с плоскостью $x=1$ — треугольник с вершинами $(1,0,0)$, $(1, ar-a, 0)$ и $(1,0,r-1)$. Он содержит все целые точки с координатами $(1,t,r-t)$, где $(2 \le t \le r)$. Следовательно, $\xi=1$. Таким образом, точка K принадлежит плоскости $x+z=r$, а этот случай полностью разобран выше.

Пусть все внутренние узлы решётки лежат на плоскости $x+y=r$. По лемме 5.6 существует ровно один узел решётки K на плоскости $z=1$. Точка K лежит в пересечении этих двух плоскостей, а, следовательно, она имеет координаты $(\xi, r-\xi, 1)$, где $0<\xi<r$. Пересечение отмеченной пирамиды $OABC$ с плоскостью $z=1$ — треугольник с вершинами $(0,0,1)$, $(r-1,0,1)$ и $(0, ar-a, 1)$. Он содержит все целые точки с координатами $(t, r-t, 1)$, где $(1 \le t \le r-1)$. Следовательно, $\xi = r-1$. Таким образом, точка K принадлежит плоскости $x+z=r$, а этот случай полностью разобран выше.

Итак, отмеченная пирамида $OABC$ целочисленно-аффинно эквивалентна одной из отмеченных пирамид $T^{\xi}_{a,r}$ для некоторого положительного $\xi \le r/2$.

2. Полнота списка "Т" и вполне пустота отмеченных пирамид списка "Т". Покажем, что перечисленные отмеченные пирамиды $T^{\xi}_{a,r}$ из списка "Т" вполне пусты. Обозначим вершины отмеченной пирамиды через $OABC$, а точки на стороне через D_i.

Обозначим точку A через D_0, а точку C через D_a. Отметим, что отмеченная пирамида $OD_iD_{i+1}B$ при любом положительном $i \leq a$ эквивалентна отмеченной пирамиде P_r^ξ, поскольку отмеченная пирамида $OD_iD_{i+1}B$ получается из отмеченной пирамиды P_r^ξ при помощи композиции целочисленного линейного преобразования, задаваемого матрицей

$$\begin{pmatrix} \xi+i+1 & \xi+i & -\xi-i \\ r-1 & r-1 & 2-r \\ -r & -r & r-1 \end{pmatrix},$$

и параллельного переноса на целый вектор $(-\xi, 1-r, r)$.

По следствию 6.6 при взаимно-простых целых числах ξ и r отмеченные пирамиды $OAD_1B, OD_1D_2B, \ldots, OD_{a-1}CB$ являются пустыми, а, следовательно, их объединение — отмеченная пирамида $OABC$ — является вполне пустой.

По таким же соображениям, отмеченные пирамиды $T_{a,r}^\xi$ при целых числах ξ и r, наибольший общий делитель которых больше одного, являются вполне пустыми.

Таким образом, список "Т" леммы 8.6 полон, а все отмеченные пирамиды в нём вполне пустые.

3. Неизбыточность списка "Т". Докажем, что все отмеченные пирамиды $T_{a,r}^\xi$ из списка "Т" попарно целочисленно-аффинно неэквивалентны. Очевидно, что отмеченные пирамиды с разными a неэквивалентны. Поскольку целочисленное расстояние от вершины до двумерной плоскости основания — целочисленно-аффинный инвариант, отмеченные пирамиды с разными r неэквивалентны.

Для того, чтобы различить отмеченные пирамиды при одинаковых $a > 1$ и r, построим следующий целочисленно-аффинный инвариант. Рассмотрим произвольную отмеченную пирамиду $OABC$, где все целые точки лежат на стороне AC. Как было показано выше, все пустые отмеченные пирамиды OAD_1B, OD_1D_2B, …, $OD_{a-1}CB$ целочисленно-аффинно эквивалентны отмеченной пирамиде P_r^ξ с $0 \leq \xi \leq r/2$. Поскольку набор этих отмеченных пирамид задаётся однозначно и по следствию 6.6, тип P_r^ξ является инвариантом. Этот инвариант различает разные отмеченные пирамиды списка "T".

Все утверждения следствия доказаны. $\square$

Итак, все возможные случаи целочисленных аффинных типов многоэтажных вполне пустых выпуклых трёхмерных отмеченных пирамид разобраны. Остаётся только показать, что все отмеченные пирамиды, приведённые в списке "M-W" теоремы 4.1, целочисленно-аффинно неэквивалентны.

8.6 Неизбыточность списка "M-W" теоремы 4.1.

Если отмеченные пирамиды имеют целочисленно-аффинно неэквивалентные основания, то и сами отмеченные пирамиды целочисленно-линейно неэквивалентны. Целочисленно-аффинные типы основания различают между собой практически все отмеченные пирамиды списка "M-W". Не различаются между собой только отмеченные пирамиды $T_{a,r}^\xi$ для одинаковых a и r и разных ξ из списка "M-W".

Пирамиды $T_{a,r}^\xi$ с одинаковыми a и r и с различными ξ из списка "M-W" целочисленно-аффинно неэквивалентны по лемме 8.6 (см. список "T").

Доказательство основной теоремы окончено. $\square$

9 Классификация компактных двумерных граней.

9.1 Теорема Муссафира.

До настоящего момента о компактных двумерных гранях была известна только следующая теорема о количестве вершин граней, расположенных в двумерных плоскостях на целочисленном расстоянии большем единицы от начала координат.

Теорема 9.1. **(Ж.-О. Муссафир [42].)** *Пусть F — двумерная компактная грань двумерного паруса цепной дроби, а r — целочисленное расстояние от начала координат до двумерной плоскости, содержащей её. Тогда выполняется следующее.*

1. Если $r = 1$, то для любого целого числа $N > 2$ существует двумерная цепная дробь и у неё существует парус, содержащий грань F с N вершинами.

2. Если $r = 2$, то грань F содержит не более четырёх вершин.

3. Если $r \geq 3$, то грань F содержит только три вершины.

9.2 Формулировки классификационных утверждений о двумерных гранях.

Сформулируем новые теорему о целочисленно-линейной классификации и следствие о целочисленно-аффинной классификации двумерных граней парусов многомерных цепных дробей, двумерные плоскости которых расположены на целочисленных расстояниях, больших единицы от начала координат. Заметим, что из приведённой ниже теоремы следует, что в теореме Муссафира (для парусов двумерных цепных дробей) второй пункт можно уточнить следующим образом:

2 ′. Если $r = 2$, то грань F содержит только три вершины.

Четырёхугольные грани, лежащие на двумерных плоскостях на целочисленном расстоянии от начала координат, равном двум, встречаются только у парусов многомерных цепных дробей размерности больше двух.

Теорема 9.2. **О целочисленно-линейной классификации компактных двумерных граней парусов многомерных цепных дробей.**

Любая двумерная компактная грань паруса двумерной цепной дроби, целочисленное расстояние до двумерной плоскости которой больше единицы, является целочисленно-линейно эквивалентной одной из граней следующего списка.

Список "α_2":

— треугольник с вершинами $(\xi, r-1, -r)$, $(a+\xi, r-1, -r)$, $(\xi, r, -r)$, где

$a \geq 1$, а целые числа ξ и r взаимно-просты и удовлетворяют неравенствам $r \geq 2$ и $0 < \xi \leq r/2$;

— треугольник с вершинами $(2, 1, b-1)$, $(2, 2, -1)$, $(2, 0, -1)$, где $b \geq 1$;

— треугольник с вершинами $(2, -2, 1)$, $(2, -1, -1)$, $(2, 1, 2)$;

— треугольник с вершинами $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2, 3)$.

Все треугольники списка "α_2" являются попарно целочисленно-линейно неэквивалентными. Каждый треугольник списка "α_2" является двумерной гранью паруса некоторой двумерной цепной дроби.

Любая двумерная компактная грань паруса n-мерной цепной дроби при $n \geq 3$, целочисленное расстояние до двумерной плоскости которой больше единицы, является целочисленно-линейно эквивалентной одной из граней следующего списка.

Список "α_n", $n \geq 3$:

— четырёхугольник с вершинами $(2, -1, 0)$, $(2, -a-1, 1)$, $(2, -1, 2)$, $(2, b-1, 1)$, где $b \geq a \geq 1$,

— треугольник с вершинами $(\xi, r-1, -r)$, $(a+\xi, r-1, -r)$, $(\xi, r, -r)$, где $a \geq 1$, а целые числа ξ и r взаимно-просты и удовлетворяют неравенствам $r \geq 2$ и $0 < \xi \leq r/2$;

— треугольник с вершинами $(2, 1, b-1)$, $(2, 2, -1)$, $(2, 0, -1)$, где $b \geq 1$;

— треугольник с вершинами $(2, -2, 1)$, $(2, -1, -1)$, $(2, 1, 2)$;

— треугольник с вершинами $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2, 3)$.

Все грани списка "α_n" являются попарно целочисленно-линейно неэквивалентными. Каждый многоугольник списка "α_n" является двумерной гранью паруса некоторой многомерной цепной дроби.

Замечание 9.3. Отметим, что каждой компактной грани многогранника соответствует вполне пустая выпуклая отмеченная пирамида с вершиной в начале координат и с рассматриваемой гранью в основании. Целочисленно-аффинный тип такой выпуклой отмеченной пирамиды является целочисленно-линейным инвариантом грани. Обратно, целочисленно-линейный тип грани однозначно восстанавливается по целочисленно-аффинному типу выпуклой отмеченной пирамиды (см. лемму 10.1 ниже).

Следствие 9.4. **О целочисленно-аффинной классификации компактных двумерных граней парусов многомерных цепных дробей.**

Любая двумерная компактная грань паруса многомерной цепной дроби, целочисленное расстояние до двумерной плоскости которой равно двум, является целочисленно-аффинно эквивалентной одному из многоугольников следующего списка.

Список "β_2":

— *четырёхугольник с вершинами* $(-1,0)$, $(-a-1,1)$, $(-1,2)$, $(b-1,1)$, *где* $b \geq a \geq 1$ (*на рисунке 23a случай* $a=2$, $b=3$), *при этом соответствующая такой грани выпуклая отмеченная пирамида целочисленно-аффинно эквивалентна отмеченной пирамиде* $M_{a,b}$ (*все такие четырёхугольные грани встречаются только у парусов многомерных цепных дробей любой размерности, большей двух, и не встречаются у парусов двумерных цепных дробей*);

— *треугольник с вершинами* $(-1,0)$, $(0,-2)$ *и* $(2,1)$ (*см. рисунок 23b*), *при этом соответствующая такой грани выпуклая отмеченная пирамида эквивалентна отмеченной пирамиде* V;

— *треугольник с вершинами* $(0,-1)$, $(0,1)$ *и* $(b,0)$ *при* $b \geq 1$ (*на рисунке 23c случай* $b=5$), *при этом соответствующая такой грани выпуклая отмеченная пирамида эквивалентна отмеченной пирамиде* U_b;

— *треугольник с вершинами* $(0,0)$, $(a,0)$ *и* $(0,1)$ *при некотором* $a \geq 1$ (*на рисунке 23d изображен треугольник при* $a=5$); *при этом соответствующая такой грани выпуклая отмеченная пирамида эквивалентна отмеченной пирамиде* $T^1_{a,2}$.

Любая двумерная компактная грань паруса многомерной цепной дроби, целочисленное расстояние до двумерной плоскости которой равно трём, является целочисленно-аффинно эквивалентной одному из многоугольников следующего списка.

Список "β_3":

— *треугольник с вершинами* $(-1,-1)$, $(1,0)$ *и* $(0,1)$ (*на рисунке 24a*); *при*

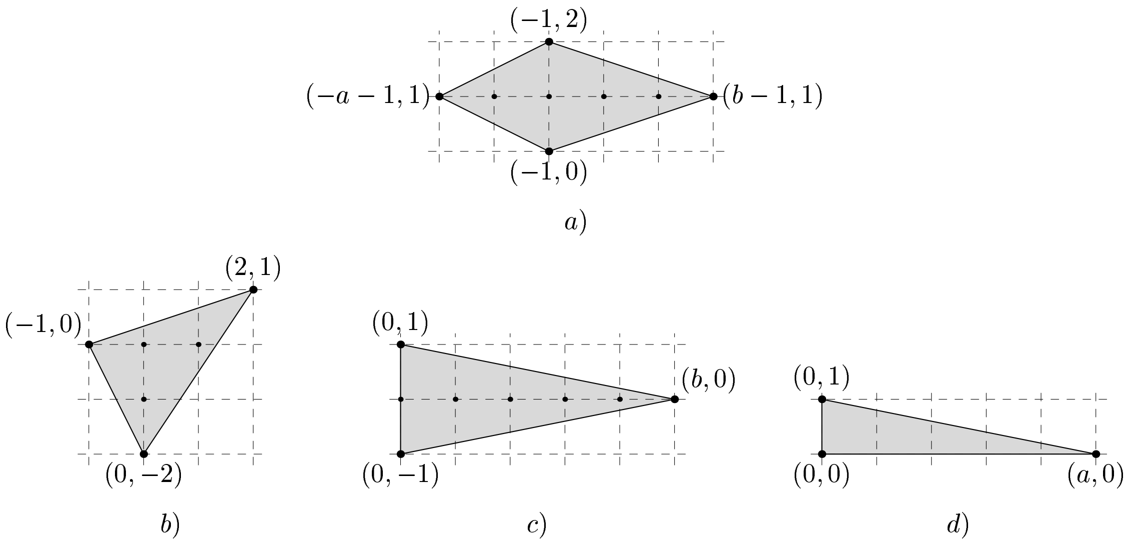

Рис. 23: Целочисленно-аффинные типы граней списка "β_2".

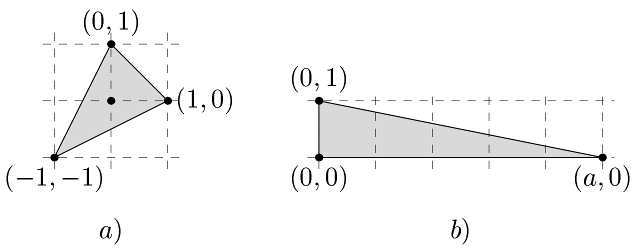

Рис. 24: Целочисленно-аффинные типы граней списка "β_3".

этом соответствующая такой грани выпуклая отмеченная пирамида эквивалентна отмеченной пирамиде W*;*

— треугольник с вершинами $(0,0)$, $(a,0)$ *и* $(0,1)$ *при некотором натуральном* a *(на рисунке 24b изображен треугольник при* $a = 5$*), при этом соответствующая такой грани выпуклая отмеченная пирамида целочисленно-аффинно эквивалентна выпуклой отмеченной пирамиде* $T^1_{a,3}$.

Любая двумерная компактная грань паруса многомерной цепной дроби, целочисленное расстояние до двумерной плоскости которой равно r *при* $r \geq 4$*, является целочисленно-аффинно эквивалентной одному из многоугольников следующего списка.*

Список "β_r":

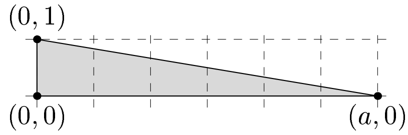

Рис. 25: Целочисленно-аффинные типы граней списка "β_r" при $r \geq 4$.

— треугольнику с вершинами $(0,0)$, $(a,0)$ *и* $(0,1)$ *при некотором* $a \geq 1$ (*на рисунке 25 изображен треугольник при* $a = 6$), *при этом соответствующая такой грани выпуклая отмеченная пирамида целочисленно-аффинно эквивалентна выпуклой отмеченной пирамиде* $T^{\xi}_{a,r}$, *где целые числа* ξ *и* r *взаимно-просты и удовлетворяют неравенствам* $0 < \xi \leq r/2$. *При различных* ξ *соответствующие грани целочисленно-линейно неэквивалентны, однако целочисленно-аффинно эквивалентны. В каждом из приведённых списков все грани являются попарно целочисленно-аффинно неэквивалентными. Эти списки не являются избыточными* (*то есть для каждого многоугольника из списка* β_r *существует* r*-мерная цепная дробь, хотя бы один парусов которой содержит двумерную грань, целочисленно-аффинно эквивалентную рассматриваемому многоугольнику*).

Замечание 9.5. Как нетрудно заметить из следствия 9.4, целочисленно-аффинная и целочисленно-линейная классификации совпадают для целочисленных расстояний меньших пяти. При целочисленных расстояниях больше четырёх, целочисленно-линейная классификация содержит в себе целочисленно-аффинную: классы целочисленно-линейной эквивалентности, отвечающие выпуклым отмеченным пирамидам $T^{\xi}_{a,r}$ склеиваются при одинаковых a и разных ξ (напоминаем, что r фиксировано) в один класс целочисленно-аффинной эквивалентности.

Следствие 9.6. *Для любых целых чисел* $n \geq 3$, $r \geq 2$ *целочисленно-линейная классификация компактных двумерных граней парусов* n*-мерных цепных дробей, расположенных на двумерных плоскостях на целочисленном расстоянии* r *от начала координат, совпадает с классификацией вполне пустых* r*-этажных трёхмерных выпуклых отмеченных пирамид* (*с выделенной вершиной*).

10 Доказательство теоремы 9.2.

10.1 Полнота списков "α_n" теоремы 9.2 при $n \geq 2$.

Заметим, что многоугольные грани многомерной цепной дроби являются гранями границы выпуклой оболочки, а, следовательно, они также являются выпуклыми. Рассмотрим отмеченную пирамиду с вершиной в начале координат и с основанием в компактной двумерной грани некоторой многомерной цепной дроби. Из определения многомерной цепной дроби следует, что построенная отмеченная пирамида является вполне пустой.

Лемма 10.1. *Две двумерные грани целочисленно-линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им вполне пустые отмеченные пирамиды целочисленно-аффинно эквивалентны.*

Доказательство. Если две двумерные грани целочисленно-линейно эквивалентны, то одна из них переводится в другую некоторым целочисленным линейным преобразованием. При этом соответствующая первой грани отмеченная пирамида переводится в отмеченную пирамиду, соответствующую второй грани.

Если соответствующие граням пустые отмеченные пирамиды целочисленно-аффинно эквивалентны, то одна из этих пирамид переводится в другую некоторым целочисленным аффинным преобразованием. Поскольку вершинами обеих отмеченных пирамид является начало координат, начало координат — неподвижная точка этого преобразования, а, следовательно, преобразование является линейным. Поскольку основание первой отмеченной пирамиды переходит в основание второй, первая грань переходит во вторую. Следовательно, эти двумерные грани целочисленно-линейно эквивалентны. □

Следовательно, для любого $r \geq 2$ каждый целочисленно-линейный тип компактных двумерных граней, расположенных на двумерной плоскости на целочисленном расстоянии r от начала координат, определяется целочисленно-аффинным типом r-этажных вполне пустых выпуклых отмеченных пирамид.

Таким образом, по теореме 4.1 (см. список "M-W") списки "α_n" теоремы 9.2 полны при $n > 2$.

Разберём случай двумерных цепных дробей. По теореме 4.1 подсписок треугольных граней списка "α_2" полон для двумерных цепных дробей. Остаётся показать, что у двумерных цепных дробей нет граней, целочисленно-линейно эквивалентных многоугольникам с вершинами $(2,-1,0)$, $(2,-a-1,1)$, $(2,-1,2)$, $(2,b-1,1)$, где $b \geq a \geq 1$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 10.2. **(О запрете для двумерных цепных дробей.)** *Пусть некоторая компактная двумерная грань F двумерной цепной дроби содержит целый параллелограмм P, целочисленно-аффинно эквивалентный параллелограмму с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$. Тогда целочисленное расстояние от начало координат до плоскости, содержащей грань F, равно единице.*

Доказательство. Введём на плоскости грани F систему координат, в которой вершины параллелограмма P имеют координаты $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$. Заметим, что в такой системе координат точка плоскости является целой тогда и только тогда, когда эта точка является целой точкой плоскости грани F в старой системе координат.

Предположим, что точка с координатами $(1,1)$ входит в грань F, тогда пустой целый параллелограмм с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ и $(0,1)$ входит в грань F. Следовательно, по утверждению 7.2 расстояние до плоскости, содержащей грань F, равно единице.

Аналогично, если хотя бы одна из точек $(1,-1)$, либо $(-1,1)$, либо $(-1,-1)$ входит в грань F, то расстояние до плоскости, содержащей грань F, равно единице.

Покажем теперь, что грань F содержит одну из четырёх перечисленных точек от противного. Пусть ни одна из перечисленных выше точек не входит в грань F. Рассмотрим треугольник T на плоскости грани F, высекаемый тремя плоскостями, по которым строится двумерная цепная дробь. Этот треугольник содержит грань F и не содержит ни одной целой точки, отличной от точек грани F. Заметим, что точка $(1,0)$ принадлежит грани F, а точки $(1,1)$ и $(1,-1)$ не принадлежат ей (причём все эти три точки расположены на одной прямой). Тогда открытый угол с вершиной в точке $(0,0)$, стороны которого проходят через точки $(1,1)$ и $(1,-1)$, содержит некоторую вершину треугольника T, см. рис. 26.

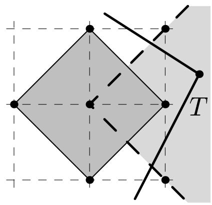

Рис. 26: У треугольника T одна из вершин содержится в закрашенном (открытом) телесном угле.

Аналогичное утверждение верно для двух смежных углов и для противолежащего угла. Следовательно, треугольник имеет как минимум четыре вершины. Приходим к противоречию.

Таким образом, все случаи разобраны. Утверждение леммы 10.2 доказано. □

Следствие 10.3. *У двумерных цепных дробей нет граней, целочисленно-линейно эквивалентных многоугольнику с вершинами* $(2,-1,0)$, $(2,-a-1,1)$, $(2,-1,2)$, $(2,b-1,1)$, *где* $b \geq a \geq 1$.

Доказательство. Четырёхугольник с вершинами в целых точках $(2,-1,0)$, $(2,-a-1,1)$, $(2,-1,2)$, $(2,b-1,1)$ содержит параллелограмм целочисленно-аффинно эквивалентный параллелограмму с вершинами $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ и $(0,-1)$. Следовательно, по лемме 10.2 расстояние до двумерной плоскости такой грани должно быть равно единице. Поскольку расстояние от начала координат до двумерной плоскости, содержащей такой многоугольник, равно двум, ни одна из граней двумерных цепных дробей этому многоугольнику не эквивалентна. □

Таким образом, список "α_2" теоремы 9.2 полон. Следовательно, списки "α_n" теоремы 9.2 (n-мерных цепных дробей) полны для всех $n \geq 2$.

10.2 Реализуемость граней из списков "α_n" при $n \geq 2$.

Покажем сначала, что все треугольные грани, перечисленные в списках "α_n" при $n \geq 2$, реализуются. Докажем более общее утверждение для треугольников, а затем обобщим его на случай многоугольников.

10.2.1 Реализуемость треугольных граней.

Рассмотрим вполне пустую треугольную отмеченную пирамиду $OABC$ с вершиной O и основанием ABC. Пусть $\Sigma_{ABC}(3)$ — конфигурационное пространство упорядоченных троек точек на плоскости треугольника ABC. Конфигурационное пространство $\Sigma_{ABC}(3)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^6$. Рассмотрим стандартную топологию на этом пространстве. Обозначим через $U_3 \subset \Sigma_{ABC}(3)$ множество таких троек $A'B'C'$, что отмеченная пирамида $OA'B'C'$ содержит отмеченную пирамиду $OABC$ и не содержит целых точек, отличных от целых точек отмеченной пирамиды $OABC$.

Лемма 10.4. *Множество U_3 является открытым и непустым. Каждая точка множества U_3 определяет двумерную цепную дробь, для которой треугольник ABC является одной из двумерных граней.*

Доказательство. Докажем, что множество U_3 — открыто. Рассмотрим целые плоскости, параллельные плоскости ABC, относительно которых начало координат и плоскость ABC лежат в разных открытых полупространствах (в трёхмерном пространстве натянутом на точки O, A, B и C). Их конечное число, равное $r-1$, где r — целочисленное расстояние от точки O до двумерной плоскости грани ABC. Обозначим целую двумерную плоскость, расположенную на целочисленном расстоянии $i \leq r$ от вершины O, через π_i. Отмеченная пирамида $OABC$ высекает на плоскости π_i треугольник T_i, который при $i < r$ не содержит целых точек. Рассмотрим все трёхгранные углы с центром в точке O, которые высекают на плоскости π_i треугольник, содержащий треугольник T_i и не содержащий целых точек (отличных от целых точек T_r для случая $i = r$). Каждый из таких углов определяет три точки на плоскости треугольника ABC (то есть на π_r), которые в свою очередь определяют шесть упорядоченных наборов троек точек в пространстве U_3. Множество описанных трёхгранных углов определяет открытое непустое подмножество в U_3 (обозначим его через $U_{3,i}$). Множество U_3 является пересечением множеств $U_{3,i}$ при всех натуральных $i \leq r$. Следовательно, множество U_3 — открыто.

Докажем, что множество U_3 — непусто. Обозначим через u_0 точку множества U_3, соответствующую упорядоченному набору точек A, B, C. Во-первых, существует некоторая окрестность точки u_0, все точки которой удовлетворяют следующему свойству: если точка $A'B'C'$ принадлежит этой окрестности, то множество целых точек отмеченной пирамиды $OA'B'C'$ является подмножеством множества целых точек отмеченной пирамиды $OABC$. Во-вторых, произвольная окрестность точки u_0 (в том числе и описанная выше) содержит в себе такую точку $A''B''C''$, что отмеченная пирамида $OA''B''C''$ целиком содержит отмеченную пирамиду $OABC$. Следовательно, существует такая точка $A'B'C'$, что отмеченная пирамида $AB'C'D'$ содержит отмеченную пирамиду $OABC$, а ограничения обеих отмеченных пирамид на решётку целых чисел совпадают. Следовательно, множество U_3 — непусто.

Рассмотрим произвольный треугольник $A'B'C'$, отвечающий точке множества U_3. Проведём плоскости $OA'B'$, $OA'C'$ и $OB'C'$. Задаваемая этими плоскостями двумерная цепная дробь, содержит треугольник ABC в качестве двумерной грани.

Все утверждения леммы 10.4 доказаны. □

10.2.2 О реализуемости многоугольных граней.

Обобщим утверждение леммы 10.4. Рассмотрим трёхмерную вполне пустую отмеченную пирамиду $OA_1 \ldots A_k$ с вершиной O и основанием $A_1 \ldots A_k$. Пусть $\Sigma_{A_1 \ldots A_k}(k)$ — конфигурационное пространство упорядоченных k точек на плоскости многоугольника $A_1 \dots A_k$. Конфигурационное пространство $\Sigma_{A_1\dots A_k}(k)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{2k}$. Рассмотрим стандартную топологию на этом пространстве. Обозначим через $U_k \subset \Sigma_{A_1\dots A_k}(k)$ множество таких k точек $A'_1 \dots A'_k$, что отмеченная пирамида $OA'_1 \dots A'_k$ содержит отмеченную пирамиду $OA_1 \dots A_k$ и не содержит целых точек, отличных от целых точек отмеченной пирамиды $OA_1 \dots A_k$.

Лемма 10.5. *Множество U_k является открытым и непустым. Рассмотрим произвольное целое $n \geq k-1$. Каждой точке множества U_k соответствует хотя бы одна n-мерная цепная дробь, для которой k-угольник $A_1 \dots A_k$ является одной из двумерных граней.* □

Для любого выпуклого k-угольника P в $\mathbb{R}^{n+1}$ при $n \geq k-1$, двумерная плоскость которого не проходит через начало координат, существует набор из n гиперплоскостей, разбивающих двумерную плоскость многоугольника P на части, одна из которых совпадает с P. В остальном доказательство леммы 10.5 полностью аналогично доказательству леммы 10.4.

10.2.3 О реализуемости граней из списков "α_n" при $n \geq 2$.

Утверждение 10.6. *Для любого $n \geq 2$ каждая двумерная грань из списка "α_n" реализуются в качестве грани некоторой n-мерной цепной дроби.*

Доказательство. Поскольку все грани списка "α_n" ($n \geq 2$) треугольные или четырёхугольные (а отмеченные пирамиды с центром в начале координат и с основаниями в этих гранях вполне пусты), леммы 10.4 и 10.5 применимы. □

10.3 Неэквивалентность граней из списка "α_n" (при $n \geq 2$).

Лемма 10.7. *Для любого $n \geq 2$ любые две различные грани из списка "α_n" попарно целочисленно-линейно неэквивалентны.*

Доказательство. Утверждение леммы 10.7 следует из того, что отмеченные пирамиды с центром в начале координат и с основаниями в гранях списка "M-W" по теореме 4.1 целочисленно-аффинно неэквивалентны. □

10.4 О многоугольных гранях двумерных цепных дробей.

Следствие 10.8. *Пусть компактная двумерная грань паруса двумерной цепной дроби является многоугольником, который обладает как минимум четырьмя вершинами, углы при которых отличны от развёрнутых. Тогда целочисленное расстояние от двумерной плоскости этой грани до начала координат равно единице.*

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из утверждения 7.2 и леммы 10.2. □

Замечание 10.9. Из утверждения теоремы 9.2 непосредственно вытекает утверждение следствия 9.6.

11 Неисследованные задачи.

В заключение второй главы приводим несколько задач, возникающих здесь естественным образом. Прежде, чем приступить к формулировкам задач, отметим следующее. Под "классификационными задачами" для некоторого подмножества в некотором множестве в этом разделе понимается исследование следующих вопросов:

a) какие элементы входят в подмножество;

b) какие элементы не входят в подмножество;

c) какие бесконечные серии элементов входят в подмножество, сколько их;

d) какие бесконечные серии элементов не входят в подмножество, сколько их;

e) какими свойствами обладают элементы подмножества;

f) какими свойствами обладают элементы дополнения подмножества во множестве;

g) как алгоритмически определить, входит ли данный элемент в подмножество;

h) составить список элементов и серий элементов подмножества явно.

Например, в этой главе была решена "классификационная задача" **h)** для подмножества классов целочисленно-линейной/аффинной эквивалентности компактных двумерных граней парусов многомерных цепных дробей, расположенных на двумерных плоскостях, целочисленные расстояния от начала координат до которых больше единицы (во множестве всех классов соответствующей эквивалентности выпуклых многоугольников).

Проблема 1. Решить "классификационные задачи" для подмножества классов целочисленно-линейной/аффинной эквивалентности компактных трёхмерных (многомерных) граней парусов многомерных цепных дробей, расположенных на трёхмерных (многомерных) плоскостях, целочисленные расстояния от начала координат до которых больше единицы (во множестве всех классов соответствующей эквивалентности выпуклых многогранников).

В связи с последней проблемой о гранях парусов многомерных цепных дробей естественно возникает следующий вопрос об отмеченных пирамидах (заметим, что отмеченные пирамиды по определению компактны).

Проблема 2. Решить "классификационные задачи" для подмножества классов трёхмерных (многомерных) многоэтажных вполне пустых выпуклых отмеченных пирамид (во множестве всех классов трёхмерных/многомерных многоэтажных отмеченных пирамид).

Следующая проблема очень близка по формулировке к предыдущей, однако кардинально отличается по геометрическому содержанию.

Проблема 3. Решить "классификационные задачи" для подмножества классов целочисленно-аффинной эквивалентности компактных двумерных/трёхмерных (многомерных) граней парусов многомерных цепных дробей, расположенных на двумерных/трёхмерных (многомерных) плоскостях на единичном целочисленном расстоянии от начала координат.

По сути дела, эта проблема сводится к решению "классификационных задач" для целочисленно-аффинных классов выпуклых оболочек всех целых точек, лежащих внутри многогранников (многоугольников) с ограниченным числом граней максимальной размерности. (Отметим ещё раз, что для единичного целочисленного расстояния целочисленно-аффинное и целочисленно-линейное отношения эквивалентности совпадают.)

Здесь уместен следующий вопрос о выпуклых многоугольниках и многогранниках.

Проблема 4. Решить "классификационные задачи" e), f) и h) для подмножества классов целочисленно-аффинной эквивалентности целых выпуклых многоугольников/многогранников во множестве классов всех целых многоугольников/многогранников.

В этом направлении имеется следующий результат. Обозначим через $H(\mu)$ логарифм числа классов целочисленно-аффинной эквивалентности многоугольников площади $\mu/2$ (μ — целое).

Теорема 11.1. **(В. И. Арнольд [9].)** *При μ достаточно больших*

$$c_1\mu^{1/3} \le H(\mu) \le c_2\mu^{1/3}\ln\mu.$$

Кроме того, имеется следующая оценка на количество вершин выпуклого многомерного многогранника через его (целочисленный) объём.

Теорема 11.2. **(С. В. Конягин, К. А. Севастьянов [29].)** *Число вершин n-мерного выпуклого многогранника M с вершинами в целых точках не превосходит $c(n)V(M)^{\frac{n-1}{n+1}}$, где $V(M)$ — (целочисленный) объём многогранника M, а константа $c(n)$ зависит только от размерности n.*

Далее естественно возникают задачи о классификации нескольких граней одновременно. Приведём простейший содержательный пример такой проблемы.

Проблема 5. **(В. И. Арнольд.)** Решить "классификационные задачи" для 1-звёзд (то есть объединения вершины паруса многомерной цепной дроби и всех одномерных граней с одним из концов в этой вершине) парусов двумерных/многомерных цепных дробей с точностью до целочисленно-аффинного (целочисленно-линейного) отношения эквивалентности.

Вот ещё одна проблема из этой серии.

Проблема 6. Решить "классификационные задачи" для пар соседних компактных двумерных граней парусов многомерных цепных дробей с точностью до целочисленно-аффинного (целочисленно-линейного) отношения эквивалентности.

Эта проблема естественно обобщается на случай многомерных граней, а также на более сложные геометрические конфигурации граней. Приведём следующую проблему в качестве примера.

Проблема 7. Решить "классификационные задачи" для троек компактных двумерных граней, имеющих одну общую одномерную грань, трёхмерных (многомерных) парусов цепных дробей с точностью до целочисленно-аффинного (целочисленно-линейного) отношения эквивалентности.

Далее интересна задача о так называемых *стабильных целочисленных аффинных типах* многогранников.

Определение 11.3. Целочисленно-аффинный тип многогранников (многоугольников) называется *стабильным в размерности* k, если для любого целого положительного r существует k-мерная цепная дробь, один из парусов которой содержит грань, обладающую данным целочисленным аффинным типом, расположенную на плоскости с расстоянием r до начала координат.

Целочисленно-аффинный тип многогранников (многоугольников) называется *вполне стабильным в размерности* k, если для любого положительного числа N существует такое $r > N$, что найдётся k-мерная цепная дробь, один из парусов которой содержит грань, обладающую данным целочисленным аффинным типом и расположенную на плоскости с расстоянием r до начала координат.

Проблема 8. Какие целочисленно-аффинные типы многогранников являются (вполне) стабильными в размерности 3 (в размерности $k > 3$)?

Ответим на аналогичный вопрос для многоугольников.

Следствие 11.4. *Для любого положительного* $k \geq 2$*, для любого положительного* $a \geq 1$ *целочисленные аффинные типы треугольников с вершинами* $(0,0)$,

$(a,0)$, $(0,1)$ являются стабильным в размерности k (на рис. 27 параметр $a = 6$). Никаких других стабильных и вполне стабильных в размерности k

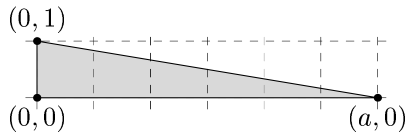

Рис. 27: Стабильные многоугольники ($a \geq 1$).

целочисленных аффинных типов многоугольников не существует. □

Автору не известен ответ даже на следующий вопрос.

Проблема 9. Верно ли, что множество вполне стабильных в размерности 3 (в размерности $k > 3$) типов трёхмерных многогранников совпадает со множеством стабильных в размерности 3 (в размерности $k > 3$) типов трёхмерных многогранников?

Кроме перечисленных выше серий задач интересны также задачи аналогичные следующей:

Проблема 10. Существуют ли трёхмерные многогранники, которые не встречаются среди трёхмерных граней парусов трёхмерных цепных дробей, расположенных на трёхмерных плоскостях, целочисленные расстояния до которых от начала координат больше единицы, но встречаются среди трёхмерных граней парусов четырёхмерных цепных дробей на трёхмерных плоскостях, расположенных от начала координат на целочисленных расстояниях, больших единицы? Если существуют, то какие они?

Сформулируем проблему о статистических свойствах граней парусов многомерных цепных дробей.

Обозначим множество всех целочисленных $(n+1)$-мерных операторов, все собственные значения которых вещественные, рациональные и различные, через Λ_{n+1}. Обозначим через $\Lambda^I_{n+1,r}$ — подмножество множества Λ_{n+1}, состоящее из операторов, норма которых не превосходит по модулю r. Обозначим через

$\Lambda^{II}_{n+1,r}$ — подмножество множества Λ_{n+1}, состоящее из всех операторов, норма которых и сумма квадратов коэффициентов характеристических многочленов которых не превосходят r (условие на норму нужно для того, чтобы количество операторов было конечно; в принципе, можно брать предел сначала по нормам операторов, а затем по суммам квадратов коэффициентов характеристических многочленов операторов).

Поскольку все собственные значения некоторого оператора A из множества Λ_{n+1} вещественные и различные, собственных гиперпространств оператора A в $\mathbb{R}^{n+1}$ всего $n+1$. По ним однозначно строится многомерная цепная дробь. Поскольку все собственные значения A рациональные, паруса построенной цепной дроби состоят из конечного числа компактных граней. Обратно, если все паруса некоторой цепной дроби состоят из конечного числа граней, то она соответствует некоторому оператору из множества Λ_{n+1}.

Пусть Γ — некоторое множество целочисленно-линейных типов граней n-мерных цепных дробей. Обозначим через $\sharp^{I}_{n+1,r}(\Gamma)$ (через $\sharp^{II}_{n+1,r}(\Gamma)$) суммарное количество граней с целочисленным линейным типом из множества Γ у дробей из множества $\Lambda^{I}_{n+1,r}$ (соответственно $\Lambda^{II}_{n+1,r}$).

Используя введённые обозначения, сформулируем несколько статистических проблем.

Проблема 11. **(В. И. Арнольд.)** Существует ли статистика появления треугольных граней для общего паруса конечной многомерной цепной дроби? В случае положительного ответа найти эту статистику.

Иными словами, нужно исследовать существование следующего предела (и найти его):

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\sharp^{I}_{n+1,r}(\triangle)}{\sharp^{I}_{n+1,r}(*)}\right) \qquad \left(\text{или } \lim_{r\to\infty}\left(\frac{\sharp^{II}_{n+1,r}(\triangle)}{\sharp^{II}_{n+1,r}(*)}\right)\right).$$

Здесь через $\triangle$ обозначено множество всех целочисленно-линейных типов треугольников, а через $*$ — множество всех целочисленно-линейных типов всех многоугольников. Верно ли, что такие пределы равны (I и II)?

Подобные вопросы можно задавать и для других k-угольников, а также для отдельных целочисленно-линейных типов. Кроме того, аналогичные задачи существуют для трёхмерных и многомерных многогранников.

Даже, если некоторые статистики и не существуют, возможно, существуют "относительные" статистики.

Проблема 12. **(В. И. Арнольд.)** Существует ли "относительная" статистика появления треугольных граней к появлению четырёхугольных граней для общего паруса многомерной цепной дроби.

То есть, нужно исследовать существование следующего предела (и найти его):

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\sharp^{I}_{n+1,r}(\triangle)}{\sharp^{I}_{n+1,r}(\diamondsuit)}\right)\qquad\left(\text{или }\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\sharp^{II}_{n+1,r}(\triangle)}{\sharp^{II}_{n+1,r}(\diamondsuit)}\right)\right).$$

Здесь через $\diamondsuit$ обозначено множество всех целочисленно-линейных типов четырёхугольников. Верно ли, что такие пределы равны между собой (I и II)?

Замечание 11.5. Кроме описанных исчерпаний (I и II) множества Λ_{n+1} имеет смысл рассматривать и некоторые другие исчерпания этого множества. (См. более подробно, например, в работе В. И. Арнольда [6].)

Замечание 11.6. В работах [6], [8] и книге [7] (см. задачу 1993-11) В. И. Арнольда подробно обсуждается понятие статистики граней, а также сформулировано множество интересных нерешённых статистических задач и гипотез о гранях парусов многомерных и одномерных цепных дробей.

Для одномерных цепных дробей часть гипотез В. И. Арнольда доказана в работах М. О. Авдеевой и В. А. Быковского [1] и [2]. Обозначим через "k" единственный целочисленно-линейный тип отрезка целочисленной длины $k>0$. В приведённых работах доказано существование и найдены следующие пределы:

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\sharp^{I}_{3,r}(\text{“}k\text{”})}{\sharp^{I}_{3,r}(*)}\right)=\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right),$$

а также оценена скорость сходимости (соответствующей последовательности при целых положительных r) к этим пределам.

Единственным результатом для цепных дробей размерности, большей единицы, является теорема М. Л. Концевича и Ю. М. Сухова [28] о существовании среднего числа появления многогранников с заданным числом целых точек на них для почти всех парусов цепных дробей (кроме дробей множества дробей меры ноль по Лебегу). Насколько автору известно, эти статистики до сих пор не вычислены, а методы их вычислений (и их аппроксимаций) не разработаны. Первые статистические данные о периодических двумерных цепных дробях приведены в работе автора [24].

Наконец, практически все перечисленные выше вопросы переносятся на случай парусов периодических многомерных цепных дробей. В качестве примера приведём следующую проблему.

Проблема 13. **(В. И. Арнольд.)** Решить "классификационные задачи" для компактных двумерных/трёхмерных (многомерных) граней парусов периодических многомерных цепных дробей с точностью до целочисленно-аффинного отношения эквивалентности.

Замечание 11.7. В последней проблеме также интересны вопросы о гранях парусов периодических цепных дробей, расположенных на плоскостях с (более чем) единичным целочисленным расстоянием от начала координат.

Замечание 11.8. Для класса периодических цепных дробей дословно переносятся все перечисленные статистические задачи для конечных цепных дробей (нужно только вместо граней конечных многогранников рассматривать грани конечных фундаментальных областей периодических многогранных поверхностей).

Глава III.

О новом алгоритме построения многомерных периодических цепных дробей.

В этой главе описан новый дедуктивный алгоритм построения парусов многомерных цепных дробей. Третья глава организована следующим образом. Весь алгоритм построения проходит в шесть шагов, его план обсуждается в разделе 12. В разделе 13 приводится описание двух общих шагов для индуктивных и дедуктивных методов. В этом разделе показывается, как находятся образующие группы $SL(n, \mathbb{Z})$-матриц, коммутирующих с заданной. Все результаты раздела 13 не являются новыми и приводятся лишь для полноты изложения (см. работы Г. Кохена [22] и Ж. Лашо [35]). В разделах 14, 15 и 16 описана основная новая часть алгоритма. В разделе 14 показано, как следует выдвигать гипотезы о фундаментальных областях. Раздел 15 посвящён проверке гипотез о фундаментальных областях для парусов двумерных цепных дробей. Проверка гипотез для фундаментальных областей парусов многомерных цепных дробей обсуждается в разделе 16.

12 Описание нового алгоритма.

12.1 Основная схема алгоритма.

Опишем в общих чертах идею нашего алгоритма построения одной из фундаментальных областей паруса для многомерной цепной дроби, связанной с заданным целочисленным неприводимым гиперболическим оператором.

Итак, пусть задан целочисленный неприводимый гиперболический оператор $A \in SL(n+1, \mathbb{Z})$. Для того, чтобы получить фундаментальную область паруса многомерной цепной дроби, связанной с оператором A, достаточно выполнить следующие действия.

1. Вычислить выпуклую оболочку, аппроксимирующую парус, а именно, взять достаточно большое подходящее множество целых точек и найти его выпуклую оболочку.

2. Выдвинуть гипотезу о некоторой фундаментальной области. Здесь нужно угадать, какие из граней формируют фундаментальную область. Если аппроксимация достаточно большая, то грани выбираются, исходя из повторяющейся геометрической структуры аппроксимации.

3. Проверить гипотезу на правильность.

4. Если гипотеза неверна или непроверяема, следует повторить, начиная с пункта **1.** При этом подходящее множество следует выбрать бо́льшим.

Чтобы реализовать подобный алгоритм, необходимо иметь ответы на два следующих вопроса:

Как находить подходящее множество целых точек для аппроксимации паруса?

Как проверять справедливость гипотез о фундаментальных областях паруса?

В этой главе приводятся ответы на эти вопросы.

12.2 Основные элементы алгоритма.

Перечислим кратко по пунктам основные шаги, используемые в алгоритме.

Дедуктивный алгоритм построения одной из фундаментальных областей для паруса заданного оператора A в заданном ортанте.

Шаг 1. Вычислить базис аддитивной группы кольца $\Xi(A)$.

Шаг 2. Вычислить базис группы $\overline{\Xi}(A)$, используя результат шага 1.

Шаг 3. Найти некоторую вершину паруса заданного ортанта.

Шаг 4. Выдвинуть гипотезу о фундаментальной области паруса, используя результаты шага 2 и шага 3.

Шаг 5. Проверить предложенную на шаге 4 гипотезу. Если гипотеза неверна или непроверяема, следует возвратиться к пункту **4.**

Замечание 12.1. Предполагается, что предложенная на шаге 4 фундаментальная область и базис $A_1, \ldots, A_n$ группы $\Xi(A)$ удовлетворяют следующим условиям:

i) замыкание фундаментальной области гомеоморфно диску;

ii) операторы $A_1, \ldots, A_n$ определяют склейку этого диска в n-мерный тор.

Замечание 12.2. Как для индуктивного метода Р. Оказаки, так и для дедуктивных методов Ж.-О. Муссафира и автора (представляемого в работе), необходимо выполнение первого и второго шагов. Эти два шага описаны в следующем разделе. Все остальные шаги характерны только для нашего алгоритма. В алгоритме Ж.-О. Муссафира [42] гипотезы выдвигаются при помощи аппроксимации ортанта некоторым рациональным ортантом. В алгоритме, предлагаемом в этой работе, выдвигаются гипотезы о некотором множестве периодов в данном, а не в приближаемом ортанте. (см. описание шагов 3 и 4). Для двумерных цепных дробей гипотезы проверяются элементарно (шаг 5), при проверке существенно используется теорема о целочисленно-линейной классификации. Для n-мерных ($n > 2$) цепных дробей последний шаг довольно сложен из-за отсутствия классификации трёхмерных граней, трёхмерные плоскости которых расположены на больше чем на единичном целочисленном расстоянии от начала координат. В описании последнего шага дополнительно исследуется частный случай, который гипотетически типичен для периодических цепных дробей.

Замечание 12.3. Отметим, что все, известные автору, дедуктивные алгоритмы построения парусов многомерных цепных дробей не являются алгоритмами в строгом смысле. Необходимо правильно выбирать базис группы $\Xi(A)$ и выдвигать правильную гипотезу, а затем проверять её, поэтому такой дедуктивный алгоритм не может быть целиком выполнен при помощи некоторой компьютерной программы. Видимо, даже алгоритмическое распознавание периода по заданной картинке границы аппроксимации паруса является трудной задачей. С другой стороны, предлагаемый в этой работе дедуктивный алгоритм эффективен на практике. Все примеры, перечисленные в следующей главе, вычислены при помощи этого алгоритма. Они обобщают и дополняют практически все периоды парусов, посчитанные ранее.

Замечание 12.4. Представленный метод естественным образом обобщается на случай модели Минковского-Вороного многомерной цепной дроби. (Определения модели Минковского-Вороного см. в работах [38] и [17].)

13 Общие вопросы, относящиеся к базисам решётки.

В этом разделе вкратце обсуждаются общие вопросы, необходимые как для индуктивных, так и для дедуктивных методов (шаги 1 и 2 раздела 13). Ответы на эти вопросы были известны раньше и приводятся здесь для полноты изложения (см. также [35] и [22]). Докажем сначала одно нужное в дальнейшем утверждение.

13.1 Теорема о специальном базисе внутри целого параллелепипеда.

Пусть $V_0V_1 \dots V_m$ — некоторый m-мерный тетраэдр с вершинами $V_0, V_1, \dots, V_{m-1}$ и V_m. Напомним, что через $P(V_0V_1 \dots V_m)$ обозначается следующий параллелепипед:

$$\Big\{V_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \overline{V_0V_k} \mid \ 0 \le \alpha_k \le 1, k = 1, \dots m\Big\}.$$

Далее мы будем обозначать параллелепипед $P(V_0V_1 \dots V_m)$ следующим образом: $P(V_0, V_1, \dots, V_m)$ (чтобы не спутать две матрицы с произведением двух матриц).

Утверждение 13.1. *Пусть задана подрешётка максимального ранга решётки целых точек в целой плоскости. Предположим, что точки $O; A_1, \dots, A_n$ порождают эту подрешётку (здесь O — начало координат решётки). Тогда существует такой базис $O; B_1, \dots, B_n$ целочисленной решётки, находящийся в параллелепипеде $P(O, A_1, \dots, A_n)$, что для любого натурального числа $i \le n$ вершина B_i принадлежит параллелепипеду $P(O, A_1, \dots, A_i)$.*

Доказательство. Построим базис $O, B_1, \ldots, B_n$ по индукции. На i-ом шаге строится вершина B_i базиса $O, B_1, \ldots, B_i$, расположенная внутри параллелепипеда $P(O, A_1, \ldots, A_i)$. При этом выполняются перечисленные выше условия для решётки в плоскости, натянутой на точки $O, A_1, \ldots, A_i$.

База индукции. Для $i = 1$ в качестве B_1 выбираем ближайшую к O и отличную от неё целую точку отрезка OA_1.

Шаг индукции. Предположим, вершины $O; B_1, \ldots, B_{i-1}$ $(i \leq n)$, удовлетворяющие условиям индукции, построены. Построим теперь целую точку B_i. Пусть целочисленное расстояние от точки A_i до плоскости, натянутой на точки $O, A_1, \ldots, A_{i-1}$ равно d_{i-1}. Рассмотрим плоскость, натянутую на точки $O, A_1, \ldots, A_i$, а в ней гиперплоскость (обозначим через π_i), параллельную плоскости, натянутой на точки $O, A_1, \ldots, A_{i-1}$, причём целочисленное расстояние между этими плоскостями равно единице. Плоскость π_i — целая. Следовательно, пересечение плоскости π_i с параллелепипедом $P(A_1, \ldots, A_i)$ состоит как минимум из одной целой точки. Выберем произвольно одну из таких целых точек и обозначим её через B_i.

Поскольку плоскости, которые натянуты на точки $O, A_1, \ldots, A_{i-1}$ и на точки $O, B_1, \ldots, B_{i-1}$, совпадают, все целые точки параллелепипеда $P(B_1, \ldots, B_i)$ расположены на целочисленном расстоянии 0 или 1 от плоскости, натянутой на точки $O, B_1, \ldots, B_{i-1}$. По предположению индукции точки $O; B_1, \ldots, B_{i-1}$ порождают целочисленную подрешётку соответствующей плоскости. Следовательно, параллелепипед $P(O, B_1, \ldots, B_{i-1})$ — пустой. Из последних двух утверждений следует, что параллелепипед $P(O, B_1, \ldots, B_i)$ — также пустой. Таким образом, точки $O; B_1, \ldots, B_i$ порождают целочисленную подрешётку соответствующей плоскости.

Итак, по индукции строится базис, удовлетворяющий всем условиям утверждения. $\square$

13.2 Шаг 1. Вычисление базиса аддитивной группы кольца $\Xi(A)$.

Приступаем к описанию первого шага нового алгоритма.

На этом шаге кольцо $\Xi(A)$ рассматривается как аддитивная группа. Алгоритм начинает работу с вычисления базиса группы $\Xi(A)$. Отождествим пространство $Mat((n+1)\times(n+1),\mathbb{R})$ с пространством $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ и рассмотрим стандартную евклидову метрику на этом пространстве. Каждый целочисленный оператор теперь соответствует некоторой целой точке, а расстояние между двумя операторами полагаем равным евклидову расстоянию соответствующих точек в пространстве $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$. В качестве нормы оператора A полагаем сумму модулей коэффициентов оператора A и обозначаем через $||A||$.

В утверждении 13.3 ниже показывается, что множество $\Xi(A)$ является аддитивной группой, изоморфной $\mathbb{Z}^{n+1}$. Из следствия 13.4, приведённого ниже, вытекает, что существует базис группы $\Xi(A)$, содержащийся в параллелепипеде $P(0, E, A, A^2, \ldots, A^n)$, и, таким образом, по утверждению 13.5 ниже, нормы всех операторов этого базиса ограничены сверху числом

$$N' = \sum_{i=0}^{n} ||A^i||.$$

Замечание 13.2. Используя LLL-алгоритм, описанный А. К .Ленстра, Г. В. Ленстра и Ж. и Л. Ловаш в [37], строится некоторый *приведённый* базис B_i для подрешётки, порождённой степенями оператора A. Для этого базиса число N' уменьшается до некоторого другого числа N. Использование LLL-алгоритма необязательно, можно просто положить $N = N'$.

Множество целочисленных операторов, содержащихся в параллелепипеде, является также подмножеством следующего множества:

$$Mat((n+1)\times(n+1),\mathbb{Z}) \cap B_N(O),$$

где через $B_N(O)$ обозначена N-окрестность начала координат (т.е. шар радиуса N с центром в начале координат). Это подмножество содержит не более

$\big((2N+1)^{n+1}+1\big)$ элементов. Поскольку подмножество содержит все целые точки параллелепипеда $P(0, E, A, A^2, \ldots, A^n)$, множество целых точек параллелепипеда вычисляется за конечное, полиномиальное относительно N, количество шагов: необходимо выбрать все точки параллелепипеда из описанного выше множества. Итак, множество всех целочисленных операторов, содержащихся в параллелепипеде, построено. Теперь базис группы $\Xi(A)$ строится по алгоритму, описанному в утверждении 13.1.

Сформулируем и докажем утверждения, упомянутые выше.

Утверждение 13.3. *Операторы множества $\Xi(A)$ для произвольного целочисленного неприводимого гиперболического оператора A образуют аддитивную группу, изоморфную $\mathbb{Z}^{n+1}$.*

Доказательство. По определению все собственные значения оператора A вещественны и различны. Следовательно, существует целочисленный базис пространства, в котором оператор A диагонален. Поскольку все собственные значения оператора A различны, выполняется следующее: вещественный оператор B коммутирует с оператором A тогда и только тогда, когда оператор B является диагональным в этом базисе. Множество всех таких операторов образуют $(n+1)$-мерную плоскость, проходящую через начало координат в пространстве всех операторов, изоморфном $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$.

Покажем, что эта плоскость — целая. Рассмотрим следующие элементы $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ и A^n. Докажем от противного, что они являются линейно независимыми над полем $\mathbb{Q}$. Предположим, что некоторая нетривиальная линейная комбинация этих матриц равна нулю. Следовательно, характеристический многочлен оператора A не является минимальным многочленом для A. Таким образом, характеристический многочлен приводим. Противоречие. Итак, целочисленная подрешётка, порождённая степенями A, для рассматриваемой $(n+1)$-плоскости является подрешёткой ранга $n+1$. Все подгруппы группы $\mathbb{Z}^{(n+1)^2}$ ранга $n+1$ изоморфны $\mathbb{Z}^{n+1}$. Утверждение доказано. $\square$

Следствие 13.4. *Существует базис группы $\Xi(A)$, все элементы которого содержатся в параллелепипеде $P(0, E, A, A^2, \ldots, A^n)$.*

Доказательство. Как только что было показано, элементы $E, A, A^2, \ldots, A^n$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. Следовательно, эти элементы порождают подрешётку полного ранга для плоскости, натянутой на следующие точки $O, E, A, A^2, \ldots, A^n$. Применим теперь утверждение 13.1 к плоскости, натянутой на точки $O, E, A, A^2, \ldots, A^n$. Доказательство следствия завершено. □

Утверждение 13.5. *Рассмотрим параллелепипед $P(0, E, A, A^2, \ldots, A^n)$. Нормы всех операторов, содержащихся внутри параллелепипеда, ограничены сверху числом*

$$\sum_{i=0}^{n} ||A^i||.$$

Доказательство. Доказательство утверждения прямолинейно. Пусть

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i$$

является некоторой точкой параллелепипеда. Тогда для любого числа $0 \leq i \leq n$ получаем $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Из этих неравенств, а также из неравенства треугольника следует, что:

$$||X|| = ||\sum_{i=0}^{n} \lambda_i A^i|| \leq \sum_{i=0}^{n} ||\lambda_i A^i|| \leq \sum_{i=0}^{n} ||A^i||.$$

□

Алгоритм первого шага скорее всего не является оптимальным. В связи с этим интересна следующая задача:

Проблема 14. Найти эффективный алгоритм вычисления целочисленной решётки для некоторого подпространства пространства $\mathbb{R}^m$, заданного системой линейных уравнений, если известен какой-нибудь базис $A_1, \ldots, A_k$ для некоторой подрешётки этого пространства максимально возможного ранга. (Отметим, что о факторгруппе решётки, порождённой $A_1, \ldots, A_k$, в решётке подпространства дополнительно ничего неизвестно.)

13.3 Шаг 2. Вычислить базис группы $\overline{\Xi}(A)$.

С алгоритмической точки зрения второй шаг наиболее сложен. Здесь описан простейший классический алгоритм и приведены необходимые ссылки.

Пусть $\chi(x)$ — характеристический многочлен оператора A, а ξ — один из корней многочлена $\chi(x)$. Рассмотрим следующее отображение:

$$h : \Xi(A) \to \mathbb{Q}[\xi].$$

Для любого элемента $B \in \Xi(A)$ существует единственное представление $B = p_B(A)$, где p_B — многочлен степени меньшей $n+1$ (поскольку операторы $E, A, \dots A^n$ линейно -независимы). Положим

$$h(B) = p_B(\xi).$$

Отметим, что данное отображение является изоморфизмом между кольцом $\Xi(A)$ и его образом $h(\Xi(A))$. Сложение и умножение в образе индуцировано сложением и умножением в поле $\mathbb{Q}[\xi]$ (см. [35]). Более того, кольцо $h(\Xi(A))$ является порядком в поле $\mathbb{Q}[\xi]$. По теореме Дирихле об единицах следует, что существует базис единиц порядка и такое число ρ, что нормы всех его элементов ограничены сверху ρ. Метод нахождения числа ρ является стандартным и здесь опускается. (О нахождении числа ρ и доказательстве теоремы см. в книге [12].) Заметим, что целый $(n+1)$-мерный объём симплекса, натянутого на базисные операторы, принимает наименьшее возможное значение. Теперь, следуя книге [12], базис порядка строится при помощи перебора всех комбинаций векторов множества $h(\Xi(A))$ внутри шара $B_\rho(O)$, где $B_\rho(O)$ является ρ-окрестностью начала координат. Прообраз (т.е. h^{-1}) этого базиса доставляет базис группы обратимых элементов кольца $\Xi(A)$, а, следовательно, и подгруппы $\overline{\Xi}(A)$.

Замечание 13.6. Константа ρ чрезвычайно велика (она эквивалентна экспоненте от некоторого многочлена от коэффициентов матрицы A). Эффективный алгоритм для этого шага описан Г. Кохеном в книге [22]. Алгоритм Кохена ищет базис единиц за полиномиальное (относительно коэффициентов матрицы оператора A) время.

Замечание 13.7. Отметим, что искать образующие группы $\overline{\Xi}(A)$ не обязательно. Наш алгоритм работает уже с $n+1$ линейно-независимыми операторами из группы $\overline{\Xi}(A)$ (см. более подробно в замечании 14.5 ниже).

14 О фундаментальных областях и аппроксимациях парусов.

Напомним, что, базис группы $\overline{\Xi}(A)$ построен в предыдущем разделе. Приступаем к основным шагам алгоритма. В этом разделе построим некоторую вершину паруса и покажем, как следует выдвигать гипотезы о фундаментальной области паруса.

14.1 Шаг 3. Нахождение некоторой вершины паруса.

Найдём сначала некоторую целую точку ортанта, содержащего парус. Рассмотрим произвольный ортант. Сдвинем параллельно стандартный единичный параллелепипед так, чтобы он целиком находился внутри ортанта. Некоторая целая точка лежит внутри сдвинутого параллелепипеда. Координаты этой точки совпадают с целыми частями координат одной из 2^n вершин параллелепипеда.

Итак, построена некоторая целая точка P ортанта, найдём одну из вершин паруса рассматриваемого ортанта. Рассмотрим такую целую плоскость π, проходящую через начало координат, что пересечение ортанта с этой плоскостью состоит ровно из одной точки — из начала координат. Предположим, что целочисленное расстояние от точки P до этой плоскости равно d. Переберём все симплексы, полученные в качестве пересечения нашего ортанта с параллельными плоскости π плоскостями с целочисленными расстояниями от начала координат до этих плоскостей, равными $1, \ldots, d$. Предположим, что целочисленное расстояние до плоскости первого такого симплекса, содержащего целые точки равно $d' \leq d$. Выпуклая оболочка всех целых точек этого симплекса совпадает с одной из граней паруса. Все вершины этой грани являются вершинами паруса.

Выберем одну из них.

14.2 Шаг 4. Выдвижение гипотезы о фундаментальной области паруса.

Предположим, что построена некоторая вершина V паруса в ортанте и базис $A_1, \ldots, A_n$ группы $\overline{\Xi}(A)$. Теперь необходимо выдвинуть гипотезу о фундаментальной области паруса. Опишем план того, как нужно выдвигать гипотезы. Во-первых, вычисляем некоторое множество целых точек, которое содержит все вершины какой-нибудь фундаментальной области паруса. Во-вторых, указываем, как выбрать бесконечную последовательность *специальных многогранных аппроксимаций* паруса. Наконец, используя изображения аппроксимаций, формулируем гипотезу о фундаментальной области паруса.

Утверждение 14.1. *Пусть V — вершина паруса n-мерной цепной дроби $(n+1)$-алгебраической иррациональности. Тогда существует такая фундаментальная область паруса, что все её вершины содержатся в выпуклой оболочке* (*обозначим через H*) *начала координат и 2^n различных точек вида*

$$V_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} A_i^{\epsilon_i}\right)(V),$$

где $\epsilon_i \in \{0,1\}$ для $1 \leq i \leq n$.

Доказательство. Рассмотрим многогранный конус C с вершиной в начале координат и основанием в выпуклом многограннике с вершинами $V_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$. Возьмём объединение всех образов этого многогранного конуса под действием операторов

$$A_{m_1,\ldots,m_n} = \prod_{i=1}^{n} A_i^{m_i},$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$ при $1 \leq i \leq n$. С очевидностью, это объединение совпадает со всем открытым ортантом, дополненным началом координат. Следовательно, для любой вершины паруса существует некоторая вершина в конусе C и такой оператор $A_{m_1,\ldots,m_n}$ для некоторых целых чисел m_i, что исходная вершина паруса получается из вершины паруса в конусе C при помощи применения оператора $A_{m_1,\ldots,m_n}$. Более того, выпуклая оболочка всех целых точек заданного ортанта содержит выпуклую оболочку вершин вида $A_{m_1,\ldots,m_n}(V)$. Следовательно, парус (т.е. граница выпуклой оболочки целых точек ортанта) содержится в замыкании дополнения до ортанта выпуклой оболочки всех точек вида $A_{m_1,\ldots,m_n}(V)$. Это дополнение является подмножеством объединения многогранников, полученных из многогранника H при помощи действия всех операторов $A_{m_1,\ldots,m_n}$ для некоторых целых m_i, $1 \leq i \leq n$. Доказательство утверждения завершено. $\square$

Классическое описание вычисления выпуклой оболочки целых точек здесь опускается. Обозначим все вершины выпуклой оболочки целых точек, содержащихся в многограннике H, через V_r, где $0 < r \leq N$.

Определение 14.2. Выпуклая оболочка следующего множества точек

$$\{A_{m_1,\ldots,m_n}(V_r)| \;\; 1 \leq m_i \leq m, \forall i : 0 \leq i \leq n\}$$

называется *n-ой специальной многогранной аппроксимацией* паруса.

Определённое выше множество содержит примерно и не более чем $m^n N$ целых точек. (Отметим, что точное количество целых точек неизвестно, поскольку образы точек границы H считаются несколько раз.) Число N фиксировано для заданных образующих $A_1, \ldots, A_n$, а параметр m изменяется. Желательно выдвинуть гипотезу по возможности с меньшим m. Это сократит вычисление выпуклой оболочки.

Замечание 14.3. Для всех примеров, перечисленных в следующей главе (и для примера последнего раздела), чтобы выдвинуть верную гипотезу, достаточно было взять $m = 2$.

Замечание 14.4. Отметим, что N — функция, определённая на множестве всех образующих группы $\Xi(A)$, эта функция не зависит от m. Следовательно, "качество"аппроксимации зависит также от выбора базиса.

Замечание 14.5. Обсудим в двух словах случай замечания 13.7. Предположим, что известны операторы $A_1, \ldots, A_n$, порождающие только некоторую подгруппу максимального ранга группы $\overline{\Xi}(A)$. Пусть индекс соответствующей подгруппы равен k. В результате возникает лишь две дополнительные трудности. Во-первых, число N будет примерно в k раз больше, чем в предыдущем случае. Во-вторых, нужно также выдвигать гипотезу об образующих группы $\overline{\Xi}(A)$.

15 Проверка выдвинутых гипотез в двумерном случае.

Итак, остаётся лишь проверить выдвинутую на шаге 4 гипотезу. Покажем сначала, как проверять гипотезы для двумерных периодических цепных дробей, опираясь на теорему о классификации из прошлой главы. Проверка состоит из семи этапов. В этом разделе доказывается, что этих этапов проверки достаточно. Сложность предлагаемой проверки есть многочлен от количества всех граней.

15.1 Краткое описание этапов проверки и формулировка основных результатов этого раздела.

Предположим, имеется гипотеза о некоторой фундаментальной области D для некоторого паруса двумерной периодической цепной дроби, построенной по оператору A, а также о некотором базисе B_1, B_2 группы $\overline{\Xi}(A)$. Пусть p_2 — количество всех двумерных граней фундаментальной области D, а F_i $(i = 1, \ldots, p_2)$ — все двумерные грани — многоугольники, у которых известны все вершины и стороны. Пусть (p_0) p_1 — количество всех (нульмерных) одномерных граней. Напомним, что построенная фундаментальная область и базис гипотетически обладают следующими свойствами:

i)замыкание фундаментальной области гомеоморфно двумерному диску;

ii) операторы B_1 и B_2 определяют склейку этого диска в двумерный тор (причём полученное отображение области D в склеенный тор взаимно-однозначно).

Проверка гипотезы. Проверка проходит в семь следующих этапов:

1. проверка условия i);

2. проверка условия ii);

3. поиск целочисленных расстояний от начала координат до двумерных плоскостей двумерных граней проверка их положительности;

4. проверка на наличие целых точек внутри отмеченных пирамид с вершинами в начале координат и с основаниями в двумерных гранях F_i;

5. проверка выпуклости при двугранных углах (для всех рёбер фундаментальной области);

6. проверка правильности звёзд при вершинах;

7. Проверка принадлежности всех нульмерных граней набора D одному ортанту.

Теорема 15.1. *Для предлагаемой проверки предполагаемой фундаментальной области необходимо не более*

$$C(p_0 + p_1 + p_2)^4$$

действий сложения, умножения и сравнения, где C — некоторая константа, не зависящая от p_i.

Замечание 15.2. Под количеством умножений здесь понимается сумма количества умножений и количества делений. Отметим также, что в этой работе мы не учитываем сложность перемножения (сложения) двух многозначных чисел. Мы полагаем, что оно происходит за одну операцию умножения (сложения).

Теорема 15.3. *Пусть набор граней D удовлетворяет следующим условиям:*

1) условие i);

2) условие ii);

3) все целочисленные расстояния от начала координат до двумерных плоскостей двумерных граней положительны;

4) все отмеченные пирамиды с вершинами в начале координат и с основаниями в двумерных гранях F_i являются вполне пустыми;

5) все двугранные углы выпуклы;

6) звёзды при всех вершинах правильны;

7) все нульмерные грани набора D из одного ортанта.

Тогда D является фундаментальной областью некоторого паруса цепной дроби, построенной по оператору A.

Начнём с доказательства теоремы 15.1. Докажем, что каждый из семи этапов реализуется за полиномиальное время.

15.2 Доказательство теоремы 15.1: проверка условия i).

Здесь нужно, во-первых, проверить, что замыкания любых двух двумерных граней пересекаются либо по вершине, либо по ребру, либо не пересекаются (тем самым замыкания одномерных граней на границах двумерных граней пересекаются либо по вершине, либо не пересекаются). Задача сводится к решению линейных систем двух уравнений плоскостей граней и неравенств границ граней в количестве меньшем $2p_1$ штук (с тремя переменными). Количество таких систем совпадает с количеством пар различных граней и равно $\frac{p_2(p_2-1)}{2}$. Поскольку в каждой системе по два уравнения, а всего неизвестных три, каждая система за не более чем линейное от $2p_1$ время сводится к решению системы неравенств от одной переменной. Следовательно, проверка всех систем проходит не более чем за $C_{1,1}p_1p_2^2$ действий, где $C_{1,1}$ — некоторая константа, не зависящая от p_i.

Во-вторых, необходимо проверить, чтобы рёбра (одномерные грани) примыкали либо к одной, либо к двум (двумерным) граням. Это проверяется за p_1p_2 одиночных проверок примыкания. Каждая проверка проходит не более чем за линейное от p_1 время. Следовательно, проверка проходит не более чем за $C_{1,2}p_1^2p_2$ действий, где $C_{1,2}$ — некоторая константа, не зависящая от p_i.

В-третьих, проверим, что все одномерные грани замыкания D, примыкающие лишь к одной двумерной грани, образуют одну кусочно-линейную несамопересекающуюся петлю. Для этого необходимо, чтобы в каждой одномерной вершине сходилось не более двух таких рёбер, а также, что объединение таких рёбер было связно; проверяется не более чем за p_1^2 одиночных проверок примыкания. Каждая такая проверка проходит за конечное число шагов, не зависящее от p_i. Итого, $C_{1,3}p_1^2$ действий, где $C_{1,3}$ — некоторая константа, не зависящая от p_i.

В-четвёртых, проверим, что объединение замыкания граней D связно. Найдём явно одну из компонент связности. Рассмотрим произвольную двумерную грань и все рёбра границы с вершинами. Рассмотрим все грани, примыкающие к этим рёбрам (кроме рассмотренных ранее и их общую границу). Продолжим построение компоненты связности по индукции. Пусть мы сделали l шагов индукции и построили некоторую часть компоненты связности с рёбрами границы. Добавим все грани, примыкающие к этим рёбрам (кроме рассмотренных ранее и их общую границу). При такой операции мы рассматривали каждое ребро не более одного раза, следовательно, мы сделали не более $C_{1,4}p_1$ одиночных проверок примыкания. Итак, одна из компонент связности построена. Если все грани всех размерностей замыкания области D вошли в эту компоненту, то она одна, если нет, то есть ещё компоненты связности.

Предположим, что у замыкания D имеется всего одна компонента связности, граница которой гомеоморфна окружности. Посчитаем эйлерову характеристику замыкания граней D. Эйлерова характеристика замыкания граней D в этом случае равна единице тогда и только тогда, когда замыкание граней D гомеоморфно двумерному диску. Чтобы посчитать эйлерову характеристику необходимо не более $4p_0 + 2p_1 + p_2$ действий сложения.

Доказана следующая лемма.

Лемма 15.4. *Сложность проверки на первом этапе не превосходит*

$$C_1(p_1 + p_2)p_1p_2$$

действий сложения, умножения и сравнения, где C_1 *— некоторая константа, не зависящая от* p_i. $\square$

15.3 Доказательство теоремы 15.1: проверка условия ii).

Здесь необходимо проверить, что при склейке диска, определяемой действием операторов B_1 и B_2, получилась топологическая триангулируемая поверхность, гомеоморфная тору.

Проверим сначала, что после склейки получилась триангулируемая поверхность. Для этого необходимо проверить, что не возникло никаких особенностей при склейке граней всех размерностей.

Проверим, что нет особенностей внутри диска, то есть открытые грани, не лежащие на граничной окружности, и их образы не пересекаются. Для этого необходимо решить примерно $2(p_0 + p_1 + p_2)^2$ систем линейных уравнений и неравенств. Каждая система за не более чем линейное от p_0, p_1, p_2 количество действий сводится к решению системы неравенств от одной переменной. Следовательно, проверка всех систем проходит не более чем за $C_{2,1}(p_0 + p_1 + p_2)^3$ действий, где $C_{2,1}$ — некоторая константа, не зависящая от p_i.

Проверим, что нет особенностей на объединении всех одномерных граней границы диска. Для этого достаточно установить, что для каждой граничной одномерной грани существует ровно одна другая граничная одномерная грань, которая склеивается с данной. Всего получается не более чем p_1^2 проверок примыкания, для любой проверки необходимо не более чем $C_{2,2}$ действий, где $C_{2,2}$ — некоторая константа, не зависящая от p_i. Следовательно, всего нужно $C_{2,2}p_1^2$ действий.

Проверим, что нет особенностей на объединении всех вершин границы диска после склейки. Для этого достаточно проверить, что объединение всех граней, к которым она примыкает, гомеоморфно диску. Поскольку грани фундаментальной области не пересекаются, остаётся проверить, что каждая рассматриваемая одномерная грань примыкает ровно к двум двумерным, а, кроме того, объединение одномерных и двумерных таких граней гомеоморфно кольцу, то есть кроме того связно и ориентируемо. Проверка всех условий проходит не более чем за np_1p_2 проверок примыкания, где n — некоторая константа. Следовательно всего для каждой вершины нужно выполнить не более чем $C_{2,3}p_1p_2^2$ действий, где $C_{2,3}$

— некоторая константа, не зависящая от p_i. Таким образом, для всех вершин необходимо $C_{2,3}p_0p_1p_2^2$ действий.

И, наконец, следует проверить, что получился тор. Во-первых, нужно проверить, что эйлерова характеристика поверхности склейки равна нулю (проверяется за не более чем линейное от p_i количество действий). Во-вторых, нужно показать ориентируемость поверхности. Ориентируем граничную окружность; на рёбрах входящих в границу окружности возникает индуцированная ориентация. Нужно проверить, что граничные рёбра склеиваются так, что их ориентации не согласованы. Если хоть одна из соответствующих ориентаций согласована, из диска склеится бутылка Клейна. Если все ориентации не согласованы, то склеится тор. Для этого необходимо не более чем линейное от p_1 количество действий. Следовательно, всего нужно $C_{2,4}(p_0 + p_1 + p_2)$ действий, где $C_{2,4}$ — некоторая константа, не зависящая от p_i.

Остаётся только показать, что отображение области D в склеенный тор взаимно-однозначно. На двумерных гранях оно однозначно автоматически. На одномерных и нульмерных гранях нужно проверить, что прообраз существует и единственен. Всего нужно $C_{3,4}(p_0+p_1)$ действий, где $C_{3,4}$ — некоторая константа, не зависящая от p_i.

Доказана следующая лемма.

Лемма 15.5. *Сложность проверки на втором этапе не превосходит*

$$C_2(p_0p_1^2p_2 + (p_0 + p_1 + p_2)^3)$$

действий сложения, умножения и сравнения, где C_2 — некоторая константа, не зависящая от p_i. □

15.4 Доказательство теоремы 15.1: вычисление целочисленных расстояний от начала координат до двумерных плоскостей двумерных граней.

Найдём целочисленное расстояние от начала координат до двумерной плоскости некоторого многоугольника M. Все эти расстояния должны быть отличными от нуля. Пусть $V_1(x_1, y_1, z_1)$, $V_2(x_2, y_2, z_2)$ и $V_3(x_3, y_3, z_3)$ — три вершины этого многоугольника, не лежащие на одной прямой, тогда верно следующее утверждение.

Утверждение 15.6. *Целочисленное расстояние от начала координат до двумерной плоскости многоугольника M вычисляется по формуле*

$$\frac{\left|\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\right|}{|[\overline{V2-V1}, \overline{V3-V1}]|_{\mathbb{Z}}},$$

где через $[\overline{V2-V1}, \overline{V3-V1}]$ обозначено векторное произведение векторов $\overline{V2-V1}$ и $\overline{V3-V1}$ в трёхмерном пространстве, а через $|[\overline{V2-V1}, \overline{V3-V1}]|_{\mathbb{Z}}$ обозначена целочисленная длина вектора $[\overline{V2-V1}, \overline{V3-V1}]$ (то есть наибольший общий делитель координат отрезка).

Доказательство. Отметим, во-первых, что в числителе выражения утверждения 15.6 стоит евклидов объём параллелепипеда $P(O; V_1V_2V_3)$, где O — начало координат. По определению, целочисленный объём тетраэдра совпадает с евклидовым объёмом параллелепипеда $P(O; V_1V_2V_3)$.

Во-вторых, верна следующая *формула целочисленного объёма отмеченной пирамиды*: целочисленный объём целой треугольной отмеченной пирамиды равен произведению целочисленной площади основания пирамиды и целочисленного расстояния от её вершины до плоскости основания. Целочисленная формула объёма является прямым следствием утверждения 5.5.

Остаётся лишь показать, что выражение $|[\overline{W}_1, \overline{W}_2]|_{\mathbb{Z}}$ есть целочисленная площадь треугольника с вершинами O, $O+\overline{W}_1$ и $O+\overline{W}_2$. Пусть последние две точки имеют координаты (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2). Найдём минимум функции целочисленных объёмов на множестве треугольных отмеченных пирамид с основанием в точках O, $O+\overline{W}_1$ и $O+\overline{W}_2$ и с вершиной в точке (x, y, z), не лежащей на плоскости основания. Как показано выше, целочисленный объём такой отмеченной пирамиды равен

$$\left|\begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 \\ y & b_1 & b_2 \\ z & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Минимум определителя такой матрицы с очевидностью равен наибольшему общему делителю выражений $b_1c_2 - c_1b_2$, $c_1a_2 - a_1c_2$ и $a_1b_2 - b_1a_2$, и, тем самым, равен целочисленной длине векторного произведения векторов $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$.

Из формулы целочисленного объёма отмеченной пирамиды следует, что если основание не изменяется, а объём минимален, то целочисленное расстояние от вершины до плоскости основания минимально, то есть равно единице. Таким образом, по формуле целочисленного объёма минимум целочисленного объёма равен целочисленной площади основания (так как целочисленное расстояние равно единице). Следовательно, целочисленная площадь основания совпадает с целочисленной длиной векторного произведения векторов $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$.

Таким образом, в формулировке утверждения стоит формула целочисленного объёма треугольной отмеченной пирамиды. Утверждение доказано. □

Замечание 15.7. Последнее утверждение и доказательство дословно обобщаются на случай отмеченных пирамид в $(n+1)$-мерном пространстве с n-мерным симплексом в основании.

Лемма 15.8. *Сложность проверки на третьем этапе не превосходит C_3p_2 действий сложения, умножения и сравнения, где C_3 — некоторая константа, не зависящая от p_i.*

Доказательство. Все целочисленные расстояния от начала координат до двумерных плоскостей двумерных граней ищутся по формуле утверждения 15.6 за конечное число действий, не зависящее от p_i. □

15.5 Доказательство теоремы 15.1: проверка наличия целых точек внутри отмеченных пирамид с вершинами в начале координат и с основаниями в двумерных гранях F_i.

Докажем сначала следующее утверждение.

Утверждение 15.9. *Рассмотрим два целочисленных треугольника в трёхмерном пространстве с вершинами $A_1(x_{a_1}, y_{a_1}, z_{a_1})$, $A_2(x_{a_2}, y_{a_2}, z_{a_2})$, $A_3(x_{a_3}, y_{a_3}, z_{a_3})$ и с вершинами $B_1(x_{b_1}, y_{b_1}, z_{b_1})$, $B_2(x_{b_2}, y_{b_2}, z_{b_2})$, $B_3(x_{b_3}, y_{b_3}, z_{b_3})$, причём плоскость первого треугольника не проходит через начала координат. Тогда треугольник $A_1A_2A_3$ целочисленно-линейно эквивалентен треугольнику $B_1B_2B_3$ (с учётом нумерации вершин) тогда и только тогда, когда определитель матрицы BA^{-1} по модулю равен единице, а все коэффициенты этой матрицы — целые числа, где*

$$A = \begin{pmatrix} x_{a_1} & x_{a_2} & x_{a_3} \\ y_{a_1} & y_{a_2} & y_{a_3} \\ z_{a_1} & z_{a_2} & z_{a_3} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x_{b_1} & x_{b_2} & x_{b_3} \\ y_{b_1} & y_{b_2} & y_{b_3} \\ z_{b_1} & z_{b_2} & z_{b_3} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку плоскость первого треугольника не проходит через начало координат, матрица A — невырождена, и условие корректно.

Заметим, что BA^{-1} — единственное линейное преобразование, переводящее первый треугольник во второй (с учётом нумерации вершин). Если оператор BA^{-1} сохраняет решётку, то определитель равен единице, а все коэффициенты целые. Если же оператор BA^{-1} не сохраняет решётки, то треугольники не являются целочисленно-линейно эквивалентными, поскольку других линейных операторов, переводящих один треугольник в другой нет. Утверждение доказано. □

Лемма 15.10. *Сложность проверки на четвёртом этапе не превосходит C_4p_2 действий сложения, умножения и сравнения, где C_4 — некоторая константа, не зависящая от p_i.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую грань F_i. Вычислим целочисленное расстояние до неё r_i.

Если целочисленное расстояние до плоскости грани равно единице, то все целые точки отмеченной пирамиды, отличные от вершины (начала координат), лежат на основании.

Если же целочисленное расстояние до плоскости грани F_i больше единицы, то оно треугольно по следствию 9.4 о целочисленно-аффинной классификации. Вычислим целочисленные стороны и целочисленную площадь треугольника F_i (за несколько действий). По целочисленной площади, целочисленным длинам сторон и целочисленному расстоянию от плоскости грани до нуля предположительный целочисленный аффинный тип грани определяется однозначно. При этом целочисленный линейный тип определён также однозначно, кроме случая целочисленного аффинного типа треугольника с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$ и $(a,0)$. В этом случае он определён с точностью до переменной $0 < \xi \leq r_i$. Проверка целочисленно-линейной эквивалентности заданных двух треугольных граней по утверждению 15.9 сводится к решению девяти целочисленных линейных уравнений в целых числах на переменную ξ либо к проверке целочисленности девяти чисел.

Таким образом, проверка для каждой грани происходит за C_4 действий, где C_4 — некоторая константа, не зависящая от p_i. Следовательно, сложность проверки на четвёртом этапе не превосходит $C_4 p_2$ действий сложения, умножения и сравнения. Утверждение леммы доказано. □

15.6 Доказательство теоремы 15.1: проверка выпуклости при двугранных углах.

Назовём двугранный угол *правильно расположенным относительно начала координат*, если начало координат лежит в соответствующем накрест лежащем угле.

Заметим, что свойство правильности расположения относительно начала координат целочисленно-аффинно инвариантно. Следовательно, необходимо проверить это свойство только для всех рёбер разбиения тора (то есть всех рёбер фундаментальной области, включая граничные; для граничных рёбер берутся образы соответствующих граней при преобразованиях $B_1^{\pm 1}$ или $B_2^{\pm 1}$). Каждая проверка правильности расположений начала координат сводится к решению системы обычных неравенств (без переменных).

Лемма 15.11. *Сложность проверки на пятом этапе не превосходит $C_5 p_2^2$ действий сложения, умножения и сравнения, где C_5 — некоторая константа, не зависящая от p_i.* □

15.7 Доказательство теоремы 15.1: проверка правильности 2-звёзд при вершинах.

Назовём 2-*звездой при нульмерной вершине универсальной накрывающей тора* объединение всех граней универсальной накрывающей тора размерности не больше двух, к которым данная вершина примыкает.

Пусть нульмерная грань v накрывающей отображается в точку x трёхмерного пространства. При этом грани, к которым она примыкает, отображаются в примыкающие.

Если $x \neq (a, 0, 0)$ для некоторого ненулевого a, то обозначим через вектор $\overline{v}_n$ вектор $(1/n, 0, 0)$, $n \in \mathbb{N}$. (Если $x = (a, 0, 0)$, в этом случае берём вектор $(0, 1/n, 0)$.) Звезда при нульмерной грани называется *правильной*, если последовательность лучей l_n с центром в начале координат, проходящих через точку $x + \overline{v}_n$, начиная с некоторого натурального k, удовлетворяет следующему условию: прообраз луча l_n при отображении звезды на универсальной накрывающей тора в трёхмерное пространство состоит из одной точки.

Лемма 15.12. *Сложность проверки на шестом этапе не превосходит*

$$C_6 p_0 p_1 (p_0 + p_2)$$

действий сложения, умножения и сравнения, где C_6 — некоторая константа, не зависящая от p_i.

Доказательство. Для каждой грани (ребра) образа любой 2-звезды нужно решить систему из не более чем p_1 (чем p_0) линейных неравенств относительно переменной $\varepsilon = 1/n$. Следовательно, сложность проверки не превосходит

$$C_6 p_0(p_0 p_1 + p_1 p_2)$$

действий, где C_6 — некоторая константа, не зависящая от p_i. □

15.8 Проверка принадлежности всех нульмерных граней набора D одному ортанту; завершение доказательства теоремы 15.1.

Лемма 15.13. *Сложность проверки на седьмом этапе не превосходит $C_7 p_0$ действий сложения, умножения и сравнения, где C_7 — некоторая константа, не зависящая от p_i.*

Доказательство. Воспользуемся следующим очевидным фактом: Пусть e — ненулевой вектор, тогда объём параллелепипеда, натянутого на векторы e, $A(e)$ и $A^2(e)$ равен нулю тогда и только тогда, когда векторы e, $A(e)$ и $A^2(e)$ образуют собственное подпространство оператора A.

Рассмотрим две нульмерные грани x_1 и x_2 набора D. Пусть $x(t) = tx_1 + (1-t)x$. Точки x_1 и x_2 находятся в одном и том же ортанте тогда и только тогда, когда функция объёма $f(t)$ параллелепипеда, натянутого на векторы $x(t)$, $B_1(x(t))$ и $B_1^2(x(t))$ не обращается в ноль на отрезке $[0, 1]$. Эта функция есть определитель матрицы, образованной векторами (t), $B_1(x(t))$ и $B_1^2(x(t))$. Следовательно, $f(t)$ является многочленом с целыми коэффициентами степени не выше трёх. Теперь решения уравнения $f(x) = 0$ находятся явно. Остаётся их только сравнить с 0 и 1.

Фиксируем x_1 и изменяем x_2. При этом проверка пройдёт не более чем за $C_7 p_0$ действий, где C_7 — некоторая константа, не зависящая от p_i. □

Замечание 15.14. Отметим, что оператор B_1 — гиперболический целочисленный и неприводимый, а многочлен $f(x)$ — целочисленный. Из этого вытекает, что $f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Теперь вопрос о существовании корней на отрезке $[0, 1]$ сводится к исследованию расположения критических точек относительно точек 0 и 1, а также к вычислению критических значений и значений в точках 0 и 1. При этом приходится решать лишь одно квадратное уравнение с целыми коэффициентами (а не само уравнение третьей степени $f(x) = 0$).

Завершение доказательства теоремы 15.1. Из лемм 15.4—15.13 следует, что для всех семи этапов необходимо $C(p_0+p_1+p_2)^4$ действий сложения, умножения и сравнения, где C — некоторая константа, не зависящая от p_i. Теорема 15.1 доказана. □

Замечание 15.15. На самом деле верно более сильное утверждение Для предлагаемой проверки предполагаемой фундаментальной области необходимо не более $\overline{C}(p_0+p_1+p_2)^3$ действий сложения, умножения и сравнения и $\tilde{C}(p_0+p_1+p_2)^4$ логических действий где $\overline{C}$ и $\tilde{C}$ — константы, не зависящая от p_i.

Остаётся только показать, что больше ничего проверять не нужно.

15.9 Доказательство теоремы 15.3: лемма об инъективности проекции на гранях.

Утверждение теоремы 15.3 доказывается при помощи нескольких лемм.

Сначала введём некоторые обозначения, которые понадобятся в доказательстве. Итак, операторы B_1 и B_2 образуют базис группы $\Xi(A)$. Обозначим через $B_{n,m}$ оператор $B_1^n B_2^m$. Пусть набор граней D удовлетворяет всем условиям пунктов 1—5. Обозначим через U объединение всех образов набора граней D при действии операторов $B_{n,m}$, то есть

$$U = \bigcup_{n,m\in\mathbb{Z}} B_{n,m}(D).$$

Рассмотрим двумерную сферу S с центром в начале координат O и с единичным радиусом. Обозначим через π следующее отображение

$$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus O \to S,$$

при этом точка x трёхмерного пространства без начала координат отображается в точку пересечения сферы S и луча с центром в начале координат, проходящего через x.

Лемма 15.16. *На любой грани многогранной поверхности U отображение π инъективно.*

Доказательство. Сначала, покажем, что утверждение леммы корректно, то есть, что поверхность U не проходит через начало координат. По условию пункта 3 все двумерные грани D лежат на плоскостях, целочисленное расстояние до которых больше нуля, то есть на плоскостях, не проходящих через начало координат. Поскольку целочисленное расстояние до начала координат является инвариантом группы $\Xi(A)$, все двумерные грани многогранной поверхности U лежат на плоскостях, целочисленное расстояние до которых больше нуля. По условиям пунктов 1 и 2 все одномерные и нульмерные грани U примыкают к двумерным граням U и, поэтому также лежат на некоторых плоскостях с целочисленным расстоянием до начала координат большем нуля.

Теперь докажем утверждение леммы для двумерных граней. Рассмотрим некоторую двумерную грань F поверхности U. Плоскость грани F не проходит через начало координат, поскольку по утверждению пункта 3 целочисленное расстояние от этой плоскости до начала координат не равно нулю. Следовательно, отображение π инъективно на грани F.

Пусть теперь E — некоторая одномерная грань поверхности U. Эта грань по условиям пунктов 1 и 2 примыкает к некоторой двумерной грани и, тем самым, лежит в некоторой плоскости, не проходящей через начало координат. Следовательно, прямая, содержащая грань E, также не проходит через начало координат.

Инъективность для нульмерных граней очевидна. $\square$

15.10 Доказательство теоремы 15.3: лемма о конечном покрытии фундаментальной области.

Пусть x — некоторая точка трёхмерного пространства, отличная от начала координат. Обозначим через N_x четырёхгранный телесный угол с вершиной в начале координат, в основании которого лежит четырёхугольник с вершинами x, $B_1(x)$, $B_1B_2(x)$ и $B_2(x)$. Отметим, что

$$\left(\bigcup_{n,m\in\mathbb{Z}} B_{n,m}(N_x)\right) \setminus O$$

есть один из восьми открытых ортантов цепной дроби A, который содержит точку x. Обозначим открытый ортант, содержащий все целые точки фундаментальной области, через K.

Лемма 15.17. *Пусть x — некоторая точка открытого ортанта K. Объединение граней из набора D содержится в конечном объединении телесных углов вида $B_{n,m}(N_x)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что все точки замыкания граней набора D содержатся в ортанте K. Все нульмерные грани набора D содержатся в открытом ортанте K по условию пункта 6. По условиям пунктов 1 и 2 все нульмерные грани замыкания граней набора D содержатся в открытом ортанте K Все нульмерные грани многогранной поверхности U содержатся в открытом ортанте K, поскольку все операторы $B_{m,n}$ сохраняют ортанты. Далее, все одномерные и двумерные грани поверхности U содержатся в открытом ортанте K, поскольку любой открытый ортант — выпуклое множество. Следовательно, все точки замыкания области D содержатся в открытом ортанте K.

Рассмотрим заданную точку x в ортанте K. Из теоремы Дирихле об единицах [12] следует, что любая внутренняя точка a открытого ортанта K обладает некоторой окрестностью, которая:

i) покрывается объединением четырёх телесных углов вида $B_{n,m}(N_x)$ (в случае, когда точка a лежит на одном из рёбер одного из углов $B_{k,l}(N_x)$);

ii) покрывается объединением двух телесных углов вида $B_{n,m}(N_x)$ (в случае,

когда точка a лежит на одной из граней одного из углов $B_{k,l}(N_x)$);
iii) покрывается некоторым телесным углом вида $B_{n,m}(N_x)$ (в остальных случаях).

Во всех случаях окрестность покрывается объединением конечного числа телесных углов вида $B_{n,m}(N_x)$.

Рассмотрим покрытие такими окрестностями всех точек замыкания граней набора D. Поскольку замыкание граней набора D замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^3$, оно компактно, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Следовательно, объединение граней из набора D содержится в конечном объединении телесных углов вида $B_{n,m}(N_x)$. Утверждение доказано. $\square$

Следствие 15.18. *Пусть x — некоторая точка открытого ортанта K. В телесный угол N_x могут входить точки лишь конечного числа граней из всех наборов $B_{n,m}(D)$.*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что область D содержится в конечном объединении телесных углов $\bigcup\limits_{k=1}^{l} B_{n_k,m_k}(N_x)$. Следовательно, в телесный угол N_x могут входить точки лишь грани из наборов $B_{-n_k,-m_k}(D)$ при $1 \leq k \leq l$. $\square$

15.11 Доказательство теоремы 15.3: лемма о взаимно-однозначности проекции.

Лемма 15.19. *Отображение π взаимно-однозначно отображает многогранную поверхность U во множество $S \cap K$.*

Доказательство. Как было показано выше, поверхность U содержится в K и, следовательно, отображается под действием π во множество $S \cap K$.

Введём следующие обозначения.

По условию пункта 2 операторы B_1 и B_2 склеивают фундаментальную область в тор. Пусть W — универсальная накрывающая тора. На универсальной накрывающей W естественным образом возникает разбиение на грани и двупараметрическое семейство отображений $p_{n,m} : W \to U$ (поскольку на многогранной поверхности действует система сдвигов $B_{k,l}$), отображающее грани в грани. Фиксируем некоторое из этих отображений и обозначаем его через p $(p : W \to U)$.

Рассмотрим композицию отображений $\pi \circ p : W \to S$. Данное отображение не имеет ветвлений на образах открытых двумерных граней W, поскольку каждая двумерная грань поверхности W изоморфно отображается в некоторую грань U, а та, в свою очередь, по лемме 15.16 инъективно отображается в $S \cap K$.

Соседние по одномерному ребру двумерные грани поверхности W отображаются в соседние грани U, которые по утверждению пункта 5 образуют правильный угол и, следовательно, инъективно отображаются в $S \cap K$. Таким образом, отображение $\pi \circ p$ не имеет ветвлений на образах одномерных граней.

Рассмотрим некоторую одномерную грань v поверхности W. Соседние по нульмерному ребру двумерные грани поверхности W отображаются в соседние грани U, которые по утверждению пункта 6 образуют правильную 2-звезду. Следовательно, имеется сколь угодно близкая к точке $\pi \circ p(v)$ точка сферы S, обладающая ровно одним прообразом на звезде. Таким образом, отображение $\pi \circ p$ не имеет ветвления на листе звезды в точке $\pi \circ p(v)$. Следовательно, отображение $\pi \circ p$ не имеет ветвления в образах всех нульмерных граней.

Итак, отображение $\pi \circ p : W \to S \cap K$ не имеет нигде ветвлений.

Рассмотрим произвольную точку $x \in S \cap K$ и соответствующий телесный угол N_x. Пусть x_1 и x_2 две точки множества $S \cap N_x$. Покажем, что у точек x_1 и x_2 одинаковое число прообразов при отображении $\pi \circ p : W \to S \cap K$. Соединим точки x_1 и x_2 кривой внутри множества $S \cap N_x$. По следствию 15.18 прообраз этой кривой содержится в конечном наборе граней W. Поскольку вдоль каждой из граней нет ветвлений (а их конечное число), и никакая грань не является граничной, количество прообразов вдоль этой кривой у отображения $\pi \circ p$ постоянно (и конечно). Таким образом, у всех точек точек $S \cap N_x$ одинаковое конечное число прообразов. Следовательно, у всех точек множества $S \cap B_{n,m}(N_x)$ то же самое число прообразов. Следовательно, у всех точек множества $S \cap K$

одинаковое число прообразов.

Отсюда вытекает, что отображение $\pi \circ p$ универсальной накрывающей тора (то есть плоскости) является конечнолистным неразветвлённым накрытием множества $S \cap K$ (то есть диска). У открытого диска существуют только однолистные неразветвлённые накрытия. Следовательно, отображение $\pi \circ p : W \to S \cap K$ взаимно-однозначно. Поскольку $p : W \to U$ по построению сюръективное отображение, а по сказанному выше инъективное, отображения $p : W \to U$ и $\pi : U \to S \cap K$ — взаимно-однозначные. Утверждение доказано. □

15.12 Доказательство теоремы 15.3: лемма о выпуклости.

Поскольку в любом ограниченном шаре с центром в начале координат не существует последовательности вершин поверхности U (то есть некоторых целых точек), которая бы имела в качестве предельной точки некоторую точку границы ортанта, многогранная поверхность U разделяет трёхмерное пространство на две части. Обозначим часть, не содержащую начало координат, через H.

Лемма 15.20. *Множество H — выпукло.*

Доказательство. Предположим, что некоторая плоскость, проходящая через начало координат, пересекает многогранную поверхность U, но не проходит ни через одну вершину U. По лемме 15.19 такая плоскость пересекает U по несамопересекающейся связной незамкнутой ломаной. Эта ломаная делит плоскость на две части. Все вершины этой ломаной принадлежат одномерным граням многогранной поверхности U. По условию пункта 5 все двугранные углы правильные. Следовательно, при всех вершинах границы пересечения множества H с нашей плоскостью углы меньше развёрнутого. Следовательно, это пересечение выпукло.

Множество плоскостей, проходящих через начало координат, пересекающих многогранную поверхность U, но не проходящих ни через одну вершину U, является всюду-плотным во множестве всех плоскостей, проходящих через начало координат и пересекающих многогранную поверхность U. Тогда из непрерывности следует, что пересечение с H любой проходящей через начало координат плоскости (и пересекающей U) выпукло.

Докажем теперь, что множество H выпукло. Пусть x_1, x_2 две точки множества H. Проведём некоторую плоскость через точки x_1, x_2 и начало координат. Эта плоскость пересекает границу U, поскольку x_1 — точка H, а начало координат — нет. По доказанному выше, пересечение H с этой плоскостью является выпуклым множеством. Следовательно, отрезок с концами в точках x_1 и x_2 целиком лежит в H. Следовательно, по определению выпуклости множество H выпукло.

Утверждение доказано. $\square$

15.13 Завершение доказательства теоремы 15.3: основная часть.

Итак, построенная многогранная поверхность U обладает следующими свойствами:

— по лемме 15.20 она ограничивает выпуклое множество H;

— по построению все нульмерные вершины поверхности U — целые точки;

— по условию пункта 4 разность ортанта K и множества H не содержит целых точек.

Следовательно, многогранная поверхность U является границей выпуклой оболочки всех целых точек внутри ортанта K. Следовательно, по определению U является одним из парусов цепной дроби, построенной по оператору A. Теорема 15.3 доказана. $\square$

Сформулируем одну гипотезу, связанную с условиями пунктов 1—7.

Гипотеза 15. Условие пункта 7 следует из условий пунктов 1—6.

16 О проверке гипотез для многомерного случая.

В заключение этой главы приведём идею проверки гипотезы о фундаментальных областях парусов для многомерного случая.

Гипотеза для многомерного случая. Предположим, имеется гипотеза о некоторой фундаментальной области D, а также о некотором базисе $B_1, \ldots, B_n$ группы $\overline{\Xi}(A)$. Пусть, кроме того, фундаментальная область и базис обладают следующими свойствами:

i) замыкание фундаментальной области гомеоморфно диску;

ii) операторы $B_1, \ldots B_n$ определяют склейку этого диска в n-мерный тор.

Идея проверки гипотезы для многомерных цепных дробей. Проверим данную гипотезу на верность. Условия i) и ii) проверяются аналогичными методами. Если условия i) и ii) выполняются, то проверяем, являются ли все n-мерные грани фундаментальной области гранями паруса. Это может быть проделано следующим образом.

Предположим, что целочисленные расстояния от начала координат до плоскостей граней F_i равны d_i соответственно ($i = 1, \ldots, p$, где p — число всех n-мерных граней). Наша гипотеза верна тогда и только тогда, когда для всех $i = 1, \ldots, p$ выполняются следующие условия. Рассмотрим плоскости, параллельные грани F_i на целочисленных расстояниях d (при $d \leq d_i$) до начала координат.

a) При целых $d < d_i$ пересечение нашего ортанта с построенными плоскостями не содержит ни одной целой точки.

b) При $d = d_i$ выпуклая оболочка всех целых точек пересечения совпадает с гранью F_i.

Замечание 16.1. Проверка условий a) и b) довольно громоздка, а обобщение проверки гипотез для двумерных цепных дробей упирается, в частности, в отсутствие теоремы о целочисленно-линейной классификации трёхмерных/многомерных граней, расположенных на трёхмерных/многомерных плоскостях на расстоянии, большем единицы, от начала координат (см проблему 2).

Завершаем последний раздел третьей главы проблемой, связанной с обратной к обсуждённой в этой главе задаче алгоритмического построения парусов периодических многомерных цепных дробей.

Проблема 16. **(В. И. Арнольд.)** Существует ли алгоритм, отвечающий на следующий вопрос: реализуется ли заданное разбиения тора в качестве разбиения тора для некоторого паруса периодической цепной дроби? (Определение разбиения тора для паруса см. в подразделе 3.2.)

Ответ а этот вопрос неизвестен даже для случая двумерных периодических цепных дробей.

Глава IV.

Примеры фундаментальных областей парусов двумерных периодических цепных дробей

В последней четвёртой главе приводятся вычисленные автором примеры фундаментальных областей парусов двумерных цепных дробей кубических иррациональностей некоторых специальных семейств. В разделе 17 изучаются свойства периодических двумерных цепных дробей, построенных по фробениусовым операторам. В разделе 18 разобраны примеры бесконечных серий фундаментальных областей парусов двумерных цепных дробей, построенных по фробениусовым операторам.

17 Семейство фробениусовых операторов и его свойства.

17.1 Определение фробениусовых операторов.

Цепные дроби кубических иррациональностей двумерных цепных дробей, построенные по операторам A и $-A$, совпадают. Таким образом, изучение цепных дробей целочисленных операторов с определителем ± 1 сводится к изучению цепных дробей целочисленных операторов с единичным определителем (то есть операторов группы $SL(3, \mathbb{Z})$).

Оператор (матрицу) с единичным определителем

$$A_{m,n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -m & -n \end{pmatrix},$$

где m и n — произвольные целые числа, будем называть *фробениусовым оператором (матрицей)*.

Утверждение 17.1. *Матрица $A_{m,n}$ и транспонированная матрица ${A_{m,n}}^t$ сопряжены целочисленной матрицей*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Операторам с матрицами $A_{m,n}$ и ${A_{m,n}}^t$ соответствуют эквивалентные цепные дроби. □

Отметим следующее: если характеристический многочлен $\chi_{A_{m,n}}(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, то в поле $\mathbb{Q}[x]/\big(\chi_{A_{m,n}}(x)\big)$ матрица оператора умножения на элемент x в естественном базисе $\{1, x, x^2\}$ совпадает с матрицей ${A_{m,n}}^t$.

Пусть оператор $A \in SL(3, \mathbb{Z})$ имеет различные вещественные иррациональные собственные значения. Пусть e_1 некоторый целочисленный ненулевой вектор, $e_2 = A(e_1)$, $e_3 = A^2(e_1)$. Тогда в базисе (e_1, e_2, ce_3) при некотором рациональном c матрица оператора будет транспонированной к фробениусовой. Следовательно, по утверждению 17.1 существует такой базис, в котором матрица оператора A будет фробениусовой. Однако матрица перехода при этом может не быть целочисленной, а соответствующая цепная дробь неэквивалентна исходной.

Теорема 17.2. **(См. [65].)** *Цепная дробь, построенная по оператору*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & 29 \end{pmatrix},$$

не эквивалентна никакой цепной дроби, построенной по фробениусову оператору с единичным определителем. □

В связи с этим интересен следующий вопрос: *Насколько часто встречаются цепные дроби, не отвечающие фробениусовым операторам?* Какова доля фробениусовых матриц среди $SL(3,\mathbb{Z})$ матриц с различными вещественными иррациональными собственными числами и с суммой модулей коэффициентов меньшей n, при $n \to \infty$?

В любом случае, семейство фробениусовых операторов обладает полезными свойствами, позволяющими строить сразу паруса целых семейств неэквивалентных двумерных периодических цепных дробей, что само по себе чрезвычайно полезно.

17.2 Простейшие свойства фробениусовых операторов.

Обозначим через Ω множество операторов $A_{m,n}$, все собственные значения которых вещественны, различны и иррациональны. Верно следующее утверждение.

Утверждение 17.3. *Множество Ω задаётся неравенством*

$$n^2m^2 - 4m^3 + 4n^3 - 18mn - 27 \leq 0.$$

Дополнительно необходимо исключить две перпендикулярные прямые на целочисленной плоскости: $A_{a,-a}$ и $A_{a,a+2}$, $a \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Поскольку все собственные значения оператора $A_{m,n}$ вещественны и различны, дискриминант характеристического многочлена положителен:

$$n^2m^2 - 4m^3 + 4n^3 - 18mn - 27 \leq 0.$$

Остаётся исключить операторы с рациональными собственными значениями. Поскольку первый и последний коэффициенты характеристических многочленов операторов $A_{m,n}$ равны по модулю единице, все рациональные собственные значения также равны единице по модулю. Оператор $A_{m,n}$ имеет в качестве корня 1 тогда и только тогда, когда $m = -n$. Оператор $A_{m,n}$ имеет в качестве корня -1 тогда и только тогда, когда $m = n - 2$. Утверждение доказано. (См. рис. 28.) □

Множество Ω симметрично, более того выполняется следующее утверждение.

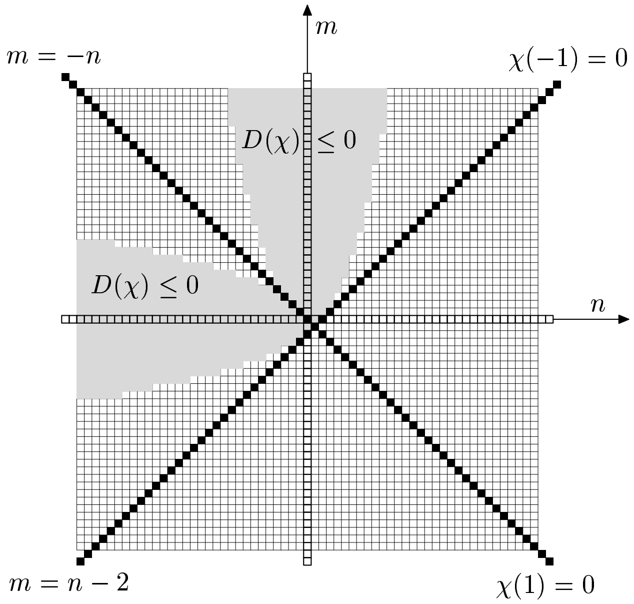

Рис. 28: Белые клетки на рисунке обозначают пары целых чисел (m, n), которым соответствуют операторы $A_{m,n}$ с различными вещественными иррациональными собственными числами. Эти пары образуют множество Ω.

Утверждение 17.4. *Двумерные цепные дроби кубических иррациональностей, построенные по операторам $A_{m,n}$ и $A_{-n,-m}$, эквивалентны.*

Доказательство. Операторы $A_{m,n}^{-1}$ и $A_{-n,-m}$ сопряжены целочисленным оператором

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Ниже мы будем рассматривать все утверждения по модулю этой симметрии.

Замечание. Утверждение 17.6 показывает, что среди периодических цепных дробей, построенных по операторам из множества Ω, встречаются эквивалентные.

17.3 Цепные дроби и характеристические многочлены соответствующих операторов.

Каждому расширению поля рациональных чисел могут соответствовать несколько различных разбиений тора. В следующем утверждении приведён пример двух операторов с одинаковыми характеристическими многочленами, цепные дроби которых различны. Очевидно, что эти операторы соответствуют одному и тому же расширению поля.

Утверждение 17.5. *Операторы* $(A_{-1,2})^3$ *и* $A_{-4,11}$ *имеют различные двумерные цепные дроби (хотя их характеристические многочлены совпадают).*

Доказательство. Цепная дробь оператора $(A_{-1,2})^3$ совпадает с цепной дробью оператора $A_{-1,2}$, поскольку любой оператор коммутирует со своими степенями. Следовательно, соответствующие паруса целочисленно-линейно эквивалентны. Все разбиения торов парусов для оператора $(A_{-1,2})^3$ состоят из двух треугольников. По теореме 18.2 разбиение тора для одного из парусов оператора $A_{-4,11}$ состоит из четырёх треугольников. □

С другой стороны, различным характеристическим многочленам операторов могут отвечать эквивалентные периодические цепные дроби.

Утверждение 17.6. *Операторы* $A^2_{0,-a}$ *и* $A_{-2a,-a^2}$ *сопряжены оператором из группы* $GL(3,\mathbb{Z})$*, а, следовательно, периодические цепные дроби (в том числе и разбиения торов их парусов), соответствующие операторам* $A_{0,-a}$ *и* $A_{-2a,-a^2}$*, эквивалентны.*

Доказательство. Операторы $A^2_{0,-a}$ и $A_{-2a,-a^2}$ сопряжены оператором B_a, где

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 \end{pmatrix}.$$

□

Замечание 17.7. Отметим, что различным кубическим расширениям поля $\mathbb{Q}$ отвечают неэквивалентные периодические цепные дроби.

18 Фундаментальные области некоторых серий операторов $A_{m,n}$

Здесь приведены примеры фундаментальных областей нескольких бесконечных серий фробениусовых операторов. В разделе рассматриваются только паруса, содержащие точку $(0,0,1)$ в своей выпуклой оболочке. Доказательство первой теоремы разобрано подробно. Доказательства всех остальных теорем этого раздела аналогичны доказательству первой теоремы. Для краткости изложения в доказательствах этих теорем выписываются лишь все необходимые целочисленно-линейные инварианты граней.

18.1 Фундаментальные области первого двупараметрического семейства: формулировка результата и выдвижение гипотезы.

Теорема 18.1. *Пусть* $m = b - a - 1$, $n = (a+2)(b+1)$ $(a, b \geq 0)$. *Рассмотрим парус оператора* $A_{m,n}$, *содержащего точку* $(0,0,1)$. *Пусть* $A = (1, 0, a+2)$, $B = (0,0,1)$, $C = (b-a-1, 1, 0)$ *и* $D = ((b+1)^2, b+1, 1)$. *Тогда следующий набор граней:* 1) *точка* A; 2) *отрезки* AB, AD *и* BD; 3) *треугольники* ABD *и* BDC *— образует одну из фундаментальных областей.*

Гомеоморфный тип замыкания фундаментальной области (при $b = 6$) изображён на рисунке 29.

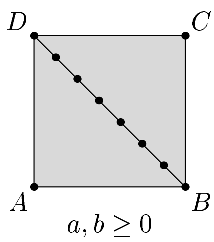

Рис. 29: Замыкание фундаментальной области одного из парусов двумерной цепной дроби оператора $A_{b-a-1,(a+2)(b+1)}$ (здесь $b = 6$).

Доказательство. Шаги 1 и 2. Пропускаем первые два шага вычислений, поскольку все вычисления этих шагов являются стандартными (см. [22]). Выпишем сразу результаты этих шагов. Следующие два оператора порождают группу $\overline{\Xi}(A)$:

$$X_{a,b}=A_{m,n}^{-2},\quad Y_{a,b}=A_{m,n}^{-1}\big(A_{m,n}^{-1}-(b+1)I\big),$$

где через I обозначен единичный элемент группы $SL(3,\mathbb{Z})$.

Шаг 3. Докажем, что точка $(0,0,1)$ является вершиной паруса. Рассмотрим плоскость, проходящую через точки A, B и D:

$$(-1-a)x+(ab+a+b+1)y+z=1.$$

Поскольку уравнение (с переменными x, y и z)

$$(-1-a)x+(ab+a+b+1)y+z=\alpha$$

не имеет целых решений при $0<\alpha<1$, целочисленное расстояние от плоскости ABD до начала координат равно единице. В пересечении этой плоскости и нашего ортанта лежат ровно три целые точки A, B и D

Шаг 4. Гипотеза о фундаментальной области представлена в формулировке теоремы.

18.2 Проверка гипотезы теоремы 18.1.

Итак, остаётся выполнить *шаг 5*: проверка гипотезы о фундаментальных областях. Для проверки гипотезы нам дополнительно понадобятся обозначения следующих точек:

$$\begin{aligned}
E&=X_{a,b}^{-1}(B)=(1,-ab-a-2b-2,\\
&\qquad\qquad a^2b^2+2a^2b+4ab^2+a^2+8ab+4b^2+5a+7b+5);\\
F&=Y_{a,b}(B)=(-a-2,1,0);\\
H&=X_{a,b}^{-1}(F)=(0,-b-1,ab^2+2ab+2b^2+a+4b+3).
\end{aligned}$$

1. (*Проверка условия* i).) Как нетрудно заметить, две двумерные грани пересекаются по ребру BD, а одномерные только по вершинам. Таким образом, все примыкания правильные, а к любой одномерной грани примыкает не более двух двумерных. Граница замыкания области — замкнутая ломаная $ABCDA$, гомеоморфная окружности.

2. (*Проверка условия* ii).) Под действием оператора $X_{a,b}$ отрезок AB переходит в отрезок DC (точка A переходит в точку D, а B в C). Под действием оператора $Y_{a,b}$ отрезок AD переходит в отрезок BC (точка A переходит в точку B, а D в C). С очевидностью, ничего лишнего не склеилось. После склейки эйлерова характеристика поверхности равна $2-3+1$, то есть нулю, а сама поверхность ориентируема.

3. (*Поиск целочисленных расстояний от начала координат до двумерных плоскостей двумерных граней.*) Найдём по формуле леммы 15.6 целочисленные расстояния до двумерных плоскостей граней ABD и BDC. Расстояние до двумерной плоскости грани ABD равно

$$\frac{1}{b+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & b^2+2b+1 \\ 0 & 0 & b+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{b+1}{b+1} = 1.$$

Расстояние до двумерной плоскости грани BDC равно

$$\frac{1}{b+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 & b^2+2b+1 & b-a-1 \\ 0 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{ab+2b+a+2}{b+1} = a+2.$$

4. (*Проверка на наличие целых точек внутри отмеченных пирамид с вершинами в начале координат и с основаниями в двумерных гранях.*) Поскольку расстояние до двумерной плоскости грани ABD равно 1, отмеченная пирамида с вершиной в начале координат и с основанием в грани ABD не содержит целых точек.

Отмеченная пирамида с вершиной в начале координат и с основанием в грани BDC целочисленно-аффинно эквивалентна отмеченной пирамиде $P^1_{b+1,a+2}$. При этом преобразование (в данном случае линейное), при котором отмеченная пирамида $P^1_{b+1,a+2}$ переходит в нашу, задаётся следующей матрицей

$$\begin{pmatrix} b+1 & b-a-1 & b-a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

По теореме 9.2 о целочисленно-линейной классификации двумерных граней отмеченная пирамида с вершиной в начале координат и с основанием в грани BDC не содержит целых точек, кроме точек основания и вершины.

5. (*Проверка выпуклости при двугранных углах.*) Рассмотрим сначала грань BD. К этой грани примыкают две двумерные грани ABD и BDC. Грань ABD лежит на плоскости $f_{ABD}(x,y,z)=0$, а грань BDC на плоскости $f_{BDC}(x,y,z)=0$, где

$$\begin{aligned} f_{ABD}(x,y,z) &= (-1-a)x+(ab+a+b+1)y+z-1; \\ f_{BDC}(x,y,z) &= x+(b+1)y-(a+2)z+(a+2). \end{aligned}$$

Для того, чтобы двугранный угол при грани BD был правильно расположенным относительно начала координат, необходимо проверить, что точки C и начало координат O лежат в разных полупространствах относительно плоскости, проходящей через точки A, B и D, а точки A и O лежат в разных полупространствах относительно плоскости, проходящей через точки C, B и D. Для этого необходимо проверить систему:

$$\begin{cases} f_{ABD}(C)\cdot f_{ABD}(O) < 0 \\ f_{BDC}(A)\cdot f_{BDC}(O) < 0 \end{cases}.$$

Система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} (a^2+3a+2)\cdot(-1) < 0 \\ (-a^2-3a-1)\cdot(a+2) < 0 \end{cases}.$$

Поскольку $a \geq 0$, неравенства системы справедливы. Следовательно, двугранный угол при одномерной грани BD правильно расположен относительно начала координат.

Рассмотрим теперь грань AB. К этой грани примыкают две двумерные грани ADB и AEB, где

$$E = X^{-1}_{a,b}(B) = (1, -ab-a-2b-2, a^2b^2+2a^2b+4ab^2+a^2+8ab+4b^2+5a+7b+5).$$

Грань ABD лежит на плоскости $f_{ABD}(x,y,z)=0$, а грань AEB на плоскости $f_{AEB}(x,y,z)=0$, где

$$\begin{aligned}
f_{ABD}(x,y,z) &= (-1-a)x+(ab+a+b+1)y+z-1;\\
f_{AEB}(x,y,z) &= (a^2+3a+2)x-(a^2b+a^2-4ab-4a-4b-3)y-(a+2)z\\
&\quad +(a+2).
\end{aligned}$$

Для того, чтобы двугранный угол при грани AB был правильно расположен относительно начала координат, необходимо проверить, лежат ли точки E и начало координат O в разных полупространствах относительно плоскости, проходящей через точки A, B и D, а точки D и O лежат ли в разных полупространствах относительно плоскости, проходящей через точки A, B и E. Для этого необходимо проверить следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{l} f_{ABD}(E)\cdot f_{ABD}(O)<0 \\ f_{ABE}(D)\cdot f_{ABE}(O)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (ab^2+2ab+2b^2+a+3b+2)\cdot(-1)<0 \\ (ab^2+2ab+2b^2+a+3b+1)\cdot(a+2)<0 \end{array}\right. .$$

Поскольку $a,b\geq 0$, неравенства системы справедливы. Следовательно, двугранный угол при одномерной грани AB правильно расположен относительно начала координат.

Рассмотрим, наконец, грань AD. Заметим, что грани AD и BC совмещаются целочисленным линейным преобразованием $Y_{a,b}$, поэтому правильность расположения двугранного угла при грани AD относительно начала координат эквивалентна правильности расположения двугранного угла при грани BC относительно начала координат. Докажем правильность расположения двугранного угла при грани BC относительно начала координат. К грани BC примыкают две двумерные грани BDC и CBF, где $F=Y_{a,b}(B)=(-a-2,1,0)$. Грань BDC лежит на плоскости $f_{BDC}(x,y,z)=0$, а грань CBF на плоскости $f_{CBF}(x,y,z)=0$, где

$$\begin{aligned}
f_{BDC}(x,y,z) &= x+(b+1)y-(a+2)z+(a+2);\\
f_{CBF}(x,y,z) &= y+z-1.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы двугранный угол при одномерной грани BC был правильно расположен относительно начала координат, необходимо проверить, лежат ли точки F и начало координат O лежат в разных полупространствах относительно плоскости, проходящей через точки B, D и C, а точки D и O лежат ли в разных полупространствах относительно плоскости, проходящей через точки B, C и F. Для этого необходимо проверить следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_{BDC}(E)\cdot f_{BDC}(O) & < & 0 \\ f_{CBF}(D)\cdot f_{CBF}(O) & < & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} (-ab-2a-2b-4)\cdot(a+2) & < & 0 \\ (b+1)\cdot(-1) & < & 0 \end{array}\right. .$$

Поскольку $a, b \geq 0$, неравенства системы справедливы. Следовательно, двумерный угол при одномерной грани BC правильно расположен относительно начала координат. Таким образом, двумерный угол при одномерной грани AD тоже правильно расположен относительно начала координат.

Итак, двумерные углы при всех одномерных гранях фундаментальной области правильно расположены относительно начала координат. Проверка условия пункта 5 окончена.

6. (*Проверка правильности 2-звёзд при вершинах.*) На нашем торе всего одна вершина. На универсальной накрывающей тора к любому прообразу этой вершины примыкает шесть одномерных и шесть двумерных граней. Рассмотрим нульмерную вершину накрывающей, которая отображается в точку B. 2-звезда при соответствующей вершине отображается в шесть одномерных граней BC, BD, BA, BE, BH и BF и в шесть двумерных граней BCD, BDA, BAE, BEH, BHF и BFC, где

$$H = X_{a,b}^{-1}(F) = (0, -b-1, ab^2 + 2ab + 2b^2 + a + 4b + 3).$$

Нужно проверить, что луч l_ε с вершиной в начале координат, проходящий через точку $P_\varepsilon = (\varepsilon, 0, 1)$, пересекает ровно одну из граней 2-звезды при маленьких положительных ε.

Проверим, пересекает ли луч l_ε треугольник BCF при малых положительных ε. Это равносильно тому, что луч l_ε лежит внутри трёхгранного угла с вершиной в начале координат O и с основанием в треугольнике BCF. Двумерная грань трёхгранного угла, содержащего точки B, C и O задаётся уравнением $f_{ABO} = 0$; двумерная грань трёхгранного угла, содержащего точки B, F и O задаётся уравнением $f_{BFO} = 0$; двумерная грань трёхгранного угла, содержащего точки C, F и O задаётся уравнением $f_{CFO} = 0$, где

$$\begin{aligned} f_{BCO}(x,y,z) &= x + (a+1-b)y; \\ f_{BFO}(x,y,z) &= x + (a+2)y; \\ f_{CFO}(x,y,z) &= z. \end{aligned}$$

Для того, чтобы луч l_ε лежал внутри трёхгранного угла с вершиной в начале координат O и с основанием в треугольнике BCF, необходимо проверить, что точки P_ε и F лежат в одном замкнутом полупространстве относительно плоскости $f_{BCO} = 0$; точки P_ε и C лежат в одном замкнутом полупространстве относительно плоскости $f_{BFO} = 0$; точки P_ε и B лежат в одном замкнутом полупространстве относительно плоскости $f_{CFO} = 0$ при малых положительных ε. Поскольку точки P_ε и B близки при малых ε, они лежат в одном замкнутом полупространстве относительно плоскости $f_{BFO} = 0$, поэтому проверять нужно лишь два условия:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_{BCO}(P_\varepsilon) \cdot f_{BCO}(F) & \geq & 0 \\ f_{BFO}(P_\varepsilon) \cdot f_{BFO}(C) & \geq & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (-b-1)\varepsilon & \geq & 0 \\ (b+1)\varepsilon & \geq & 0 \end{array} \right. .$$

Поскольку $b, \varepsilon \geq 0$ первое неравенство не выполняется. Следовательно, луч l_ε не пересекает треугольник BCF.

Проверим, пересекает ли луч l_ε треугольник BDC при малых положительных ε. По аналогичным соображениям ответ сводится к верности следующей системы неравенств при малых положительных ε:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_{BCO}(P_\varepsilon) \cdot f_{BCO}(D) & \geq & 0 \\ f_{BDO}(P_\varepsilon) \cdot f_{BDO}(C) & \geq & 0 \end{array} \right. ,$$

где

$$\begin{aligned} f_{BCO}(x,y,z) &= x + (a+1-b)y; \\ f_{BDO}(x,y,z) &= x - (b+1)y. \end{aligned}$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (b+1)(a+2)\varepsilon & \geq & 0 \\ (-a-2)\varepsilon & \geq & 0 \end{array} \right. .$$

Поскольку $a, \varepsilon \geq 0$ второе неравенство не выполняется. Следовательно, луч l_ε не пересекает треугольник BDC.

Проверим, пересекает ли луч l_ε треугольник ABD при малых положительных ε. Ответ на этот вопрос сводится к проверке верности следующей системы неравенств при малых положительных ε:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_{BDO}(P_\varepsilon) \cdot f_{BDO}(A) & \geq & 0 \\ f_{ABO}(P_\varepsilon) \cdot f_{ABO}(D) & \geq & 0 \end{array}\right.,$$

где

$$\begin{array}{rcl} f_{BDO}(x,y,z) & = & x-(b+1)y; \\ f_{ABO}(x,y,z) & = & y. \end{array}$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon & \geq & 0 \\ 0 & \geq & 0 \end{array}\right..$$

Следовательно, при малых положительных ε луч l_ε пересекает треугольник ABD, при этом точка пересечения лежит на стороне AB.

Проверим, пересекает ли луч l_ε треугольник ABE при малых положительных ε. Ответ на этот вопрос сводится к проверке верности следующей системы неравенств при малых положительных ε:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_{ABO}(P_\varepsilon) \cdot f_{ABO}(E) & \geq & 0 \\ f_{BEO}(P_\varepsilon) \cdot f_{BEO}(A) & \geq & 0 \end{array}\right.,$$

где

$$\begin{array}{rcl} f_{ABO}(x,y,z) & = & y; \\ f_{BEO}(x,y,z) & = & (ab+a+2b+2)x+y. \end{array}$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & \geq & 0 \\ (ab+a+2b+2)^2\varepsilon & \geq & 0 \end{array}\right..$$

Следовательно, при малых положительных ε луч l_ε пересекает треугольник ABE, при этом точка пересечения лежит на стороне AB.

Проверим, пересекает ли луч l_ε треугольник BEH при малых положительных ε. Ответ на этот вопрос сводится к проверке верности следующей системы неравенств при малых положительных ε:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_{BEO}(P_\varepsilon)\cdot f_{BEO}(H) & \geq & 0 \\ f_{BHO}(P_\varepsilon)\cdot f_{BHO}(E) & \geq & 0 \end{array}\right.,$$

где

$$\begin{array}{rcl} f_{BEO}(x,y,z) & = & (ab+a+2b+2)x+y; \\ f_{BHO}(x,y,z) & = & x. \end{array}$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (ab+a+2b+2)^2(-b-1)\varepsilon & \geq & 0 \\ \varepsilon & \geq & 0 \end{array}\right..$$

Поскольку $a,b,\varepsilon \geq 0$, первое неравенство не выполняется. Следовательно, луч l_ε не пересекает треугольник BEH.

Проверим, пересекает ли луч l_ε треугольник BHF при малых положительных ε. Ответ на этот вопрос сводится к проверке верности следующей системы неравенств при малых положительных ε:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_{BHO}(P_\varepsilon)\cdot f_{BHO}(F) & \geq & 0 \\ f_{BFO}(P_\varepsilon)\cdot f_{BFO}(H) & \geq & 0 \end{array}\right.,$$

где

$$\begin{array}{rcl} f_{BHO}(x,y,z) & = & x; \\ f_{BFO}(x,y,z) & = & x+(a+2)y. \end{array}$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-a-2)\varepsilon & \geq & 0 \\ (-b-1)(a+2)\varepsilon & \geq & 0 \end{array}\right..$$

Поскольку $a,b,\varepsilon \geq 0$, оба неравенства не выполняются. Следовательно, луч l_ε не пересекает треугольник BHF.

Итак, луч l_ε (при малых положительных ε) пересекает образ всей 2-звезды только по одной точке, расположенной на одномерной грани AB. Следовательно, все 2-звёзды при вершинах правильные.

7. (*Проверка принадлежности всех нульмерных граней набора D одному ортанту.*) Проверка тривиальна, поскольку в область D входит всего одна нульмерная грань.

Доказательство теоремы 18.1 окончено. □

18.3 Фундаментальные области первого однопараметрического семейства.

Теорема 18.2. *Пусть $m = -a$, $n = 2a + 3$ $(a \geq 0)$. Рассмотрим парус оператора $A_{m,n}$, содержащего точку $(0, 0, 1)$. Пусть $A = (0, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (7, 4, 2)$, $D = (-a, 1, 0)$ и $E = (3, 2, 1)$.*

Тогда при $a = 0$ следующий набор граней: 1) точка A; 2) отрезки AB, AD и BD; 3) треугольники ABD и BDC (точка E содержится в треугольнике BDC) — образует одну из фундаментальных областей.

При $a > 0$ следующий набор граней: 1) точки A и E; 2) отрезки AB, AD, BD, BE, DE и CE; 3) треугольники ABD, DEB, DEC и BED — образует одну из фундаментальных областей.

Гомеоморфный тип замыкания фундаментальных областей изображён на рисунке 30.

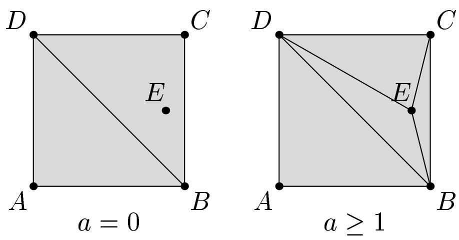

Рис. 30: Замыкания фундаментальных областей парусов двумерных цепных дробей операторов вида $A_{-a,2a+3}$.

Доказательство. Следующие два оператора порождают группу $\Xi(A)$:

$$X_a = A_{m,n}^{-2}; \quad Y_a = (2I - A_{m,n}^{-1})^{-1}.$$

Под действием оператора X_a отрезок AB переходит в отрезок DC (точка A переходит в точку D, а B в C). Под действием оператора Y_a отрезок AD переходит в отрезок BC (точка A переходит в точку B, а D в C).

Если $a = 0$, то целочисленные длины сторон AB, BC, CD и DA равны 1, а целочисленные площади треугольников ABD и BCD равны соответственно 1 и 3.
Целочисленные расстояния от начала координат до плоскостей треугольников ABD и BCD равны 2 и 1 соответственно.
Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани ABD, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^1_{1,2}$.

Если $a > 0$, то все целочисленные длины сторон и целочисленные площади всех четырёх треугольников равны 1.
Целочисленные расстояния от начала координат до плоскостей треугольников ABD, DEB, BCE и CED равны соответственно $a+2$, $a+1$, 1 и 1.
Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани ABD, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^1_{1,a+2}$. Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани DEB, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^1_{1,a+1}$.

□

18.4 Фундаментальные области второго однопараметрического семейства.

Теорема 18.3. *Пусть* $m = 2a - 5$, $n = 7a - 5$ $(a \geq 2)$. *Рассмотрим парус оператора* $A_{m,n}$, *содержащего точку* $(0, 0, 1)$. *Пусть* $A = (-14, 4, -1)$, $B = (-1, 1-a, 7a^2 - 10a + 4)$, $C = (1, 5-7a, 49a^2 - 72a + 30)$, $D = (0, 0, 1)$, $E = (-1, 0, 2a-1)$ *и* $F = (0, 2-2a, 14a^2 - 24a + 11)$. *Тогда следующий набор граней: 1) точки A, E и F; 2) отрезки AB, AD AE, DE, BE, DF, BF и CF; 3) треугольники EBA, ADE, FDC, FBC и четырёхугольник $EBFD$ — образует одну из фундаментальных областей.*

Гомеоморфный тип замыкания фундаментальной области (здесь $a = 6$) изображён на рисунке 31.

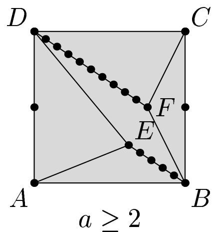

Рис. 31: Замыкание фундаментальной области одного из парусов двумерной цепной дроби оператора $A_{2a-5,7a-5}$ (при $a = 6$).

Доказательство. Следующие два оператора порождают группу $\overline{\Xi}(A)$:

$$X_a = 2A_{m,n}^{-1} + 7I; \quad Y_a = A_{m,n}^2.$$

Под действием оператора X_a отрезок AB переходит в отрезок DC (точка A переходит в точку D, а B в C). Под действием оператора Y_a отрезок AD переходит в отрезок BC (точка A переходит в точку B, а D в C).

Целочисленные длины сторон AB, AD AE, DE, BE, DF, BF и CF; равны соответственно 1, 2, 1, 1, $a-1$, $2a-2$, 1, 1.

Целочисленные площади двумерных граней EBA, ADE, FDC, FBC и $EBFD$ равны соответственно $a-1$, 2, $2a-2$, 2, $3a-3$.

Целочисленные расстояния от начала координат до плоскостей двумерных граней EBA, ADE, FDC, FBC и $EBFD$ равны соответственно 7, 2, 1, 1 и 1.

Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани EBA, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R_{a-1,7}^3$. Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани ADE, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R_{2,2}^1$. $\square$

18.5 Фундаментальные области третьего однопараметрического семейства.

Теорема 18.4. *Пусть* $m = a-1$, $n = 3+2a$ $(a \geq 0)$. *Рассмотрим парус оператора* $A_{m,n}$, *содержащего точку* $(0,0,1)$. *Пусть* $A = (1, -2a-3, 4a^2+11a+10)$, $B = (0,0,1)$, $C = (-4a-11, 2a+5, -a-2)$, $D = (-a-2, 0, a^2+3a+3)$, $E = (-2,1,0)$, $F = (-2a-3, a+1, 1)$ *и* $G = (0, -1-a, 2a^2+5a+4)$. *Тогда следующий набор граней: 1) точки* A, E *и* F; *2) отрезки* AB, AG, BG, GD, DF, EF *и* CF; *3) треугольники* ABG, DFC, ECF *и пятиугольник* $BEFDG$ *— образует одну из фундаментальных областей.*

Гомеоморфный тип замыкания фундаментальной области (здесь $a = 4$) изображён на рисунке 32.

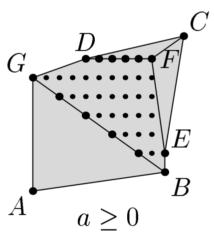

Рис. 32: Замыкание фундаментальной области одного из парусов двумерной цепной дроби оператора $A_{a-1,3+2a}$ (при $a = 4$).

Доказательство. Следующие два оператора порождают группу $\overline{\Xi}(A)$:

$$X_a = (2I + A_{m,n}^{-1})^{-2}; \quad Y_a = A_{m,n}^{-2}.$$

Под действием оператора X_a отрезок AB переходит в отрезок DC (точка A переходит в точку D, а точка B в точку C). Под действием оператора Y_a ломаная AGD переходит в ломаную BEC (точка A переходит в точку B, точка G переходит в точку E, а точка D в точку C).

Целочисленные длины сторон AB, AG, BG, GD, DF, EF и CF равны соответственно 1, 1, $a+1$, 1, $a+1$, 1, 1.

Во внутренности пятиугольника $BEFDG$ лежит $(a+1)^2$ целочисленная точка

вида: $(-j, -i+j, (2a+3)i-(a+2)j+1)$, где $1 \le i \le a+1$, $1 \le j \le 2i-1$.
Целочисленные площади двумерных граней ABG, DFC, ECF и $BEFDG$ равны соответственно $a+1$, $a+1$, 1, $2a^2+6a+5$.
Целочисленные расстояния от начала координат до плоскостей двумерных граней ABG, DFC, ECF и $BEFDG$ равны соответственно 1, 2, $a+3$ и 1.
Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани DFC, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^1_{a+1,2}$. Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани ECF, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^1_{1,a+3}$. $\square$

18.6 Фундаментальные области второго двупараметрического семейства.

Теорема 18.5. *Пусть* $m = -(a+2)(b+2)+3$, $n = (a+2)(b+3)-3$ $(a \ge 0, b \ge 0)$. *Рассмотрим парус оператора* $A_{m,n}$, *содержащего точку* $(0,0,1)$. *Пусть* $A = (b^2+3b+3, b^2+2b-a+1, a^2b+3a^2+4ab+b^2+6a+5b+4)$, $B = (b^2+5b+6, b^2+4b+4, b^2+3b+3)$, $C = (-ab-2a-2b-1, 1, 0)$, $D = (0,0,1)$, $E = (b+4, b+3, b+2)$, $F = (b+2, b+1, a+b+2)$ *и* $G = (1,1,1)$.

Тогда при $a = 0$ *следующий набор граней: 1) точки* A, E *и* G; *2) отрезки* AB, AF, FD, BF, DG, GE, *и* CG; *3) треугольники* ABF, CGD, CEG *и пятиугольник* $BFDGE$ — *образует одну из фундаментальных областей.*

При $a > 0$ *следующий набор граней: 1) точки* A, E *и* G; *2) отрезки* AB, AF, FD, BF, DG, GE, CG *и* BD; *3) треугольники* ABF, CGD, CEG, BDF *и четырёхугольник* $BDGE$ — *образует одну из фундаментальных областей.*

Гомеоморфные типы замыканий фундаментальных областей (здесь $b = 5$) изображены на рисунке 33.

Доказательство. Следующие два оператора порождают группу $\Xi(A)$:

$$X_{a,b} = ((b+3)I - (b+2)A^{-1}_{m,n})A^{-2}_{m,n}; \quad Y_{a,b} = A^{-2}_{m,n}.$$

Под действием оператора $X_{a,b}$ отрезок AB переходит в отрезок DC (точка A переходит в точку D, а точка B в точку C). Под действием оператора $Y_{a,b}$

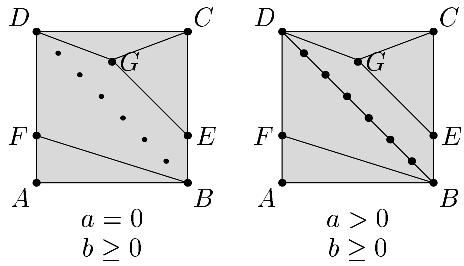

Рис. 33: Замыкания фундаментальных областей парусов двумерных цепных дробей операторов $A_{-(a+2)(b+2)+3,(a+2)(b+3)-3}$ (здесь $b = 5$).

ломаная AFD переходит в ломаную BEC (точка A переходит в точку B, точка F переходит в точку E, а точка D в точку C).

Рассмотрим сначала случай $a = 0$.

Целочисленные длины всех семи сторон равны единице.

Внутри пятиугольника $BFDGE$ лежит $b+1$ целочисленные точки, все они расположены на отрезке BD.

Целочисленные площади двумерных граней ABF, CGD, CEG и $BFDGE$ равны соответственно 1, 1, 1 и $2b + 5$.

Целочисленные расстояния от начала координат до плоскостей двумерных граней ABF, CGD, CEG и $BFDGE$ равны соответственно 1, $2b + 2$, $2b + 3$ и 1.

Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани CGD, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^1_{1,2b+2}$. Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани CEG, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^2_{1,2b+3}$ (при $b = 0$ отмеченная пирамида $R^2_{1,3}$ эквивалентна отмеченной пирамиде $R^1_{1,3}$ из списка классификации).

Рассмотрим сначала случай $a > 0$.

Целочисленная длина BD равна $b + 2$, а длины всех остальных семи сторон равны единице.

Целочисленные площади двумерных граней ABF, CGD, CEG, BDF и $BDGE$ равны соответственно 1, 1, 1, $b + 2$ и $b + 3$.

Целочисленные расстояния от начала координат до плоскостей двумерных граней ABF, CGD, CEG, BDF и $BDGE$ равны соответственно 1, $ab+2a+2b+2$,

$ab + 2a + 2b + 3$, 1 и 1.

Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани CGD, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^{1}_{1,ab+2a+2b+2}$. Отмеченная пирамида, соответствующая треугольной грани CEG, целочисленно-линейно эквивалентна отмеченной пирамиде $R^{a+2}_{1,ab+2a+2b+3}$ (при $b = 0$ отмеченная пирамида $R^{a+2}_{1,2a+3}$ эквивалентна отмеченной пирамиде $R^{a+1}_{1,2a+3}$ из списка классификации). □

18.7 О построении парусов новых серий двумерных цепных дробей.

Отметим, что во всех предложениях образующие группы $\Xi(A_{m,n})$ выражаются через операторы $A_{m,n}$ и $\alpha I + \beta A^{-1}_{m,n}$, где α и β ненулевые целые числа.

Оказывается, в общем случае верно следующее утверждение: определители матриц операторов $\alpha I + \beta A^{-1}_{m,n}$ и $\alpha I + \beta A^{-1}_{m+\beta,n+\alpha}$ равны. В частности, если определитель матрицы оператора $\alpha I + \beta A^{-1}_{m,n}$ по модулю равен единице, то и определитель матрицы оператора $\alpha I + \beta A^{-1}_{m+k\beta,n+k\alpha}$ по модулю равен единице для произвольного целого k.

Для того, чтобы оператор $\alpha I + \beta A^{-1}_{m,n}$ принадлежал группе $SL(3, \mathbb{Z})$ необходимо следующее: определитель матрицы оператора $\alpha I + \beta A^{-1}_{m,n}$ по модулю должен быть равным единице (α и β ненулевые целые числа). Прямые вычисления показывают, что определитель матрицы оператора $\alpha I + \beta A^{-1}_{m,n}$ по модулю равен единице, тогда и только тогда, когда

$$|\alpha^3 + \alpha^2\beta m - \alpha\beta^2 n + \beta^3| = 1.$$

Таким образом, чтобы узнать, какие последовательности описанного выше вида бывают, нужно найти все пары ненулевых целых чисел α и β, для которых существуют такие целые числа m и n, чтобы выполнялось последнее тождество.

Утверждение 18.6. *Пусть α и β целые ненулевые числа. Целые числа m и n, при которых выполняется тождество $|\alpha^3 + \alpha^2\beta m - \alpha\beta^2 n + \beta^3| = 1$, существуют в том и только в том случае, когда $\alpha^3 - 1$ нацело делится на β и $\beta^3 - 1$*

нацело делится на α, или α^3+1 нацело делится на β и β^3+1 нацело делится на α.

Обозначим идею доказательства. После раскрытия модуля приходится рассмотреть два случая. Рассмотрим первый случай.

Равенство $\alpha^3+\alpha^2\beta m-\alpha\beta^2 n+\beta^3=1$ равносильно равенству

$$\alpha m-\beta n=\frac{1-\alpha^3-\beta^3}{\alpha\beta},$$

поскольку $\alpha,\beta\neq 0$. Если α^3-1 нацело делится на β и β^3-1 нацело делится на α, то справа целое число, а, кроме того, числа α и β взаимно-просты. Следовательно, m и n существуют. Обратно, если такие m и n существуют, то слева целое число, и поэтому $1-\alpha^3$ делится на β, и $1-\beta^3$ делится на α.

Случай $\alpha^3+\alpha^2\beta m-\alpha\beta^2 n+\beta^3=-1$ разбирается аналогично.

По-видимому, и в других последовательностях операторов $A_{m_0+\beta s,n_0+\alpha s}$, где $s\in\mathbb{N}$, (помимо перечисленных в предложениях 18.1—18.5) фундаментальные области имеют много общего (например, количество многоугольников и их типы).

Перечислим пары (α,β) с $10\geq\alpha\geq\beta\geq -10$, удовлетворяющие условию утверждения 18.6 (помимо описанных в теоремах 18.1—18.5): $(3,2)$, $(7,-2)$, $(9,-2)$, $(9,2)$, $(7,-4)$, $(9,4)$, $(9,5)$, $(9,7)$.

В заключение приведём таблицу, в клетках которой располагаются построенные в этой работе триангуляции парусов, выпуклая оболочка которых содержит точку с координатами $(0,0,1)$, см. рис. 34. В клетке, расположенной на пересечении строчки с номером n и столбика с номером m, изображена триангуляция тора паруса двумерной цепной дроби кубической иррациональности, построенной по оператору $A_{m,n}$. При этом, если один из корней характеристического многочлена оператора равен 1 или -1, помечаем соответствующую клетку значком $*$ или $\#$ соответственно. Светло-серым закрашены клетки, соответствующие операторам, характеристические многочлены которых имеют пару комплексно-сопряжённых корней.

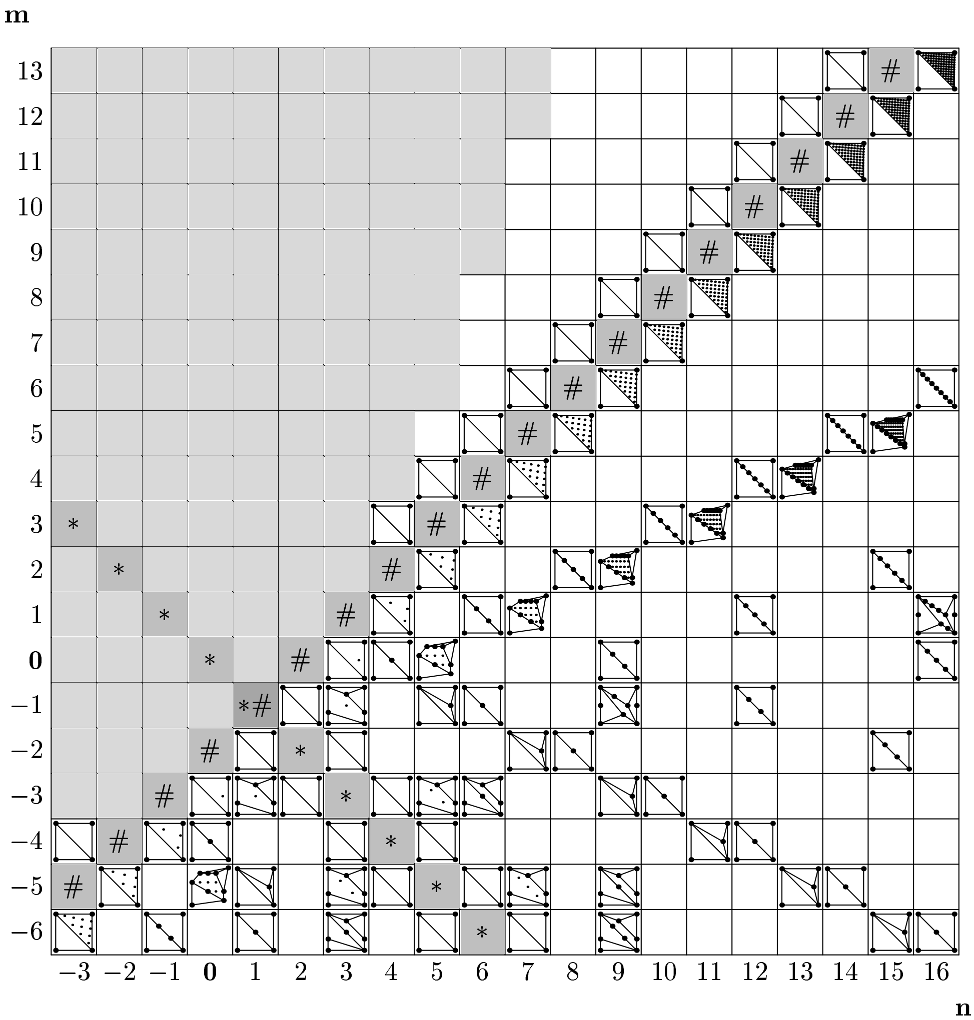

Рис. 34: Триангуляции торов для операторов $A_{m,n}$.

Список литературы

[1] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса-Кузъмина*, Препринт, Владивосток, Дальнаука, (2002).

[2] М. О. Авдеева, *О статистиках неполных частных конечных цепных дробей*, Функц. ан. и прил., т. 38(2), с.1–11, (2004).

[3] V. I. Arnold, *A-Graded Algebras and Continued fractions*, Commun. Pure Appl. Math., 142(1989), pp. 993–1000.

[4] V. Arnold, M. Kontsevich, A. Zorich (Eds) *Amer. Math. Soc. Transl.*, v. 197(2), (1999).

[5] V. I. Arnold, *Preface*, Amer. Math. Soc. Transl., v. 197(2), (1999), pp. ix–xii.

[6] В. И. Арнольд, *Цепные дроби*, М, Московский Центр Непрерывного Математического образования (2002).

[7] *Задачи Арнольда*, Фазис, М., (2000).

[8] В. И. Арнольд, *Многомерные цепные дроби*, Регулярная и хаотическая механика, т. 3(3), с. 10–17, (1998).

[9] В. И. Арнольд, *Статистика целочисленных выпуклых многоугольников*, Функц. ан. и прил., т.14(1980), вып. 2, с. 1–3.

[10] O. R. Beaver, T. Garrity, *A two-dimensional Minkowski* $?(x)$ *function*, Journal of Number Theory, vol. 107, (2004), pp. 105–134.

[11] L. Berstein *The Jacobi-Perron Algorithm: Its Theory and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 207(1971), Springer.

[12] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, 3 изд., М, (1985).

[13] K. Briggs, *Klein polyhedra*, http://www.btexact.com/people/briggsk2/klein-polyhedra.html, (2002).

[14] А. Д. Брюно, В. И. Парусников, *Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта*, Матем. заметки, 56(4), (1994), с. 9–27.

[15] А. Д. Брюно, В. И. Парусников, *Сравнение разных обобщений цепных дробей*, Матем. заметки, 61(3), (1997), с. 339–348.

[16] А. Д. Брюно, *Правильное обобщение цепной дроби*, ИПМ им. Келдыша, препринт 86, Москва (2003).

[17] Г. Ф. Вороной, *Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей*, Собр. соч. в 3-х томах АН УССР, т.1, (1952), с. 197-391.

[18] A. Weil, *Number theory, an approach through history*, Birkhäuser, Boston, (1984).

[19] О. Н. Герман, *Паруса и базисы Гильберта*, Труды МИРАН, декабрь 2002.

[20] О. Н. Герман, *Паруса и норменные минимумы решёток*, принято к печати в Матем. сборник (2004).

[21] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, *Теория иррациональностей третьей степени*, М.-Л.: Ак. наук СССР (1940).

[22] H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Graduate texts in mathematics. Berlin, Springer, (1973).

[23] T. Garrity, *On periodic Sequences for Algebraic Numbers*, Journal of Number Theory, vol. 88, (2001), pp. 86–103.

[24] O. N. Karpenkov, *On examples of two-dimensional periodic continued fractions*, preprint, Cahiers du Ceremade, UMR 7534, Université Paris-Dauphine, (2004).

[25] O. N. Karpenkov, *On some new approach to constructing periodic continued fractions*, preprint n 12, Laboratoire de Mathématiques Discrètes du C.N.R.S., Luminy (2004),
http://iml.univ-mrs.fr/editions/preprint2004/files/karpenkov.pdf.

[26] F. Klein, *Ueber einegeometrische Auffassung der gewöhnliche Kettenbruchentwicklung*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl., 3, (1895), pp. 357-359.

[27] F. Klein, *Sur une représentation géométrique de développement en fraction continue ordinaire*, Nouv. Ann. Math. 15(3), (1896), pp. 327–331.

[28] M. L. Kontsevich and Yu. M. Suhov, *Statistics of Klein Polyhedra and Multidimensional Continued Fractions*, Amer. Math. Soc. Transl., v. 197(2), (1999) pp. 9–27.

[29] С. В. Конягин, К. А. Севастьянов, *Оценка числа вершин выпуклого целочисленного многогранника через его объём*, Функц. ан. и прил., т.18(1984), вып. 1, с. 13–15.

[30] E. I. Korkina, *The simplest 2-dimensional continued fraction*, International Geometrical Colloquium, Moscow 1993.

[31] E. I. Korkina, *La périodicité des fractions continues multidimensionelles*, C. R. Ac. Sci. Paris, v. 319(1994), pp. 777–780.

[32] Е. И. Коркина, *Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры.*, Труды Мат. ин-та им В. А. Стеклова, т. 209(1995), с. 143–166.

[33] E. I. Korkina, *The simplest 2-dimensional continued fraction.*, J. Math. Sci., 82(5), (1996), pp. 3680–3685.

[34] G. Lachaud, *Polyèdre d'Arnold et voile d'un cône simplicial: analogues du thèoreme de Lagrange*, C. R. Ac. Sci. Paris, v. 317(1993), pp. 711–716.

[35] G. Lachaud, *Voiles et Polyèdres de Klein*, preprint n 95-22, Laboratoire de Mathématiques Discrètes du C.N.R.S., Luminy (1995).

[36] G. Lachaud, *Sails and Klein Polyhedra*, Contemp. Math., v. 210(1998), pp. 373-385.

[37] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, Jr., and L. Lovász, *Factoring Polynomials with Rational Coefficients*, Mathematische Ann., v.216(1982) pp. 515–534.

[38] H. Minkowski, *Généralisation de le théorie des fractions continues*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. ser III, vol. 13, (1896), pp. 41–60.

[39] A. K. Mittal, A. K. Gupta, *Bifurcating Continued Fractions*, (2000), http://www.arxiv.org/ftp/math/papers/0002/0002227.pdf

[40] A. K. Mittal, A. K. Gupta, *Bifurcating Continued Fractions II*, (2000), http://www.arxiv.org/ftp/math/papers/0008/0008060.pdf

[41] Ж.-О. Муссафир, Паруса и базисы Гильберта., Функ. ан. и прил., т. 34(2000), вып. 2, с. 43-49.

[42] J.-O. Moussafir, Voiles et Polyédres de Klein: Geometrie, Algorithmes et Statistiques, docteur en sciences thése, Université Paris IX - Dauphine, (2000) see also at http://www.ceremade.dauphine.fr/~msfr/

[43] R. Okazaki, *On an effective determination of a Shintani's decomposition of the cone* $\mathbb{R}^n_+$, J. Math. Kyoto Univ., v33-4(1993), pp. 1057–1070.

[44] В. И. Парусников, *Многогранники Клейна для третьей экстремальной кубической формы*, ИПМ им. Келдыша, препринт 137, Москва (1995).

[45] В. И. Парусников, *Многогранники Клейна для пятой экстремальной кубической формы*, ИПМ им. Келдыша, препринт 69, Москва (1998).

[46] В. И. Парусников, *Многогранники Клейна для седьмой экстремальной кубической формы*, ИПМ им. Келдыша, препринт 79, Москва (1999).

[47] В. И. Парусников, *Многогранники Клейна для четвёртой экстремальной кубической формы*, Матем. Заметки, 67(1), (2000), с. 110–128.

[48] O. Perron, *Grundlagen für eine theorie des Jacobischen kettenbruchalgorithmus*, Math. Ann., vol. 64(1907), pp. 1–76.

[49] T. Fujita, S. Ito, M. Keane и M. Ohtsuki, *On almost everywhere exponential convergence of the modified Jacobi-Perron algorithm*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., vol. 13(1993), pp. 319–334.

[50] Л. Д. Пустыльников, *Обобщённые цепные дроби и эргодическая теория*, Успехи Мат. Наук, т. 58, вып. 1(349), (2003), с. 113–164.

[51] Б. Ф. Скубенко, *Минимумы разложимой кубической формы от трёх переменных*, Зап. научных семинаров ЛОМИ, т. 168 (1988), Аналитическая теория чисел и теория функций, 9, Ленинград, "Наука".

[52] Б. Ф. Скубенко, *Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geq 3$*, Зап. научных семинаров ЛОМИ, т. 183 (1990), Модулярные функции и квадратичные формы, 1, Ленинград, "Наука".

[53] E. Thomas and A. T. Vasques, *On the resolution of cusp singularities and the Shintani decomposition in totally real cubic number fields*, Math. Ann. v.247(1980), pp. 1–20.

[54] G. K. White, *Lattice tetrahedra*, Canadian J. of Math. 16(1964), pp. 389–396.

[55] D. M. Hardcastle и K. Khanin, *On almost everywhere strong convergence of multi-dimensional continued fraction algorithms*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., vol. 20(2000), no 6, pp. 1711–1733.

[56] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, М.: ФИЗМАТГИЗ, 3 изд., (1961).

[57] H. Tsuchihashi, *Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities*, Tohoku Math. Journ. v. 35(1983), pp. 176–193.

[58] F. Schweiger, *Invariant measures for maps of continued fraction type*, J. Num. Theory, vol. 39(1991), pp. 162–174.

[59] F. Schweiger, *Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory*, Oxford University Press (1995).

[60] F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fractions*, Oxford University Press (2000).

[61] T. Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at nonpositive integers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, vol. 23(1976), pp. 393–417.

[62] C. Hermite, *Letter to C. D. J. Jacobi*, J. Reine Angew. Math. vol. 40, (1839), p. 286.

[63] C. G. J. Jacobi, *Allgemeine theorie der kettenbruchähnlichen algjrithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird*, J. Reine Angew. Math. vol. 69, (1868), pp. 29–64.

Работы автора по теме диссертации.

[64] О. Н. Карпенков, *О триангуляциях торов, связанных с двумерными цепными дробями кубических иррациональностей*, Функц. ан. и прил., т.38(2004), вып. 2, с. 28–37.

[65] О. Н. Карпенков, *О двумерных цепных дробях целочисленных гиперболических матриц с небольшой нормой,* Успехи Мат. Наук, т. 59(2004), вып. 5, с. 149–150.