РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи

УДК 512.761+515.164.15

Казарян Максим Эдуардович

Характеристические классы в теории особенностей

Специальность
01.01.04 – геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2003

Оглавление

Введение

Теоремы глобальной теории особенностей связывают топологические инварианты многообразий, расслоений и прочих глобальных топологических объектов с геометрией особенностей тех или иных дифференциально-геометрических структур: отображений, сечений расслоений, взаимного расположения подмногообразий и других. Классическим примером служит теорема Хопфа, связывающая эйлерову характеристику многообразия с особенностями заданного на нем векторного поля. К другим классическим результатам, известным еще с XIX века, относятся, например, теорема Римана-Гурвица, выражающая род римановой поверхности через порядки ветвлений, формулы Плюккера для количества точек перегиба и точек самопересечения плоской кривой и двойственной к ней, а также формулы Сальмона для количества плоскостей, имеющих заданный тип касаний с поверхностью общего положения в трехмерном пространстве.

За последующие полтора века появилось огромное количество новых результатов, которые можно отнести к глобальной теории особенностей. На всем протяжении развития теории топологические и геометрические методы сопутствовали алгебраическим. Топологические идеи давали пищу для интуиции и служили мотивировкой для формулировки новых теорем и гипотез, в то время как алгебраические методы давали их строгое обоснование и перенос на случай произвольного основного поля. С развитием теории пересечений и появлением мощных методов избыточных пересечений, позволяющих иметь дело с произвольными особыми схемами, влияние топологических идей стало заметно ослабевать. В результате появились целые поколения алгебраических геометров, рассуждающих исключительно в терминах пучков, схем и категорий. Одна из целей данной диссертации — показать, что топологические идеи далеко еще не исчерпаны.

Обычно задачи исчислительной геометрии формулируются следующим образом. Имеется пространство параметров (модулей) геометрических объектов, и требуется определить класс когомологий, двойственный циклу на этом пространстве, определяемому теми или иными условиями вырождений. В большом количестве случаев циклы вырождений можно интерпретировать как циклы особенностей (или мультиособенностей) заданного типа для некоторого гладкого отображения $f : M \to N$.

Например, пусть задано гладкое проективное многообразие $V \subset \mathbb{C}P^n$, и мы изучаем особенности его пересечения со всевозможными k-мерными подпространствами. Тогда в качестве N можно взять грассманиан $G_{k+1,n+1}$ всех k-мерных проективных подпространств в $\mathbb{C}P^n$, в качестве M — многообразие инцидентности, образованное парами вида (точка многообразия V, проходящее через эту точку k-мерное подпространство), а в качестве f — естественную проекцию.

Если построенное отображение f удовлетворяет некоторому условию общности положения, то оно имеет лишь стандартные вырождения, локальное строение которых хорошо изучено в теории особенностей. Естественно ожидать, что классы когомологий, двойственные циклам этих вырождений, имеют универсальное выражение в терминах глобальных топологических инвариантов, связанных с многообразиями M, N и отображением f, и не зависят от конкретных геометрических задач, к которым полученные формулы применяются. Сформулированный принцип лежит в основе всех результатов этой диссертации. Он дает единый подход к большому ряду задач исчислительной геометрии, не имеющих, на первый взгляд, ничего общего. Кроме того, его применение существенно облегчает задачу нахождения универсальных формул, и, тем самым, решение поставленных исчислительных задач.

Изучая циклы локальных особенностей гладкого отображения $f : M \to N$ вещественных многообразий, Р. Том предположил, что класс $\mathbb{Z}_2$-когомологий, двойственный циклу $\Sigma \subset M$ произвольной *локальной* особенности, должен выражаться как универсальный многочлен (называемый теперь *многочленом Тома*) от классов Штифеля-Уитни $\omega_i(M)$,

$f^*(\omega_j(N))$ отображаемых многообразий [81]. Вычислению многочленов Тома для различных конкретных типов особенностей было посвящено большое количество работ 70–80-х годов (см. [67, 68, 75, 20, 31, 1, 2], а также обзор [7]). Обычно для нахождения этих многочленов использовалось подходящее разрешение $\widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ цикла особенностей. Класс, двойственный гладкому многообразию $\widetilde{\Sigma}$ в объемлющем пространстве разрешения, вычислить бывает значительно проще. Для нахождения искомого выражения для класса, двойственного Σ, применяется гомоморфизм Гизина проекции пространства разрешения на M.

Приведенный метод одинаково успешно может быть применим в комплексной ситуации голоморфных отображений и их особенностей. В этом случае класс, двойственный циклу особенностей, является целочисленным и выражается как универсальный многочлен от классов Чженя $c_i(M)$, $f^*(c_j(N))$. Одним из следствий вычислений является тот факт, что для большого класса особенностей многочлен Тома, в действительности, выражается не через сами классы Чженя многообразий, а через их определенные комбинации, а именно, через *относительные классы Чженя* $c_i(f) = c_i(f^*TN - TM)$, определенные формальным равенством

$$1 + c_1(f) + c_2(f) + \dots = \frac{1 + f^*c_1(N) + f^*c_2(N) + \dots}{1 + c_1(M) + c_2(M) + \dots}$$

(соответственно, через относительные классы Штифеля-Уитни $\omega_i(f) = \omega_i(f^*TN - TM)$ в вещественном случае).

Параллельно теории характеристических классов особенностей общих гладких отображений имеется теория, в которой рассматриваются так называемые *лежандровы* (вещественные или комплексные) отображения. Лежандровы отображения образуют специальный класс отображений многообразий соседних размерностей, типичные особенности которых отличаются от типичных особенностей общих отображений. Классификация лагранжевых и лежандровых особенностей принадлежит В. И. Арнольду и В. М. Закалюкину. Лежандровы особенности естественно возникают в задачах, связанных с изолированными особенностями гиперповерхностей.

Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей *вещественных* отображений изучены В. А. Васильевым в книге [83]. В этой книге, в частности, вычислены многочлены Тома лагранжевых особенностей до коразмерности 6 (за исключением особенности A_7). Предложенный метод не позволил завершить вычисления для особенности A_7, а также обобщить эти вычисления на лежандров случай. Все эти вычисления в более общей ситуации комплексных лагранжевых и лежандровых отображений завершены в данной диссертации. Как и в случае обычных отображений, классы когомологий, двойственные циклам особенностей лежандровых отображений, выражаются в виде универсальных многочленов через классы Чженя многообразий, расслоений и т.п., участвующих в отображении. Оказывается, многочлены Тома лежандровых отображений выражаются, в действительности, через определенные комбинации классов Чженя, называемые лежандровыми характеристическими классами, связанными с задачей.

Кольцо $\mathcal{L}$ универсальных *лежандровых характеристических классов* определяется как факторкольцо кольца многочленов от образующих $u, a_1, a_2, \ldots$, $\deg u = 1$, $\deg a_i = i$, по идеалу соотношений, порожденному однородными компонентами равенства

$$(1 + a_1 + a_2 + \ldots)\left(1 - \frac{a_1}{1+u} + \frac{a_2}{(1+u)^2} - \ldots\right) = 1. \tag{5}$$

Универсальные лежандровы характеристические классы задают классы когомологий на всяком голоморфном лежандровом многообразии, являющемся областью определения лежандрова отображения. Таким образом, многочлены Тома лежандровых особенностей — элементы кольца $\mathcal{L}$.

Вычисление многочленов Тома при помощи метода разрешений особенностей иллюстрируется в п. 3.1 главы 3 на примере вычисления *классов Портеуса-Тома* $[\Sigma^r]$, исторически — одних из первых вычисленных многочленов Тома. Цикл Σ^r состоит из тех точек многообразия M области определения отображения, в которых ядро производной имеет размерность не менее r. Двойственный этому циклу класс когомологий задается многочленом Шура, равным определителю подходящей матрицы, составленной из относительных классов Чженя (или Штифеля-Уитни в вещественной ситуации),

$$[\Sigma^r] = \det \|c_{r+\ell-i+j}(f)\|_{i,j=1..r}, \quad \ell = \dim N - \dim M.$$

Приведенная формула, как и ее доказательство, хорошо известны. Тем не менее мы поместили в диссертацию это доказательство, но в форме, несколько отличной от стандартной. Причина, по которой эти классические результаты включены в текст диссертации, заключается в том, что в такой форме они переносятся почти дословно на случай аналогов классов Портеуса-Тома для симметричных, а также лагранжевых и лежандровых вырождений — так называемых *классов Арнольда-Фукса*. Различные формулы для этих классов были известны и ранее (см. [35, 38, 69, 29, 30]). Автором диссертации получена новая формула, через так называемые Q-многочлены Шура — лагранжевы аналоги обычных многочленов Шура, в которых роль определителей играют пфаффианы подходящих кососимметрических матриц. Эти результаты представлены в п. 3.2. Особенно важным является тот факт, что классы Арнольда-Фукса выражаются через универсальные лежандровы классы, что и демонстрирует новая формула.

Несомненно, факт существования многочлена Тома является универсальным и справедлив в абстрактной ситуации алгебраических многообразий для произвольного алгебраически замкнутого основного поля и для колец Чжоу вместо когомологий. Тем не менее, доказательство существования многочлена Тома для комплексных отображений, которое использовало бы лишь алгебраические методы теории пересечений, до сих пор не опубликовано.

Топологическое доказательство существования многочлена Тома приведено в главе 2. Мы строим так называемое *классифицирующее пространство особенностей*, конечномерные аппроксимации которого являются алгебраическими многообразиями, имеющими топологию грассманиана. В качестве такой аппроксимации можно взять пространство K-струй ростков m-мерных подмногообразий в начале координат аффинного пространства $\mathbb{C}^n$, где $n \gg m \gg 0$. Классифицирующее пространство имеет богатую геометрию. На нем имеется разбиение, страты которого находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности особенностей отображений. Страт, отвечающий данной особенности α, состоит из K-струй подмногообразий, проекция которых на фиксированное координатное подпространство $\mathbb{C}^{m+\ell} \subset \mathbb{C}^n$ имеет в начале координат особенность α. Далее мы *определяем* многочлен Тома особенности α как класс когомологий, двойственный замыканию соответствующего страта в классифицирующем пространстве и выраженный через мультипликативные образующие когомологий грассманиана. Для всякого голоморфного отображения $f : M \to N$ мы строим классифицирующее отображение $\varkappa$ из M в классифицирующее пространство. Это отображение индуцирует как классы когомологий, двойственные циклам особенностей, так и характеристические классы Чженя. Существование классифицирующего отображения доказывает универсальность многочленов Тома.

Локальные особенности разбиения классифицирующего пространства отражают особенности разбиения пространства ростков отображений на классы эквивалентности, в то время как глобально страты этого разбиения несут в себе информацию о топологии классифицирующего пространства. Страт, отвечающий данной особенности α, имеет топологический тип классифицирующего пространства BG_α, где G_α — группа Ли, тесно связанная с особенностью α, а именно, ее *группа симметрий*, определяемая как максимальная компактная подгруппа в группе автоморфизмов ростка отображений, заданного «нормальной формой» особенности α. Можно сказать, что *классифицирующее пространство особенностей склеено из классифицирующих пространств групп симметрий всевозможных особенностей.*

Гомологическую информацию о топологии этой склейки удобно формулировать при помощи характеристической спектральной последовательности, определенной в п. 2.7. Рассмотрим на классифицирующем пространстве возрастающую фильтрацию открытыми подпространствами, у которой p-й член является объединением всех стратов вещественной коразмерности не выше p. Ассоциированная с этой фильтрацией спектральная последовательность сходится к когомологиям классифицирующего пространства и называется *характеристической спектральной последовательностью.* Эта спектральная последовательность выглядит особенно просто в комплексных классификационных задачах, когда вся топология сосредоточена в четных размерностях и высшие дифференциалы отсутствуют. Предположим, что выбранная классификация особенностей является дискретной для классов, коразмерность которых не превышает заданного числа $p_{\max}$. Тогда в размерностях, не превышающих $p_{\max}$, спектральная последовательность стабилизируется в начальном члене и приводит к следующему расщеплению когомологий классифицирующего пространства:

$$H^*(BU) = \bigoplus_{\alpha} H^{*+\operatorname{codim}\alpha}(BG_\alpha).$$

Из этого расщепления следуют интересные численные соотношения, описывающие количества классов особенностей различных типов для каждой коразмерности. Эти соотношения бывает полезно учитывать в процессе проведения классификации.

Конструкция классифицирующего пространства сводит задачу вычисления многочлена Тома к задаче вычисления класса когомологий, двойственного конкретному алгебраическому подмногообразию конкретного алгебраического многообразия. Это подмногообразие, как правило, особое. С ростом коразмерности особенности находить подходящее разрешение становится все труднее, и метод разрешения наталкивается на серьезные технические трудности. Сравнительно недавно Р. Римани предложил другой, косвенный, метод вычисления многочленов Тома, который использует теорему об их существовании. Идея метода очень проста. Для определения многочлена достаточно вычислить его коэффициенты. Для вычисления коэффициентов достаточно рассмотреть ряд примеров отображений, в которых как классы Чженя, так и классы, двойственные циклам особенностей, можно вычислить явно. Всякий такой пример дает линейные соотношения на коэффициенты многочлена Тома, и при удачном выборе примеров эти соотношения определяют многочлен полностью. Метод Римани оказался чрезвычайно эффективным и позволил получить многочлены Тома практически для всех расклассифицированных особенностей. Подробности этого метода изложены в п. 3.3. Основные его идеи заимствованы из [72, 73], однако в диссертации мы представляем метод в значительно переработанном виде. Кроме того, мы приводим несколько важных утверждений, существенных для использования этого метода, которые принадлежат автору диссертации.

Следует отметить, что мотивировка метода Римани является топологической и основана на «обобщенной конструкции Понтрягина-Тома» для классифицирующего пространства особенностей. Идея этой конструкции, использованной А. Сючем в ряде аналогичных задач [79], состоит в склеивании классифицирующего пространства из классифицирующих пространств групп симметрий различных особенностей, см. [74]. Тот факт, что пространство, полученное в результате этого склеивания, эквивалентно описанному выше и имеет столь простую топологию, не был отмечен в [74].

Вычислению многочленов Тома лежандровых особенностей невысоких коразмерностей посвящена глава 4. Эти вычисления проводятся двумя независимыми способами. В пп. 4.1–4.3 мы проводим их при помощи классического метода разрешения с использованием формул п. 3.2 для производных классов Арнольда-Фукса. Эти методы позволяют вычислить полностью многочлены Тома только для части списка особенностей. Для нахождения многочленов Тома оставшихся особенностей мы используем дополнительные соображения, основанные на так называемых *экспонентах примыкания* особенностей соседних коразмерностей. Эти экспоненты примыкания являются комплексными аналогами коэффициентов инцидентности, используемых в вещественном случае, и вычисляются из детального анализа примыканий особенностей. Альтернативный, косвенный, метод Римани для вычисления многочленов Тома, использующий факт их существования, описан в п. 4.4. В п. 4.5 мы приводим различные следствия полученных формул для лагранжевых особенностей, а также для вещественных лагранжевых и лежандровых особенностей. Для случая вещественных лагранжевых особенностей полученные выражения совпадают с выражениями, полученными В.Васильевым [83].

Несмотря на то, что существование многочленов Тома известно в течение уже почти полувека, до недавнего времени не было известно аналогичного априорного выражения для классов, двойственных циклам *мультиособенностей*. Такое выражение впервые было получено автором. Его исследованию посвящены главы 5–7 диссертации.

Теория мультиособенностей имеет богатую историю. К числу ранних результатов можно отнести упомянутые выше теоремы Плюккера и Сальмона. Для случая общих отображений одним из первых результатов является формула для класса цикла двойных точек

$$m_2 = f^*f_*1 - c_\ell(f), \qquad \ell = \dim N - \dim M.$$

В разной степени общности (вначале — для гладких отображений при помощи топологических соображений, затем — для морфизмов произвольных особых схем с использованием формул избыточного пересечения) эту формулу получили Тодд, Уитни, Ронга, Лаксов, Хольм, Джонсон, Фултон (см. исторические замечания в [28, 51]).

Следующий результат — формула Герберта-Ронга для циклов кратных точек иммерсий,

$$m_r = f^*n_{r-1} - c_\ell(f)\, m_{r-1}.$$

Эта формула также была вначале получена из топологических соображений, и лишь затем передоказана при помощи формул избыточного пересечения.

Для отображений, допускающих особенности, общие формулы впервые получил Клейман [51, 52]. Как заметил Кац [39], формулу Клеймана для кратных точек можно записать в виде

$$m_r = f^* n_{r-1} + \sum_{i=1}^{r-1} p_i(c(f))\, m_{r-i}, \tag{6}$$

где p_i — универсальные многочлены от относительных классов Чженя $c_i(f)$, которые не зависят от r и вычисляются по определенному алгоритму. Для применимости метода, при помощи которого эта формула была получена, необходимо предположить, что отображение f не имеет особенностей коранга, большего 1 (или что этими особенностями можно пренебречь по соображениям размерностей). Сравнительно простую замкнутую формулу для этих многочленов мы приводим в главе 7.

Римани показал [73], что наличие особенностей коранга 2 приводит к нарушению равенства (6) в первом же случае, когда это возможно по соображениям размерностей (при $\dim N - \dim M = 1$, $r = 6$). Однако, как заметил Римани, равенство (6) остается справедливым для общих отображений при $r \leqslant 7$, если несколько подправить многочлены p_6, p_7. Поправочные слагаемые имеют носитель на многообразии Σ^2 особенностей коранга, большего или равного 2, и потому они обращаются в ноль для всякого отображения коранга 1. Одно из следствий теории мультиособенностей, изложенной в этой диссертации, заключается в том, что для подходящего выбора многочленов p_i формула (6) остается справедливой для произвольных общих отображений, более того, многочлены p_i определяются этим условием однозначно.

Результаты Клеймана были перенесены на случай произвольных мультиособенностей отображений коранга 1 в работе Коллей [21]. Приведенный в этой работе алгоритм дает решение задачи нахождения формулы для произвольной мультиособенности, но получаемые в результате формулы имеют весьма громоздкий вид. В более удобном замкнутом виде эти формулы приведены в главе 7. Как и формулы Клеймана, эти формулы применимы только для отображений коранга 1, однако даже в этом случае они нашли важные применения в исчислительной геометрии [22].

В наиболее общем виде формула для мультиособенностей, применимая к общим голоморфным отображениям без ограничений на сложность встречающихся особенностей (при выполнении условия общности отображения), была получена автором. Для формулировки этой формулы уточним понятие цикла мультиособенностей.

Мультиособенности нумеруются наборами локальных особенностей $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. С каждым типом мультиособенностей $\underline{\alpha}$ можно связать соответствующий ему цикл в многообразии M области определения отображения. Этот цикл параметризует такие точки $x_1 \in M$, что существуют дополнительные попарно различные точки $x_2, \dots, x_r \in M$, имеющие тот же образ $f(x_i) = f(x_1)$, и такие, что f имеет особенность α_i в x_i при $i = 1, \dots, r$. Обозначим через $\overline{m}_{\underline{\alpha}} \in H^*(M)$, $\overline{n}_{\underline{\alpha}} \in H^*(N)$ классы когомологий, двойственные замыканию этого цикла, и его (приведенного) образа соответственно. Этот цикл отображается на свой образ с кратностью k, равной числу вхождений особенности α_1 в набор $\underline{\alpha}$. Отсюда вытекает очевидное соотношение

$$\overline{n}_{\underline{\alpha}} = k\, f_* \overline{m}_{\underline{\alpha}},$$

где f_* — гомоморфизм прямого образа, или гомоморфизм Гизина, который определен, если отображение f собственно. Если все классы α_i набора являются классами иммерсии (обозначаемыми нами через A_0), то соответствующие классы

$$\overline{m}_r = \overline{m}_{\underbrace{(A_0, \dots, A_0)}_{r}}, \qquad \overline{n}_r = \overline{n}_{\underbrace{(A_0, \dots, A_0)}_{r}}$$

называются классами r-кратных точек в прообразе M и образе N соответственно.

Классы $\overline{m}_{\underline{\alpha}}$, $\overline{n}_{\underline{\alpha}}$ часто бывает удобно рассматривать с их естественными кратностями, и мы полагаем

$$m_{\underline{\alpha}} = \#\operatorname{Aut}(\alpha_2, \dots, \alpha_r)\, \overline{m}_{\underline{\alpha}}, \qquad n_{\underline{\alpha}} = f_* m_{\underline{\alpha}} = \#\operatorname{Aut}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)\, \overline{n}_{\underline{\alpha}},$$

где $\#\operatorname{Aut}$ — число элементов в группы симметрий соответствующего мультииндекса.

Основной результат теории мультиособенностей (теорема 5.1.1) заключается в том, что для всякого типа мультиособенностей $\underline{\alpha}$ класс $m_{\underline{\alpha}}$ задается универсальным полиномиальным выражением, в котором участвуют относительные классы Чженя $c_i(f) = c_i(f^*TN - TM)$, а также *классы Ландвебера-Новикова*, получаемые из всевозможных мономов от относительных классов Чженя применением гомоморфизма f^*f_*.

Более того, в уточненной формулировке теоремы 5.2.2 утверждается, что это полиномиальное выражение для класса $m_{\underline{\alpha}}$ имеет довольно специальный вид. Для всякого набора особенностей $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ существует универсальный многочлен $R_{\underline{\alpha}}$ от классов $c_i = c_i(f)$, называемый нами *остаточным многочленом мультиособенности* $\underline{\alpha}$, такой, что класс мультиособенности $m_{\underline{\alpha}}$ выражается следующим образом через остаточные многочлены всевозможных поднаборов данного набора $\underline{\alpha}$:

$$m_{\underline{\alpha}} = \sum_{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k = \{1,\dots,r\}} R_{\underline{\alpha}_{J_1}} \, f^*f_* R_{\underline{\alpha}_{J_2}} \dots f^*f_* R_{\underline{\alpha}_{J_k}}, \tag{7}$$

где суммирование производится по всевозможным разбиениям множества $\{1, \dots, r\}$ в несвязное объединение непустых неупорядоченных подмножеств $\{1, \dots, r\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k$, $k \geqslant 1$, и где подмножество, содержащее элемент $1 \in \{1, \dots, r\}$, обозначается через J_1.

Для вычисления остаточных многочленов можно применить метод Римани использования симметрий. Дополнительные соображения, позволяющие приспособить этот метод для исследования мультиособенностей, обсуждаются в п. 5.4. Полные таблицы всех вычисленных остаточных многочленов занимают много страниц многострочных формул, их можно найти на личной странице автора в интернете [49]. Для мультиособенностей невысоких коразмерностей (и для $\ell = 0, 1$) эти многочлены приведены в таблицах п. 5.4.

Приведенное в п. 5.5 топологическое доказательство теоремы 5.1.1 основано на глубокой связи теории мультиособенностей с теорией унитарных кобордизмов и когомологических операций. Задача характеризации голоморфного отображения комплексных многообразий в терминах группы комплексных кобордизмов не новая. В статье В.М. Бухштабера [17] приведено решение этой задачи при помощи явной формулы для характера Чженя-Дольда. На связь кобордизмов с особенностями обратил внимание В.И.Арнольд [5]. Идеи Арнольда развивались затем В. А. Васильевым [83] и автором. В настоящей работе мы завершаем исследование циклов мультиособенностей общего отображения. Мы переносим конструкцию классифицирующего пространства локальных особенностей на случай мультиособенностей. Полученное классифицирующее пространство мультиособенностей разбито на страты, отвечающие различным типам мультиособенностям, аналогично тому, как классифицирующее пространство локальных особенностей разбито на страты, отвечающие различным типам локальных особенностей. Отсюда следует, что характеристический класс всякой мультиособенности задается классом когомологий классифицирующего пространства. Таким образом, для получения универсальной формулы для классов мультиособенностей необходимо описать кольцо когомологий классифицирующего пространства.

Конструкция для классифицирующего пространства мультиособенностей совпадает, по существу, с классической конструкцией Тома классифицирующего пространства кобордизмов. Для случая голоморфных отображений и унитарных кобордизмов это пространство является итерированным пространством петель $\Omega^{2m}MU(m+\ell)$, $\to\infty$, где $MU(m)$ — пространство Тома классифицирующего векторного расслоения ранга m над комплексным грассманианом $BU(m) = G_{m,\infty}$. Хотя в когомологиях пространства $\Omega^{2m}MU(m+\ell)$ кручение отсутствует, кольцевая структура устроена довольно сложно [71]. К счастью, в случае рациональных коэффициентов все тривиализуется и кольцо когомологий классифицирующего пространства оказывается свободно мультипликативно пророжденным классами Ландвебера-Новикова. Эти вычисления и приводят к формулировке теоремы 5.1.1.

В п. 5.6 обсуждаются также различные подходы к доказательству теорем 5.1.1 и 5.2.2 при помощи методов теории пересечений. Мы уточняем определение схемы мультиособенностей, приводим точную формулировку условия общности отображения и даем некоторые гипотетические обобщения теоремы 5.2.2. К настоящему времени реализовать этот подход и доказать гипотезы п. 5.6 удалось только в частном случае отображений коранга 1, рассмотренных в главе 7.

В главе 6 формулируется универсальная формула для мультиособенностей гиперповерхностей и для мультиособенностей лежандровых отображений. Эта формула аналогична (7) за исключением того, что остаточные многочлены $R_{\underline{\alpha}}$ в этом случае — универсальные лежандровы характеристические классы. Непосредственные применения этой формулы дают сотни новых результатов об исчислении особенностей дивизоров в общих линейных системах на гладких многообразиях. В задаче исчисления особенностей кривых на поверхностях наши вычисления согласуются с известными результатами П. Ле Барца [60], С. Дж. Коллей [21, 22], В.А. Вайнзенкера [82], Л. Готтше [32], Л. Капорасо и Дж. Харриса [19], С. Л. Клеймана и Р. Пьен [55, 56], а также многих других авторов, внесших вклад в решение этих задач. В частности, наша формула дает обоснование гипотезы Готтше о числе плоских нодальных кривых, а также различных ее обобщений и вариаций, принадлежащих Клейману и Пьен.

Другое приложение полученной формулы — исчисление особенностей касаний гиперповерхностей в $\mathbb{C}P^n$ с проективными подпространствами. Эти результаты обобщают на случай $n > 3$ классические формулы Плюккера ($n = 2$) и Сальмона ($n = 3$). Простейший вопрос, ответ на который до сих пор, по-видимому, не был известен, — это вопрос о числе гиперплоскостей в $\mathbb{C}P^4$, касающихся в 4 точках заданной общей гиперповерхности степени d. Согласно нашим вычислениям, при $d = 3$ это число равно 495. Частично полученные результаты представлены в таблицах п. 6.3. Полный список имеющихся соотношений занимает десятки страниц и имеется в [49].

Глава 7 посвящена исследованию особенностей и мультиособенностей отображений коранга 1, то есть голоморфных отображений $f : M \to N$ фиксированной относительной размерности $\ell = \dim N - \dim M \geqslant 0$, у которых ядро производной в каждой точке не более, чем одномерно. Такие отображения обладают рядом замечательных свойств, не имеющих места для общих отображений. Во-первых, классификация особенностей коранга 1 дискретна, то есть не имеет модулей. Имеется единственная одноиндексная серия особенностей, имеющих обозначение $\Sigma^{1_k} = \Sigma^{1,\dots,1}$ (k единиц), или A_k. Коразмерность такой особенности равна $k\,(\ell+1)$. Во-вторых, при выполнении условий общности положения замыкание каждой особенности Σ^{1_k} гладко. Приведенные свойства заметно упрощают исследование таких отображений и позволяют провести все вычисления до конца. Таким образом, отображения коранга 1 являются удачной моделью теории особенностей, на которой можно испытывать всевозможные общие методы и подходы.

Вследствие простоты предмета, характеристическим классам, связанным с особенностями коранга 1, посвящено много работ, см., например, [67, 51, 52, 21, 70, 58, 1]. Несмотря на многочисленные исследования, состояние предмета вряд ли можно назвать завершенным. Первое обстоятельство, обращающее на себя внимание, заключается в том, что многочлены Тома, приведенные в разных работах, различаются. Это неудивительно, поскольку классы Чженя отображения коранга 1 удовлетворяют дополнительным соотношениям, так что по модулю этих соотношений различные ответы совпадают. Существование дополнительных соотношений хорошо известно. Например, многочлен Тома всякой особенности коранга, большего 1, лежит в кольце соотношений. Тем не менее, полного описания соотношений в кольце характеристических классов отображений коранга 1 ранее, по видимому, не было получено. В действительности, все соотношения на относительные классы Чженя $c_i = c_i(f)$ вытекают из следующих:

$$c_i c_j = c_{i'} c_{j'}, \quad i+j = i'+j', \quad i,j,i',j' \geqslant \ell+1.$$

Эти соотношения удобно записать, полагая $c_k = t^{k-1-\ell}c_{\ell+1}$ при $k > \ell+1$. Исходный многочлен после такой подстановки восстанавливается неоднозначно, а именно, с точностью до приведенных соотношений. Таким образом, всякий характеристический класс отображений коранга 1 можно записать как многочлен от переменных $c_1, \dots, c_{\ell+1}, t$. Переменной t может не соответствовать никакой глобально заданный класс когомологий, и выражение $t^k c_{\ell+1}$ нужно рассматривать формально как обозначение для класса $c_{\ell+1+k}$. Однако при ограничении на многообразие критических точек класс t можно рассматривать как корректно заданный класс $t = -c_1(\varkappa)$, где $\varkappa = \ker df$ — линейное расслоение ядер производной отображения.

В приведенных обозначениях многочлен Тома особенности Σ^{1_k} обозначается также через R_{k+1} и имеет следующее простое выражение

$$[\Sigma^{1_k}] = R_{k+1} = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k, \qquad \sigma_k = c_{\ell+1} + (k-1)t\sum_{i=0}^{\ell}(kt)^i c_{\ell-i}.$$

Для характеристических классов мультиособенностей также имеется замкнутая формула. Для сокращения записи обозначим через $(a_1, \dots, a_r)$ мультиособенность, соответствующую набору локальных особенностей $\Sigma^{1_{a_1-1}}, \dots, \Sigma^{1_{a_r-1}}$. Тогда для классов мультиособенностей $m_{\underline{\alpha}}$ отображений коранга 1 выполняется соотношение (7), причем остаточный многочлен мультиособенности $\underline{\alpha}$ выражается следующей явной формулой через приведенные выше многочлены Тома для локальных особенностей:

$$R_{a_1,\dots,a_r} = \frac{1}{t^{r-1}} \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} (-1)^{r-k}\,(k-1)!\;\sigma_0^{k-1}\,R_{|\underline{\alpha}_{J_1}|}\dots R_{|\underline{\alpha}_{J_1}|}, \tag{8}$$

где $|\underline{\alpha}_J| = \sum_{i\in J} a_i$. Все необходимые соотношения для получения этих формул содержатся неявно в работах [51, 52, 21], однако стремление к максимальной общности несколько усложнило изложение и не позволило авторам довести вычисления до конца.

Доказательство соотношения (8) использует следующее наблюдение. Рассмотрим многообразие $M(a_1, \dots, a_r) \subset M^r$, которое параметризует наборы точек $(x_1, \dots, x_r)$, такие, что $f(x_1) = \dots = f(x_r)$ и f имеет особенность $\Sigma^{1_{a_i-1}}$ в точке x_i. Это многообразие гладкое для общего отображения f коранга 1 (этот факт отмечен еще в [62]). Кроме того, рассмотрим естественную проекцию

$$f^{\underline{\alpha}} : M(\underline{\alpha}, 1) \to M(\underline{\alpha}),$$

задаваемую забыванием последней точки набора $(x_1, \dots, x_{r+1}) \in M(\underline{\alpha}, 1) = M(a_1, \dots, a_r, 1)$. Мы утверждаем, что *отображение* $f^{\underline{\alpha}}$ *является общим отображением коранга* 1 (той же относительной размерности ℓ), если таковым является f. Частный случай этого утверждения, когда все a_i равны 1, известен как *принцип итерации* [51]. Отображение $f^{\underline{\alpha}}$ называется *производным отображением.* Используя это утверждение, можно циклы более сложных мультиособенностей исходного отображения f интерпретировать как циклы более простых мультиособенностей различных его производных отображений. Вариант формулы избыточного пересечения, принадлежащий Клейману [51], позволяет связать характеристические классы производных отображений с характеристическими классами исходного отображения f, и это дает возможность вычислить классы циклов мультиособенностей по индукции.

Диссертация организована следующим образом. Глава 1 является вспомогательной, в ней приводится ряд стандартных сведений из топологии и теории особенностей. В частности, мы приводим основные соотношения для классов Чженя комплексных векторных расслоений, которые постоянно используются в тексте диссертации без дополнительных ссылок.

Глава 2 посвящена доказательству существования многочлена Тома. В пунктах 2.1-2.4 и 2.6 мы приводим различные варианты этой теоремы: для гладких отображений, для голоморфных отображений; обсуждаем условия трансверсальности, обеспечивающие применимость этих теорем. Хотя сами результаты являются классическим, концепция классифицирующего пространства особенностей, использованная в приведенном в доказательстве п. 2.5, принадлежит автору диссертации. В п. 2.7 приводится определение характеристической спектральной последовательности и теорема о расщеплении когомологий классифицирующего пространства комплексных особенностей.

Методы вычисления многочленов Тома обсуждаются в главе 3. В п. 3.1 мы при помощи метода разрешения особенностей доказываем детерминантные формулы для классов Портеуса-Тома и их производных. В п. 3.2 проводятся аналогичные вычисления классов Арнольда-Фукса лагранжевых и лежандровых отображений. В п. 3.3 изложен метод Римани использования симметрий. Применимость изложенных методов для нахождения многочленов Тома вещественных отображений обсуждается в п. 3.4.

В главе 4 строится теория характеристических классов голоморфных лежандровых отображений. Доказывается существование многочленов Тома и вычисляются многочлены Тома лежандровых особенностей невысоких коразмерностей. Для сравнения методов эти вычисления проводятся в пп. 4.1–4.4 двумя независимыми методами — методом разрешения особенностей и методом использования симметрий. В п. 4.5 мы приводим различные следствия полученных формул для лагранжевых особенностей, а также для вещественных лагранжевых и лежандровых особенностей.

Глава 5 посвящена переносу теории многочленов Тома на случай мультиособенностей. В п. 5.1 формулируется теорема 5.1.1 о существовании универсальных выражений для классов мультиособенностей. В п. 5.2 приводится уточненное выражение для этих классов через остаточные многочлены. Остаточные многочлены мультиособенностей малых коразмерностей вычислены в п. 5.4. Связь с теорией кобордизмов и доказательство теоремы 5.1.1 приведены в п. 5.5. Различные гипотетические уточнения и обобщения теорем 5.1.1 и 5.2.2 обсуждаются в п. 5.5.

В главе 6 теория характеристических классов мультиособенностей переносится на случай мультиособенностей лежандровых отображений и изолированных мультиособенностей гиперповерхностей. Основная теорема формулируется в п. 6.1. Остаточные многочлены особенностей малых коразмерностей вычислены в п. 6.2. В п. 6.2 приводятся многочисленные приложения для исчислительной геометрии.

Глава 7 посвящена исследованию характеристических классов особенностей отображений коранга 1. В п. 7.1 приведено локальное строение многообразий мультиособенностей особенностей и сформулирован принцип итерации. Соотношения между классами Чженя отображения коранга 1 обсуждаются в п. 7.2. Многочлены Тома локальных особенностей и остаточные многочлены мультиособенностей вычисляются в пп. 7.3–7.8. В вычислениях используется формула Клеймана избыточного пересечения. Эта формула в форме, удобной для наших вычислений, приводится в п. 7.5. Следствия для отображений коранга 1 отрицательной относительной размерности и лежандровых отображений сформулированы в п. 7.9.

Наконец, в заключении мы формулируем некоторые выводы о применимости методов, разработанных в этой диссертации, к задачам исчислительной геометрии.

Ввиду ограниченности объема диссертации в нее включены, в основном, только результаты, касающиеся глобальной топологии особенностей комплексных голоморфных отображений. Тесно связаны с темой диссертации, но не включены в нее такие результаты автора, как определение и исследование дифференциалов в характеристической спектральной последовательности вещественных особенностей [41, 42]; вычисление характеристической спектральной последовательности вещественных лагранжевых и лежандровых особенностей [40, 41]; построение теории характеристических классов глобальных особенностей функций на окружности, которая обнаружила интересные связи с теорией циклических гомологий [43, 44, 45]. Все эти результаты автора изложены также в обзоре [46].

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность В. И. Арнольду, открывшему ему изумительный мир теории особенностей и вдохновлявшему его исследования в течение многих лет. Создание теории, представленной в работе, было бы невозможно без сотрудничества с математиками самых различных специальностей —

теории особенностей, алгебраической геометрии, топологии. Я особенно благодарен В. М. Бухштаберу, В. А. Васильеву, С. Л. Клейману, Вал. С. Куликову, С. К. Ландо, Д. Монду, Р. Пьен, В. Д. Седых, Д. ван Стратену, общение с которыми чрезвычайно помогло мне в работе над диссертацией.

Глава 1

Сводка общих результатов из теории характеристических классов и теории особенностей

В этой главе мы собрали некоторые стандартные сведения из разных разделов топологии и алгебры, которые постоянно используются в тексте, иногда без дополнительных ссылок на них.

1.1 Некоторые сведения о топологии многообразий

На всяком компактном ориентированном многообразии M имеет место изоморфизм двойственности Пуанкаре

$$H^k(M, \mathbb{Z}) \simeq H_{n-k}(M), \qquad n = \dim M.$$

Этот изоморфизм является каноническим и имеет место с учетом кручения. Если M некомпактно, то изоморфизм также имеет место, если вместо обычных гомологий рассматривать гомологии с замкнутыми носителями, то есть обычные гомологии одноточечной компактификации. Кроме того, если многообразие M неориентировано, то гомологии нужно рассматривать с коэффициентами в локально постоянной системе коэффициентов O_M, локально изоморфной $\mathbb{Z}$ и меняющей знак при обходе вдоль петель, обращающих ориентацию. Таким образом, в более общей формулировке изоморфизм Пуанкаре имеет вид

$$H^k(M, A) \simeq H^{\mathrm{cl}}_{n-k}(M, O_M \otimes A), \qquad n = \dim M,$$

где A — произвольная система коэффициентов.

Если $f : M \to N$ — гладкое отображение, то, помимо обычного гомоморфизма f^* когомологий, действующего в «обратную сторону» имеется гомоморфизм Гизина, или гомоморфизм прямого образа, действующий в «непривычную» сторону

$$f_* : H^k(M) \to H^{k+\ell}(N), \qquad \ell = \dim N - \dim M.$$

Этот гомоморфизм определяется как композиция двойственности Пуанкаре на M, обычного гомоморфизма f_* в гомологиях и двойственности Пуанкаре на N. Чтобы это определение имело смысл, необходимо, чтобы многообразия M и N были ориентированы (относительно выбранного кольца коэффициентов), либо необходимо рассматривать когомологии с коэффициентами в подходящих локально постоянных системах. Кроме того, если M некомпактно, для корректности определения f_* необходимо, чтобы f было *собственным*. Случай, когда M некомпактно, встречается довольно часто. Например, гомоморфизм f_* определен, если f — вложение замкнутого подмногообразия $M \subset N$.

Гомоморфизм Гизина обладает многими хорошими функториальными свойствами, в частности, имеет место равенство $(fg)_* = f_* g_*$ для композиции собственных отображений. Поскольку гомоморфизм f_* сдвигает градуировку, он не может быть мультипликативным. Вместо этого выполняется следующее важное свойство, называемое *формулой проекции*:

$$f_*(f^*a) \frown b = a \frown f_*b, \quad a \in H^*(N), \quad b \in H^*(M).$$

Иными словами, *гомоморфизм f_* является гомоморфизмом $H^*(N)$-модулей*, где действие $H^*(N)$ на $H^*(M)$ определяется посредством f^*.

Рассматривая $H^*(M)$ как $H^*(N)$-модуль, мы будем часто опускать обозначение f^* и вместо $(f^*a) \frown b$ писать $a \frown b$ или просто $a\,b \in H^*(M)$, где $a \in H^*(N)$. *Указание на f^* часто опускается также при обозначении векторных расслоений и их характеристических классов.* Если некоторый класс когомологий задан как полиномиальная комбинация характеристических классов различных векторных расслоений, то необходимо сперва ограничить эти расслоения на рассматриваемое многообразие, а потом уже вычислять значение класса. Как показывает опыт, использование этого соглашения редко приводит к неоднозначной интерпретации, но существенно упрощает обозначения и облегчает понимание.

Вычислить гомоморфизм f_* в один шаг обычно не удается, и для его вычисления отображение f раскладывается в композицию $f = \pi\, i$, где i — вложение, а π — локально тривиальное расслоение.

Если $f = i : M \hookrightarrow N$ — вложение коразмерности ℓ, то $i_*1 = [M] \in H^\ell(N)$ — класс когомологий, двойственный самому подмногообразию $M \subset N$ (подмногообразие должно быть коориентированным, либо нужно рассматривать когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). Из формулы проекции вытекает, что i_* действует умножением на $i_*(1)$ на тех классах, которые являются ограничением на M классов когомологий, заданных на N.

В частности, если $i : M \to E$ — вложение нулевого сечения в тотальное пространство векторного расслоения ранга ℓ, то двойственный нулевому сечению класс $e(E) = i_*(1)$ называется классом Эйлера расслоения, и гомоморфизм $i_* : H^k(M) \to H^{k+\ell}(E) = H^{k+\ell}(M)$ задается умножением на $e(E)$ (расслоение должно быть ориентированным, либо нужно рассматривать когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). В частности, для произвольного вложения композиция $i^*i_* : H^*(M) \to H^*(M)$ действует умножением на класс Эйлера нормального расслоения.

В случае, когда $f = \pi$ — проекция на базу локально тривиального расслоения $\pi : W \to B$ с компактными слоями, для вычисления гомоморфизма π_* часто удается воспользоваться следующим утверждением.

1.1.1. Предложение. *Предположим, что когомологии слоя $F = \pi^{-1}(\mathrm{pt})$ расслоения π не имеют кручения (относительно выбранной группы коэффициентов). Пусть, более того, имеется набор классов $e_1 = 1, e_2, \ldots, e_d \in H^*(W)$, заданных на тотальном пространстве расслоения, ограничение которых на слой задает свободный базис когомологий слоя. Тогда этот же набор классов является свободной системой образующих $H^*(B)$-модуля $H^*(W)$,*

$$H^*(W) = H^*(B)\, e_1 \oplus \cdots \oplus H^*(B)\, e_d.$$

Правая часть равенства описывает начальный член спектральной последовательности расслоения, и предложение утверждает, что при сделанных предположениях спектральная последовательность вырождается в начальном члене. Действительно, на классах $e_i \in E_2^{0,*}$ все дифференциалы равны нулю, поскольку эти классы глобально заданы на W, а на остальных классах равенство всех дифференциалов вытекает из мультипликативности спектральной последовательности. $\square$

Если слой расслоения π — гладкое компактное многообразие (ориентированное относительно выбранного кольца коэффициентов), то в силу двойственности Пуанкаре среди классов e_i имеется единственный класс максимальной степени, равной размерности F. Пусть это будет класс e_d. Тогда в обозначениях предложения гомоморфизм Гизина π_* задается проекцией на слагаемое $H^*(B)\, e_d \simeq H^*(B)$, что сразу следует из формулы проекции. Заметим также, что гомоморфизм π^* обратного образа инъективен и задается вложением слагаемого $H^*(B)\, e_1$.

Примерами расслоений, удовлетворяющих условию предложения, служат различные грассмановы и флаговые расслоения, ассоциированные с данным векторным расслоением, см. п 1.3.5.

Справедлив также относительный вариант утверждения предложения, когда имеется пара, состоящая из расслоения и его подрасслоения. Частным случаем этого утверждения является *изоморфизм Тома*

$$H^k(B) \xrightarrow{\simeq} H^{k+\ell}(\tau E), \quad a \mapsto a\, u,$$

где $E \to B$ — ориентированное векторное расслоение ранга ℓ, τE — его пространство Тома, получающееся стягиванием дополнения трубчатой окрестности нулевого сечения в тотальном пространстве E, и $u \in H^\ell(\tau E)$ — класс Тома, определяемый тем, что при вложении слоя $S^\ell \to \tau E$ этот класс переходит в образующую группы $H^\ell(S^\ell) = \mathbb{Z}$. Этот класс однозначно определяется выбором ориентации расслоения. В общем случае, когда расслоение не обязательно ориентировано, аналогичная конструкция приводит к изоморфизму

$$H^k(B, O_E \otimes A) \simeq H^{k+\ell}(\tau E, A),$$

где A — произвольная абелева группа коэффициентов, и O_E — локально изоморфная $\mathbb{Z}$ система коэффициентов, которая изменяет знак при обходе вдоль путей, обращающих ориентацию слоев расслоения E.

Пусть на гладком n-мерном многообразии M задана фильтрация $X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset M$ замкнутыми подпространствами, такая, что $X^k \setminus X^{k-1}$ — гладкое (возможно, незамкнутое) подмногообразие размерности k. Тогда эта фильтрация может быть использована для изучения топологии M. Когомологическая спектральная последовательность, построенная по этой фильтрации, расположена в IV четверти и не очень удобна для вычисления когомологий малой размерности: в эти когомологии вклад дают все страты. Вместо этого удобнее рассмотреть другую фильтрацию X *открытыми* подмножествами

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = M\,,\ X_i = M \setminus X^{n-i-1}\,.$$

Чтобы соответствующая этой фильтрации спектральная последовательность была корректно определена, необходимо наложить на страты X^i условия регулярности примыкания. Построенная таким образом спектральная последовательность расположена в I четверти и более пригодна для вычисления когомологий в малых размерностях: на их вычисление влияют лишь страты X^i малой коразмерности.

Отметим, что изоморфизм Тома устанавливает изоморфизм членов $E_1^{p,*}$ спектральной последовательности с когомологиями гладкого подмногообразия $X_p \setminus X_{p-1}$ коразмерности p с коэффициентами в локально постоянной системе коэффициентов, определяемой ориентацией нормального расслоения этого подмногообразия.

1.2 Характеристические классы G-расслоений

Всякое локально тривиальное расслоение $\pi : E \to B$ со слоем F склеивается из тривиализаций $\pi^{-1}U_\alpha = F \times U_\alpha$, заданных на областях $U_\alpha \subset B$ некоторого покрытия $B = \bigcap U_\alpha$ при помощи функций склейки, или функций перехода $g_{\alpha\beta}$, заданных на пересечении областей $U_\alpha \cap U_\beta$ и принимающих значение в группе диффеоморфизмов (или гомеоморфизмов) слоя. Говорят, что структурная группа расслоения редуцирована к некоторой подгруппе $G \subset \mathrm{Diff}(F)$, если все функции склейки принимают значение в G. Возможность редукции структурной группы к G следует рассматривать не как свойство исходного расслоения, а скорее как дополнительную структуру на нем. Например, ленту Мебиуса можно рассматривать как нетривиальное расслоение над S^1 со слоем $\mathbb{R}$ и структурной группой $\mathbb{Z}_2$. Прямой суммой двух таких расслоений является расслоение над S^1 со слоем $\mathbb{R}^2$, которое также нетривиально как расслоение со структурной группой $\mathbb{Z}_2$, однако тривиально как топологическое локально тривиальное расслоение: тривиализация этого расслоения использует диффеоморфизмы слоя, которые не лежат в $\mathbb{Z}_2$.

После того как функции перехода со значениями в G фиксированы, можно забыть о том, что группа G действует в F диффеоморфизмами, и рассмотреть расслоение с теми же функциями перехода, но с другим действием G на другом пространстве. В частности, если в качестве этого действия используется действие группы на себе правыми сдвигами, то такое расслоение называется главным G-расслоением. В другой терминологии, главное G-расслоение — это пространство E, заданное вместе со свободным действием на нем группы G. В таком случае базой этого расслоения служит пространство орбит (действие называется свободным, если преобразование, задаваемое всяким элементом $g \neq e \in G$, не имеет неподвижных точек). Таким образом, категории расслоений со структурной группой G и слоем F с заданным на нем действием группы естественно изоморфны между собой для различных F и изоморфны категории главных G-расслоений. В частности, теория характеристических классов (см. ниже) для таких расслоений определяется группой G и не зависит от выбора F.

1.2.1. Теорема. *Существует универсальное главное G-расслоение $EG \to BG$, такое, что всякое G-расслоение на всякой клеточной базе B индуцировано из универсального некоторым непрерывным отображением $\varkappa : B \to BG$. Более того, это соответствие является взаимно однозначным между множествами G-расслоений на B и множеством гомотопических классов непрерывных отображений из B в BG.*

Классифицирующее главное G-расслоение $EG \to BG$ определяется условием того, что пространство EG этого расслоения гомотопически тривиально, $\pi_i(EG) = 0$ при $i \geqslant 1$.

Для построения искомого отображения $\varkappa : B \to BG$ нужно построить G-эквивариантное отображение $E \to EG$ тотальных пространств главных расслоений. Это можно сделать, продолжая строящееся отображение с клетки на клетку пространства B. Условие гомотопической тривиальности EG обеспечит на каждом шагу возможность такого продолжения, а также тот факт, что произвол конструкции приведет к гомотопным отображениям. Единственность универсального расслоения (с точностью до слабой гомотопической эквивалентности) вытекает из его универсальности. $\square$

Характеристическим классом называется правило, которое каждому G-расслоению сопоставляет класс когомологий базы, причем это соответствие должно вести себя функториально по отношению к индуцированию расслоений непрерывными отображениями баз. Из классификационной теоремы вытекает, что всякий характеристический класс индуцирован из BG классифицирующим отображением $\varkappa$. Иными словами, кольцо характеристических классов G-расслоений совпадает с кольцом $H^*(BG)$ когомологий классифицирующего пространства.

Классифицирующее пространство, как правило, бесконечномерно. Для нужд вычислений можно его заменить конечномерной аппроксимацией: если $E_N \to B_N$ — такое главное G-расслоение, у которого тотальное пространство E_N является N-связным, то при $k < N$ имеет место изоморфизм $H^k(BG) \simeq H^k(B_N)$. Действительно, пусть $E_N \times_G EG = (E_N \times EG)/G$ — факторпространство относительно диагонального действия. Рассмотрим диаграмму естественных проектирований

$$B_N \longleftarrow E_N \times_G EG \longrightarrow BG.$$

Обе проекции являются гладкими локально тривиальными расслоениями с N-связными слоями. Отсюда вытекает (например, из рассмотрения спектральных последовательностей расслоений), что группы когомологий всех трех пространств изоморфны во всех размерностях, меньших N.

Если $G = \mathbb{Z}_2$, то в качестве аппроксимирующего главного G-расслоения можно рассмотреть накрытие $S^N \to \mathbb{R}P^N$, откуда, переходя к пределу, получаем

$$H^*(B\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega_1],$$

где $\omega_1 \in H^1(\mathbb{R}P^N, \mathbb{Z}_2)$ — класс гиперплоскости.

Если $G = U(1) = S^1$, то в качестве аппроксимирующего главного G-расслоения можно рассмотреть расслоение Хопфа $S^{2N+1} \to \mathbb{C}P^N$, откуда, переходя к пределу, получаем

$$H^*(BU(1), \mathbb{Z}) = H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1],$$

где $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$ — класс гиперплоскости.

Если G — конечная группа, то отображение $EG \to BG$ является конечным накрытием, откуда следует, что высшие гомотопические группы пространства BG тривиальны, то есть оно является пространством Эйленберга-Маклейна $K(G, 1)$. Когомологии этого пространства совпадают с когомологиями самой группы G, которые определяются чисто алгебраически. Нужно взять произвольную резольвенту группы G, то есть точный комплекс G-модулей

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow R_0 \longleftarrow R_1 \longleftarrow \cdots ,$$

в котором $\mathbb{Z}$ рассматривается как тривиальный G-модуль, а G-модули R_i свободны. Тогда $H^*(G, R)$ определяются как когомологии комплекса $\mathrm{Hom}_G(R_i, R)$. Для классифицирующего главного G-расслоения можно построить клеточное разбиение пространства EG, для которого группа G действует перестановкой клеток. Тогда в качестве резольвенты можно взять коцепной комплекс этого клеточного разбиения, откуда и следует изоморфизм

$$H^*(BG) = H^*(K(G, 1)) = H^*(G).$$

Всякая группа Ли G, состоящая из конечного числа компонент, имеет максимальную компактную подгруппу. Все максимальные компактные подгруппы сопряжены между собой и гомотопически эквивалентны самой группе G. Более того, имеется разложение вида $G = KS$, где K — некоторая максимальная компактная подгруппа, а S — стягиваемое замкнутое подмногообразие, диффеоморфное векторному пространству, см. [37].

Поскольку подгруппа K действует на стягиваемом пространстве EG, пространтво орбит этого действия можно взять в качестве классифицирующего пространства BK. В результате возникает расслоение $BK \to BG$ со стягиваемыми слоями, откуда следует изоморфизм $H^*(BG) \simeq H^*(BK)$. Таким образом, теория G-расслоений и их характеристических классов для данной группы совпадает с теорией расслоений и характеристических классов для ее максимальной компактной подгруппы.

1.3 Классы Чженя

Теория характеристических классов комплексных векторных расслоений — это теория характеристических классов группы $G = GL(n, \mathbb{C}) \sim U(n)$. Классифицирующим пространством для этой группы служит многообразие Грассмана $G_{n,N} = G^{\mathbb{C}}_{n,N}$ n-мерных подпространств комплексного N-мерного пространства, где $N \to \infty$. Действительно, группа G действует на пространстве $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^N)$ матриц размера $n \times N$ линейными преобразованиями столбцов. Пространство действия стягиваемо, однако действие не является свободным. Рассмотрим подпространство V_{reg}, состоящее из матриц максимального ранга. Дополнение $V \setminus V_{\mathrm{reg}}$ имеет высокую коразмерность (порядка $2N$), поэтому нетривиальные гомотопические группы пространства V начинаются в высоких степенях, и, следовательно, многообразие $G_{n,N} = V_{\mathrm{reg}}/G$ может служить аппроксимацией пространства $BU(n)$.

Кольцо когомологий пространства $BU(n)$ является кольцом многочленов от образующих $c_1, \ldots, c_n$. Образующие $c_i \in H^{2i}(BU(n))$ называются *классами Чженя*. Имеется множество эквивалентных определений этих классов, некоторые из которых приведены ниже. В зависимости от обстоятельств и личных пристрастий разные авторы используют какое-либо из этих равенств в качестве определений, тогда остальные равенства превращаются в теоремы. Каждое из этих определений имеет две формулировки:

можно задать классы c_i универсальным правилом, применимым к большому классу комплексных векторных расслоений, а можно применить эту же конструкцию к тавтологическому расслоению на грассманиане и задать эти классы как определенные классы на классифицирующем пространстве $G_{n,N}$.

1.3.1. $c_i(E) = 0$ при $i > n$, а старший класс Чженя $c_n(E)$ комплексного расслоения ранга n на гладком многообразии M равен классу Эйлера этого расслоения. Этот класс определяется как класс, двойственный многообразию нулей сечения общего положения, или как класс, двойственный нулевому сечению в когомологиях пространства расслоения $H^{2n}(E) = H^{2n}(M)$, или как обратный образ класса Тома при вложении базы M в качестве нулевого сечения в пространство Тома расслоения E.

1.3.2. Вложение тора $U(1) \times \dots \times U(1) \subset U(n)$ задает гомоморфизм

$$H^*(BU(n)) \to H^*(BU(1) \times \dots \times BU(1)) = \\ = H^*(BU(1)) \otimes \ldots \otimes H^*(BU(1)) = \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n].$$

Этот гомоморфизм инъективен и его образ состоит из симметричных многочленов. Класс c_i определяется как класс, переходящий в i-ю элементарную симметричную функцию от $t_1, \ldots, t_n$.

На языке векторных расслоений это определение формулируется следующим образом. Предположим, что данное комплексное расслоение E на пространстве M допускает полный флаг подрасслоений $D_1 \subset \dots \subset D_n = E$, $\operatorname{rk} D_i = i$. В категории C^∞-гладких многообразий и отображений всякое такое расслоение расщепляется, и мы имеем $E \simeq I_1 \oplus \dots \oplus I_n$, где $I_k = D_k / D_{k-1}$. Тогда в этом частном случае мы можем определить классы $c_i(E)$ равенством

$$1 + c_1(E) + \dots + c_n(E) = (1 + t_1) \ldots (1 + t_n), \quad t_k = c_1(I_k),$$

где класс c_1 для линейного расслоения считается определенным.

Из функториальности следует, что приведенное определение задает классы Чженя и в общем случае. Действительно, заменим базу M расслоения на пространство $F(E)$ расслоения полных флагов в слоях расслоения E. Тогда поднятие расслоения E на $F(E)$ расщепляется, что определяет классы Чженя поднятого расслоения. Однозначность определения классов Чженя следует тогда из инъективности гомоморфизма $H^*(M) \to H^*(F(E))$ (см. ниже).

Приведенное определение классов Чженя известно также как **принцип расщепления**: *во всех вычислениях, связанных с классами Чженя, можно предполагать, что расслоения, участвующие в вычислении, являются суммами линейных. Ответ, полученный в этом предположении, справедлив и в общем случае.*

Полным классом Чженя расслоения E называется неоднородный класс $c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_n(E)$. Из принципа расщепления мгновенно вытекает **формула Уитни** для классов Чженя суммы двух расслоений

$$c(E \oplus F) = c(E)\,c(F), \quad \text{т.е.} \quad c_k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} c_i(E)\,c_j(F).$$

Действительно, если расслоения E, F расщепляются, то и $E \oplus F$ расщепляется, и мы имеем $c(E) = \prod(1 + t_i)$, $c(F) = \prod(1 + s_j)$, $c(E \oplus F) = \prod(1 + t_i)\prod(1 + s_j)$, что доказывает формулу Уитни.

K-группа топологического пространства X определяется как группа, образованная формальными целочисленными линейными комбинациями классов эквивалентностей комплексных векторных расслоений, профакторизованная по соотношениям вида $E \oplus F = E + F$. Элементы группы $K(X)$ называются *виртуальными расслоениями*. Из формулы Уитни вытекает, что классы Чженя продолжаются на $K(X)$. Если X — конечный клеточный комплекс, то у всякого расслоения E имеется «дополнительное» U, такое, что $E \oplus U$ — тривиальное расслоение. Таким образом, под классами Чженя виртуального расслоения $E - F$ понимаются либо классы,

определенные формальным равенством

$$c(E-F) = 1 + c_1(E-F) + c_2(E-F) + \dots = \frac{1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots}{1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots},$$

либо классы Чженя расслоения $E \oplus U$, где $U \oplus F$ тривиально.

1.3.3. Пусть $E \to M$ — комплексное векторное расслоение ранга n. Обозначим через $\pi : P(E) \to M$ его проективизацию. Точки пространства $P(E)$ образованы всевозможными прямыми в слоях расслоения E. На $P(E)$ имеется тавтологическое линейное расслоение τ (в алгебраической геомерии оно обозначается $\mathcal{O}(-1)$). Положим $t = -c_1(\tau)$ — класс Эйлера расслоения, сопряженного к τ. Поскольку степени класса гиперплоскости образуют базис в когомологиях проективного пространства, расслоение $P(E) \to M$ удовлетворяет условию предложения 1.1.1, и имеет место равенство

$$H^*(P(E)) = H^*(M)\,1 \oplus H^*(M)\,t \oplus \dots \oplus H^*(M)\,t^{n-1}. \tag{1.1}$$

Элемент t^n лежит в группе $H^*(P(E))$, и, следовательно, должен выражаться через $1, \dots, t^{n-1}$, иными словами, должны существовать классы $c_i \in H^*(M)$, для которых выполняется равенство

$$t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n = 0.$$

Коэффициенты этого равенства есть в точности классы Чженя расслоения E и могут рассматриваться в качестве их определения. Действительно, по формуле Уитни, в левой части равенства стоит n-й класс Чженя фактор-расслоения $Q = E/\tau$, поскольку

$$c(Q) = \frac{c(E)}{c(\tau)} = \frac{c(E)}{1-t} = (1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots)\,(1 + t + t^2 + \dots).$$

Но $c_n(Q) = 0$, поскольку расслоение Q имеет ранг $n-1$.

1.3.4. Из (1.1) вытекает также описание гомоморфизма Гизина $H^*(P(E)) \to H^*(M)$. По соображениям размерностей, он переводит в ноль классы $1, \ldots, t^{n-2}$ и $\pi_*(t^{n-1}) = 1 \in H^0(M)$. Последнее равенство означает, что $n-1$ гиперплоскостей общего положения в проективном пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$ пересекаются в одной точке. В качестве базиса $H^*(M)$-модуля $H^*(P(E))$ можно взять также классы $1, c_1(Q), \ldots, c_{n-1}(Q)$, где $Q = E/\tau$ — универсальное факторрасслоение. В этой интерпретации гомоморфизм π_* переводит $c_i(Q)$ в ноль при $i < n-1$, и $\pi_* c_{n-1}(Q) = 1$. Отсюда следует, в частности,

$$\pi_* t^k = \pi_* c_k(-\tau) = \pi_*(Q - E) = \pi_* \sum_{i+j=k} c_i(Q)\, c_j(-E) = c_{k-n+1}(-E).$$

Классы $c_i(-E)$ называются *классами Сегре* расслоения E. Поскольку они связаны с классами Чженя равенством $c(-E)\, c(E) = 1$, то равенство $c_k(-E) = \pi_* t^{k+n-1}$ может быть использовано в качестве еще одного определения классов Чженя.

1.3.5. Условию предложения 1.1.1 удовлетворяют также всевозможные флаговые расслоения, ассоциированные с E, в частности, расслоение полных флагов $F(E)$ и грассмановы расслоения $G_r(E)$. Например, рассмотрим диаграмму проектирований

$$M \leftarrow P(E) = F_1 \leftarrow F_{1,2} \leftarrow \ldots \leftarrow F_{1,\ldots,r} \rightarrow F_{2,\ldots,r} \rightarrow \ldots \rightarrow F_r = G_r(E),$$

где $F_{k_1,\ldots,k_r}$ — пространство расслоения флагов вида $D_{k_1x} \subset \cdots \subset D_{k_rx} \subset E_x$, $x \in M$, $\dim D_{kx} = k$. Все отображения этой диаграммы являются проективизациями подходящих векторных расслоений. Отсюда по индукции устанавливается, что когомологии каждого из этих пространств образуют свободный модуль над $H^*(M)$, и мы можем установить ранги этих модулей и даже указать явную систему образующих. Можно показать, что как алгебра над $H^*(M)$ кольцо $H^*(F_{k_1,\ldots,k_r})$ порождено классами Чженя последовательных факторрасслоений D_{k_1}, D_{k_2}/D_{k_1}, $\ldots$, E/D_{k_r}, а все соотношения вытекают из равенства

$$c(D_{k_1})\, c(D_{k_2}/D_{k_1}) \ldots c(E/D_{k_r}) = c(E).$$

Например, для расслоения полных флагов $F(E)$ базис образован мономами вида $t_1^{i_1}\dots t_n^{i_n}$, $0 \leqslant i_k \leqslant n-k$. Гомоморфизм Гизина проекции $F(E) \to M$ переводит $\prod t_k^{n-k}$ в 1 и переводит в ноль остальные элементы базиса.

1.3.6. Пример. Пусть $p_k : G_k(E) \to M$ — грассманово расслоение k-мерных плоскостей в слоях расслоения E, $D_k \to G_k(E)$ — соответствующее тавтологическое векторное расслоение ранга k. Тогда кольцо когомологий $H^*(G_k(E))$ порождено, как алгебра над $H^*(M)$, классами $c_i(D_k)$, $i = 1,\dots,k$, а все соотношения вытекают из равенств $c_i(E - D_k) = 0$, $i > n-k$. Это позволяет предъявить явно свободный базис $H^*(M)$-модуля $H^*(G_k(E))$, и, тем самым, определить гомоморфизм p_{k*}. Более эффективным, однако, является другой способ. Рассмотрим диаграмму естественных проектирований

$$\begin{tikzcd}
 & F_{k-1,k} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
G_{k-1}(E) \arrow[dr, "p_{k-1}"'] & & G_k(E) \arrow[dl, "p_k"] \\
 & M &
\end{tikzcd},$$

где $F_{k-1,k}$ — расслоение флагов вида $D_{(k-1)x} \subset D_{kx} \subset E_x$, $x \in M$, $\dim D_{ix} = i$. Отображения φ и ψ являются проективизациями расслоений E/D_{k-1} и D_k^* соответственно. Отсюда, согласно п. 1.3.4, получаем $\varphi_* t^s = c_{s-n+k}(E/D_{k-1})$, $\psi_* t^s = (-1)^{k-1} c_{s-k+1}(D_k)$, где $t = -c_1(D_k/D_{k-1})$. В частности, $\varphi_* t^{n-k} = 1$, $\psi_* t^{k-1} = (-1)^{k-1}$, откуда вытекают соотношения

$$p_{(k-1)*}\varphi_* = p_{k*}\psi_*, \qquad p_{(k-1)*}P = p_{k*}\psi_* t^{n-k} P, \qquad p_{k*}Q = p_{(k-1)*}\varphi_*(-t)^{k-1}Q,$$

где P и Q — произвольные характеристические классы, заданные на $G_{k-1}(E)$ и $G_k(E)$ соответственно. Поскольку при поднятии на $F_{k-1,k}$ классы Чженя расслоений D_{k-1} и D_k выражаются по формуле Уитни друг через друга и через класс $t = -c_1(D_k/D_{k-1})$, приведенные соотношения позволяют вычислить p_{k*} индукцией по k, сводя к одному из случаев $k = 0$ или $k = n$, когда p_k — изоморфизм и $p_{k*} = \mathrm{id}$.

1.3.7. Тот факт, что модуль когомологий флаговых расслоений свободен над кольцом когомологий базы, имеет ряд важных следствий. Например, это приводит к следующему независимому определению классов Чженя. Рассмотрим грассманизацию $G_k(E)$ расслоения E. На этом пространстве имеется тавтологическое расслоение D_k ранга k, старший класс Чженя которого $c_k(D_k)$ определяется как класс Эйлера. Тогда имеет место соотношение:

$$c_k(E) = \rho\, c_k(D_k),$$

где $\rho : H^*(G_k(E)) \to H^*(M)$ — трансфер Беккера-Готтлиба. Истинное определение этого сохраняющего градуировку гомоморфизма топологическое, но оно имеет следующую алгебраическую переформулировку. Пусть $a \in H^*(G_k(E))$. Рассмотрим эндоморфизм группы $H^*(G_k(E))$, задаваемый умножением на a. В произвольном базисе над $H^*(M)$ этот эндоморфизм задается $(d \times d)$-матрицей, компоненты которой принадлежат $H^*(M)$, где $d = C_n^k$ — число образующих $H^*(M)$-модуля $H^*(G_k(E))$, то есть ранг группы когомологий грассманиана $G_{k,n}$. Тогда, по определению, $\rho(a)$ принимается равным следу этой матрицы.

1.3.8. В качестве аддитивного базиса в $H^*(BU(n))$ можно взять всевозможные мономы от классов Чженя. В геометрических задачах, однако, ответы обычно проще формулировать в терминах другого базиса, состоящего из классов, двойственных циклам Шуберта. Цикл Шуберта — это замыкание клетки Шуберта. *Клеткой Шуберта* на многообразии Грассмана $G_{n,N}$ называется орбита группы линейных преобразований, сохраняющих фиксированный полный флаг. Клетка Шуберта однозначно определяется набором размерностей пересечения плоскости с плоскостями флага. Клетки Шуберта образуют клеточное разбиение грассманиана, а поскольку все клетки имеют вещественно четную размерность, они задают аддитивный базис в группе когомологий. В частности, класс $(-1)^i c_i$ можно задать как класс, двойственный определенному циклу Шуберта, а именно, циклу, состоящему из n-мерных плоскостей, имеющих по крайней мере i-мерное пересечение с фиксированной плоскостью размерности $N-n+i-1$.

Переформулировка этого определения для произвольного векторного расслоения над гладкой базой состоит в следующем: класс $c_i(E)$ двойственен циклу на многообразии M, содержащему точки, в которых $n-i+1$ сечений общего положения линейно зависимы.

Клетки Шуберта нумеруются невозрастающими последовательностями неотрицательных целых чисел $N-n \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Клетка S^λ, отвечающая последовательности $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, состоит из плоскостей, имеющих ровно i-мерное пересечение с плоскостями фиксированного полного флага в $\mathbb{C}^N$ размерностей $k_i, k_i+1, \ldots, k_{i+1}-1$, где $k_i = N-n+i-\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$. Коразмерность (комплексная) клетки S^λ равна $\sum \lambda_i$.

Переход от базиса Шуберта к базису, состоящему из мономов от классов Чженя, осуществляется при помощи *формул Джамбели*:

$$[\overline{S}^\lambda] = \Delta_\lambda(c(\tau^*)) = \det \|c_{\lambda_i - i + j}(\tau^*)\|_{i,j=1,\ldots,n},$$

где $c_k(\tau^*) = (-1)^k c_k$ — k-й класс Чженя расслоения, сопряженного тавтологическому. Одно из возможных доказательств имеется в п. 3.1. Многочлен от классов c_i, заданный определителем $\Delta_\lambda(c) = \det \|c_{\lambda_i - i + j}\|_{i,j=1,\ldots,n}$, называется *многочленом Шура*.

Классы Чженя комплексных векторных расслоений имеют свои аналоги и в других вариантах теории когомологий, например, в кобордизмах, K-теории, а также в кольцах Чжоу алгебраических многообразий. В зависимости от обстоятельств, подход к определению этих классов может меняться, однако перечисленные свойства в том или ином виде присутствуют во всех этих теориях.

В заключение приведем два тождества, связанных с классами Чженя, которые используются в тексте.

1.3.9. Пусть E — (виртуальное) векторное расслоение (виртуального) ранга n с классам Чженя $c_i = c_i(E)$, и I — линейное расслоение с первым классом Чженя $c_1(I) = t$. Тогда полный класс расслоения $E \otimes I$ равен

$$\begin{aligned} c(E \otimes I) &= (1+t)^n \left(1 + \frac{c_1}{1+t} + \frac{c_2}{(1+t)^2} + \dots\right) \\ &= (1+t)^n + c_1(1+t)^{n-1} + \dots + c_n + \frac{c_{n+1}}{1+t} + \dots, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где сумма в правой части может быть бесконечной. Действительно, пусть $E = U - V$, где U — настоящее расслоение ранга $n+N$, которое, согласно принципу расщепления, можно считать суммой одномерных, а V — тривиальное ранга N. Тогда $U \otimes I$ и $V \otimes I$ также расщепляются, и

$$c(E \otimes I) = \frac{c(U \otimes I)}{c(V \otimes I)} = \frac{\prod_{i=1}^{n+N}(1+t+t_i)}{(1+t)^N} = (1+t)^n \prod_{i=1}^{n+N} \left(1 + \frac{t_i}{1+t}\right),$$

что после раскрытия скобок дает желаемый ответ. □

1.3.10. Пусть E, F — расслоения рангов r, k соответственно. Тогда старший класс Чженя расслоения $\mathrm{Hom}(E, F) \simeq E^* \otimes F$ задается равенством

$$c_{rk}(\mathrm{Hom}(E, F)) = \det \|c_{k-i+j}\|_{i,j=1,\dots,r} = \det \|\bar{c}_{r-i+j}\|_{i,j=1,\dots,k}, \tag{1.3}$$

где $c_i = c_i(F - E)$, $\bar{c}_i = c_i(E^* - F^*) = (-1)^i c_i(E - F)$.

Второе из равенств следует из первого заменой E на F^* и F на E^*, поэтому будем доказывать только первое. В случае $r = \mathrm{rk}\, E = 1$, $c_1(E) = -t$ оно принимает вид

$$c_k(E^* \otimes F) = c_k(F - E) = c_k(F) + t\, c_{k-1} + \dots + t^{k-1}\, c_1(F) + t^k,$$

что вытекает из (1.2). В случае $r > 1$ мы предположим, согласно принципу расщепления, что в E имеется полный флаг подрасслоений E_i, $\mathrm{rk}\, E_i = i$. Тогда, по предыдущему, мы имеем

$$c_{rk}(\mathrm{Hom}(E, F)) = \prod_{i=1}^{r} c_k(F - E_i/E_{i-1}).$$

Представим последнее произведение в виде определителя нижнетреугольной $(r \times r)$-матрицы с элементом $c_{k-i+j}(F - E_i + E_{j-1})$ на (i,j)-м месте. Эта матрица действительно нижнетреугольная, поскольку при $j > i$ ее элемент равен $(k+j-i)$-му классу Чженя расслоения $F \oplus (E_{j-1}/E_i)$ ранга $k+j-i-1$. Далее, представив

$$\begin{aligned} c_{k-i+j}(F - E_i + E_{j-1}) &= c_{k-i+j}(F - E + E/E_i + E_{j-1}) \\ &= \sum_{p,q} c_{k-p+q}(F - E)\, c_{p-i}(E/E_i)\, c_{j-q}(E_{j-1}), \end{aligned}$$

мы получаем, что эта матрица представляется в виде произведения трех, одна из которых $\|c_{k-p+q}(F-E)\|_{p,q=1,\dots,r}$ — искомая, а две остальные $\|c_{p-i}(E/E_i)\|_{i,p=1,\dots,r}$ и $\|c_{j-q}(E_{j-1})\|_{q,j=1,\dots,r}$ — верхнетреугольные, с единицами на диагонали, откуда и вытекает требуемое равенство. $\square$

1.4 Характеристические классы вещественных расслоений

Теория характеристических классов вещественных векторных расслоений — это теория характеристических классов групп $GL(n,\mathbb{R}) \sim O(n)$ и $GL^+(n,\mathbb{R}) \sim SO(n)$ (для случая произвольных и ориентированных расслоений соответственно). Классифицирующим пространством для этих групп служат вещественное многообразие Грассмана $G^{\mathbb{R}}_{n,N}$ n-мерных подпространств вещественного N-мерного пространства и его двулистное накрытие $G^+_{n,N}$, состоящее из ориентированных подпространств, соответственно, где $N \to \infty$. В этом случае когомологии имеют 2-кручение, и приходится разбирать отдельно случай рациональных и $\mathbb{Z}_2$-коэффициентов.

Кольцо $H^*(BO(n), \mathbb{Z}_2)$ является кольцом многочленов от образующих $\omega_1, \dots, \omega_n$. Образующие $\omega_i \in H^i(BO(n), \mathbb{Z}_2)$ называются *классами Штифеля-Уитни*. Определения и свойства классов Штифеля-Уитни повторяют соответствующие определения и свойства классов Чженя, изложенные выше. Нужно только во всех построениях комплексные векторные расслоения и многообразия заменить на вещественные, и заменить целочисленные когомологии в градуировке $2i$ на $\mathbb{Z}_2$-когомологии в градуировке i. В частности, например, все дифференциалы в коцепном комплекс разбиения Шуберта тривиальны, и клетки Шуберта задают аддитивный базис $\mathbb{Z}_2$-(ко)гомологий. Отметим, что в вещественном случае тривиальность дифференциалов уже не обеспечивается соображениями размерности, а вытекает из того, что циклы Шуберта являются алгебраическими подмногообразиями, а всякое вещественное алгебраическое многообразие имеет $\mathbb{Z}_2$-фундаментальный класс (ко)гомологий.

Всякое утверждение относительно классов Чженя вещественных расслоений, доказательство которого можно провести с использованием свойств, изложенных в предыдущем пункте, имеет соответствующий вещественный аналог. Доказательство вещественного результата можно получить, повторяя шаг за шагом все построения, сделанные в комплексном случае, однако *формулировку ответа* можно получить гораздо проще: нужно просто во всех выражениях, содержащих классах Чженя, заменить эти классы на соответствующие классы Штифеля-Уитни и привести коэффициенты по модулю 2.

Различия в теориях все же есть. Например, в комплексном случае имеется характер Чженя ch, который является мультипликативным гомоморфизмом из кольца $K(X)$ виртуальных комплексных расслоений в кольцо $H^*(X,\mathbb{Q})$ рациональных когомологий, использование которого позволяет часто упрощать вычисления. Вещественного аналога этого гомоморфизма нет. С другой стороны, в случае $\mathbb{Z}_2$-коэффициентов имеются операции Стинрода, не имеющие аналога в целочисленных когомологиях.

1.4.1. Связь между классами Штифеля-Уитни и квадратами Стинрода дается следующей **формулой Тома**. Пусть τE — пространство Тома вещественного векторного расслоения ранга n, заданного на некоторой базе M, $u \in H^n(\tau E, \mathbb{Z}_2)$ — его класс Тома. Тогда при изоморфизме Тома $H^k(M,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^{k+n}(\tau E,\mathbb{Z}_2)$ класс $\omega_k(E)$ переходит в k-й квадрат Стинрода класса Тома $\mathrm{Sq}^k u$, иными словами,

$$\mathrm{Sq}\, u = \omega(E)\, u \in H^*(\tau E, \mathbb{Z}_2).$$

Таким образом, классы Штифеля-Уитни определяются квадратами Стинрода. Это соотношение можно обратить и выразить действие квадратов Стинрода на гладком замкнутом многообразии M через классы Штифеля-Уитни. Пусть цикл, задающий по двойственности Пуанкаре данный класс $\alpha \in H^\ell(M)$, представлен гладким отображением $f : N \to M$, $\ell = \dim N - \dim M$. Тогда k-й квадрат Стинрода $\mathrm{Sq}^k\alpha$ задается как

$$\mathrm{Sq}^k\alpha = f_*\omega_k(f) \in H^{\ell+k}(M, \mathbb{Z}_2),$$

где $\omega(f) = \omega(f^*TM - TN)$ — относительный класс Штифеля-Уитни отображения. Если f — вложение подмногообразия $N \subset M$, то $f^*TM - TN = \nu_N$ — нормальное расслоение.

1.4.2. Характеристические классы вещественных расслоений замкнуты относительно действия алгебры Стинрода. Действие квадратов Стинрода в $H^*(BO, \mathbb{Z}_2) = \lim\limits_n H^*(BO(n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega_1, \omega_2, \dots]$ вычислено Борелем:

$$\mathrm{Sq}^k\omega_m = \sum_{j=0}^{k} C^j_{m-k+j-1}\, \omega_{k-i}\, \omega_{m+i}.$$

1.4.3. Кольцо рациональных характеристических классов векторных расслоений порождено классами Понтрягина $p_i \in H^{4i}(BO)$. В случае ориентированных расслоений имеется еще (при четном n) нестабильный класс Эйлера $e \in H^n(BSO(n))$. С точки зрения приложений в дифференциальной топологии, целочисленные классы не менее важны, чем mod2-характеристические классы, однако ввиду ограниченности объема диссертации, в ней целочисленным характеристическим классам, связанным с вещественными особенностями, уделено недостаточное внимание, поэтому и здесь мы их обсуждать подробно не будем.

1.5 Лагранжевы и лежандровы характеристические классы

1.5.1. Сперва рассмотрим комплексный случай. Напомним, что *симплектической структурой* в векторном пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ четной размерности называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма. Стандартным примером служит пространство вида $V \oplus V^*$, в котором значение формы на паре векторов $a \oplus b$, $a' \oplus b'$ равно $\langle a, b'\rangle - \langle a', b\rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спаривание векторов и ковекторов в V. Подпространство $L \subset E$ называются *изотропными*, если симплектическая структура обращается в ноль на L, то есть если $L \subset L^{\perp}$, где ортогональное дополнение рассматривается в смысле симплектической структуры. Изотропные пространства максимально возможной размерности n называются *лагранжевыми.*

(Комплексным) *лагранжевым грассманианом* $\Lambda_n = \Lambda_n^{\mathbb{C}}$ называется многообразие лагранжевых подпространств фиксированного $2n$-мерного симплектического пространства $\mathbb{C}^{2n} = V \oplus V^*$. Более общим образом, можно рассмотреть грассманиан изотропных подпространств произвольной размерности, а также всевозможные многообразия $F_{k_1,\dots,k_r}$, образованные изотропными флагами вида $D_{k_1} \subset \dots \subset D_{k_r} \subset E$, $\dim D_k = k$. Между этими пространствами имеются естественные отображения. Рассмотрим, например, следующую диаграмму проектирований

$$\mathbb{C}P^{2n-1} = F_1 \leftarrow F_{1,2} \leftarrow \ldots \leftarrow F_{1,\dots,n} \rightarrow F_{2,\dots,n} \rightarrow \ldots \rightarrow F_n = \Lambda^n.$$

Каждое из отображений на диаграмме имеет вид проекции на базу проективизации подходящего векторного расслоения. Например, точка слоя отображения $F_{1,\dots,k+1} \rightarrow F_{1,\dots,k}$ задается всевозможными положениями плоскости D_{k+1}, такими, что $D_k \subset D_{k+1} \subset D_k^{\perp}$, то есть точкой проективного пространства $P(D_k^{\perp}/D_k)$. Отсюда следует, согласно п. 1.3.3, практически без вычислений, что когомологии всех этих пространств нетривиальны только в четных степенях, не имеют кручения и порождены классами

Чженя тавтологических расслоений. Более того, можно вычислить ранги однородных компонент когомологий и указать явно аддитивный базис и соотношения между мультипликативными образующими.

1.5.2. Кольцо когомологий $H^*(\Lambda_n)$ стабилизируется (в каждой фиксированной степени) с ростом n. Предельное кольцо $H^*(\Lambda) = \lim H^*(\Lambda_n)$ называется кольцом *лагранжевых характеристических классов*. Это кольцо порождено классами Чженя $a_i = c_i(L^*) = (-1)^i c_i(L)$ расслоения, сопряженного n-мерному тавтологическому расслоению L. Из невырожденности симплектической структуры вытекает изоморфизм $\mathbb{C}^{2n}/L \simeq L^*$, откуда следует равенство $c(L)c(L^*) = 1$, то есть

$$(1 + a_1 + a_2 + \dots)(1 - a_1 + a_2 - \dots) = 1,$$

или

$$a_k^2 - 2\,a_{k-1}\,a_{k+1} + 2\,a_{k-2}\,a_{k+2} \cdots = 0, \qquad k \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Из сравнения рангов вытекает, что все соотношения в кольце лежандровых характеристических классов порождены этими. Из соотношений вытекает, что аддитивный базис в кольце $H^*(\Lambda)$ образован мономами вида $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots$, такими, что $i_k \in \{0, 1\}$. Чтобы выразить всякий многочлен в терминах этого базиса, нужно последовательно применять соотношение (1.4) к каждому моному, содержащему образующие a_k в степенях, больших 1. Для этого потребуется конечное число шагов, поскольку степень каждого монома, получившегося в результате такого преобразования, строго меньше степени монома, к которому преобразование применялось, если рассматривать вспомогательную градуировку, в которой $\deg a_k = k^2$.

1.5.3. В качестве другого аддитивного базиса в $H^*(\Lambda_n)$ можно взять базис, состоящий из классов, двойственных циклам Шуберта. Цикл Шуберта — это замыкание клетки Шуберта. *Клеткой Шуберта* на лагранжевом многообразии Грассмана Λ_n называется орбита группы симплектических линейных преобразований, сохраняющих фиксированный флаг, состоящий из изотропных подпространств размерностей $1, \dots, n$. Клетка Шуберта однозначно определяется набором размерностей пересечения плоскости с плоскостями флага. Клетки Шуберта образуют клеточное разбиение лагранжева грассманиана, а поскольку все клетки имеют вещественно четную размерность, они задают аддитивный базис в группе когомологий. В частности, класс a_i можно задать как класс, двойственный определенному циклу Шуберта, а именно, циклу, состоящему из лагранжевых плоскостей, имеющих нетривиальное пересечение с фиксированной изотропной плоскостью размерности $n+1-i$.

Клетки Шуберта нумеруются строго убывающими последовательностями положительных целых чисел $n \geqslant \lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0$, $0 \leqslant r \leqslant n$. Клетка S^λ, отвечающая последовательности $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, состоит из плоскостей, имеющих ровно i-мерное пересечение с плоскостью размерности $n+1-\lambda_i$ фиксированного изотропного флага в $\mathbb{C}^{2n}$ при $i = 1, \ldots, r$. Коразмерность (комплексная) клетки S^λ равна $\sum \lambda_i$.

Переход от базиса Шуберта к базису, состоящему из мономов от классов a_i, осуществляется при помощи симплектического аналога формулы Джамбели, выражающей класс цикла Шуберта при помощи подходящего Q-многочлена Шура (определение см. ниже):

$$[\overline{S}^\lambda] = Q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(c(\tau^*)),$$

где τ^* — расслоение, сопряженное тавтологическому, $c_i(\tau^*) = (-1)^i a_i$. Одно из возможных доказательств имеется в п. 3.1.3.

1.5.4. Пусть задан набор коммутирующих переменных $a_1, a_2, \ldots$, $\deg a_i = i$, удовлетворяющих соотношениям (1.4) и представленных в виде бесконечного ряда $a = 1 + a_1 + a_2 + \ldots$ (мы полагаем $a_0 = 1$ и $a_i = 0$ при $i < 0$). Тогда *Q-многочлен Шура*, соответствующий произвольной последовательности натуральных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, определяется следующим образом:

- если $r = 1$, мы полагаем $Q_k(a) = a_k$;
- если $r = 2$, мы полагаем

$$Q_{k,l}(a) = -Q_{l,k}(a) = a_k a_l - 2a_{k+1}a_{l-1} + 2a_{k+2}a_{l-2} - 2a_{k+3}a_{l-3} + \ldots;$$

- для всякого четного $r \geqslant 4$ мы полагаем

$$Q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(a) = \mathrm{Pf}\,\|Q_{\lambda_i,\lambda_j}(a)\|_{i,j=1,\ldots,r};$$

- для всякого нечетного $r \geqslant 3$ мы полагаем

$$Q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(a) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}a_{\lambda_k}\,Q_{\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_k,\ldots\lambda_r}(a).$$

Здесь Pf обозначает пфаффиан. Напомним, что *пфаффиан кососимметричной матрицы* $\omega = \|\omega_{ij}\|$ четного порядка $2n$ задается, по определению, равенством

$$\mathrm{Pf}\,\|\omega_{ij}\| = \sum \pm\omega_{i_1 i_2}\cdots\omega_{i_{2n-1}i_{2n}},$$

где суммирование производится по всевозможным $(2n-1)!!$ способам разбить множество $\{1,2,\ldots,2n\}$ на n пар $\{i_1,i_2\}\cup\cdots\cup\{i_{2n-1},i_{2n}\}$, и $\pm$ — знак перестановки $\{1,\ldots,2n\}\mapsto\{i_1,\ldots,i_{2n}\}$.

Равенство $Q_{k,l}(a) = -Q_{l,k}(a)$ при нечетных $k+l$ сразу же следует из определения, а при четном $k+l$ вытекает из соотношений (1.4) на образующие a_i. Обобщая это свойство, заметим, что многочлены $Q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(a)$ кососимметричны по отношению к перестановкам индексов λ_i,

$$Q_{\lambda_{s(1)},\ldots,\lambda_{s(r)}}(a) = (-1)^{|s|}Q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(a),$$

где s — перестановка, и $|s|$ — ее знак. Это вытекает из того, что пфаффиан ведет себя кососимметрично при одновременной перестановке строк и столбцов матрицы. В частности, $Q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(a)$ обращается в ноль, если для некоторых $i \neq j$ выполняется $\lambda_i = \lambda_j$.

Различие между случаями четного и нечетного r кажущееся. В действительности, имеет место следующая явная формула (автор благодарен В. Крюкову, указавшему на эту формулу)

$$Q_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(a) = \sum_{i_1,\ldots,i_r} w_{i_1,\ldots,i_r}\,a_{\lambda_1+i_1}\ldots a_{\lambda_r+i_r}, \tag{1.5}$$

где коэффициенты $w_{i_1,\dots,i_r}$ не зависят от $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ и задаются формальным разложением

$$\begin{aligned}\sum w_{i_1,\dots,i_r}\,\tau_1^{i_1}\dots\tau_r^{i_r} &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\frac{\tau_j-\tau_i}{\tau_j+\tau_i} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\frac{1-\tau_i\tau_j^{-1}}{1+\tau_i\tau_j^{-1}}\\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(1-2\,\tau_i\tau_j^{-1}+2\,\tau_i^2\tau_j^{-2}-2\,\tau_i^3\tau_j^{-3}+\dots).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Равенство (1.6) рассматривается в кольце бесконечных рядов от образующих $\tau_1/\tau_2,\dots,\tau_{r-1}/\tau_r$, или, что равносильно, в пополнении кольца многочленов Лорана относительно вспомогательной градуировки, в которой степень монома $\tau_1^{i_1}\dots\tau_r^{i_r}$ полагается равной $\sum_{k=1}^r k\,i_k$. Нетрудно видеть, что для каждого фиксированного набора $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ в ряду (1.5) присутствует лишь конечное число ненулевых членов, то есть правая часть равенства корректно определена. Формула (1.6) несложно доказывается индукцией по r. Она может служить также определением Q-многочленов Шура в случае, когда переменные a_i не обязательно удовлетворяют соотношению (1.4).

1.5.5. Соответствие между лагранжевыми и симметричными множествами вырождения, рассмотренное в п. 3.2 главы 3, формализуется следующим образом. Рассмотрим гомоморфизм

$$\psi:\mathbb{Z}[a_1,a_2,\dots]\to\mathbb{Z}[c_1,c_2\dots],\qquad 1+a_1+a_2+\dots\mapsto\frac{1+c_1+c_2+\dots}{1-c_1+c_2-\dots}.$$

Предложение. *Гомоморфизм ψ задает вложение кольца лагранжевых характеристических классов $H^*(\Lambda)$ в кольцо $H^*(BU)$ характеристических классов векторных расслоений.*

Поскольку в обоих кольцах кручение отсутствует, это утверждение достаточно доказать над $\mathbb{Q}$. Введем новые образующие $\tilde a_i$, $\tilde c_i$ в соответствующих полиномиальных кольцах, полагая

$$\tilde c_1+\tilde c_2+\dots=\log(1+c_1+c_2+\dots),$$

и аналогично для $\tilde{a}_i$ (классы $\tilde{c}_k, \tilde{a}_k$ совпадают, с точностью до множителя $\pm 1/(k-1)!$, с однородными компонентами соответствующих характеров Чженя). В терминах этих образующих гомоморфизм

$$\psi : \mathbb{Q}[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots] \longrightarrow \mathbb{Q}[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots]$$

имеет вид $\tilde{a}_{2k-1} \mapsto 2\tilde{c}_{2k-1}$, $\tilde{a}_{2k} \mapsto 0$. Идеал (1.4) определяющих соотношений в кольце лагранжевых характеристических классов в терминах этих образующих задается классами $2\tilde{a}_2, 2\tilde{a}_4, \dots$, то есть совпадает с ядром гомоморфизма ψ. Предложение доказано. $\square$

Из этого предложения следует, что все соотношения, полученные для симметричных вырождений, справедливы также и для более общего случая лагранжевых вырождений. Например, многочлен $Q_{r,r-1,\dots,1}$ теоремы 3.2.4 однозначно определяется тем, что его образом при гомоморфизме ψ является класс, найденный в [35]. Заметим, что из выражения для этого класса в [35] не очевидно, что он выражается через комбинации классов Чженя, задаваемые классами a_i.

1.5.6. Подкрученным аналогом лагранжевых характеристических классов служат лежандровы характеристические классы.

(Комплексным) *лежандровым многообразием Грассмана* Λ_n^{leg} называется тотальное пространство расслоения над $BU(1) \simeq \mathbb{C}P^\infty$ со слоем, изоморфным Λ_n и состоящим из лагранжевых подпространств подкрученного симплектического пространства $E_x = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \otimes I_x$, где I — классифицирующее линейное расслоение над $BU(1)$ и $n \to \infty$. Симплектическая структура в E_x принимает значения в слоях расслоения I и задается отождествлением $E_x = (T^*\mathbb{C}^n) \otimes I_x$.

Кольцом лежандровых характеристических классов называется предельное кольцо лежандровых грассманианов $H^*(\Lambda^{\mathrm{leg}}) = H^*(\Lambda_n^{\mathrm{leg}})$. Поскольку когомологии лагранжева грассманиана не имеют кручения и порождены классами Чженя тавтологического расслоения, расслоение $\Lambda_n^{\mathrm{leg}} \to BU(1)$ удовлетворяет условию предложения 1.1.1. Следовательно, лежандровы характеристические классы также не имеют кручения и аддитивный базис образован мономами вида $u^j a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots$, $i_k \in \{0,1\}$, где $u = c_1(I)$ и $a_i = c_i(\mathbb{C}^n - L) = c_i(-L)$, где L — тавтологическое расслоение. Симплектическая структура задает изоморфизм $(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \otimes I)/L \simeq L^* \otimes I$, то есть $c((\mathbb{C}^n - L) + (\mathbb{C}^n - L)^* \otimes I) = 1$, или

$$(1 + a_1 + a_2 + \dots)\left(1 - \frac{a_1}{1+u} + \frac{a_2}{(1+u)^2} - \dots\right) = 1, \qquad (1.7)$$

Сравнивая ранги, получаем, что все соотношения в кольце лежандровых характеристических классов вытекают из указанных.

1.5.7. Теория лагранжевых характеристических классов содержится в теории лежандровых: достаточно просто положить $u = 0$. С другой стороны, над кольцом рациональных чисел, или над произвольным кольцом, содержащим $1/2$, лежандровы классы выражаются через лагранжевы,

$$H^*(\Lambda^{\mathrm{leg}}, \mathbb{Q}) \simeq H^*(\Lambda, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}[u].$$

Лагранжевы классы a_i', соответствующие правой части равенства, находятся следующим образом. Нужно положить формально $a_i' = c_i((\mathbb{C}^n - L) \otimes J^*)$, где $I = J \otimes J$, $u = c_1(I) = 2c_1(J)$, то есть

$$1 + a_1' + a_2' + \dots = 1 + \frac{a_1}{1 - u/2} + \frac{a_2}{(1 - u/2)^2} + \dots.$$

Тогда классы a_i' удовлетворяют соотношению (1.4).

1.5.8. Понятия лагранжева (лежандрова) грассманиана и лагранжевых (лежандровых) характеристических классов имеют очевидные вещественные аналоги. Нужно только всюду комплексные пространства и расслоения заменить вещественными. В вещественном случае эти характеристические классы имеют 2-кручение, поэтому приходится отдельно рассматривать случай рациональных и $\mathbb{Z}_2$-коэффициентов. Для $\mathbb{Z}_2$-когомологий ответ получается применением принципа овеществления из проведенных выше вычислений.

Кольцо $H^*(\Lambda^{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2)$ лагранжевых $\mathbb{Z}_2$-характеристических классов порождено классами Штифеля-Уитни α_i тавтологического расслоения на лагранжевом грассманиане, которые удовлетворяют соотношению $\alpha_i^2 = 0$. Иными словами, это кольцо изоморфно внешней алгебре над $\mathbb{Z}_2$ от образующих α_i. Свободный аддитивный базис образован мономами вида $\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\dots$, $i_j \in \{0,1\}$.

Кольцо $H^*(\Lambda^{\mathbb{R},\mathrm{leg}}, \mathbb{Z}_2)$ лежандровых $\mathbb{Z}_2$-характеристических классов порождено первым классом Штифеля-Уитни u канонического линейного расслоения и классами Штифеля-Уитни α_i тавтологического расслоения на лежандровом грассманиане, которые удовлетворяют соотношению (1.7) (с коэффициентами, приведенными по модулю 2). Свободный аддитивный базис образован мономами вида $u^k\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\dots$, $i_j \in \{0,1\}$. Заметим, что в лежандровом случае $\alpha_i^2 \neq 0$. Например, $\alpha_1^2 = u\,\alpha_1$.

1.5.9. Существенное отличие от комплексного случая заключается в том, что в вещественном случае гомоморфизм ψ предложения 1.5.5 *нулевой*. Более того, в этом случае все симметричные множества вырождения когомологичны нулю (см. [42, 46]), и их рассмотрение не дает информации о классах когомологий, двойственных циклам лагранжевых вырождений. В вещественном случае отсутствует также расщепление п. 1.5.7.

1.5.10. Кольцо рациональных лагранжевых характеристических классов $H^*(\Lambda^{\mathbb{R}}, \mathbb{Q})$ является кольцом многочленов от образующих $\mu, \beta_5, \beta_9, \dots$ степеней $1, 5, 9, \dots$. Из спектральной последовательности расслоения $\Lambda^{\mathbb{R},\mathrm{leg}} \to BO(1)$ легко выводится, что кольцо рациональных лежандровых характеристических классов образует подкольцо в $H^*(\Lambda^{\mathbb{R}}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\mu, \beta_5, \beta_9, \dots]$, состоящее из многочленов четной степени.

1.6 Конечная определенность ростков отображений

Все определения и утверждения этого пункта имеют естественный вещественный аналог, в котором комплексные многообразия заменяются гладкими вещественными, голоморфные отображения — бесконечно гладкими и т.п.

Два ростка отображения $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, называются $\mathcal{K}$-*эквивалентными*, если столбец, состоящий из компонент одного отображения, можно перевести в другой заменой координат в пространстве-прообразе $(\mathbb{C}^m, 0)$ и умножением на обратимую $(n \times n)$-матрицу, компоненты которой — ростки голоморфных функций от точки пространства-прообраза $(\mathbb{C}^m, 0)$. Эквивалентным образом можно сказать, что класс $\mathcal{K}$-эквивалентности ростка $f : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ определяется классом изоморфизма ростка аналитического подмножества $f^{-1}(0)$, снабженного алгеброй функций $Q_f = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Алгебра Q_f называется *локальной алгеброй* отображения f.

Тривиальным расширением ростка $f : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ называется росток вида $f \times \mathrm{id} : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0)$. Два ростка отображений $f_i : (\mathbb{C}^{m_i}, 0) \to (\mathbb{C}^{n_i}, 0)$, $i = 1, 2$, действующие в пространствах, вообще говоря, разных размерностей, называются *стабильно $\mathcal{K}$-эквивалентными*, если один из них $\mathcal{K}$-эквивалентен тривиальному расширению другого. У стабильно эквивалентных ростков равны относительные размерности $\ell = n_1 - m_1 = n_2 - m_2$ отображаемых многообразий. Таким образом, при каждом $\ell \in \mathbb{Z}$ имеется своя независимая классификация ростков отображений $(\mathbb{C}^*, 0) \to (\mathbb{C}^{*+\ell}, 0)$ с точностью до стабильной $\mathcal{K}$-эквивалентности. Минимальная размерность m, для которой существует отображение $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{m+\ell}$, стабильно $\mathcal{K}$-эквивалентное данному отображению f, называется *корангом* класса особенности. Коранг равен размерности ядра f_* производной отображения f в начале координат. Любой представитель данного класса, для которого размерность m многообразия области определения равна корангу, называется *генотипом* $\mathcal{K}$-особенности.

K-струей называется класс ростков отображений, имеющих одинаковое разложение Тейлора до порядка K. K-струи образуют конечномерное аффинное многообразие $J_0^K(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$. K-струя отображения называется *достаточной*, если все ростки, имеющие данную K-струю, $\mathcal{K}$-

эквивалентны между собой. Росток отображения f называется *конечно-определенным*, если он имеет достаточную K-струю, то есть если его класс $\mathcal{K}$-эквивалентности определяется однозначно по некоторой его конечной струе. В теории особенностей доказывается, что ростки, не являющиеся конечноопределенными, образуют подпространство бесконечной коразмерности в пространстве ростков (точнее, K-струи, не являющиеся достаточными, образуют подпространство в $J_0^K(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, имеющее неограниченно растущую с ростом K коразмерность).

При $\ell = n - m \geqslant 0$ конечная определенность равносильна конечномерности локальной алгебры. При этом если $\dim Q_f = d$, то d-струя отображения f достаточна. Таким образом, при $\ell \geqslant 0$ стабильная $\mathcal{K}$-классификация ростков сводится к классификации конечномерных локальных алгебр.

При $\ell = n - m \leqslant 0$ конечная определенность ростка f равносильна тому, что росток многообразия $f^{-1}(0)$ является $(-\ell)$-мерным полным пересечением с изолированной особенностью в начале координат. Таким образом, при $\ell \leqslant 0$ стабильная $\mathcal{K}$-классификация ростков отображений совпадает с классификацией изолированных особенностей $(-\ell)$-мерных полных пересечений.

Существование достаточной струи сводит классификацию ростков отображений с точностью до $\mathcal{K}$-эквивалентности к классификации орбит действия на $J_0^K(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ конечномерной группы Ли K-струй $\mathcal{K}$-эквивалентностей. Всякая орбита α этого действия является гладким подмногообразием. Коразмерность этой орбиты, а также особенности разбиения ее окрестности на классы $\mathcal{K}$-эквивалентности (с точностью до умножения на аффинное пространство подходящей размерности) не зависят ни от выбора K, для которого K-струя особенности α достаточна, ни от выбора представителя (стабильной) $\mathcal{K}$-эквивалентности. Коразмерность орбиты $\operatorname{codim} \alpha$ называется *коразмерностью особенности* α.

K-струйное расширение ростка f задает отображение $j^K f : \mathbb{C}^m \to J_0^K(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, сопоставляющее точке $x \in \mathbb{C}^m$ K-струю отображения f в этой точке (перенесенной в начало координат сдвигом аргумента). Соглас-

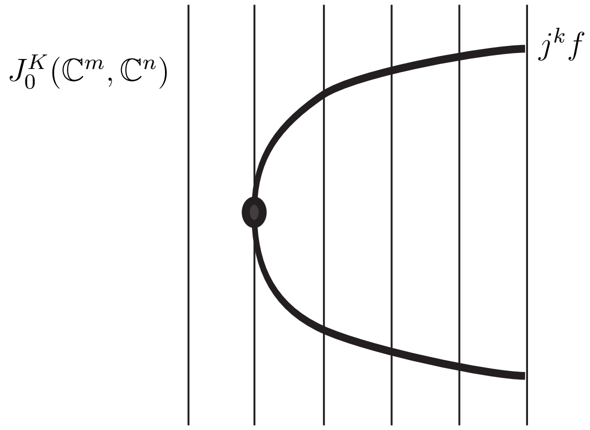

Рис. 1.1: Неустранимость неустойчивых отображений

но теореме Мазера, *трансверсальность* отображения $j^K f$ особенности α ростка f в начале координат равносильна его *устойчивости*: все ростки с данной $\mathcal{K}$-особенностью в начале координат, удовлетворяющие приведенному условию трансверсальности, переводятся друг в друга заменой координат в пространствах прообраза и образа.

Если f — устойчивый росток, то точки многообразия-прообраза $\mathbb{C}^m$, в которых f имеет ту же особенность α, что и в начале координат, образуют гладкое подмногообразие коразмерности $\operatorname{codim}\alpha$, и ограничение f на это подмногообразие является гладким вложением коразмерности $\operatorname{codim}\alpha+\ell$.

Неверно, что отображение общего положения имеет только устойчивые особенности. Если имеется семейство неэквивалентных орбит, зависящих от параметра (модуля), то малым шевелением отображения можно достичь трансверсальность по отношению к каждой индивидуальной орбите семейства, однако явление отсутствия трансверсальности ко всем орбитам одновременно может присутствовать устойчивым образом, см. рис. 1.1.

Пусть задано семейство отображений $\varphi_\lambda = \varphi(\cdot, \lambda) : (\mathbb{C}^c, 0) \to (\mathbb{C}^{c+\ell}, 0)$, гладко зависящих от дополнительного параметра $\lambda \in \mathbb{C}^k$, такое, что φ_0 имеет заданную особенность α в начале координат. Это семейство называется $\mathcal{K}$*-версальной деформацией* особенности α, если отображение расширенного пространства параметров $(x, \lambda) \in \mathbb{C}^{c+k}$ в пространство струй $J_0^K(\mathbb{C}^c, \mathbb{C}^{c+\ell})$, задаваемое K-струйным расширением семейства, трансверсально орбите α.

Версальная деформация ростка f с минимально возможным числом параметров называется *миниверсальной.* Ее можно построить следующим образом. Зафиксировав систему координат, отождествим пространство $J_0^K(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ с пространством $P(m, n, K)$ столбцов из n многочленов степени не выше K без свободного члена от m переменных. Рассмотрим подпространство, являющееся линейной оболочкой касательного пространства к $\mathcal{K}$-орбите α и пространства, порожденного столбцами K-струй частных производных $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть столбцы $e_1, \ldots, e_p$ образуют базис факторпространства. Тогда семейство

$$f + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

является миниверсальной деформацией. Если не заботиться о том, чтобы версальная деформация имела минимальное число параметров, то для нее имеется следующая универсальная конструкция: достаточно рассмотреть деформацию вида $(x, P) \mapsto f(x) + P(x)$, где P — точка пространства $P(m, n, K)$ и K — номер достаточной струи ростка f.

Со всяким семейством φ можно связать отображение $f : \mathbb{C}^{c+k} \to \mathbb{C}^{c+\ell+k}$, $(x, \lambda) \mapsto (\varphi(x, \lambda), \lambda)$. Это отображение называется *разверткой* семейства φ. Обратно, росток всякого отображения $f : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m+\ell}, 0)$ в подходящих координатах можно представить в виде развертки некоторого семейства φ, причем размерность c области определения отображений семейства может быть выбрана равной корангу отображения f, то есть размерности ядра производной f_* в начале координат. Отметим, что $\mathcal{K}$-особенности отображений f и φ в начале координат стабильно эквивалентны. Таким образом, теорему Мазера можно переформулировать следующим образом: *всякий устойчивый росток является разверткой* $\mathcal{K}$*-версальной деформации своего генотипа.* Как правило, особенности малых коразмерностей не имеют модулей, и потому устойчивы.

1.6.1. Пример. При $\ell = 1$ классификация особенностей отображений $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m+1}, 0)$ вплоть до коразмерности 8 дискретна. Список генотипов особенностей коразмерности $\leqslant 8$ приведен ниже. Коранг особенности совпадает с числом переменных, от которых зависят функции генотипа (x, если коранг равен одному; x, y, если коранг равен двум и т.д.).

Тип	codim	Коранг	Нормальная форма	Ограничения
A_0	0	0	0	
A_k	$2k$	1	$x^{k+1},\ 0$	$k \geqslant 1$
$III_{2,2}$	6	2	$x^2,\ y^2,\ x\,y$	
$I_{2,2}$	7	2	$x^2,\ y^2,\ 0$	
$III_{2,3}$	8	2	$x^2,\ x\,y,\ y^3$	

1.6.2. Пример. При $\ell = 0$ классификация особенностей отображений $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ (то есть 0-мерных полных пересечений) вплоть до коразмерности 8 дискретна. Список генотипов особенностей коразмерности $\leqslant 8$ приведен ниже.

Тип	codim	Коранг	Нормальная форма	Ограничения
A_0	0	0	x	
A_k	k	1	x^{k+1}	$k \geqslant 1$
$I_{k,l}$	$k+l$	2	$xy,\ x^k + y^l$	$l \geqslant k \geqslant 2$
I_7	7	2	$x^2,\ y^3$	
I_8	8	2	$x^2 + y^3,\ x\,y^2$	

1.6.3. Пример. При $\ell = -1$ классификация особенностей отображений $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m-1}, 0)$ (то есть 1-мерных полных пересечений) вплоть до коразмерности 8 дискретна. Список генотипов особенностей коразмерности $\leqslant 8$ приведен ниже.

Тип	codim	Коранг	Нормальная форма	Ограничения
A_0	0	1	x	
A_k	$k+1$	2	$x^{k+1} + y^2$	$k \geqslant 1$
D_k	$k+1$	2	$x^2 y + y^{k-1}$	$k \geqslant 4$
E_6	7	2	$x^3 + y^4$	
E_7	8	2	$x^3 + x\,y^3$	
S_k	$k+1$	3	$x^2 + y^2 + z^{k-3},\ y\,z$	$k \geqslant 5$
T_7	8	3	$x^2 + y^3 + z^3,\ y\,z$	
U_7	8	3	$x^2 + y\,z,\ x\,y + z^3$	

Классификация *вещественных* ростков малых размерностей устроена подобным образом. Некоторые из комплексных особенностей имеют по несколько неэквивалентных вещественных форм. В данных размерностях вещественная коразмерность вещественной особенности равна комплексной коразмерности ее комплексификации. Имеются примеры (довольно большой коразмерности), когда это свойство нарушается.

Аналогично случаю индивидуальных ростков, имеется теория мультиростков. Пусть $S = \{s_1, \ldots, s_r\} \subset \mathbb{C}^m$ — конечное множество из r попарно различных точек. *Мультиросток* $f : (\mathbb{C}^m, S) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ задается набором ростков $f_i : (\mathbb{C}^m, s_i) \to (\mathbb{C}^n, 0)$. Его *мультиособенностью* называется набор $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ особенностей ростков f_i. Назовем мультиросток *устойчивым*, если 1) каждый из индивидуальных ростков f_i является устойчивым; 2) гладкие образы многообразий особенностей α_i при отображении f_i пересекаются в $(\mathbb{C}^n, 0)$ трансверсально (говорят, что набор гладких подмногообразий пересекается *трансверсально* в точке y, если коразмерность пересечения их касательных пространств равна сумме коразмерностей подмногообразий).

Семейство мультиростков называется *версальной деформацией мультиростка*, соответствующего нулевому значению параметра семейства, если его развертка является устойчивым мультиростком. Пусть задан мультиросток f, состоящий из произвольного набора конечноопределенных ростков f_i. Тогда нетрудно увидеть, что для некоторого достаточно большого K семейство $(x, P) \mapsto f(x) + P(x)$ является версальным, где P — точка пространства $P(m, n, K)$ глобально заданных полиномиальных отображений $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ степени не выше K. Это утверждение можно переформулировать в виде следующей несложной леммы.

1.6.4. Лемма. *Пусть задан набор чисел $K_1, \ldots, K_r$. Тогда найдется достаточно большое K, обладающее следующим свойством: для любого набора попарно различных точек $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{C}^m$ существует полиномиальное отображение $P : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, содержащее в качестве компонент многочлены степени не выше K, которое реализует любой наперед заданный набор K_i-струй в точках s_i (важно, что число K не зависит от расположения точек $s_1, \ldots, s_r$).*

Из леммы вытекает следующее важное следствие.

1.6.5. Предложение. *Пусть $f : (\mathbb{C}^m, S) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ — устойчивый (мульти)росток. Тогда для произвольного набора любого количества попарно различных точек $s_1, \ldots, s_r$ из некоторой окрестности конечного множества S, таких, что $f(s_1) = \cdots = f(s_r)$, мультиросток f в точках $s_1, \ldots, s_r$ также устойчив. Иными словами, если данное семей-*

ство является $\mathcal{K}$-версальной деформацией некоторого (мульти)ростка, то оно индуцирует также $\mathcal{K}$-версальную деформацию всякого другого (мульти)ростка, встречающегося в семействе.

Действительно, из леммы вытекает, что это утверждение справедливо для семейства вида $(x, P) \mapsto f(x) + P(x)$, $P \in P(m, n, K)$, $K \gg 0$, а следовательно, по теореме Мазера, оно справедливо для любой версальной деформации.

1.6.6. В теории особенностей рассматриваются и другие классификации. Рассмотрим, в частности, **классификацию критических точек функций**. Два ростка функций $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называются $\mathcal{R}$-эквивалентными, (соответственно $\mathcal{K}$-эквивалентными), если один из них переводится в другую заменой координат в пространстве-прообразе $\mathbb{C}^m$ (соответственно, заменой координат в $\mathbb{C}^m$ и умножением на обратимую функцию). Две функции от, возможно, различного числа переменных, называются стабильно ($\mathcal{R}$- или $\mathcal{K}$-) эквивалентными, если они становятся эквивалентными при добавлении невырожденных квадратичных форм от дополнительных переменных.

Минимальное число переменных, от которых может зависеть функция, стабильно эквивалентная данной, называется ее *корангом.* Равносильное определение: коранг равен размерности ядра второго дифференциала функции, то есть число нулевых квадратов в нормальной форме квадратичной формы, задаваемой членами степени 2 ряда Тейлора. Стабилизация позволяет сравнивать функции от различного числа переменных. В $\mathcal{R}$-классификации орбит больше, однако вплоть до коразмерности 7 классификации не различаются и приведены ниже (коразмерность вычисляется в пространстве ростков (струй) функций, имеющих критическую точку в начале координат).

Тип	codim	Коранг	Нормальная форма	Ограничения
A_0	0	0	0	
A_k	k	1	x^{k+1}	$k \geqslant 1$
D_k	k	2	$x^2\, y + y^{k-1}$	$k \geqslant 4$
E_6	6	2	$x^3 + y^4$	
E_7	7	2	$x^3 + x\, y^3$	
P_8	7	3	$x^3 + y^3 + z^3 + a\, x\, y\, z$	$a^3 + 27 \neq 0$

Класс P_8 образует однопараметрическое семейство неэквивалентных особенностей. Коразмерность каждой особенности семейства равна 8, в то время как коразмерность их объединения — 7.

В теории критических точек функций имеются также теорема о конечной определенности, понятие версальной деформации и т.п. Отметим, что гиперповерхность, задаваемую нулевым множеством уровня функции $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ можно рассматривать как $(m-1)$-мерное полное пересечение. При этом стабильно эквивалентным функциям соответствуют полные пересечения различных, вообще говоря, размерностей. Стабилизация, аналогичная стабилизации особенностей функций, не продолжается на особенности полных пересечений, задаваемые отображениями $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, у которых размерность коядра больше 1.

Глава 2

Классифицирующее пространство моноособенностей

2.1 Многочлены Тома

Многие задачи теории особенностей могут быть сформулированы как задачи классификации орбит некоторого действия группы Ли. Например, в случае особенностей отображений рассмотрим пространство

$$V = J_0^K(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \tag{2.1}$$

K-струй в начале координат ростков отображений $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. Мы рассматриваем это пространство вместе с действием группы Ли

$$G = J_0^K \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^m) \times J_0^K \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n) \tag{2.2}$$

K-струй лево-правых замен координат в окрестности начала координат.

Определение. *Классом особенностей* называется произвольное G-инвариантное подмножество $\Xi \subset V$.

Если $f : M^m \to N^n$ — гладкое отображение общего положения, то множество точек $\Xi(f) \subset M$, в которых росток отображения f принадлежит классу Ξ, имеет ту же коразмерность, что и $\Xi \subset V$. Более того, если класс особенностей $\Xi \subset V$ является алгебраическим подмногообразием (с особенностями), то цикл $\Xi(f) \subset M$ обладает фундаментальным классом $\mathbb{Z}_2$-гомологий, и когомологический класс, двойственный ему по Пуанкаре, корректно определен.

2.1.1. Теорема (Том, [81, 34])**.** *Для всякого алгебраического класса особенностей $\Xi \subset V$ существует универсальный многочлен P_Ξ (называемый* многочленом Тома*) от классов Штифеля-Уитни $\omega_1(M), \ldots, \omega_m(M)$, $f^*\omega_1(N), \ldots, f^*\omega_n(N)$, такой, что для отображения $f : M \to N$ общего положения класс когомологий, двойственный циклу $\Xi(f)$, задается этим многочленом,*

$$[\Xi(f)] = P_\Xi(\omega(M), f^*\omega(N)) \in H^*(M, \mathbb{Z}_2).$$

2.2 Условие общности положения

Условие общности положения из предыдущей теоремы формулируется следующим образом. Рассмотрим локально тривиальное расслоение $E \to M$, слой которого E_x над точкой $x \in M$ изоморфен V и состоит из всех K-струй ростков отображений $(M, x) \to (M, f(x))$. Структурная группа этого расслоения редуцирована к G, и, с точностью до изоморфизма G-расслоений, оно не изменяется при гомотопии отображения f. Класс особенностей Ξ задает подпространство $\Xi(E) \subset E$ в тотальном пространстве этого расслоения струй. Если Ξ локально алгебраично, то таковым же является и $\Xi(E)$, и коразмерность Ξ в V равна коразмерности $\Xi(E)$ в E. Следовательно, двойственный этому циклу класс когомологий $[\Xi(E)] \in H^*(E, \mathbb{Z}_2)$ всегда корректно определен. Отображение f задает естественное сечение s_f расслоения E, значение которого в точке $x \in M$

равно K-струе самого отображения f в этой точке.

Если Ξ алгебраично, то пространство E допускает стратификацию Уитни, для которой Ξ является объединением некоторого количества стратов.

Определение. Отображение $f : M \to N$ называется *трансверсальным* по отношению к особенности Ξ, если его струйное расшинение s_f трансверсально каждому страту в E.

Общие отображения из теоремы Тома — это те, которые являются трансверсальными. По теореме трансверсальности, всякое сечение $s : M \to E$ общего положения является трансверсальным. Более того, согласно сильной теореме трансверсальности, принадлежащей Тому, условие трансверсальности может быть достигнуто путем малого шевеления самого отображения f, то есть в классе «интегрируемых» сечений.

2.3 Обобщение теоремы Тома

В действительности, ни интегрируемость сечения s_f, ни специфика группы G и ее действия на V не играют никакой роли. Рассмотрим произвольное алгебраическое действие некоторой группы Ли G на стягиваемом пространстве V и пусть $\Xi \subset V$ — замкнутое алгебраическое G-инвариантное (возможно, особое) подмногообразие.

Пусть задано расслоение $\pi : E \to M$ со структурной группой G и слоем V. Тогда корректно определен цикл $\Xi(E) \subset E$ в тотальном пространстве расслоений и двойственный ему класс $[\Xi(E)] \in H^*(E, \mathbb{Z}_2)$ когомологий. *Зададим* класс $P_\Xi \in H^*(M)$ как класс, переходящий в $[\Xi(E)]$ при изоморфизме $\pi^* : H^*(M, \mathbb{Z}_2) \to H^*(E, \mathbb{Z}_2)$.

2.3.1. Теорема. *Класс $P_\Xi \in H^*(M)$ является универсальным характеристическим классом группы G. Если $s : M \to E$ — сечение,* *трансверсальное по отношению к $\Xi(E)$, то P_Ξ двойственно циклу точек $\Xi(s) = s^{-1}(\Xi(E)) \subset M$, в которых сечение s имеет «особенность» Ξ.*

В таком виде теорема Тома становится очевидной и вытекает из следующего замечания: если $f : M \to N$ — гладкое отображение многообразий, трансверсальное по отношению к некоторому замкнутому циклу $S \subset N$, то индуцированный гомоморфизм когомологий $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ переводит класс, двойственный циклу S в класс, двойственный циклу $f^{-1}(S)$.

2.4 Комплексная версия

Приведенные выше теоремы имеют также естественные комплексные аналоги, в которых гладкие отображения гладких многообразий заменены голоморфными отображениями комплексных аналитических многообразий, $\mathbb{Z}_2$-когомологии заменены целочисленными, классы Штифеля-Уитни классами Чженя и т.п. В комплексной ситуации условие трансверсальности открыто, но не обязательно является всюду плотным. Аналогично вещественному случаю, многочлен Тома (с целыми коэффициентами) задается равенством

$$P_\Xi(c(M), f^*c(N)) = (\pi^*)^{-1}[\Xi(E)] \in H^*(M). \tag{2.3}$$

Этот класс имеет следующую интерпретацию.

- Если сечение s_f трансверсально к $\Xi(E)$, то $P_\Xi(c(M), f^*c(N)) = [\Xi(f)]$.
- Равенство $P_\Xi(c(M), f^*c(N)) = [\Xi(f)]$ справедливо также, если цикл особенностей $\Xi(f)$ имеет «ожидаемую коразмерность». В этом случае компоненты особого подмногообразия $\Xi(f)$ необходимо брать с кратностями, предписываемыми структурой схемы на $\Xi(f) = s_f^{-1}(\Xi(E))$.

- Если коразмерность $\Xi(f)$ меньше ожидаемой, то можно гарантировать только, что класс, двойственный по Пуанкаре классу $P_\Xi(c(M), f^*c(N))$, может быть представлен замкнутой сингулярной цепью с носителем в $\Xi(f)$. Отсюда вытекает, в частности, что $\Xi(f)$ непусто, если $P_\Xi \neq 0$ в $H^*(M)$.

- В любом случае можно игнорировать голоморфную структуру на M и рассмотреть общее C^∞-шевеление $s : M \to E$ сечения s_f. Тогда P_Ξ двойственно циклу $s(\Xi)$ (являющемуся вещественным коориентированным локально аналитическим особым подмногообразием в M).

Во многих задачах имеется соответствие между классификациями вещественных и комплексных особенностей: всякая комплексная особенность имеет вещественного представителя, и вещественная коразмерность вещественной особенности равна комплексной коразмерности ее комплексификации. У этого наблюдения не существует априорного доказательства. Более того, существуют контрпримеры, которые показывают, что указанное соответствие не всегда имеет место. Все известные контрпримеры достаточно вырождены и имеют высокую коразмерность, см., например, [85]. Поэтому можно сформулировать общий *принцип комплексификации* [13], который необходимо доказывать в каждом конкретном случае независимо: *многочлен Тома вещественной особенности может быть получен из многочлена Тома соответствующей комплексной особенности заменой классов Чженя на соответствующие классы Штифеля-Уитни и приведением всех коэффициентов по модулю* 2.

2.5 Классифицирующее пространство особенностей и определение многочленов Тома

Несмотря на полезность абстрактной теоремы существования, желательно все же иметь явную конструкцию для многочленов Тома. Эта конструкция приводится в данном пункте. Характеристические классы, двойственные циклам особенностей гладкого отображения $f : M \to N$, определяются при помощи вспомогательного (V, G)-расслоения $E \to M$ струй, см. (2.1), (2.2). Это расслоение может быть индуцированно из универсального классифицирующего (V, G)-расслоения $BV \to BG$. Конструкция классифицирующего пространства BV применима для произвольного гладкого действия группы Ли G на (стягиваемом) многообразии V и используется также в определении эквивариантных когомологий Бореля для G-пространства V.

Рассмотрим классифицирующее главное G-расслоение $EG \to BG$, т.е. стягиваемое пространство EG, снабженное свободным действием группы G. Это действие продолжается до диагонального действия на произведении $V \times EG$.

Определение [41, 42]. *Классифицирующим пространством особенностей BV* называется тотальное пространство (V, G)-расслоения, ассоциированное с главным классифицирующим G-расслоением $EG \to BG$,

$$BV = V \times_G EG = (V \times EG)/G.$$

Проекция на второй множитель $BV \to EG/G = BG$ является расслоением со слоем, изоморфным V, и структурной группой G. Поскольку пространство V стягиваемо, проекция $BV \to BG$ индуцирует изоморфизм групп (ко)гомологий,

$$H^*(BV, \mathbb{Z}_2) \cong H^*(BG, \mathbb{Z}_2).$$

С другой стороны, всякий класс особенностей $\Xi \subset V$ задает подпространство $B\Xi = \Xi \times_G EG \subset BV$. Если Ξ — алгебраическое особое подмногообразие, то $\operatorname{codim}_{BV} B\Xi = \operatorname{codim}_V \Xi$ и класс когомологий, двойственный циклу $B\Xi$ корректно определен.

Определение. *Многочленом Тома* класса особенностей Ξ называется класс когомологий $P_\Xi \in H^*(BV, \mathbb{Z}_2) = H^*(BG, \mathbb{Z}_2)$, двойственный циклу $B\Xi \subset BV$ и выраженный через мультипликативные образующие кольца $H^*(BG, \mathbb{Z}_2)$.

Если G — группа Ли струй лево-правых замен переменных, то она стягивается на свою подгруппу $GL(m, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$ линейных замен, и следовательно, ее максимальная компактная подгруппа изоморфна $O(m) \times O(n)$. Поэтому в этом случае многочлен Тома — элемент кольца

$$H^*(BG, \mathbb{Z}_2) \cong H^*(BO(m) \times BO(n), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\omega_1, \ldots, \omega_m, \omega_1', \ldots, \omega_n']$$

многочленов от классов Штифеля-Уитни.

Замечание. Классифицирующие пространства BG, BV бесконечномерны, и поэтому использование двойственности Пуанкаре при определения многочлена Тома нуждается в обосновании. Простейший способ преодоления этой трудности состоит в том, чтобы заменить классифицирующее главное расслоение $EG \to BG$ его конечномерной аппроксимацией, то есть гладким главным G-расслоением $EG_N \to BG_N$ с N-связным тотальным пространством EG_N. Тогда имеют место изоморфизмы $H^p(BG_N, \mathbb{Z}_2) \cong H^p(BG, \mathbb{Z}_2)$ для всех $p < N$, и мы можем положить

$$P_\Xi = [\Xi \times_G EG_N] \in H^c(V \times_G EG_N, \mathbb{Z}_2) \cong H^c(BG_N, \mathbb{Z}_2) \cong H^c(BG, \mathbb{Z}_2),$$

где $c = \operatorname{codim} \Xi$. Этот класс когомологий не зависит от конечномерной аппроксимации EG_N, если $N > \operatorname{codim} \Xi$.

Замечание. В [74] Сюч и Римани использовали альтернативный подход к определению классифицирующего пространства особенностей, основанный на идее склеивания классифицирующих пространств групп симметрий особенностей, применявшейся также в более ранних работах Сюча. Из этой конструкции не видна столь простая топология классифицирующего пространства. Эта конструкция может быть применима также и к изучению мультиособенностей, см. [72, 73, 79] и главу 5.

2.6 Стабилизация

Одним из наиболее важных инвариантов ростка отображения $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^{m+\ell}, 0)$, $y = f(x)$ является его *локальная алгебра* $Q_f = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m,0}/f^*\mathfrak{m}_{\mathbb{R}^{m+\ell},0}$, то есть факторалгебра алгебры ростков функций в начале координат в $(\mathbb{R}^m, 0)$ по идеалу, порожденному компонентами f_i ростка f. При $\ell \geqslant 0$ алгебра Q_f конечномерна. Точнее, множество ростков f, для которых $\dim Q_f = \infty$, образует подпространство бесконечной коразмерности в пространстве всех ростков. Такие ростки не встречаются в конечнопараметрических семействах отображений общего положения, и мы их не рассматриваем.

Определение. Два ростка отображений $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^{m+\ell}, 0)$ и $f' : (\mathbb{R}^{m'}, 0) \to (\mathbb{R}^{m'+\ell}, 0)$ (с, возможно, различными m, m', но с одинаковыми ℓ) называются *стабильно $\mathcal{K}$-эквивалентными*, если их локальные алгебры изоморфны, $Q_f \cong Q_{f'}$. Класс особенностей Ξ называется *стабильным*, если он задан одновременно при всех m и вместе с каждым ростком f содержит также все ростки, стабильно эквивалентные f.

Стабилизация позволяет сравнивать особенности ростков отображений многообразий различных размерностей. Коразмерность стабильного класса особенностей ростков $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^{m+\ell}, 0)$, заданного некоторой совокупностью локальных алгебр, не зависит от m (но существенно зависит от ℓ). Таким образом, для каждого ℓ имеется независимая задача стабильной классификации ростков отображений $(\mathbb{R}^*, 0) \to (\mathbb{R}^{*+\ell}, 0)$.

Имеются две операции над ростками отображений, которые изменяют размерности отображаемых многообразий и приводят к стабильно эквивалентным особенностям. *Надстройка* сопоставляет ростку $x \mapsto f(x)$ новый росток $(x, y) \mapsto (f(x), y)$, где $y = (y_1, \ldots, y_k)$ — набор дополнительных независимых переменных. *Редукция* сопоставляет ростку отображения, записанному в локальных координатах в виде $(x, y) \mapsto (f(x, y), y)$, росток отображения $x \mapsto f(x, 0)$. Обобщая эти конструкции, рассмотрим расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & M \\ \downarrow\varphi & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

в котором M, N, Y — гладкие многообразия и f, g — гладкие отображения. Пространство X расслоенного произведения определяется как прообраз диагонали при отображении $g \times f : Y \times M \to N \times N$. Мы будем говорить, что отображение φ *индуцировано* из f отображением g. Тогда при выполнении легко формулируемого условия трансверсальности X также является гладким многообразием. При этом, как легко увидеть, *индуцированное отображение имеет ту же относительную размерность*

$$\dim Y - \dim X = \dim N - \dim M,$$

и его особенности стабильно $\mathcal{K}$-эквивалентны особенностям исходного отображения f.

2.6.1. Теорема [23]. *Многочлен Тома стабильного класса особенностей может быть выражен как многочлен от относительных классов Штифеля-Уитни $\omega_i(f^*TN - TM)$, заданных как однородные компоненты разложения*

$$\omega(f^*TN - TM) = \frac{1 + f^*\omega_1(N) + f^*\omega_2(N) + \dots}{1 + \omega_1(M) + \omega_2(M) + \dots}.$$

Доказательство. Описанную выше операцию надстройки можно осуществить глобально следующим образом. Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение, и $U \to M$ — векторное расслоение. Рассмотрим семейство ростков отображений

$$f \times \mathrm{id} : (M \times U_x, x) \to (N \times U_x, f(x)), \quad x \in M.$$

Особенности этих ростков для каждого $x \in M$ стабильно эквивалентны особенностям самого отображения f в точке x. Струйные расширения этих ростков задают сечение расслоения на M, слоем которого в точке

$x \in M$ служит пространство струй ростков отображений $(M \times U_x, x) \to (N \times U_x, f(x))$. Характеристические классы этого расслоения — многочлены от классов Штифеля-Уитни расслоений $TM \oplus U$ и $f^*TN \oplus U$. Согласно (обобщенной) теореме Тома многочлен Тома особенности Ξ равен $P_\Xi(\omega(TM \oplus U), \omega(f^*TN \oplus U))$ и не зависит от U. Если выбрать в качестве U такое расслоение, что $TM \oplus U$ тривиально, то мы получим

$$P_\Xi(\omega(TM), \omega(f^*TN)) = P_\Xi(1, \omega(f^*TN - TM)). \qquad \square$$

Из этой теоремы вытекает, что для вычисления многочленов Тома стабильных особенностей достаточно рассматривать только те отображения, у которых областью значений служит евклидово пространство $N = \mathbb{R}^n$.

2.6.2. Замечание. Приведенное в предыдущем пункте формальное определение классифицирующего пространства допускает довольно простую геометрическую реализацию. Мы дадим описание этой реализации для версии теории, учитывающей стабилизацию этого пункта. Для заданных ℓ, K выберем достаточно большие натуральные $n \gg m \gg 0$. Обозначим через $\mathcal{G}_{m,n}$ *многообразие K-струй ростков в* 0 *всех m-мерных гладких подмногообразий в* $(\mathbb{R}^n, 0)$. Это многообразие гомотопически эквивалентно грассманиану $G_{m,n}$ (поскольку K-струи всех подмногообразий с общей касательной плоскостью образуют клетку), и кольцо $\mathbb{Z}_2$-когомологий этого пространства порождено классами Штифеля-Уитни. Точки этого пространства классифицированы в соответствии с особенностями проекции на фиксированную координатную плоскость $\mathbb{R}^{m+\ell} \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\widetilde{\Xi} \subset \mathcal{G}_{m,n}$ множество точек, для которых эта проекция имеет особенность Ξ. Класс когомологий, двойственный $\widetilde{\Xi}$ (и выраженный через мультипликативные образующие кольца когомологий грассманиана), может быть взят в качестве независимого определения многочлена Тома. Эта геометрическая конструкция сводит задачу вычисления многочлена Тома к изучению геометрии грассманиана.

2.6.3. Замечание. Приведенное доказательство теоремы существования многочлена Тома переносится на случай комплексных многообразий и голоморфных отображений автоматически. Для стабильной $\mathcal{K}$-классификации особенностей в качестве классифицирующего пространства комплексных особенностей выступает многообразие $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{m,n}$ K-струй ростков в 0 m-мерных голоморфных подмногообразий в $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Отметим, что в голоморфном случае конечномерные аппроксимации классифицирующих пространств BV, BG можно выбрать гладкими голоморфными многообразиями. Вместе с тем классифицирующее отображение $\varkappa : M \to BG$, индуцирующее (V,G)-расслоение струй, связанное с данным отображением $f : M \to N$, не обязательно голоморфно, и в общем случае может быть выбранным только C^∞-гладким.

2.6.4. Замечание. Подобная стабилизация, позволяющая сравнивать особенности в пространствах различных размерностей, существует и в других задачах теории особенностей. Например, стабильная классификация критических точек функций связана с лагранжевыми и лежандровыми особенностями и приводит к лагранжевым и лежандровым характеристическим классам, см. [83, 41] и главу 4.

2.7 Расщепление когомологий классифицирующего пространства

Рассмотрим какую-нибудь классификационную задачу теории особенностей, формулируемую как перечисление орбит действия группы Ли G на гладком стягиваемом многообразии V. Классифицирующее пространство $BV = V \times_G EG$ этого действия разбито на страты $B\Xi = \Xi \times_G EG \subset BV$, отвечающие различным орбитам Ξ этого действия.

Рассмотрим некоторую орбиту Ξ, и зафиксируем ее произвольного представителя $x \in \Xi$ (в теории особенностей его называют также «нормальной формой» особенности Ξ). Пусть $G_x \subset G$ — стабилизатор точки x, и $G_\Xi \subset G_x$ — его максимальная компактная подгруппа. Группа G_Ξ не зависит, с точностью до изоморфизма, ни от выбора максимальной компактной подгруппы, ни от представителя $x \in \Xi$.

2.7.1. Определение. *Группой симметрий* G_Ξ особенности Ξ называется максимальная компактная подгруппа в стабилизаторе любого представителя орбиты Ξ.

2.7.2. Лемма. *Пространство* $B\Xi$*, отвечающее орбите* Ξ*, имеет гомотопический тип классифицирующего пространства* BG_Ξ *группы симметрий* G_Ξ*.*

Доказательство. Поскольку пространство EG классифицирующего главного G-расслоения стягиваемо, его можно рассматривать также в качестве пространства классифицирующего главного G_x-расслоения. Следовательно, имеют место отождествления

$$B\Xi \sim G/G_x \times_G EG = EG/G_x = BG_x \sim BG_\Xi. \qquad \square$$

Приведенная лемма имеет аналог и для случая стабильных классификаций п. 2.6, не связанных на прямую с действием какой-либо одной группы Ли. Рассмотрим, например, стабильную $\mathcal{K}$-классификацию ростков отображений $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^{m+\ell})$, в которой ℓ фиксировано, а m может меняться.

2.7.3. Определение. *Группой симметрий* G_Ξ *класса* Ξ *стабильной* $\mathcal{K}$*-классификации* называется максимальная компактная подгруппа в $\mathcal{K}$-стабилизаторе любого представителя $(\mathbb{R}^c, 0) \to (\mathbb{R}^{c+\ell}, 0)$ этого класса с минимально возможным числом c переменных, равным корангу особенности Ξ.

2.7.4. Лемма. *Пространство* $B\Xi$*, отвечающее стабильному классу* $\mathcal{K}$*-особенностей* Ξ*, имеет гомотопический тип классифицирующего пространства* BG_Ξ *группы симметрий* G_Ξ*.*

Доказательство. Воспользуемся моделью для классифицирующего пространства, приведенной в замечании 2.6.2. Для этой модели пространство $B\Xi$ состоит из всевозможных ростков m-мерных подмногообразий в

$M \subset (\mathbb{R}^n, 0)$, для которых проекция $f : M \to \mathbb{R}^{m+\ell}$ на фиксированное координатное подпространство $\mathbb{R}^{m+\ell} \subset \mathbb{R}^n$ имеет заданную $\mathcal{K}$-особенность Ξ. Производная f_* отображения f имеет в начале координат c-мерное ядро и $(m-c)$-мерный образ.

Описанная в предыдущем пункте операция редукции позволяет уменьшить размерности многообразий, участвующих в отображении f. Выберем росток произвольного $(c+\ell)$-мерного подмногообразия $Y \subset \mathbb{R}^{m+\ell}$, трансверсальный в начале координат пространству $\mathrm{Im} f_* T_0 M$. Этот росток строится по исходному многообразию M однозначно с точностью до выбора из стягиваемого множества. При желании этот выбор можно зафиксировать, взяв в качестве Y векторное пространство, ортогональное $\mathrm{Im} f_* T_0 M$. Тогда многообразие $X = f^{-1}Y \subset M$ гладко и индуцированное отображение $\varphi : X \to Y$ имеет в начале координат особенность, принадлежащую тому же стабильному классу Ξ.

Последнее условие равносильно тому, что на многообразии X можно ввести координаты $x_1, \dots, x_c$, в которых идеал $\varphi^* \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{Y,0}}$ в точности совпадает с идеалом, порожденным компонентами заранее выбранной «нормальной формы» $f_0 : \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}^{c+\ell}$ особенности Ξ. Эта система координат определяется неоднозначно, и произвол состоит в выборе элемента из группы симметрий G_Ξ. Таким образом, пространство $B\Xi$ является базой главного G_Ξ-расслоения, и осталось заметить, что тотальное пространства этого расслоения имеет исчезающую с ростом m, n топологию. $\square$

Леммы 2.7.2 и 2.7.4 позволяют определить классифицирующее пространство BV особенностей индуктивно, склеивая его из классифицирующих пространств BG_Ξ групп симметрий различных классов особенностей. Предположим для простоты, что выбранная классификация имеет лишь конечное число особенностей в каждой коразмерности (технические трудности, возникающие в случае, когда имеются непрерывные семейства неэквивалентных особенностей, преодолены в [41, 42] при помощи техники, развитой в [83]). Рассмотрим на BV возрастающую фильтрацию открытыми множествами, p-й член которой F_p образован объединением всех стратов $B\Xi$, вещественная коразмерность которых не превышает p. Ассоциированная с этой фильтрацией спектральная последовательность называется *характеристической спектральной последовательностью*. Эта спектральная последовательность сходится к когомологиям классифицирующего пространства BV. Ее начальный член, согласно леммам 2.7.2 и 2.7.4, имеет вид

$$E_1^{p,q} \simeq \bigoplus_p H^{p+q}(F_p/F_{p-1}) \simeq \bigoplus_{\operatorname{codim}\Xi=p} H^q(BG_\Xi).$$

Сдвиг размерностей происходит вследствие изоморфизма Тома, см. п. 1.1. Кроме того, когомологии пространств $B\Xi \sim BG_\Xi$ необходимо рассматривать с коэффициентами в локально постоянной системе коэффициентов, отвечающей коориентации гладкого подмногообразия $B\Xi \subset BV$, см. подробности в [41, 42]. Особенно просто эта спектральная последовательность выглядит в комплексных классификационных задачах, когда вещественная коразмерность каждой особенности четная и все дифференциалы обращаются в ноль. В этом случае спектральная последовательность вырождается в начальном члене и приводит к расщеплению

$$H^p(BV) \simeq \bigoplus_\Xi H^{p-\operatorname{codim}\Xi}(BG_\Xi),$$

справедливому с точностью до кручения и определенному с точностью до присоединения в предельной группе гомологий $H^*(BV)$. Учет этого расщепления позволяет предсказывать существование классов особенностей с теми или иными свойствами симметрий.

Глава 3

Вычисление многочленов Тома для комплексных особенностей

3.1 Классы Портеуса-Тома и их производные

В этой главе мы приводим некоторые из методов вычисления многочленов Тома. Эти методы иллюстрируются на примере вычисления так называемых классов Портеуса-Тома. Если не оговорено противное, все многообразия, расслоения, и т.п. предполагаются комплексными, а под когомологиями мы понимаем когомологии с целыми коэффициентами. В конце главы мы обсуждаем вопрос о том, какие из данных методов переносятся на случай вещественных отображений и когомологий с $\mathbb{Z}_2$-коэффициентами.

С точки зрения определений главы 2, классам Портеуса-Тома соответствуют орбиты действия лево-правых линейных замен на пространстве линейных отображений $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{m+\ell})$, где $\ell \in \mathbb{Z}$ фиксировано и $m \gg 0$. Орбитами этого действия служат пространства отображений фиксированного ранга. Обозначим через Ω_r пространство отображений, имеющих размерность ядра в точности r. С учетом стабилизации, описанной в п. 2.6, группа симметрий орбиты Ω_r изоморфна $U(r)\times U(r+\ell)$ (где множители соответствуют линейным преобразованиям ядра и коядра гомоморфизма соответственно). По соображениям размерностей, характеристическая спектральная последовательность вырождается в начальном члене, что дает следующее расщепление кольца характеристических классов векторных расслоений.

3.1.1. Теорема. *Для всякого $\ell \in \mathbb{Z}$ и всех $n \geqslant 0$ имеет место расщепление*

$$H^{2n}(BU) \simeq \bigoplus_r H^{2(n-r(r+\ell))}(BU(r) \times BU(r+\ell)). \qquad \square$$

Классы, входящие в слагаемые правой части равенства, являются классами Портеуса-Тома и их производными. Этот пункт посвящен определению и вычислению этих классов.

Пусть задано «достаточно общее» гладкое отображение $f : X \to Y$ комплексных неособых многообразий (условие общности положения объясняется ниже). Обозначим через $\Sigma^r = \Sigma^r(f) \subset X$ подмножество точек базы, в которых ядро дифференциала отображения f имеет размерность по крайней мере r. *Классом Портеуса-Тома* называется класс когомологий $[\Sigma^r]$, двойственный циклу Σ^r. Согласно общему принципу главы 2 существования многочлена Тома, класс Портеуса-Тома выражается как универсальный многочлен от относительных классов $c_i = c_i(f^*TY - TX)$. Явный вид этого многочлена приведен в формулируемой ниже теореме 3.1.4.

Классы Портеуса-Тома определяются морфизмом $df : TX \to f^*TY$ касательных расслоений. Более общим образом, пусть над некоторой гладкой базой X заданы комплексные векторные расслоения V и Q рангов m и n соответственно, и пусть задан морфизм расслоений $f : V \to Q$, то есть сечение расслоения $\mathrm{Hom}(V, Q)$. Пусть f является «достаточно общим». Тогда для общей точки базы задаваемое морфизмом f линейное отображение слоев $f_x : V_x \to Q_x$ имеет максимальный ранг $\min(m, n)$, однако в некоторых точках базы ранг отображения f_x может падать. Обозначим через $\Sigma^r = \Sigma^r(f) \subset X$ подмножество точек, в которых ядро морфизма f имеет размерность не меньше r,

$$\Sigma^r(f) = \bigl\{x \in X \bigm| \dim\ker f_x \geqslant r\bigr\}.$$

3.1.2. Определение. *Классом Портеуса-Тома* морфизма f называется класс когомологий, двойственный циклу особенностей $\Sigma^r(f)$. *Относительными классами Чженя* пары расслоений V, Q называются классы $c_i = c_i(Q - V)$.

Как было объяснено в главе 2, для произвольного морфизма f, не обязательно общего положения, можно рассмотреть класс когомологий, двойственный соответствующему циклу $\widehat{\Sigma}^r$ в тотальном пространстве расслоения $\widehat{X} = \mathrm{Hom}(V, Q)$, и определить класс Портеуса-Тома как класс, индуцированный из $[\widehat{\Sigma}^r]$ изоморфизмом

$$f^* = (\pi^*)^{-1} : H^*(\widehat{X}) \to H^*(X),$$

где f рассматривается как сечение расслоения $\pi : \widehat{X} \to X$. Иными словами, обозначим через $\widehat{V}, \widehat{Q}$ поднятия на $\widehat{X}$ расслоений V, Q соответственно. Между этими расслоениями естественный «тавтологический» морфизм $\widehat{f}$, для которого $\widehat{\Sigma}^r = \Sigma^r(\widehat{f}) \subset \widehat{X}$, и условие общности положения выполняется для $\widehat{f}$ *по определению*, а цикл $\Sigma^r(f)$ и соответствующий ему класс когомологий на базе индуцируются из цикла $\widehat{\Sigma}^r$ и двойственного ему класса когомологий сечением f. Аналогично, при помощи перехода к подходящему «пространству струй» обосновывается предположение об общности положения и в других задачах, связанных с множествами вырождений.

Можно рассмотреть еще более общую ситуацию. Пусть задано векторное расслоение E и два его подрасслоения V, W общего положения. Обозначим через Σ^r подмножество точек базы, в которых размерность пересечения слоев расслоений V и W не меньше r,

$$\Sigma^r = \bigl\{x \in X \bigm| \dim V_x \cap W_x \geqslant r\bigr\}.$$

3.1.3. Определение. *Классом Портеуса-Тома* тройки (E, V, W) называется класс когомологий, двойственный циклу Σ^r. *Относительными классами Чженя* тройки называются классы $c_i = c_i(E{-}V{-}W)$.

Ситуация этого определения обобщает ситуацию определения 3.1.2: нужно рассмотреть расслоение $E = V \oplus Q$ и два его подрасслоения, в качестве первого из которых берется $V \oplus \{0\}$, а в качестве второго — график морфизма f, состоящий из пар вида $\{y\} \oplus \{f_x(y)\}$, $x \in X$, $y \in V_x$. Обратно, цикл Σ^r из определения 3.1.3 определяется как соответствующий цикл вырождения морфизма $V \to E/W$, задаваемого естественной проекцией. Таким образом, формулы для класса Портеуса-Тома, полученные в условиях определений 3.1.2 и 3.1.3, эквивалентны.

Обозначим через $\ell = \operatorname{rk} Q - \operatorname{rk} V$ (в условиях определения 3.1.2) и $\ell = \operatorname{rk} E - \operatorname{rk} V - \operatorname{rk} W$ (в условиях определения 3.1.3) соответственно. Нетрудно увидеть, что в случае общего положения Σ^r имеет (комплексную) коразмерность $r(r+\ell)$.

3.1.4. Теорема. *Класс Портеуса-Тома задается универсальным многочленом от относительных классов Чженя c_i, имеющим вид определителя следующей матрицы размера $r \times r$.*

$$[\Sigma^r] = \det \|c_{\ell+r-i+j}\|_{i,j=1,\dots,r} = \begin{vmatrix} c_{\ell+r} & c_{\ell+r+1} & \dots & c_{\ell+2r-1} \\ c_{\ell+r-1} & c_{\ell+r} & \dots & c_{\ell+2r-2} \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{\ell+1} & c_{\ell+2} & \dots & c_{\ell+r} \end{vmatrix}.$$

Тот факт, что класс Портеуса-Тома определяется только формальной разностью $Q - V$ (соответственно, $E{-}V{-}W$) расслоений, вытекает из принципа стабилизации п. 2.6. Например, в условиях определения 3.1.3 для всяких дополнительных расслоений U_1, U_2 можно рассмотреть расслоение $\widetilde{E} = E \oplus U_1 \oplus U_2$ и два его подрасслоения, $\widetilde{V} = V \oplus U_1 \oplus \{0\}$ и $\widetilde{W} = W \oplus \{0\} \oplus U_2$. При переходе к расслоениям $\widetilde{E}, \widetilde{V}, \widetilde{W}$ цикл Σ^r остается тем же, и соответствующий класс Портеуса-Тома не зависит от U_1, U_2. В частности, мы можем подобрать U_1, U_2 так, чтобы тривиальными стали расслоения $\widetilde{V} \simeq V \oplus U_1$ и $\widetilde{W} \simeq W \oplus U_2$. Тогда мы получаем, что класс Портеуса-Тома выражается через классы Чженя $\widetilde{E}$, то есть через классы $c_i(E + U_1 + U_2) = c_i(E{-}V{-}W)$, что и утверждается.

Таким образом, при вычислении многочлена Тома можно предполагать, что любые два из трех расслоений E, V, W тривиальные. В частности, можно считать, что $E = \mathbb{C}^n$ — тривиальное расслоение и $W = \mathbb{C}^w \subset \mathbb{C}^n$ — тривиальное подрасслоение. В этом случае слои расслоения V являются v-мерными подпространствами фиксированного пространства $\mathbb{C}^n$. Иными словами, V индуцируется из тавтологического расслоения над грассманианом $G_{v,n}$ некоторым отображением $X \to G_{v,n}$. Таким образом, задача вычисления многочлена Тома свелась к случаю, когда $X = G_{v,n}$ — многообразие Грассмана, E — тривиальное расслоение ранга n, $W \subset E$ — тривиальное подрасслоение ранга w, $V \subset E$ — тавтологическое расслоение. Цикл Σ^r в данном случае совпадает с циклом Шуберта, состоящим из v-мерных плоскостей, имеющих по меньшей мере r-мерное пересечение с фиксированным подпространством размерности w. Следовательно, теорема 3.1.4 вытекает из *формулы Джамбели*, выражающей классы, двойственные к циклам Шуберта на грассманиане, через классы Чженя тавтологического расслоения. В алгебраической ситуации расслоения U, дополнительного к данному V, то есть такого, что $U \oplus V$ тривиально, как правило, не существует. Поэтому в приведенных рассуждениях приходится использовать C^∞-гладкие многообразия и отображения, не являющиеся голоморфными. Данное ниже прямое доказательство формулы теоремы не использует указанной выше редукции.

Приведем доказательство теоремы 3.1.4 в одном из простейших частных случаев, когда $r = \min(\operatorname{rk} V, \operatorname{rk} W)$. Пусть, для определенности, $r = \operatorname{rk} V \leqslant \operatorname{rk} W$. В этом случае цикл Σ^r состоит из точек x базы, для которых $V_x \subset W_x$. Следовательно, Σ^r задается обращением в нуль сечения расслоения $\operatorname{Hom}(V, E/W)$, соответствующего композиции $V \subset E \to E/W$. Отсюда вытекает, что двойственный класс когомологий равен старшему классу Чженя этого расслоения,

$$[\Sigma^r] = c_{r(r+\ell)}(\operatorname{Hom}(V, E/W)), \qquad r = \operatorname{rk} V, \quad r + \ell = \operatorname{rk} E/W.$$

Таким образом, теорема 3.1.4 для данного r вытекает из равенства (1.3) п. 1.3.10. $\square$

В случае общего положения цикл Σ^r при $r = \min(\operatorname{rk} V, \operatorname{rk} W)$ является гладким. Для других r это, вообще говоря, уже не верно: особенности Σ^r образованы точками циклов $\Sigma^{r'}$ с $r' > r$. Более того, в общем случае Σ^r не является даже локально полным пересечением, то есть этот цикл нельзя задать локально при помощи $r\,(r+\ell)$ уравнений. Поэтому этот цикл нельзя проинтерпретировать как множество нулей подходящего расслоения ранга $r\,(r+\ell)$. Один из способов доказательства формулы теоремы 3.1.4 в общем случае, равно как и более общих формул Джамбели, использует метод разрешения особенностей, рассмотренный ниже.

Для определенности мы будем рассматривать ситуацию теоремы 3.1.4 в контексте определения 3.1.3. В контексте определения 3.1.2 все построения аналогичны. Таким образом, пусть имеется комплексное векторное расслоение $E \to X$ ранга n и его подрасслоения V, W рангов v, w соответственно, и пусть подмножество $\Sigma^r \subset X$ образовано такими точками x, в которых $\dim V_x \cap W_x \geqslant r$.

3.1.5. Определение. *Разрешением особенностей цикла* Σ^r называется пространство $\widetilde{\Sigma}^r$, образованное парами вида (x, K_x), где $x \in X$ и $K_x \subset V_x \cap W_x$ — r-мерное подпространство.

Обозначим через $G_r(W) \to X$ ассоциированное грассманово расслоение, слой которого над точкой $x \in X$ состоит из всевозможных r-мерных подпространств пространства W_x. Тогда $\widetilde{\Sigma}^r$ может рассматриваться как подмножество в $G_r(W)$, заданное как множество нулей сечения расслоения $\operatorname{Hom}(K, E/V)$, где K — тавтологическое расслоение ранга r на $G_r(W)$; через E, V мы обозначили поднятие этих расслоений на $G_r(W)$, а сечение задается естественной проекцией $K_x \subset W_x \subset E_x \to E_x/V_x$. В случае общего положения, которое мы будем предполагать выполненным, *указанное сечение трансверсально нулевому, и, следовательно,* $\widetilde{\Sigma}^r \subset G_r(W)$ *является гладким подмногообразием.*

Чтобы обосновать предположение об общности положения, мы можем заменить многообразие X на тотальное пространство $\widehat{X} = G_v(E)$ ассоциированного грассманова расслоения, где $v = \operatorname{rk} V$, а расслоения E, V, W заменить на расслоения $\widehat{E}, \widehat{V}, \widehat{W}$, где $\widehat{E}, \widehat{W}$ — поднятия на $\widehat{X}$ расслоений E, W, а $\widehat{V}$ — тавтологическое расслоение ранга v на $\widehat{X} = G_v(E)$. Тогда для этих расслоений на $\widehat{X}$ условие трансверсальности, очевидно, выполняется, что обосновывает проводимое ниже вычисление многочлена Тома для $\widehat{X}$. Искомое выражение для соответствующего класса на X индуцируется из найденного для $\widehat{X}$ сечением $X \to \widehat{X} = G_v(E)$, задаваемым расслоением V. Аналогично обосновывается предположение общности положения и в других случаях, рассмотренных ниже.

Доказательство теоремы 3.1.4. Итак, без ограничения общности, мы предполагаем, что $\widetilde{\Sigma}^r \subset G_r(W)$ — гладкое подмногообразие. Обозначим через $\pi : G_r(W) \to X$ естественную проекцию. Тогда $\Sigma^r = \pi(\widetilde{\Sigma}^r)$. Над открытой частью $\Sigma^r \setminus \Sigma^{r+1}$, состоящей из тех точек x, в которых пересечение $V_x \cap W_x$ имеет размерность ровно r, проекция π отображает $\widetilde{\Sigma}^r$ на Σ^r взаимно однозначно. Следовательно, имеет место соотношение

$$[\Sigma^r] = \pi_*[\widetilde{\Sigma}^r],$$

где $\pi_* : H^*(G_r(W)) \to H^*(X)$ — гомоморфизм Гизина. Класс, двойственный $\widetilde{\Sigma}^r \subset G_r(W)$, равен

$$\begin{aligned}[\widetilde{\Sigma}^r] &= c_{r(n-w)}(\operatorname{Hom}(K, E/V)) = \det \|c_{n-w-i+j}(E - V - K)\|_{i,j=1,\dots,r} \\ &= \det \|c_{n-w-i+j}(E-V-W+Q)\|_{i,j=1,\dots,r},\end{aligned}$$

где $Q = W/K$ — каноническое факторрасслоение над $G_r(W)$ ранга $w - r$. Подставляя $c_k(E-V-W+Q) = \sum_{i+j=k} c_i(E-V-W)c_j(Q)$ в определитель, мы получаем

$$[\widetilde{\Sigma}^r] = \det \|c_{\ell+r-i+j}(E-V-W)\|_{i,j=1,\dots,r} c_{w-r}^r(Q) + \dots,$$

где $\ell = n - v - w$ и где многоточием обозначены члены, в которые классы Чженя расслоения Q входят в общей степени, меньшей, чем $r(w - r) =$

$\dim_{\mathbb{C}} G_{r,w}$ (относительно градуировки, в которой $\deg c_i(Q) = i$). Гомоморфизм Гизина обращается в ноль на этих членах по соображениям размерности. Следовательно, используя формулу проекции, мы получаем

$$[\Sigma^r] = \pi_*[\widetilde{\Sigma}^r] = \det \|c_{\ell+r-i+j}(E-V-W)\|_{i,j=1,\dots,r} \pi_* c^r_{w-r}(Q).$$

Осталось заметить, что $\pi_* c^r_{w-r}(Q) = 1 \in H^0(X)$. Действительно, из функториальности следует, что последнее равенство достаточно проверять только для случая $X = \mathrm{pt}$, а в этом случае равенство очевидно: через всякие r точек общего положения в $\mathbb{C}^w$ проходит единственная r-мерная плоскость. $\square$

На многообразии $\widetilde{\Sigma}^r$ имеется естественное тавтологическое расслоение K ранга r. При ограничении на $\Sigma^r \setminus \Sigma^{r+1}$ расслоение K совпадает с $V \cap W$, то есть с расслоением ядер морфизма $V \to E/W$. Пусть P — произвольный многочлен от классов Чженя $c_1(K), \dots, c_r(K)$.

3.1.6. Определение. *Производным характеристическим классом*, связанным с многочленом P, называется прямой образ

$$\eta_*(P\,[\widetilde{\Sigma}^r])$$

класса P при естественной проекции $\eta : \widetilde{\Sigma}^r \to X$.

3.1.7. Определение. Пусть имеется набор независимых коммутирующих переменных c_i, $\deg c_i = i$, представленных формальным бесконечным рядом $c = 1 + c_1 + c_2 + \dots$ (мы полагаем $c_0 = 1$, $c_i = 0$ при $i < 0$). *Многочленом Шура* $\Delta_{\lambda_1,\dots,\lambda_r}(c)$, соответствующим заданной последовательности целых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. называется многочлен, заданный определителем вида

$$\Delta_{\lambda_1,\dots,\lambda_r}(c) = \det \|c_{\lambda_i+j-i}\|_{i,j=1,\dots,r} = \begin{vmatrix} c_{\lambda_1} & c_{\lambda_1+1} & \dots & c_{\lambda_1+r-1} \\ c_{\lambda_2-1} & c_{\lambda_2} & \dots & c_{\lambda_2+r-2} \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{\lambda_r-r+1} & c_{\lambda_r-r+2} & \dots & c_{\lambda_r} \end{vmatrix}.$$

Строки матрицы, из которой составлен определитель, образованы различными последовательными отрезками длины r одного и того же ряда $\ldots, 0, 0, 1, c_1, c_2, \ldots$, при этом на главной диагонали стоят элементы $c_{\lambda_1}, \ldots, c_{\lambda_r}$. Степень $\Delta_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(c)$ (относительно градуировки, в которой $\deg c_i = i$) равна $\sum \lambda_i$. Теорема 3.1.4 в этих обозначениях утверждают, что класс, двойственный циклу Σ^r, задается многочленом Шура $\Delta_{\ell+r,\ell+r,\ldots,\ell+r}(c)$ от соответствующих относительных классов Чженя c_i, где $\ell = n - v - w$.

3.1.8. Теорема. *Всякий производный класс выражается как универсальный многочлен от относительных классов Чженя $c_i = c_i(E-V-W)$, который определяется однозначно многочленом P и числом $\ell = \operatorname{rk} E - \operatorname{rk} V - \operatorname{rk} W$ и задается следующей явной формулой. В соответствии с принципом расщепления, положим формально $c(K) = \prod_{i=1}^r (1 - t_i)$, подставим соответствующие симметрические функции от $-t_i$ в P и раскроем скобки. Тогда для получившегося выражения значение гомоморфизма η_* на мономе $t_1^{s_1} \ldots t_r^{s_r}$ равно определенному многочлену Шура*

$$\eta_* t_1^{s_1} \ldots t_r^{s_r} = \Delta_{\ell+r+s_1,\ldots,\ell+r+s_r}(c).$$

Отметим, что априорное утверждение о том, что производные классы выражаются универсальным образом через классы c_i, можно доказать при помощи рассуждений, аналогичных приведенным после формулировки теоремы 3.1.4 и сводящих задачу вычисления производных классов к случаю грассманиана и клеток Шуберта.

Пример. В случае $r = 2$ мы получаем, например,

$$\eta_* c_1(K) c_2(K) = \eta_*(-t_1^2 t_2 - t_1 t_2^2) = -\Delta_{\ell+4,\ell+3}(c) - \Delta_{\ell+3,\ell+4}(c) = -c_{\ell+4}\, c_{\ell+3} + c_{\ell+5}\, c_{\ell+2}.$$

Отметим, что, полагая $P = 1$, мы находим также

$$[\Sigma^r] = \eta_* 1 = \Delta_{\ell+r,\ldots,\ell+r}(c),$$

что дает независимое доказательство теоремы 3.1.4.

Применение принципа расщепления для гомоморфизма η_* имеет следующее обоснование. Обозначим через F_r тотальное пространство ассоциированного с K расслоения полных флагов $\varphi : F_r \to \widetilde{\Sigma}^r$. Слои расслоения φ состоят из всевозможных флагов

$$0 = D_{0x} \subset D_{1x} \subset \cdots \subset D_{rx} = K_x \subset V_x \cap W_x, \qquad x \in \widetilde{\Sigma}^r, \quad \dim D_{ix} = i.$$

Обозначим через D_i соответствующее тавтологическое векторное расслоение ранга i на F_r и положим $t_i = -c_1(D_i/D_{i-1})$. Наконец, обозначим через $p_r : F_r \to X$ композицию

$$p_r : F_r \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\Sigma}^r \xrightarrow{\eta} X.$$

Тогда из равенства $1 = \varphi_* \prod_{i-1}^r t_i^{r-i} \in H^0(\widetilde{\Sigma}^r)$ вытекает, что для всякого многочлена P от классов $c_i(K)$ выполняется соотношение

$$\eta_* P = p_{r*} \prod_{i-1}^{r} t_i^{r-i} \, \varphi^* P.$$

При поднятии на F_r расслоение $\varphi^* K = D_r$ расщепляется, и $c(\varphi^* K) = \prod(1 - t_i)$. Поэтому теорема 3.1.8 вытекает из следующей.

3.1.9. Теорема. *Прямой образ всякого монома $t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r}$ при проекции $F_r \to X$ выражается как определенный многочлен Шура от относительных классов Чженя $c_i = c_i(E{-}V{-}W)$,*

$$p_{r*} \, t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r} = \Delta_{\ell+s_1+1,\dots,\ell+s_r+r}(c(E{-}V{-}W)).$$

Для доказательства этой теоремы разложим отображение $p_r : F_r \to X$ в композицию

$$F_r \xrightarrow{q_r} F_{r-1} \xrightarrow{q_{r-1}} \dots \xrightarrow{q_2} F_1 \xrightarrow{q_1} X,$$

где q_k задается «забыванием» k-й плоскости D_k флага. Гомоморфизм q_{k*} коммутирует с многочленами от переменных $t_1, \dots, t_{k-1}$, а на мономах от t_k он задается следующей леммой.

3.1.10. Лемма. *Для всякого $s \geqslant 0$ имеет место формула*

$$q_{k*}t_k^s = c_{\ell+k+s}(E - V - W + D_{k-1}) = \sum_{i+j=\ell+k+s} c_i(D_{k-1})\, c_j,$$

где $c_j = c_j(E - V - W)$ и $\ell = n - v - w$.

Применив лемму к классу $c_s(-D_k) = c_s(-D_{k-1} - D_k/D_{k-1}) = \sum_{i+j=s} c_i(-D_{k-1})\, t_k^j$, мы получаем также равенство

$$\begin{aligned} q_{k*}c_s(-D_k) &= \sum_{i+j=s} c_i(-D_{k-1})\, c_{\ell+k+j}(E - V - W + D_{k-1}) \\ &= c_{\ell+k+s}(E - V - W) = c_{\ell+k+s}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Доказательство. Представим q_k в виде композиции

$$F_k \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} F_{k-1},$$

где P — тотальное пространство проективизации расслоения W/D_{k-1} на F_{k-1}. Слои расслоения π образованы всевозможными положениями плоскости D_{kx}, такими, что $D_{(k-1)x} \subset D_{kx} \subset W_x$. Вложение i задается условием $D_{kx} \subset V_x$, то есть обращением в ноль сечения расслоения $\mathrm{Hom}(D_k/D_{k-1}, E/V)$, определенного на P. Следовательно, гомоморфизм i_* задается на характеристических классах умножением на старший класс Чженя этого расслоения,

$$[F_k] = i_*\, 1 = c_{n-v}(\mathrm{Hom}(D_k/D_{k-1}, E/V)) = \sum_{j=0}^{n-v} t_k^{n-v-j} c_j(E - V).$$

В свою очередь, гомоморфизм π_* переводит мономы вида $t_k^s = c_s(-D_k/D_{k-1})$ в $c_{s-w+k}(-W/D_{k-1})$, поскольку D_k/D_{k-1} является тавтологическим линейным расслоением на пространстве P проективного расслоения и $t_k = -c_1(D_k/D_{k-1})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} q_{k*}t^s &= \pi_* t^s \sum_{j=0}^{n-v} t_k^{n-v-j} c_j(E/V) = \pi_* \sum_{j=0}^{n-v} t_k^{n-v+s-j} c_j(E/V) \\ &= \sum_{j=0}^{n-v} c_{\ell+s+k-j}(-W/D_k) c_j(E/V) = c_{\ell+s+k}(E - V - W + D_{k-1}). \qquad \square \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.1.9. Поскольку классы $c_i(D_{k-1})$ выражаются через $t_1, \dots, t_{k-1}$, формула леммы позволяет вычислить класс $p_{r*} t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r}$ по индукции. Кроме того, без дополнительных вычислений мы получаем, что искомый класс является многочленом от образующих $c_i = c_i(E-V-W)$. Например, при $r = 2$ мы находим последовательно

$$\begin{aligned} p_{2*} t_1^{s_1} t_2^{s_2} &= p_{1*} t_1^{s_1} (c_{\ell+s_2+2} - t_1\, c_{\ell+s_2+1}) \\ &= (c_{\ell+s_1+1} c_{\ell+s_2+2} - c_{\ell+s_1+2} c_{\ell+s_2+1}) = \Delta_{\ell+s_1+1, \ell+s_2+2}(c). \end{aligned}$$

При бо́льших r формула теоремы 3.1.9 также формально следует из леммы и свойств определителя. А именно, представим моном $t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r}$ в виде

$$t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r} = \begin{vmatrix} c_{s_1}(-D_1) & c_{s_1+1}(-D_1) & \dots & c_{s_1+r-1}(-D_1) \\ c_{s_2-1}(-D_2) & c_{s_2}(-D_2) & \dots & c_{s_2+r-2}(-D_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{s_r-r+1}(-D_r) & c_{s_r-r+2}(-D_r) & \dots & c_{s_r}(-D_r) \end{vmatrix}, \qquad (3.2)$$

где $c(-D_k) = \prod_{i=1}^{k} (1 - t_i)^{-1}$. Применим к определителю последовательно гомоморфизмы q_{k*} разложения $p_{r*} = q_{1*} \dots q_{r*}$. Из (3.1) следует, что действие гомоморфизма q_{k*} сводится к замене классов $c_i(-D_k)$ из k-й строки определителя на классы $c_{i+k+\ell}$. После r шагов мы получаем в результате определитель, задающий многочлен Шура $\Delta_{\ell+s_1+1, \dots, \ell+s_r+r}(c)$, что и утверждается в теореме.

Для доказательства полиномиального тождества (3.2) вычтем из i-го столбца определителя $(i-1)$-й, умноженный на t_1 для $i = r, r-1, \dots, 2$. В результате получим определитель, у которого на (i,j)-м месте стоит $c_{s_i-i+j}(-D_i) - t_1\, c_{s_i-i+j-1}(-D_i) = c_{s_i-i+j}(-D_i/D_1)$,

$$\begin{vmatrix} c_{s_1}(-D_1) & 0 & \dots & 0 \\ c_{s_2-1}(-D_2) & c_{s_2}(-D_2/D_1) & \dots & c_{s_2+r-2}(-D_2/D_1) \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{s_r-r+1}(-D_r) & c_{s_r-r+2}(-D_r/D_1) & \dots & c_{s_r}(-D_r/D_1) \end{vmatrix}.$$

Поскольку $c_{s_1}(-D_1) = t_1^{s_1}$, требуемое тождество получается индукцией по r. $\square$

Формулировка теоремы 3.1.1 подсказывает существование более общих производных классов, использующих в своем определении не только ядро, а также и коядро морфизма $f : V \to Q$ (в условиях определения 3.1.2) или $V \to E/W$ (в условиях определения 3.1.3) соответственно. Такие классы действительно существуют. Например, в условиях определения 3.1.3, рассмотрим пространство $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}^r$, образованное тройками вида (x, K_x, F_x) где $x \in X$,

$$K_x \subset V_x \cap W_x \subset V_x + W_x \subset F_x \subset E_x,$$

причем $\dim K_x = r$, $\dim F_x = v + w - r$. Обозначим через π композицию

$$\pi : \widetilde{\widetilde{\Sigma}}^r \xrightarrow{\widetilde{\eta}} \widetilde{\Sigma}^r \xrightarrow{\eta} X,$$

где первое отображение $\widetilde{\eta}$ задается забыванием плоскости F_x. В случае общего положения $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}^r$ — гладкое многообразие. На нем имеются тавтологическое расслоение K ранга r и факторрасслоение E/F ранга $r + \ell$, где $\ell = n - v - w$.

3.1.11. Определение. *Обобщенным производным классом* называется образ произвольного многочлена P от $c_1(K), \ldots, c_r(K)$, $c_1(E/F), \ldots, c_{r+\ell}(E/F)$ при гомоморфизме Гизина $\pi_* : H^*(\widetilde{\widetilde{\Sigma}}^r) \to H^*(X)$.

3.1.12. Теорема. *Всякий обобщенный производный класс выражается как универсальный многочлен от относительных классов Чженя $c_i = c_i(E - V - W)$, который определяется однозначно многочленом P и числом $\ell = \operatorname{rk} E - \operatorname{rk} V - \operatorname{rk} W$.*

Эта теорема и алгоритм для вычисления обобщенного производного класса вытекают из теоремы 3.1.8. Нужно заметить только, что отображение $\widetilde{\eta} : \widetilde{\widetilde{\Sigma}}^r \to \widetilde{\Sigma}^r$ задается конструкцией определения 3.1.5 разрешения особенностей цикла $\Sigma^{r+\ell} \subset \widetilde{\Sigma}^r$ для тройки, состоящей из расслоения $(E/K)^*$ на $\widetilde{\Sigma}^r$ и двух его подрасслоений $(E/V)^*$ и $(E/W)^*$. Следовательно, гомоморфизм $\widetilde{\eta}_*$ переводит многочлены от классов $c_k((E/F)^*) =$

$(-1)^k c_k(E/F)$ в линейные комбинации многочленов Шура от классов $c_k((E/K)^* - (E/V)^* - (E/W)^*) = (-1)^k c_k(-K - (E - V - W))$, которые, в свою очередь, выражаются по формуле Уитни через классы $c_i(K)$ и $c_i(E - V - W)$. Применяя далее гомоморфизм η_*, мы находим с помощью теоремы 3.1.8 искомое выражение для обобщенного производного класса через $c_i = c_i(E - V - W)$. $\square$

3.2 Лагранжевы и симметричные вырождения

Симметричным аналогом классификации линейных отображений, рассмотренной в предыдущем пункте, служит классификация *самосопряженных* отображений $f : V \to V^*$ (комплексного) векторного пространства V, то есть классификация квадратичных форм $f \in \mathrm{Sym}^2 V^*$. Мы рассматриваем *стабильную классификацию*, в которой две формы (возможно, в пространствах разных размерностей) считаются стабильно эквивалентными, если после добавления к ним подходящих невырожденных форм от дополнительных переменных одна приводится к другой линейным преобразованием. Оказывается, теорией характеристических классов, отвечающей за эту классификацию, служит теория *лагранжевых характеристических классов*.

Напомним (см. главу 2), что (комплексный) *лагранжев грассманиан* Λ_n образован всевозможными лагранжевыми подпространствами фиксированного $2n$-мерного симплектического пространства $\mathbb{C}^{2n} = V \oplus V^*$.

Кольцо когомологий $H^*(\Lambda_n)$ стабилизируется (в каждой фиксированной степени) с ростом n. Предельное кольцо $H^*(\Lambda) = \lim H^*(\Lambda_n)$ называется кольцом *лагранжевых характеристических классов*. Это кольцо порождено классами Чженя $a_i = c_i(L^*) = (-1)^i c_i(L)$, где L — n-мерное тавтологическое расслоение. Между образующими имеются соотношения

$$(1 + a_1 + a_2 + \dots)(1 - a_1 + a_2 - \dots) = 1, \tag{3.3}$$

вытекающие из изоморфизма $\mathbb{C}^{2n}/L \simeq L^*$.

Обозначим через $\Omega_r \subset \Lambda_n$ подпространство лагранжевых плоскостей, имеющих данную размерность r пересечения с фиксированной лагранжевой плоскостью $\lambda_0 \subset V \oplus V^*$. Например, Ω_0 образует открытую клетку (карту), изоморфную пространству квадратичных форм на V: всякая лагранжева плоскость, трансверсальная к $\{0\} \oplus V^*$, является графиком самосопряженного отображения $V \to V^*$. Таким образом, лагранжев грассманиан служит естественной компактификацией пространства квадратичных форм. Если же положить $\lambda_0 = V \oplus \{0\}$, то пересечение Ω_r с данной картой образовано квадратичными формами фиксированного ранга $n - r$. Таким образом, локальные особенности разбиения Λ_n на страты Ω_n диффеоморфны особенностям разбиения пространства квадратичных форм на страты, отвечающие формам фиксированного ранга. Отсюда, в частности, вытекает, что Ω_r является гладким (незамкнутым) подмногообразием комплексной коразмерности $r(r+1)/2$.

Имеется естественная проекция $\Omega_r \to G_{r,n}$, сопоставляющая лагранжевой плоскости ее пересечение с λ_0. Слои этой проекции стягиваемы. Рассмотрим спектральную последовательность, построенную по возрастающей фильтрации открытыми подпространствами $\mathcal{F}_r = \bigcup_{k \leqslant r} \Omega_k$. Эта спектральная последовательность вырождается в начальном члене по соображениям размерностей. Таким образом, имеет место расщепление

$$H^{2p}(\Lambda_n) \simeq \bigoplus_r H^{2(p - r(r+1)/2)}(G_{r,n}).$$

Переходя к пределу, получаем следующий результат.

3.2.1. Теорема. *Для всех $n \geqslant 0$ имеет место расщепление*

$$H^{2n}(\Lambda) \simeq \bigoplus_r H^{2(n - r(r+1)/2)}(BU(r)). \qquad \square$$

Классы, входящие в слагаемые правой части равенства, являются симплектическими аналогами классов Портеуса-Тома, — классами Арнольда-Фукса, и их производными. Определению и вычислению этих классов посвящен этот пункт.

Пусть над некоторой гладкой базой X задано комплексные векторное расслоение V ранга n, и пусть задан самосопряженный морфизм расслоений $f : V \to V^*$, который можно рассматривать как сечение расслоения $\operatorname{Sym}^2 V^*$. Пусть f является «достаточно общим». Обозначим через $\Sigma^r = \Sigma^r(f) \subset X$ подмножество точек, в которых ядро морфизма f имеет размерность не меньше r,

$$\Sigma^r(f) = \bigl\{x \in X \bigm| \dim\ker f_x \geqslant r\bigr\}.$$

3.2.2. Определение. *Классом Арнольда-Фукса* морфизма f называется класс когомологий, двойственный циклу особенностей $\Sigma^r(f)$. *Лагранжевыми характеристическими классами* $a_i = a_i(V)$ расслоения V называются классы $a_i = c_i(V^* - V)$.

Тождество (3.3) для этих классов вытекает из равенства $U + U^* = 0$ в $K(X)$, где $U = V^* - V$. Для произвольного морфизма f, не являющегося общим, класс Арнольда-Фукса определяется приемом, аналогичным использованному в 3.1 для классов Портеуса-Тома: нужно заменить X на тотальное пространство расслоения $\operatorname{Sym}^2 V^*$ и т.п.

Более общей ситуацией, в которой возникают классы Арнольда-Фукса и лагранжевы характеристические классы, является следующая. Пусть задано *симплектическое* векторное расслоение E, то есть расслоение четного ранга, в слоях которого задана симплектическая структура (как сечение расслоения $\Lambda^2 E^*$, невырожденное в каждой точке). Пусть V, W — два его *лагранжевых* подрасслоения, то есть такие подрасслоения, у которых слои V_x, W_x являются лагранжевыми подпространствами в E_x, $x \in X$. Обозначим через Σ^r подмножество точек базы, в которых размерность пересечения слоев расслоений V и W не меньше r,

$$\Sigma^r = \bigl\{x \in X \bigm| \dim V_x \cap W_x \geqslant r\bigr\}.$$

3.2.3. Определение. *Классом Арнольда-Фукса* тройки (E,V,W) называется класс когомологий, двойственный циклу Σ^r. *Лагранжевыми характеристическими классами* $a_i = a_i(E,V,W)$ тройки называются классы $a_i = c_i(E{-}V{-}W)$.

Тождество (3.3) для этих классов также легко проверяется. Отметим, что из невырожденности симплектической структуры вытекают изоморфизмы $E/V \simeq V^*$, $E/W \simeq W^*$, откуда

$$a_i = c_i(E{-}V{-}W) = c_i(V^* - W) = c_i(W^* - V).$$

Ситуация этого определения обобщает ситуацию определения 3.2.2: нужно рассмотреть симплектическое расслоение $E = V \oplus V^*$ и два его лагранжевых подрасслоения, в качестве первого из которых берется $V \oplus \{0\}$, а в качестве второго — график морфизма f, состоящий из пар вида $\{y\} \oplus \{f_x(y)\}$, $x \in X$, $y \in V_x$. Нетрудно увидеть, что в случае общего положения Σ^r имеет такую же (комплексную) коразмерность, как и цикл Ω_r на лагранжевом грассманиане, то есть $r(r+1)/2$.

3.2.4. Теорема. *Класс Арнольда-Фукса является универсальным лагранжевым характеристическим классом и задается Q-многочленом Шура от соответствующих классов a_i (см п.* 1.5.4*),*

$$[\Sigma^r] = Q_{r,r-1,\dots,1}(a).$$

Тот факт, что класс Арнольда-Фукса определяется только формальной разностью $V^* - V$ (соответственно, $E{-}V{-}W$) расслоений, можно обосновать, применив подходящую процедуру стабилизации. Например, в условиях определения 3.2.3, для всякого дополнительного расслоения U можно построить симплектическое расслоение $\widetilde{E} = E \oplus U \oplus U^*$ и два его лагранжевых подрасслоения, $\widetilde{V} = V \oplus U \oplus \{0\}$ и $\widetilde{W} = W \oplus \{0\} \oplus U^*$. При переходе к расслоениям $\widetilde{E}, \widetilde{V}, \widetilde{W}$ цикл Σ^r остается тем же и соответствующий класс Портеуса-Тома не зависит от U. Заметим, что при переходе к стабилизации не меняются также и лагранжевы характеристические классы:

$c(\widetilde{E}-\widetilde{V}-\widetilde{W}) = c(E-V-W)$. Мы можем подобрать U так, чтобы расслоение $\widetilde{W} \simeq W \oplus U$ стало тривиальным. Тогда из равенства $\widetilde{E}/\widetilde{W} \simeq \widetilde{W}^*$ вытекает, что и расслоение $\widetilde{E}$ тривиально.

Таким образом, при вычислении классов Арнольда-Фукса можно предполагать, что $E = \mathbb{C}^{2n}$ — тривиальное расслоение и $W = \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{2n}$ — тривиальное подрасслоение. В этом случае слои расслоения V являются лагранжевыми подпространствами фиксированного симплектического пространства $\mathbb{C}^{2n}$. Иными словами, V индуцируется из тавтологического расслоения над лагранжевым грассманианом Λ_n некоторым отображением $X \to \Lambda_n$. Следовательно, задача вычисления многочлена Тома свелась к случаю, когда $X = \Lambda_n$ — лагранжево многообразие Грассмана, E — тривиальное расслоение ранга $2n$, $W \subset E$ — тривиальное лагранжево подрасслоение, $V \subset E$ — тавтологическое расслоение. Цикл Σ^r в данном случае состоит из лагранжевых плоскостей, имеющих по меньшей мере r-мерное пересечение с фиксированным лагранжевым подпространством, то есть Σ^r совпадает с замыканием подмногообразия Ω_r, определенного выше.

Приведенные рассуждения доказывают, что класс Арнольда-Фукса выражается как универсальный многочлен от лагранжевых характеристических классов $a_i = c_i(E-V-W)$ и что этот многочлен определяется как класс когомологий, двойственный замыканию цикла $\Omega_r \subset \Lambda_n$, $n \gg 0$, и выраженный через мультипликативные образующие кольца когомологий лагранжева грассманиана. В алгебраической ситуации расслоения U, дополнительного к данному V, то есть такого, что $U \oplus V$ тривиально, как правило, не существует. Поэтому в приведенных рассуждениях приходится использовать C^∞-гладкие многообразия и отображения, не являющиеся голоморфными. Отметим, тем не менее, что приведенное ниже прямое доказательство формулы теоремы не использует указанной выше редукции.

3.2.5. Определение. *Разрешением особенностей цикла* Σ^r называется пространство $\widetilde{\Sigma}^r$, образованное парами вида (x, K_x), где $x \in X$ и $K_x \subset V_x \cap W_x$ — r-мерное подпространство.

Без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{\Sigma}^r$ — *гладкое многообразие*. Как и в случае обычных векторных расслоений и отображений, рассмотренном в предыдущем пункте, это предположение обосновывается переходом к подходящему «расслоению струй». А именно, заменим многообразие X тотальным пространством ассоциированного расслоения $\pi : \Lambda(E) \to X$, слои которого образованы лагранжевыми подпространствами слоев симплектического расслоения E, и рассмотрим на $\Lambda(E)$ симплектическое расслоение π^*E и два его лагранжевых подрасслоения, первое из которых тавтологическое, а второе — π^*W. Тогда лагранжевы характеристические классы, а также всевозможные множества вырождения на X индуцированы из $\Lambda(E)$ сечением $s : X \to \Lambda(E)$, задаваемым подрасслоением $V \subset E$.

Следовательно, условие гладкости $\widetilde{\Sigma}^r$ достаточно проверять только в случае, когда X имеет вид пространства расслоения $\Lambda(E)$ над некоторой гладкой базой. А так как все слои этого расслоения изоморфны, проверка гладкости $\widetilde{\Sigma}^r$ сводится к случаю, когда $X = \Lambda_n$ — грассманиан лагранжевых подпространств в фиксированном симплектическом пространстве $E \simeq \mathbb{C}^{2n}$, $W \subset E$ — фиксированное лагранжево подпространство, V — тавтологическое расслоение. В последнем случае $\widetilde{\Sigma}_r$ расслоено над грассманианом $G_r(W) \simeq G_{r,n}$ r-мерных подпространств в W; слой этого расслоения над точкой $K \in G_r(W)$ изоморфен Λ_{n-r} и состоит из лагранжевых подпространств пространства $K^\perp/K$ «симплектической редукции», где ортогональное дополнение $K^\perp$ понимается в смысле симплектической структуры в E. Следовательно, в этом случае $\widetilde{\Sigma}^r$ гладко.

В случае произвольного X условие общности положения формулируется как подходящее условие трансверсальности для сечения $s : X \to \Lambda(E)$. При выполнении этого условия пространство $\widetilde{\Sigma}^r$ и в этом случае оказывается гладким, что обосновывает все дальнейшие построения. В общем случае мы применяем эти построения только для пространства $\Lambda(E)$ расслоения, и в качестве «окончательного» определения характеристических классов на X мы используем их определение как классов, индуцированных сечением s из соответствующих классов на $\Lambda(E)$.

Итак, всюду в дальнейшем мы предполагаем, что условие общности положения выполнено и $\widehat{\Sigma}^r$ гладко. На многообразии $\widetilde{\Sigma}^r$ имеется естественное тавтологическое расслоение K ранга r. При ограничении на $\Sigma^r \setminus \Sigma^{r+1}$ расслоение K совпадает с $V \cap W$, то есть с расслоением ядер морфизма $V \to E/W$. Пусть P — произвольный многочлен от классов Чженя $c_1(K), \dots, c_r(K)$.

3.2.6. Определение. *Производным лагранжевым характеристическим классом*, связанным с многочленом P, называется прямой образ

$$\eta_*(P) \in H^*(X)$$

класса $P \in H^*(\widetilde{\Sigma}^r)$ при естественной проекции $\eta : \widetilde{\Sigma}^r \to X$.

3.2.7. Теорема. *Всякий производный класс выражается как универсальный многочлен от относительных классов Чженя $a_i = c_i(E{-}V{-}W)$ и задается следующей явной формулой. В соответствии с принципом расщепления, положим формально $c(K) = \prod_{i=1}^r (1 - t_i)$, подставим соответствующие симметрические функции от $-t_i$ в P и раскроем скобки. Тогда для получившегося выражения значение гомоморфизма η_* на мономе $t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r}$ равно определенному Q-многочлену Шура*

$$\eta_*\, t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r} = Q_{s_1+r, s_2+r-1, \dots, s_r+1}(c(E{-}V{-}W)).$$

Отметим, что априорное утверждение о том, что производные классы выражаются универсальным образом через классы a_i, можно доказать при помощи рассуждений, аналогичных приведенным после формулировки теоремы 3.2.4 и сводящих задачу вычисления производных классов к случаю лагранжева грассманиана.

Пример. В случае $r = 2$ мы получаем, например,

$$\eta_*\, c_1(K)c_2(K) = \eta_*(-t_1^2 t_2 - t_1 t_2^2) = -Q_{4,2}(a) - Q_{3,3}(a) = -Q_{4,2}(a).$$

Доказательство теоремы 3.2.4. Отображение $\eta : \widetilde{\Sigma}^r \to X$ переводит $\widetilde{\Sigma}^r$ в Σ^r, причем это соответствие взаимно однозначно над открытой частью $\Sigma_r \setminus \Sigma_{r+1}$. Следовательно, мы получаем

$$[\Sigma^r] = \eta_* 1 = Q_{r,r-1,\dots,1}(a). \qquad \square$$

Применение принципа расщепления для гомоморфизма η_* имеет следующее обоснование. Обозначим через F_r тотальное пространство ассоциированного с K расслоения полных флагов $\varphi : F_r \to \widetilde{\Sigma}^r$. Слои расслоения φ состоят из всевозможных флагов

$$0 = D_{0x} \subset D_{1x} \subset \dots \subset D_{rx} = K_x \subset V_x \cap W_x, \qquad x \in \widetilde{\Sigma}^r, \quad \dim D_{ix} = i.$$

Обозначим через D_i соответствующее тавтологическое векторное расслоение ранга i на F_r и положим $t_i = -c_1(D_i/D_{i-1})$. Наконец, обозначим через $p_r : F_r \to X$ композицию

$$p_r : F_r \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\Sigma}^r \xrightarrow{\eta} X.$$

Тогда из равенства $1 = \varphi_* \prod_{i-1}^r t_i^{r-i} \in H^0(\widetilde{\Sigma}^r)$ вытекает, что для всякого многочлена P от классов $c_i(K)$ выполняется соотношение

$$\eta_* P = p_{r*} \prod_{i-1}^{r} t_i^{r-i} \, \varphi^* P.$$

При поднятии на F_r расслоение $\varphi^* K = D_r$ расщепляется и $c(\varphi^* K) = \prod(1-t_i)$. Поэтому теорема 3.2.7 вытекает из следующей.

3.2.8. Теорема. *Прямой образ всякого монома $t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r}$ при проекции $F_r \to X$ выражается как определенный Q-многочлен Шура от лагранжевых характеристических классов $a_i = c_i(E{-}V{-}W)$,*

$$p_{r*} \, t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r} = Q_{s_1+1,\dots,s_r+1}(c(E{-}V{-}W)).$$

Для доказательства этой теоремы разложим отображение $p_r : F_r \to X$ в композицию

$$F_r \xrightarrow{q_r} F_{r-1} \xrightarrow{q_{r-1}} \dots \xrightarrow{q_2} F_1 \xrightarrow{q_1} X,$$

где q_k задается «забыванием» k-й плоскости D_k флага. Гомоморфизм q_{k*} коммутирует с многочленами от переменных $t_1, \ldots, t_{k-1}$, а на мономах от t_k он задается следующей леммой.

3.2.9. Лемма. *Гомоморфизм Гизина $q_{k*} : H^*(F_k) \to H^*(F_{k-1})$ задается на мономах $t_k^s = c_s(-D_k/D_{k-1})$ равенством*

$$q_{k*}\, t_k^s = c_{s+1}(E{-}V{-}W + D_{k-1}{-}D_{k-1}^*) = \sum_{i+j=s+1} c_i(D_{k-1}{-}D_{k-1}^*)\, a_j,$$

где $a_j = c_j(E{-}V{-}W)$ и $c_i(D_{k-1}{-}D_{k-1}^*)$ — многочлены от переменных $t_1, \ldots, t_{k-1}$, которые не зависят от s и определются разложением

$$c(D_{k-1}{-}D_{k-1}^*) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-t_i}{1+t_i} = \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - 2t_i + 2t_i^2 - 2t_i^3 + \ldots\right).$$

Из формулы леммы вытекает также равенство

$$\begin{aligned} q_{k*}\, c_s(D_{k-1}^*{-}D_k) &= q_{k*}\, c_s(D_{k-1}^*{-}D_{k-1} - D_k/D_{k-1}) \\ &= c_{s+1}(D_{k-1}^*{-}D_{k-1} + E{-}V{-}W + D_{k-1}{-}D_{k-1}^*) = a_{s+1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Доказательство. Представим q_k в виде композиции

$$F_k \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} F_{k-1},$$

где P — тотальное пространство проективизации расслоения W/D_{k-1} на F_{k-1}. Слои расслоения π образованы всевозможными положениями плоскости D_{kx}, такими, что $D_{(k-1)x} \subset D_{kx} \subset W_x$. Вложение i задается условием $D_{kx} \subset V_x$. Поскольку $D_{(k-1)x}$ изотропно, последнее условие равносильно тому, что прямая $D_{kx}/D_{(k-1)x} \subset D_{(k-1)x}^{\perp}/D_{(k-1)x}$ лежит в подпространстве $V_x/D_{(k-1)x}$, то есть обращению в ноль сечения расслоения $\mathrm{Hom}(D_k/D_{k-1}, D_{k-1}^{\perp}/V)$, определенного на P. Следовательно, гомоморфизм i_* задается на характеристических классах умножением на старший класс Чженя этого расслоения

$$[F_k] = i_* 1 = c_{n-k+1}(\mathrm{Hom}(D_k/D_{k-1}, D_{k-1}^{\perp}/V)) = \sum_{j=0}^{n-k+1} t_k^{n-k+1-j} c_j(D_{k-1}^{\perp}/V).$$

В свою очередь, гомоморфизм π_* переводит мономы вида t_k^s в $c_{s-n+k}(-W/D_{k-1})$, поскольку $t_k = -c_1(D_k/D_{k-1})$ и D_k/D_{k-1} является тавтологическим линейным расслоением на пространстве P проективного расслоения. Следовательно,

$$\begin{aligned}
q_{k*}t_k^s &= \pi_* t_k^s \sum_{j=0}^{n-k+1} t_k^{n-k+1-j}\, c_j(D_{k-1}^{\perp}/V) = \pi_* \sum_{j=0}^{n-k+1} t_k^{n-k+1+s-j}\, c_j(D_{k-1}^{\perp}/V) \\
&= \sum_{j=0}^{n-k+1} c_{s+1-j}(-W/D_{k-1})\, c_j(D_{k-1}^{\perp}/V) \\
&= c_{s+1}(D_{k-1}^{\perp} - V - W + D_{k-1}) = c_{s+1}(E{-}V{-}W + D_{k-1}{-}D_{k-1}^*).
\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы использовали соотношение $E/D_{k-1}^{\perp} \simeq D_{k-1}^*$, которое следует из невырожденности симплектической структуры. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.8. Разложение $p_{r*} = q_{1*} \dots q_{r*}$ позволяет вычислить класс $p_{r*}\, t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r}$ при помощи формулы леммы по индукции. Из этой формулы видно без дополнительных вычислений, что искомый класс является многочленом от образующих $a_i = c_i(E{-}V{-}W)$. Например, при $r = 2$ мы находим последовательно

$$\begin{aligned}
p_{2*}t_1^{s_1}t_2^{s_2} &= p_{1*}t_1^{s_1}\,(a_{s_2+1} - 2\,t_1\,a_{s_2} + 2\,t_1^2\,a_{s_2-1} - \dots) \\
&= a_{s_1+1}\,a_{s_2+1} - 2\,a_{s_1+2}\,a_{s_2} + 2\,a_{s_1+3}\,a_{s_2-1} - \dots = Q_{s_1+1,s_2+1}(a).
\end{aligned}$$

Для произвольного r теорема также вытекает формально из леммы. Представим моном $t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r}$ в виде

$$t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r} = \sum_{i_1,\dots,i_r} w_{i_1,\dots,i_r}\, c_{s_i+i_1}(D_0^*{-}D_1) \dots c_{s_r+i_r}(D_{r-1}^*{-}D_r), \qquad (3.5)$$

где коэффициенты $w_{i_1,\dots,i_r}$ определены разложением (1.6) п. 1.5.4 главы 1. Применим к каждому слагаемому последовательно гомоморфизмы q_{k*} разложения $p_{r*} = q_{1*} \dots q_{r*}$. Из (3.4) следует, что действие гомоморфизма q_{k*} на этих слагаемых сводится к замене k-го сомножителя $c_{s_k+\lambda_k}(D_{k-1}^* - D_k)$

на $a_{s_k+\lambda_k+1}$. После r шагов мы получаем в результате разложение, задающее по (1.5) Q-многочлен Шура $Q_{s_1+1,\dots,s_r+1}(a)$, что и утверждается в теореме.

Осталось доказать тождество (3.5). Положим $\overline{D}_k = D_k/D_1$. Тогда, подставив в правую часть доказываемого равенства однородные компоненты классов

$$c(D_0^*-D_1) = \frac{1}{1-t_1}, \quad c(D_{k-1}^*-D_k) = c(\overline{D}_{k-1}^*-\overline{D}_k+D_1^*-D_1) = c(\overline{D}_{k-1}^*-\overline{D}_k)\,\frac{1+t_1}{1-t_1}$$

и раскрыв скобки, мы получим выражение вида

$$\sum_{i_1,\dots,i_r} \overline{w}_{i_1,\dots,i_r}\, t_1^{s_1+i_1}\, c_{s_2+i_2}(\overline{D}_1^*-\overline{D}_2)\dots c_{s_r+i_r}(\overline{D}_{r-1}^*-\overline{D}_r),$$

где коэффициенты $\overline{w}_{i_1,\dots,i_r}$ и $w_{i_1,\dots,i_r}$ связаны формальным соотношением

$$\sum_{i_1,\dots,i_r} \overline{w}_{i_1,\dots,i_r}\tau_1^{i_1}\dots\tau_r^{i_r} = \prod_{i=2}^{r}\frac{1+\tau_i\tau_1^{-1}}{1-\tau_i\tau_1^{-1}}\sum_{i_1,\dots,i_r} w_{i_1,\dots,i_r}\tau_1^{i_1}\dots\tau_r^{i_r}.$$

Вспомнив определение (1.6) коэффициентов $w_{i_1,\dots,i_r}$, мы получаем, что $\overline{w}_{i_1,\dots,i_r} = 0$ при $i_1 \neq 0$ и $\overline{w}_{0,i_2,\dots,i_r} = w_{i_2,\dots,i_r}$. Отсюда получаем следующее выражение для правой части в (3.5),

$$t_1^{s_1}\sum_{i_2,\dots,i_r} w_{i_2,\dots,i_r}\, c_{s_2+i_2}(\overline{D}_1^*-\overline{D}_2)\dots c_{s_r+i_r}(\overline{D}_{r-1}^*-\overline{D}_r),$$

откуда требуемое равенство следует индукцией по r. $\square$

В приложениях часто вместо лагранжевых характеристических классов возникает их «подкрученный» аналог — лежандровы характеристические классы. Они порождены образующими $a_1, a_2, \dots$, $\deg a_i = i$, и еще одной дополнительной одномерной образующей u (для определенности, мы рассматриваем комплексную ситуацию, и степень понимается в комплексном смысле; вещественная градуировка в два раза больше). Между этими классами имеются соотношения, которые порождены однородными компонентами равенства

$$(1 + a_1 + a_2 + \dots)\left(1 - \frac{a_1}{1+u} + \frac{a_2}{(1+u)^2} - \dots\right) = 1. \qquad (3.6)$$

Если положить формально $u = c_1(I)$, где I — комплексное линейное расслоение, и $1 + a_1 + a_2 + \dots = c(U)$, где U — виртуальное расслоение виртуального ранга 0, то соотношения записываются в виде

$$c(U + U^*\otimes I) = 1.$$

Из соотношений вытекает, что свободный аддитивный базис в кольце лежандровых характеристических классов образован мономами вида $u^j a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots$, где $i_k \in \{0, 1\}$.

Лежандровы характеристические классы образуют кольцо когомологий *стабильного лежандрова грассманиана* Λ^{leg}, определенного как тотальное пространство расслоения над $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$, слой которого над точкой $x \in BU(1)$ изоморфен Λ_N и состоит из всевозможных лагранжевых подпространств «подкрученного» симплектического пространства $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n\otimes I_x$, где $I \to BU(1)$ — классифицирующее линейное расслоение и $n \gg 0$.

Лежандровы характеристические классы возникают в следующей задаче. Пусть f — семейство квадратичных форм на слоях некоторого комплексного векторного расслоения $V \to X$, принимающих значения не в числах, а в слоях линейного расслоения I. Иными словами, f задано как сечение расслоения $\operatorname{Sym}^2 V^*\otimes I$, или как самосопряженный морфизм расслоений $V \to V^*\otimes I$.

3.2.10. Определение. *Лежандровыми характеристическими классами самосопряженного морфизма* $f : V \to V^*\otimes I$ называются его относительные классы Чженя $a_i = c_i(V^*\otimes I - V)$ и класс $u = c_1(I)$.

Соотношение (3.6) для этих классов легко проверяется: если положить $U = V^*\otimes I - V$, то имеет место формальное равенство $U + U^*\otimes I = 0$.

Более общая ситуация состоит в следующем. Предположим, что на слоях комплексного векторного расслоения $E \to X$ четного ранга $2n$ задана невырожденная кососимметричная форма, принимающая значения не в числах, а в слоях дополнительного линейного расслоения I. В этом случае мы будем говорить, что E — подкрученное симплектическое расслоение. Выбор тривиализации расслоения I превращает слои E_x в обычные симплектические векторные пространства. Условие того, что данное подпространство $V_x \subset E_x$ лагранжево, не зависит от выбора тривиализации I, и мы можем говорить о лагранжевых подрасслоениях. Для всякого лагранжева подрасслоения $V \subset E$ симплектическая структура задает изоморфизм $E/V \cong V^* \otimes I$.

3.2.11. Определение. Пусть на слоях расслоения E задана симплектическая структура со значениями в линейном расслоении I, и пусть даны два лагранжевых подрасслоения V, W. *Лежандровыми характеристическими классами набора* (E, I, V, W) называются классы $u = c_1(I)$ и $a_i = c_i(E - V - W) = c_i(V^* \otimes I - W) = c_i(W^* \otimes I - V)$.

Тождество (3.6) для этих классов также легко проверяется. Ситуация этого определения обобщает ситуацию предыдущего определения: с самосопряженным морфизмом $f : V \to V^* \otimes I$ можно связать подкрученное симплектическое расслоение $E = V \oplus V^* \otimes I$ и два его лежандровых подрасслоения, первое из которых задается как $V \oplus \{0\}$, а в качестве второго берется график морфизма f, состоящий из пар вида $\{y\} \oplus \{f_x(y)\}$, $x \in X$, $y \in V_x$.

Аналогично случаю $I = \mathbb{C}$, рассмотренному в предыдущем пункте, определяются *лежандровы циклы Арнольда-Фукса* Σ^r как подмножества точек базы X, в которых морфизм f имеет по меньшей мере r-мерное ядро (в ситуации определения 3.2.10) или в которых пересечение $V_x \cap W_x$ по меньшей мере r-мерно (в ситуации определения 3.2.11). Без изменений переносятся также определения разрешений $\eta : \widetilde{\Sigma}^r \to \Sigma^r$, $p_r : F_r \to \Sigma^r$, тавтологических расслоений $K = D_r \to \widetilde{\Sigma}^r$, $D_i \to F_r$ $(i \leqslant r)$ и производных характеристических классов $\eta_* P \in H^*(X)$, $p_{r*}R \in H^*(X)$, где P — многочлен от классов $c_i(K)$ и R — многочлен от классов $t_i = -c_1(D_i/D_{i-1})$.

3.2.12. Теорема. *Лежандровы классы Арнольда-Фукса* $[\Sigma^r]$*, а также все их производные классы выражаются как универсальные многочлены от лежандровых характеристических классов* u, a_i*.*

Для доказательства можно либо свести задачу вычисления этих классов к случаю лежандрова грассманиана при помощи подходящей процедуры стабилизации, либо повторить шаг за шагом рассуждения, использованные при вычислении этих классов в случае $I = \mathbb{C}$, рассмотренные в предыдущем пункте. Для *вычисления* классов Арнольда-Фукса и их производных удобно пользоваться следующим приемом, известным, по крайней мере, со статьи [35].

Предположим, что линейное расслоение I, в котором принимает значения симплектическая структура, является тензорным квадратом другого линейного расслоения $I = J^2$, так что $u = c_1(I) = 2\,c_1(J)$. Тогда $E' = E \otimes J^*$ является симплектическим (неподкрученным) расслоением в обычном смысле, а $V' = V \otimes J^*$ и $W' = W \otimes J^*$ — его лагранжевыми подрасслоениями. Циклы Арнольда-Фукса Σ^r, а также многообразия разрешения особенностей $\widetilde{\Sigma}^r$, F_r для лагранжевой тройки (E', V', W') те же, что и для лежандровой тройки (E, V, W), а лагранжевы характеристические классы $a_i' = c_i(E' - V' - W') = c_i((E - V - W) \otimes J^*)$ связаны с лежандровыми классами u, a_i соотношениями

$$1 + a_1' + a_2' + \dots = 1 + \frac{a_1}{1 - u/2} + \frac{a_2}{(1 - u/2)^2} + \dots, \qquad (3.7)$$

при этом тавтологическое расслоение D_i' на пространстве разрешения для лагранжевой тройки (E', V', W') изоморфно расслоению $D_i \otimes J^*$, где D_i — тавтологическое расслоение, соответствующее исходной лежандровой тройке (E, V, W). Отсюда вытекает следующее

3.2.13. Правило вычисления подкрученных классов. *Чтобы вы-*

числить класс Арнольда-Фукса

$$[\Sigma^r] = \eta_* 1 = p_{r*} \prod_{k=1}^{r} t_k^{r-k}$$

или один из его производных классов вида $p_{r*}R$, нужно в многочлене R, выраженном через классы $t_i = -c_1(D_i/D_{i-1})$, сделать формальную замену $t_i = t_i' - u/2$, затем применить равенство теоремы 3.2.8 к мономам от t_i' вместо t_i и лагранжевым классам a_i' вместо a_i, а затем выразить окончательный ответ через лежандровы классы a_i, u, воспользовавшись соотношением (3.7).

Отметим, что при нахождении этих классов используется деление на 2, однако в окончательном ответе получается многочлен с целыми коэффициентами, поскольку он представляет целочисленный класс когомологий лежандрова грассманиана. Это замечание особенно существенно в вещественных задачах, когда все расслоения, многообразия и т.п. предполагаются вещественными, а когомологии рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. В этом случае приведенные выше рассуждения не проходят, однако можно в окончательном ответе для подкрученных классов, полученном для комплексной задачи, заменить классы Чженя на классы Штифеля-Уитни, и привести коэффициенты по модулю 2, тогда полученные выражения будут служить ответом для подкрученных классов в вещественной задаче.

3.3 Метод использования симметрий

Особенности Портеуса-Тома задаются линейными членами ряда Тейлора отображения. Метод разрешения особенностей, изложенный в предыдущих пунктах, может с применяться и к классам особенностей, задаваемых высшими струями отображения. Именно этим способом были впервые вычислены многочлены Тома большого класса особенностей, см обзор [7]. Тем не менее, для более сложных особенностей хорошие разрешения найти не всегда удается, и с ростом коразмерности особенности метод наталкивается на серьезные трудности.

Сравнительно недавно Р. Римани обнаружил другой, косвенный, метод для вычисления многочленов Тома. При использовании этого метода предполагается установленным факт существования многочленов Тома. Идея метода очень проста: для нахождения многочлена достаточно определить его коэффициенты. Для определения коэффициентов можно рассмотреть набор примеров, в которых как классы, двойственные к циклам особенностей, так и относительные классы Чженя удается вычислить явно. Каждый такой пример задает линейные соотношения на коэффициенты многочлена Тома. Если примеры подобраны удачно, то этих соотношений оказывается достаточно для определения коэффициентов.

3.3.1. Пример. Покажем, как метод Римани можно применить к нахождению класса Портеуса-Тома $[\Sigma^r]$ для морфизма векторных расслоений $V \to Q$ рангов $\operatorname{rk} V = v$ и $\operatorname{rk} Q = v + \ell$. В случае, когда $v = r$, данный класс задается обращения в ноль сечения расслоения $\operatorname{Hom}(V, Q)$, и, следовательно, двойственный класс когомологий равен старшему классу Чженя $c_{r(\ell+r)}(\operatorname{Hom}(V, Q))$, то есть многочлену Шура $\Delta_{r+l,\dots,r+l}(c(Q-V))$ от образующих $c_i = c_i(Q - V)$ (см. п. 1.3.10). Итак, мы установили равенство

$$[\Sigma^r] = \Delta_{r+l,\dots,r+l}(c)$$

в частном случае, когда $r = \operatorname{rk} V$. Но тогда эта формула справедлива и в общем случае, поскольку гомоморфизм

$$H^*(BU) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots] \to H^*(BU(r) \times BU(r+l)) = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{r+\ell}]$$
$$1 + c_1 + c_2 + \dots \mapsto \frac{1 + b_1 + \dots + b_{r+\ell}}{1 + a_1 + \dots + a_r},$$

как нетрудно увидеть, инъективен вплоть до (комплексной) размерности $r(r + \ell)$. Из известных мне доказательств формулы для класса Портеуса-Тома приведенное — одно из самых коротких.

Пусть в качестве классификационной задачи теории особенностей рассматривается классификация орбит действия группы G на стягиваемом пространстве V (см. главу 2). Тогда в качестве тестового примера можно рассмотреть трубчатую окрестность страта $B\Xi = \Xi \times_G EG$ в соответствующем классифицирующем пространстве особенностей $BV = B \times_G EG$, где Ξ — одна из орбит. По лемме 2.7.2, само пространство $B\Xi = \Xi \times_G EG$ изоморфно классифицирующему пространству BG_Ξ группы симметрий особенности Ξ, а его трубчатая окрестность — пространству расслоения на BG_Ξ, ассоциированного с действием G_Ξ на произвольной G_Ξ -инвариантной трансверсали к орбите G_Ξ.

Относительно особенностей тестового примера известно следующее.

- Если Ω — произвольная особенность, к которой Ξ не примыкает, например, если $\Omega \neq \Xi$ и $\operatorname{codim} \Omega \geqslant \operatorname{codim} \Xi$, то цикл особенности Ω в нашем примере пуст, и многочлен Тома P_Ω этой особенности обращается в ноль.

- Если $\Omega = \Xi$, то цикл особенности Ω образует нулевое сечение нормального расслоения подмногообразия $B\Xi \subset BV$, и поэтому многочлен Тома особенности Ω задает класс Эйлера нормального расслоения, то есть класс Эйлера соответствующего представления группы G_Ξ.

Характеристические классы тестового примера задаются гомоморфизмом $H^*(BG) \to H^*(BG_\Xi)$, отвечающим вложению $G_\Xi \subset G$. Этот гомоморфизм, как правило, легко вычисляется при помощи принципа расщепления. Также легко вычисляется и класс Эйлера.

Если G — некоторая группа эквивалентностей ростков отображений (лево-правая, $\mathcal{K}$-эквивалентность и пр.), то приведенные построения сводятся к следующему. Рассмотрим росток устойчивого полиномиального отображения $f_0 : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, инвариантного относительно некоторого представления компактной группы H в пространствах $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}^n$ соответственно. Тогда в качестве тестового примера берутся пространства

X, Y векторных расслоений над BH, ассоциированных с представлением группы H в пространствах $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}^n$ соответственно, и отображение $f : X \to Y$ этих пространств, совпадающее с f_0 в каждом слое. Заметим, что для этого отображения пространства X, Y гомотопически эквивалентны и $H^*(X) = H^*(Y) = H^*(BH)$.

Для более эффективного применения метода необходимо подробнее изучить группу симметрии особенностей. Рассмотрим классификацию ростков отображений $(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{m+\ell})$ относительно стабильной $\mathcal{K}$-эквивалентности. В этой классификации $\ell \geqslant 0$ фиксировано, а m может меняться. Напомним, что два ростка называются стабильно эквивалентными, если их локальные алгебры изоморфны. Это означает, что из данного отображения, заданного в координатах как столбец функций $f_1, \ldots, f_{m+\ell}$ от m переменных $x_1, \ldots, x_m$, можно получить эквивалентные при помощи композиций следующих операций: 1) замена переменных; 2) умножение столбца f на обратимую матрицу с функциональными коэффициентами; 3) добавление новой переменной x_{m+1} и новой функции $f_{m+\ell+1}(x) = x_{m+1}$ (а также обратная к этой операции).

Пусть Q — локальная алгебра. Ее *корангом* называется минимальное количество образующих, или, что равносильно, минимальное число переменных c, такое, что эта алгебра реализуется как локальная алгебра некоторого ростка $\mathbb{C}^c \to \mathbb{C}^{c+\ell}$. Если алгебра порождена m элементами, то минимальное необходимое число соотношений равно $m + d$, где d не зависит от m и называется *дефектом* алгебры.

Пусть $Q = Q(\Xi)$ — локальная алгебра, отвечающая данному классу Ξ стабильной $\mathcal{K}$-эквивалентности. Напомним (см. определение 2.7.3), что *группой симметрий G_Ξ класса Ξ* называется максимальная компактная подгруппа в $\mathcal{K}$-стабилизаторе любого представителя этого класса с минимально возможным числом переменных, равным корангу особенности Ξ.

3.3.2. Теорема. *Группа симметрий особенности Ξ изоморфна прямому произведению*

$$G_\Xi \simeq \operatorname{Aut} Q \times U(\ell - d),$$

где $\operatorname{Aut} Q$ *— максимальная компактная подгруппа в группе автоморфизмов алгебры* A.

Доказательство. Зададим алгебру Q при помощи c образующих, где c — ее коранг, и $c+\ell$ соотношений $f_1, \dots, f_{c+\ell}$, последние $\ell - d$ из которых $f_{c+d+1}, \dots, f_{c+\ell}$ тождественно равны нулю. Поскольку всякое преобразование из G_Ξ сохраняет идеал, порожденный функциями f_i имеется естественный гомоморфизм $G_\Xi \to \operatorname{Aut}(Q)$. Ясно, что всякое преобразование из ядра этого гомоморфизма сохраняет каждую из функций $f_1, \dots, f_{c+d}$, а на функциях $f_{c+d+1}, \dots, f_{c+\ell}$ действует всевозможными линейными заменами. С другой стороны, группу автоморфизмов алгебры Q можно реализовать при помощи преобразований, в которых задействованы лишь функции $f_1, \dots, f_{c+\ell}$. Таким образом, подгруппы, участвующие в разложении теоремы, коммутируют, что завершает ее доказательство.

3.3.3. Замечание. Отметим несколько соображений, облегчающих применение метода Римани. Первое замечание состоит в том, что группа симметрий G_Ξ может быть заменена подгруппой $H \subset G_\Xi$, такой, что индуцированный гомоморфизм $H^*(BG_\Xi) \to H^*(BH)$ инъективен. В частности, G_Ξ может быть несвязной, и *в качестве* H *можно взять компоненту единицы.* Действительно, в этом случае ядро гомоморфизма $H^*(BG_\Xi) \to H^*(BH)$ состоит из элементов конечного порядка, так что замена G_Ξ на H не препятствует вычислению многочлена Тома с рациональными коэффициентами. Но поскольку априорно известно, что в кольце характеристических классов векторных расслоений $H^*(BU)$ кручение отсутствует, найденный многочлен будет иметь только целые коэффициенты и будет представлять класс особенности в когомологиях с целыми коэффициентами.

Второе замечание состоит в том, что система линейных уравнений на коэффициенты многочленов Тома, получающаяся применением этого метода, является чрезвычайно переопределенной. Чтобы исключить избыточные соотношения, можно воспользоваться следующим соображением.

Предположим, что некоторый многочлен P от относительных классов Чженя обращается в ноль, если отображение f имеет только особенности коразмерности $< k$. Тогда *для всякой особенности* Ξ *коразмерности* k *ограничение* P *на соответствующее пространство расслоения над* BG_Ξ *имеет вид* $e\,P'$, *где* e *— класс Эйлера расслоения, и* P' *— класс, степень которого на* k *меньше степени* P. Если некоторые из коэффициентов многочлена P неизвестны, то соотношения следует применять к коэффициентам многочлена $P' = P/e$ меньшей степени.

3.3.4. Пример. Рассмотрим классификацию особенностей отображений многообразий $X^m \to Y^{m+1}$ соседних размерностей. Возьмем в качестве тестового отображения $f : X \to Y$ вложение некоторого многообразия M в качестве нулевого сечения в тотальное пространство линейного расслоения с первым классом Чженя t. Тогда $c_1(f) = t$ и $c_k(f) = 0$ при $k > 1$. С другой стороны, у этого отображения отсутствуют особенности, за исключением точек вложения, отсюда мы получаем следующий вывод: *коэффициент при* c_1^k *у многочлена Тома произвольной особенности коразмерности* $k > 0$ *обращается в ноль.*

3.3.5. Пример. Рассмотрим особенность *зонтика Кэли-Уитни*

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_1x_2, \quad y_3 = x_2.$$

Эти формулы можно интерпретировать либо как росток отображения $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, либо как отображение $\xi \oplus \eta \xrightarrow{f} \xi^2 \oplus \xi\eta \oplus \eta$ тотальных пространств $X = \xi \oplus \eta$, $Y = \xi^2 \oplus \xi\eta \oplus \eta$ над некоторой гладкой базой B, где ξ, η — некоторые линейные расслоения с первыми классами Чженя $t_1 = c_1(\xi) \in H^2(B)$ и $t_2 = c_1(\eta) \in H^2(B)$ соответственно. Тогда полный относительный класс Чженя этого отображения равен

$$c(f) = \frac{c(\xi \oplus \eta)}{c(\xi^2 \oplus \xi\eta \oplus \eta)} = \frac{(1+t_1)(1+t_2)}{(1+2t_1)(1+t_1+t_2)(1+t_2)} = 1+(2t_1+t_2)+t_1t_2+\ldots,$$

а класс Эйлера расслоения $X \to B$ равен t_1t_2. Следовательно, многочлен Тома особенности зонтика, равный

$$P = \alpha\, c_1^2(f) + \beta\, c_2(f),$$

удовлетворяет соотношению

$$t_1t_2 = \alpha(2t_1 + t_2)^2 + \beta\, t_1t_2.$$

Приравнивая коэффициенты, мы находим единственное решение $\alpha = 0$, $\beta = 1$, т.е. $P = c_2$. Отметим, что, с учетом соотношения $\alpha = 0$ предыдущего примера, значение класса P на многообразии данного примера равно $\beta\, t_1\, t_2$, то есть пропорционально классу Эйлера $e = t_1t_2$, что согласуется со вторым утверждением замечания 3.3.3.

Чтобы увидеть, когда этот метод приводит к решению задачи нахождения многочлена Тома, обратимся к характеристической спектральной последовательности, определенной в п. 2.7. В комплексных задачах, когда каждая орбита имеет четную вещественную коразмерность и вся топология часто бывает сосредоточена в четных размерностях, спектральная последовательность вырождается в начальном члене,

$$H^*(BG) = \bigoplus H^*(BG_\Xi)$$

(по крайней мере до той коразмерности, до которой имеется лишь конечное число орбит). Слагаемые в правой части — группы когомологий не самих классифицирующих пространств BG_Ξ, а изоморфные им группы когомологий пространств Тома нормальных расслоений над $B\Xi = BG_\Xi \subset BV$. Следовательно, чтобы рассмотренный метод вычисления многочленов Тома приводил к результату, необходимо, чтобы вложение трубчатой окрестности $B\Xi$ в пространство Тома нормального расслоения задавал инъективное отображение в когомлогиях. Этот гомоморфизм задается умножением на класс Эйлера нормального расслоения. Таким образом, для *применимости метода необходимо, чтобы умножение на класс Эйлера задавало инъективный гомоморфизм в кольце когомологий $H^*(BG_\Xi)$ для всех особенностей Ξ коразмерности не выше данной.*

Если группа G_Ξ тривиальна, то класс Эйлера тривиален, и умножение на него — тривиальный гомоморфизм. Аналогично, если группа G_Ξ конечна, то класс Эйлера, как и все элементы группы $H^*(BG)$, имеет конечный порядок, и умножение на него задает нулевой гомоморфизм, с точностью до элементов кручения. Таким образом, для применимости этого метода *необходимо, чтобы все особенности до рассматриваемой коразмерности имели непрерывную группу симметрий.* Всякая квазиоднородная особенность имеет очевидную $U(1)$-симметрию. В большинстве классификационных задач особенности малых коразмерностей квазиоднородны, и метод эффективно приводит к нахождению многочленов Тома.

3.3.6. Пример. Рассмотрим классификацию особенностей голоморфных отображений комплексных многообразий $X \to Y$ соседних коразмерностей $\ell = \dim Y - \dim X = 1$ относительно стабильной $\mathcal{K}$-эквивалентности (см. п. 2.6). Начало этой классификации до коразмерности 8 приведено в примере 1.6.1 главы 1. Необходимая информация для вычисления многочленов Тома собрана в следующей таблице.

Ξ	Q_Ξ	codim	$H^*(BG_\Xi,\mathbb{Q})$	c
A_0	1	0	$\mathbb{Q}[t]$	$1+t$
A_k	$\frac{\mathbb{C}[x]}{\{x^{k+1}\}}$	$2k$	$\mathbb{Q}[t_1,t_2]$	$\frac{(1+t_1)(1+(k+1)\,t_2)}{1+t_2}$
$III_{2,2}$	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{\{x^2,y^2,x\,y\}}$	6	$\mathbb{Q}[t,u]$ $\deg u=2$	$\frac{(1+t)(1+2t+4u)}{(1+t+u)}$
$I_{2,2}$	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{\{x^2,y^2\}}$	7	$\mathbb{Q}[t,t_1,u]$ $\deg u=2$	$\frac{(1+t_1)(1+2t+4u)}{(1+t+u)}$
$III_{2,3}$	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{\{x^2,y^3,x\,y\}}$	8	$\mathbb{Q}[t,t_1]$	$\frac{(1+2t)(1+t+t_1)(1+3t_1)}{(1+t)(1+t_1)}$

Во втором столбце указана локальная алгебра особенности. Нормальная форма отображения задается как развертка $\mathcal{K}$-версальной деформации ростка с соответствующей алгеброй. Например, для особенности с локальной алгеброй $\mathbb{C}[x]/\{x^3\}$ нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^3 + x_2 x_1, \\ y_2 &= x_3 x_1^2 + x_4 x_1, \\ y_3 &= x_2, \\ y_4 &= x_3, \\ y_5 &= x_4. \end{aligned}$$

В четвертом столбце таблицы указано кольцо рациональных характеристических классов группы симметрий особенности. Для особенностей этой таблицы имеются очевидные группы симметрии, образованные произведением двух или трех сомножителей вида $U(1)$. Для особенности $III_{2,2}$ имеется бóльшая группа симметрий $U(2)$, в которой $U(1) \times U(1)$ является максимальным тором; для особенности $I_{2,2}$ группа симметрий несвязна, и имеется дополнительная $\mathbb{Z}_2$-симметрия, действующая перестановкой двух из сомножителей вида $U(1)$. В обоих случаях кольцо рациональных когомологий группы G_Ξ инъективно вкладывается в кольцо многочленов от первых классов Чженя, соответствующих факторам $U(1)$. Образ этого вложения состоит из $\mathbb{Z}_2$-симметричных многочленов. Выражение для полного класса Чженя вытекают из явных формул для нормальных форм особенностей и подсчета соответствующих этим нормальным формам показателей квазиоднородностей. Из аналогичных соображений находится и нормальный класс Эйлера особенности. Например, указанные выше формулы для особенности $Q[x]/\{x^3\}$ можно рассматривать как отображение тотальных пространств расслоений

$$\xi \oplus \xi^2 \oplus \eta \otimes \xi^{*2} \oplus \eta \otimes \xi^* \longrightarrow \xi^3 \oplus \eta \oplus \eta \otimes \xi^{*2} \oplus \eta \otimes \xi^*,$$

где ξ, η — линейные расслоения с первыми классами Чженя t_1, t_2, откуда и следуют формулы таблицы для этой особенности. Для остальных особенностей вычисления аналогичны.

Результаты вычисления многочленов Тома для особенностей коразмерности не выше 8 приведены ниже в таблице (см. [72]).

$$
\begin{aligned}
[A_1] &= c_2 \\
[A_2] &= c_2^2 + c_1\,c_3 + 2\,c_4 \\
[A_3] &= c_2^3 + 3\,c_1\,c_2\,c_3 + c_3^2 + 2\,c_1^2\,c_4 + 7\,c_2\,c_4 + 10\,c_1\,c_5 + 12\,c_6 \\
[J_6] &= c_3^2 - c_2\,c_4 \\
[J_7] &= c_1\,c_3^2 - c_1\,c_2\,c_4 + 2\,c_3\,c_4 - 2\,c_2\,c_5 \\
[A_4] &= c_2^4 + 6\,c_1\,c_2^2\,c_3 + 2\,c_1^2\,c_3^2 + 4\,c_2\,c_3^2 + 9\,c_1^2\,c_2\,14 + 11\,c_4^2 \\
&\qquad + 6\,c_1^3\,c_5 + 53\,c_1\,c_2\,c_5 + 21\,c_3\,c_5 + 54\,c_1^2\,c_6 + 76\,c_2\,c_6 + 156\,c_1\,c_7 + 144\,c_8 \\
[J_8] &= -2\,(-c_2\,c_3^2 + c_2^2\,c_4 - c_1\,c_3\,c_4 + c_4^2 + c_1\,c_2\,c_5 - 3\,c_3\,c_5 + 2\,c_2\,c_6)
\end{aligned}
$$

Таблица 3.1: Многочлены Тома особенностей отображений многообразий относительной размерности $\ell = 1$

3.3.7. Пример. Список особенностей малой коразмерности (не выше 8) отображений многообразий одинаковой размерности ($\ell = 0$) приведен ниже. В этой таблице используются те же обозначения, что и в предыдущем примере.

Ξ	Q_Ξ	codim	$H^*(BG_\Xi,\mathbb{Q})$	c
$A_p,\ p \geqslant 0$	$\frac{\mathbb{C}[x]}{x^{p+1}}$	p	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{1+(p+1)t}{1+t}$
$I_{2,2}$	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{x^2,\ y^2}$	4	$\mathbb{Q}[t,u]$, $\deg u{=}2$	$\frac{1+2t+4u}{1+t+u}$
$I_{p,q},\ 2{\leqslant}p{\leqslant}q,\ p{+}q{>}4$	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{xy,\ x^p+y^q}$	$p{+}q$	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{(1+(p+q)t)(1+pqt)}{(1+pt)(1+qt)}$
I_7	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{x^2,\ y^3}$	7	$\mathbb{Q}[t,t_1]$	$\frac{(1+2t)(1+3t_1)}{(1+t)(1+t_1)}$
I_8	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{x^2+y^3,xy^2}$	8	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{(1+6t)(1+7t)}{(1+2t)(1+3t)}$

Многочлены Тома для особенностей коразмерности не выше 8, вычисленные при помощи данных из этой таблицы, приведены [72, 49]. Для особенностей коразмерности не выше 6 эти многочлены приведены ниже в таблице.

$$
\begin{aligned}
[A_1] &= c_1 \\
[A_2] &= c_1^2 + c_2 \\
[A_3] &= c_1^3 + 3\,c_1\,c_2 + 2\,c_3 \\
[A_4] &= c_1^4 + 6\,c_1^2\,c_2 + 2\,c_2^2 + 9\,c_1\,c_3 + 6\,c_4 \\
[I_{2,2}] &= c_2^2 - c_1\,c_3 \\
[A_5] &= c_1^5 + 10\,c_1^3\,c_2 + 10\,c_1\,c_2^2 + 25\,c_1^2\,c_3 + 12\,c_2\,c_3 + 38\,c_1\,c_4 + 24\,c_5 \\
[I_{2,3}] &= 2\,(c_1\,c_2^2 - c_1^2\,c_3 + c_2\,c_3 - c_1\,c_4) \\
[A_6] &= c_1^6 + 15\,c_1^4\,c_2 + 30\,c_1^2\,c_2^2 + 5\,c_2^3 + 55\,c_1^3\,c_3 + 79\,c_1\,c_2\,c_3 \\
&\qquad + 17\,c_3^2 + 141\,c_1^2\,c_4 + 55\,c_2\,c_4 + 202\,c_1\,c_5 + 120\,c_6 \\
[I_{2,4}] &= 2\,c_1^2\,c_2^2 + 3\,c_2^3 - 2\,c_1^3\,c_3 + 2\,c_1\,c_2\,c_3 - 3\,c_3^2 - 5\,c_1^2\,c_4 + 9\,c_2\,c_4 - 6\,c_1\,c_5 \\
[I_{3,3}] &= c_1^2\,c_2^2 - c_2^3 - c_1^3\,c_3 + 3\,c_1\,c_2\,c_3 + 3\,c_3^2 - 2\,c_1^2\,c_4 - 3\,c_2\,c_4
\end{aligned}
$$

Таблица 3.2: Многочлены Тома особенностей отображений многообразий равных размерностей ($\ell = 0$)

3.3.8. Пример. Метод Римани с равным успехом применим и к вычислению многочленов Тома особенностей отображений $X \to Y$ многообразий неположительной относительной размерности $\ell = \dim Y - \dim X \leqslant 0$. Бесконечномерность локальной алгебры в этом случае не препятствует проведению вычислений. Возникающие особенности в этой классификации — особенности $(-\ell)$-мерных полных пересечений. Для 0-мерных полных пересечений, то есть для «жирных точек» многочлены Тома приведены в предыдущем примере. Для одномерных полных пересечений ($\ell = -1$) начало классификации приведено в следующей таблице.

Ξ	Q_Ξ	codim	$H^*(BG_\Xi,\mathbb{Q})$	c
A_0	$\mathbb{C}[x]$	0	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{1}{1+t}$
A_1	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{x\,y}$	2	$\mathbb{Q}[t,u]$ $\deg u{=}2$	$\frac{1+t}{1+t+u}$
$A_k,\ k\geqslant 2$	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{x^{k+1}+y^2}$	$k+1$	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{1+2(k+1)t}{(1+2t)(1+(k+1)t)}$
$D_k,\ k\geqslant 4$	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{x^2y+y^{k-1}}$	$k+1$	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{1+2(k-1)t}{(1+2t)(1+(k-2)t)}$
E_6	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{x^3+y^4}$	7	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{1+12t}{(1+4t)(1+3t)}$
E_7	$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{x^3+x\,y^3}$	8	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{1+9t}{(1+3t)(1+2t)}$
$S_k,\ k\geqslant 5$	$\frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{x^2+y^2+z^{k-3},\ y\,z}$	$k+1$	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{(1+2(k-3)t)(1+(k-1)t)}{(1+2t)(1+(k-3)t)^2}$
T_7	$\frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{x^2+y^3+z^3,\ y\,z}$	8	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{(1+6t)(1+4t)}{(1+3t)(1+2t)^2}$
U_7	$\frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{x^2+y\,z,\,x\,y+z^3}$	8	$\mathbb{Q}[t]$	$\frac{(1+8t)(1+9t)}{(1+3t)(1+4t)(1+5t)}$

Все особенности этой таблицы квазиоднородны, что дает очевидную $U(1)$-симметрию. Кроме того, дополнительную симметрию имеет особенность Морса A_1.

Многочлены Тома для особенностей вплоть до коразмерности 8, вычисленные при помощи данных из этой таблицы, приведены [49]. Для особенностей коразмерности не выше 6 эти многочлены приведены ниже в таблице.

$$
\begin{aligned}
&[A_1] = c_1^2 - c_2\\
&[A_2] = 2\,c_1\,(c_1^2 - c_2)\\
&[A_3] = c_1\,(5\,c_1^3 - 4\,c_1\,c_2 - c_3)\\
&[A_4] = 4\,c_1\,(3\,c_1^4 - c_1^2\,c_2 - 2\,c_2^2 + c_1\,c_3 - c_4)\\
&[D_4] = c_1\,(c_1^4 - c_1^2\,c_2 + 3\,c_2^2 - 4\,c_1\,c_3 + c_4)\\
&[A_5] = 2\,(15\,c_1^6 + 5\,c_1^4\,c_2 - 26\,c_1^2\,c_2^2 + 3\,c_2^3 + 25\,c_1^3\,c_3\\
&\qquad\qquad - 15\,c_1\,c_2\,c_3 + 3\,c_3^2 - c_1^2\,c_4 - 3\,c_2\,c_4 - 6\,c_1\,c_5)\\
&[D_5] = 2\,(2\,c_1^6 - c_1^4\,c_2 + 6\,c_1^2\,c_2^2 - 2\,c_2^3 - 9\,c_1^3\,c_3 + 6\,c_1\,c_2\,c_3 - 2\,c_3^2 - 3\,c_1^2\,c_4 + 2\,c_2\,c_4 + c_1\,c_5)\\
&[S_5] = c_2^3 - 2\,c_1\,c_2\,c_3 + c_3^2 + c_1^2\,c_4 - c_2\,c_4
\end{aligned}
$$

Таблица 3.3: Многочлены Тома особенностей одномерных полных пересечений ($\ell = -1$)

3.4 Многочлены Тома вещественных отображений

Методы, рассмотренные выше, применимы и для определения характеристических классов, связанных с вещественными особенностями. Вычисления, проводимые при помощи метода разрешения с использованием когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ и классов Штифеля-Уитни, можно провести, повторяя шаг за шагом все построения, совершаемые в комплексном случае. В результате получаются ровно те же многочлены, но только от классов Штифеля-Уитни вместо классов Чженя, и с коэффициентами, приведенными по модулю 2.

Что касается метода Римани, то его следует применять с некоторой долей осторожности, поскольку в вещественном случае нельзя пренебрегать конечной частью группы симметрий, и это усложняет вычисление когомологий классифицирующих пространств особенностей. Однако эту трудность можно обойти следующим образом. Вместо того, чтобы напрямую вычислять многочлен Тома, следует сперва решить соответствующую комплексную задачу. Несмотря на то, что при вычислении комплексных многочленов Тома методом Римани используются рациональные числа, полученный этим методом многочлен имеет только целые коэффициенты, поскольку он представляет целочисленный характеристический класс, а в кольце характеристических классов комплексных векторных расслоений кручение, как известно, отсутствует. Если привести этот многочлен по модулю 2 и заменить классы Чженя классами Штифеля-Уитни, то получается вещественный многочлен Тома.

Последнее утверждение нуждается, вообще говоря, в обосновании, однако все известные мне контрпримеры довольно вырождены и имеют очень большую коразмерность, а для особенностей малых коразмерностей один и тот же многочлен удается получить, как правило, несколькими способами.

Существенно новой и независимой задачей является задача определения целочисленных характеристических классов, связанных с вещественными особенностями. Несмотря на большую важность такого рода задач с точки зрения приложений, в этой диссертации они не рассматриваются. Представление о возникающих трудностях можно получить из недавней статьи [26].

Глава 4

Многочлены Тома лагранжевых, лежандровых особенностей и критических точек функций

4.1 Лежандровы особенности и изолированные особенности гиперповерхностей

Глобальные когомологические свойства комплексных лежандровых особенностей и особенностей гиперповерхностей недостаточно отражены в литературе, хотя они столь же важны для приложений, связанных с исчислением особенностей, как в случае обычных отображений. Поэтому мы посвятили этим вопросам отдельную главу. Одним из ярких применений излагаемой теории является объяснение следующего численного совпадения. Рассмотрим начало иерархии особенностей критических точек функций, изображенное на следующей диаграмме.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{codim} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
& A_1 & A_2 \arrow[l] & A_3 \arrow[l] & A_4 \arrow[l] & A_5 \arrow[l] & A_6 \arrow[l] & A_7 \arrow[l] \\
& & & & D_4 \arrow[ul] & D_5 \arrow[l] \arrow[ul] & D_6 \arrow[l] \arrow[ul] & D_7 \arrow[l] \arrow[ul] \\
& & & & & & E_6 \arrow[ul] \arrow[uul] & E_7 \arrow[l] \arrow[ul] \arrow[uul] \\
& & & & & & & P_8 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Количества классов особенностей разных коразмерностей образуют последовательность $1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, \ldots$. Эта же последовательность описывает размерности однородных составляющих внешней алгебры $\Lambda^*(a_1, a_2, \ldots)$, порожденной образующими степеней $1, 2, \ldots$.

В этой главе мы проводим вычисление многочленов Тома для лагранжевых и лежандровых особенностей. Эта задача возникла из вещественной симплектической и контактной геометрии и изучалась ранее только как вещественная, см. [83]. Как мы покажем, комплексный аналог этой задачи также имеет много интересных приложений. Оказывается, что в комплексном случае проводить вычисления более удобно; ответ в вещественной задаче получается редукцией при помощи процедуры овеществления. Вычисление многочленов Тома проводится двумя независимыми способами. Первый из них прямой и использует метод разрешения особенностей. В тех случаях, когда этот метод напрямую применить не удается, используются дополнительные соображения, использующие понятие экспонент примыкания особенностей. Второй, косвенный, способ основан на методе Римани использования симметрий и опирается на априорную теорему о существовании многочлена Тома. Этот метод менее геометричен, но использует меньше вычислений.

Все многообразия и расслоения в этой главе, если не оговорено противное, предполагаются комплексными, а отображения — голоморфными.

4.1.1. Определение. Рассмотрим тотальное пространство P проективизации кокасательного расслоения $P = PT^*M$ некоторой гладкой базы M. Это пространство является гладким многообразием размерности $2n-1$, где $n = \dim M$. В касательном расслоении к P имеется подрасслоение E коразмерности 1, называемое *канонической контактной структурой*. Оно строится следующим образом. Точка $y \in P$ задает касательную гиперплоскость $\lambda(y) \subset T_xM$, где x — образ точки y при естественной проекции $\pi : P = PT^*M \to M$. Положим $E_y = \pi_*^{-1}\lambda(y) \subset T_yP$.

Иммерсированное подмногообразие $L \subset P$ называется *лежандровым*, если оно касается контактной структуры и имеет размерность $n-1$. *Лежандровым отображением* называется проекция лежандрова подмногообразия $L \subset PT^*M$ на базу M кокасательного расслоения. При этом два ростка лежандровых подмногообразий в PT^*M считаются эквивалентными, если имеется диффеоморфизм базы M, такой, что индуцированный диффеоморфизм PT^*M переводит один лежандров росток в другой. Образ лежандрова отображения называется его *фронтом*.

4.1.2. Пример. Пусть задано гладкое локально тривиальное расслоение $\pi : W \to M$ и гиперповерхность H в его тотальном пространстве.

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & W \\ & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ & & M \end{array}$$

Мы можем рассматривать H как семейство гиперповерхностей $H_x \subset W_x$, высекаемых в слоях расслоения π. В случае общего положения поверхность H_x гладкая для общей точки $x \in M$. Те точки, для которых поверхность H_x особая, образуют гиперповерхность в базе M семейства. Эта особая гиперповерхность является фронтом следующего лежандрова отображения. Пусть $L \subset H$ образовано теми точками, в которых H касается слоев проекции π. Иными словами, L образовано всеми особыми точками всех гиперповерхностей H_x, $x \in M$. Подмногообразие $L \subset H$ задается как множество нулей сечения расслоения $\mathrm{Hom}(V, I)$, где V — расслоение векторов, касательных к слоям расслоения π, а линейное расслоение I — нормальное расслоение гиперповерхности $H \subset W$. В случае общего положения это сечение трансверсально нулевому, и множество его нулей является гладким подмногообразием размерности $n-1$. В этом случае ограничение на L проекции π лежандрово. Фронт построенного лежандрова отображения совпадает с множеством критических значений отображения $g : H \to M$, являющегося ограничением проекции π.

4.1.3. Пример. Более общим образом, пусть задано гладкое отображение $g : H \to M$ многообразий неположительной относительной размерности, $\dim H \geqslant \dim M$. Предположим, что коранг в образе этого отображения, то есть размерность коядра производной, не превосходит 1 ни в одной точке. Тогда в случае общего положения множество $L \subset H$ критических точек отображения g гладко, и ограничение g на L является лежандровым. При этом лежандрова иммерсия $L \to P = PT^*M$ сопоставляет точке $x \in L$ касательную гиперплоскость $\operatorname{Im} g_* \subset T_{g(x)}M$, рассматриваемую как точку слоя $PT^*_{g(x)}M$ проективизированного кокасательного расслоения $P \to M$.

Пусть многообразие M имеет вид прямого произведения $M = V \times I$, где $I \simeq \mathbb{C}$ — прямая. Тогда PT^*M содержит открытое подмногообразие $J^1(V, I) \subset PT^*(V \times I)$, состоящее из касательных гиперповерхностей, трансверсальных прямым вида $\{x\} \times I$. Всякая такая гиперплоскость является графиком линейного отображения $T_xV \to I$, то есть точкой пространства $T^*_x \otimes I$. Следовательно, многообразие $J^1(V, I)$ изоморфно прямому произведению прямой I и тотального пространства подкрученного кокасательного расслоения $T^*V \otimes I$. Это многообразие вместе с наследуемой контактной структурой называется *многообразием 1-струй* отображений $V \to I$. С каждым отображением $f : V \to I$ можно связать его *1-график* $j^1 f \subset J^1(V, I)$, состоящий из троек вида $(x, df(x), f(x))$, где $x \in V$, $df(x) \in \operatorname{Hom}(T_xV \times I) = T^*_xV \otimes I$, и $f(x) \in I$. *1-график всякого гладкого отображения является лежандровым многообразием*, и этим контактная структура на пространстве 1-струй определяется однозначно.

4.1.4. Пример. Пусть V — векторное пространство. Тогда имеется естественный изоморфизм $J^1(V,I) = J^1(V^*\otimes I, I) = V \times V^*\otimes I \times I$. Этот изоморфизм *не* сохраняет контактную структуру, однако имеется глобально заданный (нелинейный) контактный диффеоморфизм

$$h : J^1(V,I) \to J^1(V^*\otimes I, I),$$

называемый *преобразованием годографа*. Этот диффеоморфизм имеет вид

$$h : (v,u,z) \mapsto (v,u,\langle v,u\rangle - z), \qquad v \in V, \quad u \in V^*\otimes I, \quad z \in I,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — естественное спаривание векторов и ковекторов. Росток всякой гладкой функции $f : V \to I$ задает лежандрово многообразие $j^1 f \subset J^1(V,I)$, а следовательно, росток лежандрова многообразия $L_f = h(j^1 f) \subset J^1(V^*\otimes, I) \subset PT^*(V^*\otimes I \times I)$. Таким образом, имеется инвариантный способ сопоставить ростку функции $f : V \to I$ росток особенности лежандровой проекции $L_f \to V^*\otimes I \times I$.

4.1.5. Лемма. *Имеется естественное соответствие, которое всякому ростку лежандрова отображения сопоставляет инвариантно определенный класс стабильной $\mathcal{K}$-эквивалентности ростков функций, то есть класс стабильной эквивалентности изолированных особенностей гиперповерхностей.*

В ситуации примера 4.1.2 точке $x \in L \subset H \subset W$ сопоставляется особенность гиперповерхности $H_y = H \cap W_y$, где $W_y = \pi^{-1}\pi x$ — слой расслоения π, проходящий через x. В ситуации примера 4.1.3 точке $x \in L \subset H$ сопоставляется особенность слоя $g^{-1}(g(x))$, вложенного в подходящее гладкое многообразие на единицу большей размерности. В ситуации примера 4.1.4 ростку лежандровой проекции $L_f \to V^*\otimes I \times I$ сопоставляется росток самой функции f. В общем случае всякий росток лежандрова подмногообразия $L \subset PT^*\mathbb{C}^n$ задается ростком подходящего невырожденного производящего семейства функций $F(x,q)$, заданного на пространстве вспомогательного расслоения $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, согласно правилу

$$L = \left\{([p], q) \subset PT^*\mathbb{C}^n \;\middle|\; \exists x \in \mathbb{C}^k, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}\right\}$$

(условие невырожденности заключается в том, что многообразие, определяемое этой конструкцией, гладко). Сопоставим ростку L начальную функцию $f(\cdot) = F(\cdot, 0)$ семейства.

Соответствие между лежандровыми особенностями и особенностями критических точек функций не является взаимно однозначным. Однако различие наступает в сравнительно больших коразмерностях (начиная с 8), и поэтому мы не рассматриваем эту более детальную классификацию лежандровых особенностей. Кроме того, можно рассмотреть более общую *стабильную классификацию лежандровых особенностей*, и тогда соответствие станет взаимно однозначным. Пусть задано лежандрово подмногообразие $L \subset PT^*M$, и пусть $g : N \to M$ — гладкое отображение многообразий, вообще говоря, различных размерностей. Тогда можно определить *расслоенное произведение* $g^*L = N \times_M L$ как подмногообразие прямого произведения $N \times L$, заданное уравнением $g(a) = \pi(b)$, где $a \in N$, $b \in L$, и $\pi : PT^*M \to M$ — естественная проекция. При определенном легко формулируемом условии трансверсальности многообразие g^*L гладко и допускает естественное лежандрово вложение в PT^*N. Назовем особенности лежандровых проекций $L \to M$ и $g^*L \to N$ *стабильно эквивалентными*. Если L задается производящим семейством $F(x, q)$, то g^*L задается производящим семейством $\widetilde{F}(x, a) = F(x, g(a))$. Отсюда следует, что особенности критических точек функций, сопоставляемые стабильно эквивалентным лежандровым особенностям, совпадают.

Различные типы изолированных особенностей функций выделяют на всяком лежандровом подмногообразии $L \subset PT^*M$ циклы. Задача нахождения многочлена Тома состоит в определении классов когомологий, двойственных этим циклам. В действительности, эти классы выражаются через определенные комбинации различных классов Чженя, а именно — через лежандровы характеристические классы $u, a_1, a_2, \ldots$, определенные следующим образом (см. п. 1.5.6). Обозначим через $I = TP/E$ линейное факторрасслоение, нормальное к контактной структуре. Это расслоение сопряжено к тавтологическому линейному расслоению на $P = PT^*M$.

4.1.6. Определение. *Лежандровыми характеристическими классами*, связанными с лежандровым подмногообразием $L \subset P = PT^*M$ называются классы $u = c_1(I)$ и $a_i = c_i(\pi^*TM - TL - I)$, где $\pi : P \to M$ естественная проекция.

Нетрудно проверить, что эти классы удовлетворяют тождеству 1.7. Один из способов установить это тождество состоит в следующем. Коммутатор Ли векторных полей задает кососимметричное билинейное спаривание $E \times E \to I$. Это спаривание невырождено (это свойство равносильно невырожденности контактной структуры), и касательная плоскость ко всякому лежандрову подмногообразию является лагранжевой плоскостью относительно этой «подкрученной» симплектической структуры в E. Кроме того, по определению контактной структуры, проекция $\pi : P \to M$ задает изоморфизм $\pi_* : E/V \to \pi^*TM/I$, где V — «вертикальное» расслоение, то есть расслоение векторов, касательных к слоям проекции π. Таким образом, на многообразии L имеется векторное расслоение E четного ранга, на слоях которого задана симплектическая структура со значениями в I, и имеются два лагранжевых подрасслоения, одно из которых, TL, образовано касательными плоскостями к многообразию L, а второе, V, — к слоям расслоения $\pi : P \to M$. Согласно определению 3.2.11, лежандровы характеристические классы, определяемые этими данными, равны $u = c_1(I)$ и $a_i = c_i(E/V - TL) = c_i(\pi^*TM/I - TL)$, то есть это в точности классы, задаваемые определением 4.1.6. $\square$

В ситуации определения 4.1.2 расслоение I продолжается на все W, в качестве него выступает расслоение дивизора H, и классы a_i задаются как $a_i = c_i(V^* \otimes I - V)$, где $V = TW - TM$ — расслоение векторов, касательных к слоям проекции $W \to M$. В ситуации определения 4.1.3 расслоение I определено только в точках критического множества L отображения g и определяется как линейное расслоение коядер производной g_*, а классы a_i равны $a_i = c_i((TH + I - TM)^* \otimes I - (TH + I - TM))$. Приведенные равенства легко следуют из определений и могут рассматриваться как упражнения.

4.1.7. Теорема. *Пусть задан класс Σ стабильной $\mathcal{K}$-эквивалентности критических точек функций. Тогда класс когомологий, двойственный соответствующему циклу лежандровых особенностей (или один из его производных классов, если таковой корректно определен), на всяком лежандровом многообразии общего положения $L \subset PT^*M$ является универсальным лежандровым характеристическим классом и выражается как универсальный многочлен (который мы называем* многочленом Тома) *от классов u, a_i. Этот многочлен не зависит от L, M и определяется однозначно классом особенностей Σ.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству существования многочлена Тома обычных отображений. Схема этого доказательства состоит в следующем. Строится классифицирующее пространство лежандровых особенностей $\mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$, которое разбито на классы, соответствующие типам различных лежандровых особенностей, и кольцо когомологий которого изоморфно кольцу универсальных лежандровых характеристических классов. Для заданного лежандрова многообразия $L \subset PT^*M$ имеется классифицирующее отображение $\varkappa : L \to \mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$, такое, что разбиение L на страты различных лежандровых особенностей индуцировано из разбиения на $\mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$ отображением $\varkappa$. Из явной конструкции классифицирующего отображения следует, что $\varkappa^*$ переводит универсальные лежандровы классы u, a_i в соответствующие классы определения 4.1.6. Отметим, что приведенное ниже доказательство существования многочлена Тома, как и аналогичное доказательство в других комплексных задачах, требует использования C^∞-гладких отображений, не обязательно являющихся голоморфными.

Выберем гладкую конечномерную аппроксимацию B классифицирующего пространства $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$ одномерных комплексных расслоений и обозначим через I каноническое линейное расслоение над B. Например, в качестве I можно взять тавтологическое линейное расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^n$, где $n \gg 0$. С каждой точкой базы $x \in B$ свяжем контактное многообразие $J^1(\mathbb{C}^N, I_x) = \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^{N*} \otimes I_x \oplus I_x$, а также многообразие $\mathcal{L}^{\mathrm{leg}}_x$ k-струй ростков лежандровых подмногообразий в начале координат пространства $J^1(\mathbb{C}^N, I_x)$, где k, N — фиксированные достаточно большие натуральные числа. Многообразия $\mathcal{L}_x^{\mathrm{leg}}$ образуют гладкое локально тривиальное расслоение над B.

4.1.8. Определение. *Классифицирующим пространством лежандровых особенностей* называется тотальное пространство $\mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$ расслоения над $B \sim BU(1)$ со слоем $\mathcal{L}_x^{\mathrm{leg}}$, $x \in B$.

Точки пространства $\mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$ классифицированы в соответствии с особенностями лежандровой проекции $L_x \hookrightarrow J^1(\mathbb{C}^N, I_x) \to \mathbb{C}^{N*} \otimes I_x \oplus I_x$. Это позволяет определить *многочлен Тома лежандровой особенности* как класс когомологий в $H^*(\mathcal{L}^{\mathrm{leg}})$, двойственный циклу соответствующей особенности.

Напомним (см. рассуждения после определения 4.1.6), что контактная плоскость $E_x \simeq \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^{N*} \otimes I_x \subset T_0 J_1(\mathbb{C}^N, I_x)$ является «подкрученным» симплектическим пространством, на котором определена невырожденная билинейная кососимметрическая форма со значениями в одномерном пространстве $I_x \simeq \mathbb{C}$. Для всякого ростка лежандрова подмногообразия $L_x \subset J^1(\mathbb{C}^N, I_x)$ его касательная плоскость $T_0 L_x \subset E_x$ является *лагранжевым* подпространством относительно этой симплектической структуры. Более того, лежандровы ростки, имеющие общую касательную плоскость в начале координат, образуют стягиваемое (аффинное) пространство. Следовательно, классифицирующее пространство лежандровых особенностей гомотопически эквивалентно *стабильному лежандрову грассманиану* Λ^{leg}, определенному в п. 1.5.6 главы 1. В частности, кольцо когомологий классифицирующего пространства $\mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$ изоморфно кольцу универсальных лежандровых характеристических классов. Таким образом, по построению, многочлен Тома лежандровой особенности определяется как элемент кольца универсальных лежандровых характеристических классов.

Пусть теперь задано произвольное лежандрово отображение $L \hookrightarrow PT^*M \to M$. Для завершения доказательства теоремы 4.1.7 мы должны построить классифицирующее отображение $\varkappa : L \to \mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$. Рассмотрим произвольную точку $x \in L \subset PT^*M$. Обозначим через I_x конормальное пространство контактной структуры, и через V_x — касательное пространство к слою проекции $PT^*M \to M$. В окрестности точки x имеется контактный голоморфный диффеоморфизм $\varphi_x : J^1(V_x, I_x) \to PT^*M$, переводящий слои проекции $J^1(V_x, I_x) \to V_x^* \otimes I_x \oplus I_x$ в слои проекции $PT^*M \to M$. Этот контактоморфизм можно выбрать так, чтобы в начале координат он был тождественным как в касательном пространстве к слою, изоморфному V_x, так и в конормальном пространстве контактной структуры, изоморфном I_x. Более того, пространство ростков контактоморфизмов φ_x, удовлетворяющих перечисленным свойствам, стягиваемо. Отсюда следует, что *семейство контактоморфизмов φ_x можно выбрать гладко зависящим от точки $x \in L$* (отметим, что каждый из контактоморфизмов φ_x является голоморфным, в то время как зависимость от x является, вообще говоря, только C^∞-гладкой).

Зафиксировав семейство контактоморфизмов φ_x, мы получили семейство контактных многообразий $K_x = J^1(V_x, I_x)$, образующих векторное расслоение над L, и семейство ростков лежандровых подмногообразий $L_x \subset K_x$, образующих гладкое подмногообразие в тотальном пространстве расслоения K, содержащее нулевое сечение и определенное в его трубчатой окрестности.

Следующий шаг состоит в том, чтобы при помощи процедуры стабилизации тривиализовать расслоение V. Для этого выберем векторное расслоение U на L, такое, что $U \oplus V = \mathbb{C}^N$ — тривиальное расслоение (тривиализация не обязана быть голоморфной). Заменим контактное расслоение K со слоем, изоморфным $J^1(V_x, I_x)$, на расслоение $\tilde{K} = K \oplus U \oplus U^* \otimes I$ со слоем, изоморфным $J^1(U_x \oplus V_x, I_x) = J^1(\mathbb{C}^N, I_x)$. Заменим семейство лежандровых подмногообразий $L_x \subset K_x$ на семейство лежандровых подмногообразий $\tilde{L}_x = L_x \times \{0\} \times U^* \otimes I \subset \tilde{K}_x$. Используя отображение $L \to BU(1)$, классифицирующее расслоение I, мы можем отождествить прямую I_x с одним из слоев классифицирующего линейного расслоения над $BU(1)$. Следовательно, росток $\tilde{L}_x \subset \tilde{K}_x = J^1(\mathbb{C}^N, I_x)$ может рассматриваться как точка классифицирующего пространства $\mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$, что завершает построение классифицирующего отображения $\varkappa : L \to \mathcal{L}^{\mathrm{leg}}$.

Легко видеть, что лежандрова особенность, сопоставляемая ростку $\tilde{L}_x$, стабильно эквивалентна особенности, сопоставляемой ростку L_x. Следовательно, классифицирующее отображение $\varkappa$ сохраняет разбиение на классы лежандровых особенностей. С другой стороны, согласно п. 1.5.6 главы 1, лежандровы характеристические классы, индуцированные отображением $\varkappa$, имеют вид $u = c_1(I)$ и

$$a_i = c_i(-T(\tilde{L}/M)) = c_i(-TL - U^* \otimes I) = c_i(-TL + V^* \otimes I) = c_i(T_L M - TL - I),$$

что и требовалось доказать. □

Список лежандровых особенностей малых коразмерностей, то есть соответствующих особенностей критических точек функций, вместе с их нормальными формами, приведен в конце п. 1.6 главы 1.

4.1.9. Теорема. *Для особенностей коразмерности не выше* 6 *много-*

члены Тома лежандровых особенностей следующие.

$A_2 = \boldsymbol{a_1}$

$A_3 = \boldsymbol{3a_2} + ua_1$

$A_4 = \boldsymbol{3a_1a_2 + 6a_3} + 4ua_2 + u^2a_1$

$D_4 = \boldsymbol{a_1a_2 - 2a_3} - ua_2$

$A_5 = \boldsymbol{27a_1a_3 + 6a_4} + u(16a_1a_2 - 12a_3) - 4u^2a_2 + u^3a_1$

$D_5 = \boldsymbol{6a_1a_3 - 12a_4} + u(4a_1a_2 - 14a_3) - 4u^2a_2$

$$A_6 = \boldsymbol{87a_2a_3 + 54a_1a_4 + 78a_5} + \\ u(127a_1a_3 - 53a_4) + u^2(59a_1a_2 - 126a_3) - 41u^3a_2 + u^4a_1$$

$D_6 = \boldsymbol{12a_2a_3 - 24a_5} + u(14a_1a_3 - 40a_4) + u^2(8a_1a_2 - 30a_3) - 8u^3a_2$

$E_6 = \boldsymbol{9a_2a_3 - 12a_1a_4 + 6a_5} + 3ua_4 + u^2(3a_1a_2 - 6a_3) - 3u^3a_2$

$$A_7 = \boldsymbol{135a_1a_2a_3 + 465a_2a_4 + 264a_1a_5 + 522a_6} + u(516a_2a_3 - 16a_1a_4 + 485a_5) + \\ u^2(305a_1a_3 - 70a_4) + u^3(190a_1a_2 - 440a_3) - 165u^4a_2 + u^5a_1$$

$$D_7 = \boldsymbol{24a_1a_2a_3 - 24a_2a_4 + 48a_1a_5 - 144a_6} + u(8a_2a_3 + 44a_1a_4 - 224a_5) + \\ u^2(48a_1a_3 - 172a_4) + u^3(20a_1a_2 - 88a_3) - 20u^4a_2$$

$$E_7 = \boldsymbol{9a_1a_2a_3 + 6a_2a_4 - 42a_1a_5 + 36a_6} + u(21a_2a_3 - 61a_1a_4 + 80a_5) + \\ u^2(43a_4 - 6a_1a_3) + u^3(7a_1a_2 - 8a_3) - 7u^4a_2$$

$$P_8 = \boldsymbol{a_1a_2a_3 - 6a_2a_4 + 6a_1a_5 - 4a_6} + \\ u(7a_1a_4 - 4a_2a_3 - 10a_5) + u^2(2a_1a_3 - 8a_4) - 2u^3a_3$$

Вычисление многочленов теоремы 4.1.9 мы будем проводить в последующих пунктах этой главы для описанного ниже частного случая. Пусть на гладком многообразии M заданы комплексные векторные расслоения V, I рангов $\operatorname{rk} V = n$, $\operatorname{rk} I = 1$, и пусть задано послойное отображение расслоений $f : V \to I$, такое, что ограничение $f_x : V_x \to I_x$ этого отображения на каждый слой имеет критическую точку в начале координат. Можно считать, что f задано как $f = f_2 + f_3 + \cdots + f_K$, где K достаточно велико и f_i — сечение расслоения $\operatorname{Sym}^i V^* \otimes I$. Семейство ростков f_x задает семейство лежандровых отображений $L_{f_x} \to V_x^* \otimes I_x \times I_x$, задаваемых преобразованием годографа примера 4.1.4. В свою очередь, это задает разбиение базы M по классам лежандровых особенностей. Это разбиение совпадает с разбиением по классам особенностей критических точек ростков f_x. Классы когомологий, двойственные различным классам особенностей, выражаются, согласно теореме 4.1.7, через определенные комбинации классов Чженя расслоения, а именно, через лежандровы характеристические классы, которыми в данном случае являются классы $u = c_1(I)$ и классы $a_i = c_i(V^* \otimes I - V)$, заданные разложением

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots = \frac{(1+u)^n - (1+u)^{n-1}c_1 + (1+u)^{n-2}c_2 - \cdots \pm c_n}{1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n}, \quad (4.1)$$

где $c_i = c_i(V)$, $n = \operatorname{rk} V$. Эти выражения мы и будем определять. Согласно предложению 1.5.5 главы 1 (точнее, его подкрученному аналогу относительно лежандровых классов), многочлены Тома, полученные для этой модели, определяют их полностью. В действительности, использование приведенной модели не является необходимостью, все нижеследующие построения можно непосредственно проводить в терминах лежандровых особенностей, однако использование этой модели несколько упрощает обозначения.

4.2 Разрешение дискриминантов особенностей функций

В этом пункте мы используем метод разрешения особенностей для вычисления многочленов Тома лежандровых особенностей A_2, A_3, A_4, D_4, D_5, D_6, E_6, E_7, P_8.

Рассмотрим росток особенности критической точки функции $g : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}, 0$. Обозначим через $g_{(2)} = d^2 g$ квадратичную форму, задаваемую членами второй степени ростка g. Пусть $K \subset T_0\mathbb{C}^n$ — ядро отображения $g_{(2)}$, рассматриваемого как самосопряженное отображение $g_{(2)} : T_0\mathbb{C}^n \to T_0^*\mathbb{C}^0$. Члены степени 3 задают кубическую форму $g_{(3)}$ на $T_0\mathbb{C}^n$, ограничение которой на K определено инвариантно (то есть не зависит от выбора координат в $\mathbb{C}^n$).

Пусть $f : V \to I$ — полиномиальное отображение векторных расслоений рангов n, 1 соответственно, такое, что ограничение $f_w : V_w \to I_w$ на каждый слой имеет в начале координат критическую точку.

Обозначим через $F_r = F_r(V, I, f)$ многообразие, образованное флагами вида $G_{1w} \subset \cdots \subset G_{rw} \subset K_w$, $w \in M$, $\dim G_{iw} = i$, где $K_w = \ker f_{(2)w}$ — ядро второго дифференциала функции f_w. Это в точности то же многообразие, которое рассматривалось в п. 3.2, мы изменили только обозначение тавтологических расслоений на этом многообразии с D_k на G_k, чтобы не возникало путаницы с соответствующими классами особенностей функций. Мы хотим представить циклы различных особенностей семейства функций f как образы определенных подмногообразий в F_r при естественной проекции

$$p_r : F_r \to M.$$

4.2.1. Определение. Пусть $\Sigma = \Sigma(f) \subset M$ — многообразие одной из особенностей A_k, D_k, E_k, P_8 ограничения f на слои. Определим подмножества $\widetilde{\Sigma} \subset F_r$, где r — коранг особенности Σ, следующими условиями.

Случай $\Sigma = A_k$: $r = \dim K_w = 1$, прямая G_{1w} должна совпадать с K_w.

Случай $\Sigma = D_4$: $r = \dim K_w = 2$, плоскость G_{2w} должна совпадать с K_w, и кубическая форма $f_{(3)w}$ должна обращаться в ноль на G_{1w}.

Случаи $\Sigma = D_k$, $k \geqslant 5$ и $\Sigma = E_k$: $r = \dim K_w = 2$, плоскость G_{2w} должна совпадать с K_w, и кубическая форма $f_{(3)w}$ должна иметь вырожденный ноль на G_{1w}.

Случай $\Sigma = P_8$: $r = \dim K_w = 3$. G_{3w} должно совпадать со всем K_w. Пусть C — кубическая кривая, образованная формой $f_{(3)w}$ на $P(K_w) \cong \mathbb{C}P^2$. Мы требуем, чтобы PG_{1w} была точкой уплощения этой кривой и чтобы прямая PG_{2w} была касательной к C в $PG_{1w} \in C$.

4.2.2. Лемма. *Классы когомологий на M, двойственные следующим циклам особенностей, представляются как прямые образы соответствующих циклов на F_r:*

$$\begin{aligned}
[A_k] &= p_{1*}[\widetilde{A}_k] \quad (k \geqslant 2),\\
[D_4] &= \frac{1}{3}\, p_{2*}[\widetilde{D}_4],\\
[D_k] &= p_{2*}[\widetilde{D}_k] \quad (k \geqslant 5),\\
[E_k] &= p_{2*}[\widetilde{E}_k] \quad (k = 6, 7, 8),\\
[P_8] &= \frac{1}{9}\, p_{3*}[\widetilde{P}_8].
\end{aligned}$$

Доказательство. Лемма следует из наблюдения, что каждая точка $w \in \Sigma \subset M$ имеет единственный прообраз на соответствующем цикле $\widetilde{\Sigma} \subset F_r$, если Σ является одной из особенностей A_k, E_k, или $D_{>4}$. У особенности D_4 имеется 3 таких прообраза (соответствующих трем прямым нулей формы $f_{(3)w}$ на K_w), и для особенности P_8 имеется 9 прообразов на $\widetilde{P}'_8$ (соответствующих 9 точкам уплощения кубики $f_{(3)w} = 0$ на $P(K_w)$). $\square$

Поскольку, согласно результатам п. 3.2, гомоморфизм p_{r*} известен, лемма сводит задачу вычисления многочленов Тома к задаче вычисления классов, двойственных определенным циклам на F_r, и выражению этих классов через характеристические классы, поднятые с M, и классы $t_i = -c_1(G_i/G_{i-1})$.

Пример. Третий дифференциал $d^3 f_w = f_{(3)w} : G_{1w} \to I_w$ задает кубическую форму на слоях G_1 со значениями в I, то есть сечение линейного расслоения $(G_1)^{*\otimes 3} \otimes I$ на F_1, где G_1 — линейное тавтологическое расслоение на F_1. Замыкание цикла $\widetilde{A}_3 \subset F_1$ — множество нулей этого сечения. Поэтому $[\widetilde{A}_3] = c_1((G_1)^{*\otimes 3} \otimes I) = 3t_1 + u$ и

$$[A_3] = p_{1*}(3t_1 + u), \qquad t_1 = -c_1(G_1), \quad u = c_1(I),$$

что после применения формул п. 3.2 дает искомый многочлен Тома для A_3.

Рассмотрим диаграмму включений и проекций замыканий следующих циклов,

$$
\begin{array}{lllllll}
F_3 & & \supset & & \overline{\widetilde{P}}_8 & & \\
\downarrow p_{32} & & & & \downarrow & & \\
F_2 & \supset & \overline{\widetilde{D}}_4 & \supset & \overline{\widetilde{D}}_5 & \begin{array}{l} \supset \\ \supset \end{array} & \begin{array}{l} \overline{\widetilde{E}}_6 \supset \overline{\widetilde{E}}_7 \\ \overline{\widetilde{D}}_6 \end{array} \\
\downarrow p_{21} & & \downarrow & & & & \\
F_1 & \supset & \overline{\widetilde{A}}_3 & \supset & \overline{\widetilde{A}}_4 & &
\end{array}
$$

4.2.3. Лемма. *Для каждой пары циклов в приведенной ниже таблице первый цикл пары можно отождествить с множеством нулей сечения определенного линейного расслоения. Это расслоение определено инвариантно только в точках второго цикла пары.*

	Определяющее расслоение	c_1
$\overline{\widetilde{A}}_3 \subset F_1$	$\mathrm{Hom}(G_1^{\otimes 3}, I)$	$3t_1 + u$
$\overline{\widetilde{A}}_4 \subset \overline{\widetilde{A}}_3$	$\mathrm{Hom}\left(\left(\Lambda^n(G_1^{\otimes 2} \oplus V/G_1)\right)^{\otimes 2}, I\right)$	$2t_1 + a_1$
$\overline{\widetilde{D}}_4 \subset F_2$	$\mathrm{Hom}(G_1^{\otimes 3}, I)$	$3t_1 + u$
$\overline{\widetilde{D}}_5 \subset \overline{\widetilde{D}}_4$	$\mathrm{Hom}(G_1^{\otimes 2} \otimes G_2/G_1, I)$	$2t_1 + t_2 + u$
$\overline{\widetilde{E}}_6 \subset \overline{\widetilde{D}}_5$	$\mathrm{Hom}(G_1 \otimes (G_2/G_1)^{\otimes 2}, I)$	$t_1 + 2t_2 + u$
$\overline{\widetilde{D}}_6 \subset \overline{\widetilde{D}}_5$	$\mathrm{Hom}\left(\left(\Lambda^{n-1}(G_1^{\otimes 2} \oplus V/G_2)\right)^{\otimes 2}, I\right)$	$2t_1 + a_1 - 2t_2 - u$
$\overline{\widetilde{E}}_7 \subset \overline{\widetilde{E}}_6$	$\mathrm{Hom}\left(\left(\Lambda^{n-1}(G_1^{\otimes 2} \oplus V/G_2)\right)^{\otimes 2}, I\right)$	$2t_1 + a_1 - 2t_2 - u$

Кроме того, мы можем отождествить $\overline{\widetilde{D}}_4 = p_{21}^{-1}(\overline{\widetilde{A}}_3) \subset F_2$ *и* $\overline{\widetilde{P}}_8 = p_{32}^{-1}(\overline{\widetilde{E}}_6) \subset F_3$.

Эта лемма позволяет вычислить многочлены Тома для особенностей $A_3, A_4, D_4, D_5, D_6, E_6, E_7, P_8$. Действительно, из леммы следует, что классы соотвенствующих циклов на F_r задаются следующими выражениями.

$$\begin{array}{ll}
\widetilde{A}_3 = 3t_1 + u & \in H^*(F_1)\\
\widetilde{A}_4 = (3t_1 + u)\,(2t_1 + a_1) & \in H^*(F_1)\\
\widetilde{D}_4 = 3t_1 + u & \in H^*(F_2)\\
\widetilde{D}_5 = (3t_1 + u)\,(2t_1 + t_2 + u) & \in H^*(F_2)\\
\widetilde{D}_6 = (3t_1 + u)\,(2t_1 + t_2 + u)\,(2t_1 + a_1 - 2t_2 - u) & \in H^*(F_2)\\
\widetilde{E}_6 = (3t_1 + u)\,(2t_1 + t_2 + u)\,(t_1 + 2t_2 + u) & \in H^*(F_2)\\
\widetilde{E}_7 = (3t_1 + u)\,(2t_1 + t_2 + u)\,(t_1 + 2t_2 + u)\,(2t_1 + a_1 - 2t_2 - u) & \in H^*(F_2)\\
\widetilde{P}_8 = (3t_1 + u)\,(2t_1 + t_2 + u)\,(t_1 + 2t_2 + u) & \in H^*(F_3)
\end{array}$$

Применив лемму 4.2.3 и формулы для гомоморфизмов $p_{r*} : H^*(F_r) \to M$, описанные в п. 3.2, мы завершаем вычисление многочленов Тома для соответствующих особенностей. □

Докозательство. Точка в слое расслоения $F_1 \to M$ задается выбором прямой $G_{1w} \subset V_w$. Зададим координаты $x, y_2, \dots, y_n$ на V_w таким образом, чтобы прямая G_{1w} порождалась вектором $\partial/\partial x$. Для точек многообразия F_1 разложение Тейлора функции $f_w : V_w \to I_w$ начинается с членов

$$f_w = ax^3 + b_{11}x^4 + \sum_{i=2}^{n} 2b_{1i}x^2 y_i + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} y_i y_j + \dots,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка относительно квазиоднородной градуировки, в которой $\deg x = 1/4$, $\deg y_i = 1/2$. Член ax^3 этого разложения задает корректно определенное сечение расслоения $\mathrm{Hom}(G_1^{\otimes 3}, I)$. Обращение в ноль этого сечения задает подмногообразие $\overline{\widetilde{A}_3} \subset F_1$. Цикл $\overline{\widetilde{A}_4} \subset \overline{\widetilde{A}_3}$ образован теми точками, в котроых квадратичная форма, заданная матрицей $\|b_{ij}\|$, вырождена. Определитель этой матрицы задает инвариантно сечение линейного расслоения

$$J = \mathrm{Hom}\left(\left(\Lambda^n(G_1^{\otimes 2} \oplus V/G_1)\right)^{\otimes 2}, I\right) = \left(\Lambda^n(G_1^{\otimes 2} \oplus V/G_1)\right)^{*\otimes 2} \otimes I.$$

Первый класс Чженя этого расслоения легко вычислить при помощи принципа расщепления. Он равен

$$c_1(J) = 2t_1 - 2c_1 + nu = 2t_1 + a_1$$

(последнее равенство следует из (4.1)).

Для точек многообразия F_2 мы выбираем на V_w координаты $x, y, z_3, \ldots, z_n$ таким образом, чтобы прямые G_{1w} и G_{2w}/G_{1w} порождались векторами $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ соответственно. В разложении

$$f_w = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 + b_{11}x^4 + \sum_{i=3}^{n} 2b_{1i}x^2z_i + \sum_{i,j=3}^{n} b_{ij}z_iz_j + \ldots$$

член $a_ix^{3-i}y^i$ является сечением расслоения $\mathrm{Hom}(G_1^{\otimes(3-i)} \otimes (G_2/G_1)^{\otimes i}, I)$ с первым классом Чженя $(3-i)t_1 + it_2 + u$, $i = 0, 1, 2, 3$ (каждое сечение в этой последовательности определено инвариантно только на множестве нулей предыдущего). Аналогично, определитель $(n-1) \times (n-1)$-матрицы $\|b_{ij}\|$ задает сечение расслоения $\mathrm{Hom}\left(\left(\Lambda^{n-1}(G_1^{\otimes 2} \oplus V/G_2)\right)^{\otimes 2}, I\right)$ с первым классом Чженя $2t_1 + a_1 - 2t_2 - u$. Замыкания циклов $\widetilde{D}_4, \widetilde{D}_5, \widetilde{E}_6, \widetilde{D}_6, \widetilde{E}_6$ задаются уравнениями

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_4&\colon \quad a_0 = 0,\\
\widetilde{D}_5&\colon \quad a_0 = a_1 = 0,\\
\widetilde{E}_6&\colon \quad a_0 = a_1 = a_2 = 0,\\
\widetilde{D}_6&\colon \quad a_0 = a_1 = \det\|b_{ij}\| = 0,\\
\widetilde{E}_7&\colon \quad a_0 = a_1 = a_2 = \det\|b_{ij}\| = 0
\end{aligned}$$

соответственно, что равносильно утверждению леммы.

Для цикла особенностей $\widetilde{P}_8 \subset F_3$ рассуждения аналогичны. Условие того, что касательная прямая PG_{2w} является точкой перегиба кубики $f_{(3)w} = 0$ на PG_{3w}, эквивалентно условию того, что кубическая форма $f_{(3)w}|_{G_{2w}}$ имеет троекратный ноль на прямой G_{1w}. Особенность $\widetilde{E}_6 \subset F_2$ определяется тем же условием, так что $\overline{\widetilde{P}_8} = p_{32}^{-1}(\overline{\widetilde{E}_6}) \subset F_3$. $\square$

Замечание. В случае общего положения семейства функций, задаваемого отображением f, циклы $\overline{\widetilde{A}_3}$, $\overline{\widetilde{D}_4}$, $\overline{\widetilde{D}_5}$, $\overline{\widetilde{E}_6}$, $\overline{\widetilde{P}_8}$ гладкие, в то время как циклы $\overline{\widetilde{A}_4}$, $\overline{\widetilde{D}_6}$, $\overline{\widetilde{E}_7}$ могут иметь особенности. Однако последние три цикла являются локально полными пересечениями, и соответствующие сечения задают эти циклы как приведенные (особые) многообразия ожидаемой коразмерности. Поэтому классы когомологий, двойственные этим циклам, определяются как старшие классы Чженя соответствующих расслоений. Для более сложных особенностей Σ соответствующий цикл $\widetilde{\Sigma}$ может иметь более сложные особенности, не являющиеся локально полными пересечениями, так что изложенный метод вычисления многочлена Тома к ним неприменим.

4.3 Показатели примыкания особенностей функций

Для тех особенностей из списка теоремы (4.1.9), которые не были рассмотрены в предыдущем пункте, многочлены Тома вычислены в этом пункте.

4.3.1. Лемма (основные соотношения). *Многочлены Тома особенностей критических точек функций подчиняются следующим соотноше-*

ниям.

$$
\begin{aligned}
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{6}u\right)[A_2] = \tfrac{1}{3}[A_3]\\
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{4}u\right)[A_3] = \tfrac{1}{4}[A_4] + \tfrac{3}{4}[D_4]\\
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{3}{10}u\right)[A_4] = \tfrac{1}{5}[A_5] + \tfrac{3}{5}[D_5]\\
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{3}u\right)[D_4] = \tfrac{1}{6}[D_5]\\
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{3}u\right)[A_5] = \tfrac{1}{6}[A_6] + \tfrac{2}{3}[D_6] + \tfrac{1}{2}[E_6]\\
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{3}{8}u\right)[D_5] = \tfrac{1}{8}[D_6] + \tfrac{1}{2}[E_6]\\
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{5}{14}u\right)[A_6] = \tfrac{1}{7}[A_7] + \tfrac{5}{7}[D_7] + \tfrac{11}{14}[E_7]\\
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{2}{5}u\right)[D_6] = \tfrac{1}{10}[D_7] + \tfrac{2}{5}[E_7]\\
&\left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{5}{12}u\right)[E_6] = \tfrac{1}{4}[E_7] + \tfrac{9}{4}[P_8]
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Завершение вычисления многочленов теоремы 4.1.9. Решая уравнения (4.2), можно выразить многочлены Тома особенностей коразмерностей $\operatorname{codim} \leqslant 6$ через многочлены Тома классов A_2, D_4, E_6, P_8, которые были вычислены в предыдущем пункте.

Формально, мы вычислили эти многочлены над $\mathbb{Q}$, но поскольку кольцо лежандровых характеристических классов не имеет кручения, все коэффициенты получившихся многочленов целые, и выражение для них справедливо также и в случае целочисленных когомологий.

Заметим, что выражения для многочленов Тома особенностей A_3, D_5, D_6, E_7, найденные в предыдущем пункте, используются здесь только для проверки вычислений. $\square$

Коэффициенты, входящие в линейные комбинации правой части равенств (4.2) — экспоненты примыканий, определяемые следующим образом.

Пусть $\Omega \subset M$ — класс некоторой *квазиоднородной* особенности гиперповерхности, Θ — некоторый класс соседней (комплексной) коразмерности, $\operatorname{codim}\Theta = \operatorname{codim}\Omega + 1$. Выберем представителя h_0 особенности Θ и ($\operatorname{codim}\Theta$)-мерную трансверсаль T в точке h_0 к классу Θ в пространстве струй функций. Класс особенностей Ω вырезает на трансверсали некоторое количество кривых $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Пусть $(\mathbb{C}, 0) \to (T, w)$ — нормализация (= параметризация) одной из этих кривых γ_i. Функции семейства γ_i образуют однопараметрическую деформацию $h_\tau : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ исходной функции h_0, где τ — параметр на γ_i. При $\tau \neq 0$ функция h_τ имеет в нуле $\mathcal{K}$-особенность, равную Ω. Следовательно, имеется замена переменных, приводящая h_τ к виду ρg, где $\rho(0) = 1$ и g — «нормальная форма» особенности Ω. Якобиан J_τ замены переменных в начале координат, приводящей к этой нормальной форме, может быть записан в форме $J_\tau = \tau^{\alpha_i} p_i(\tau)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ и p_i — росток голоморфной функции, не обращающейся в ноль в начале координат.

4.3.2. Определение. *Экспонентой примыкания* $[\Omega, \Theta]$ называется сумма экспонент α_i по всем кривым γ_i, высекаемым классом Ω на трансверсали T к особенности Θ.

Рассмотрим векторные расслоения V, I рангов $\operatorname{rk} V = n$, $\operatorname{rk} I = 1$ на некоторой гладкой базе M и расслоенное отображение $f : V \to I$. Рассмотрим цикл $\Omega = \Omega(f) \subset M$, состоящий из таких точек $w \in M$, для которых росток $f_w : V_w \to I_w$ стабильно $\mathcal{K}$-эквивалентен данному квазиоднородному многочлену $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ с конечнократной особенностью в начале координат. Выберем веса ω_i переменных x_i в $\mathbb{C}^n$ таким образом, чтобы тотальная степень многочлена g равнялась $\deg g = 1$.

4.3.3. Лемма. *Для некоторого достаточно большого натурального N ограничение линейного расслоения*

$$Y = (\Lambda^n V^* \otimes I^{\otimes \beta})^{\otimes N} = (\Lambda^n V^*)^{\otimes N} \otimes I^{\otimes (N\beta)}, \qquad \beta = \sum \omega_i,$$

на подпространство $\Omega(f) \subset M$ тривиально, то есть допускает нигде не обращающееся в ноль сечение.

Доказательство. Для произвольной точки $w \in \Omega(f)$ выберем такие координаты $x_1, \ldots, x_n$ в V_w и z в I_w, в которых росток $f_w : V_w \to I_w$ преобразуется к «нормальной форме» g. Мы утверждаем, что элемент

$$s_w = (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \otimes (\partial/\partial z)^{\otimes\beta})^{\otimes N} \Big|_{x_i=z=0} \in Y_w$$

задает инвариантно нигде не обращающееся в ноль сечение расслоения $Y|_{\Omega(f)}$. Для доказательства мы должны показать, что группа симметрий особенности g действует на элементе s_w тривиально.

Известно (см. [78, 86] и русский перевод книги [83]), что для всякого конечнократного ростка функции группа симметрий относительно правой эквивалентности конечна, если число переменных равно корангу особенности, то есть если второй дифференциал функции равен нулю. Отсюда следует, что для всякого квазиоднородного ростка

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_r) + x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

конечной кратности и коранга r группа симметрий относительно $\mathcal{K}$-эквивалентности является конечным расширением группы $O(n-r) \times U(1)$, где $O(n-r)$ действует линейно на переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, сохраняя квадратичную форму $x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2$, и $U(1)$ действует квазиоднородными растяжениями координат $x_1, \ldots, x_n$ и z.

Действие группы $O(n-r)$ на $\partial/\partial z$ тривиально, а ее действие на $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ сводится к умножению на ± 1. Группа $U(1)$ действует нетривиально на обоих сомножителях, но для тензорной комбинации, выбранной в лемме, это действие тривиально. Следовательно, тензор $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \otimes (\partial/\partial z)^{\otimes\beta}$ определяется однозначно с точностью до действия конечной группы, и его N-я тензорная степень определена уже однозначно, где N — порядок этой конечной группы. □

Замечание. Выражение для характеристического класса

$$\frac{1}{N} c_1(Y) = -c_1 + \beta u = \frac{1}{2} a_1 - \left(\frac{n}{2} - \beta\right) u,$$

через классы $a_1 = c_1(V^* \otimes I - V)$ и $u = c_1(I)$ не зависит от n, поскольку величина $n/2 - \beta = \sum(1/2 - \omega_i)$ не меняется при добавлении к функции g квадрата новой переменной веса 1/2. Класс $\frac{1}{N}c_1(Y)$ стоит в левой части равенств (4.2).

Замечание. Если особенность Ω не является квазиоднородной, то оба линейных расслоения, как $(\Lambda^n V^*)^{\otimes N}$, так и $I^{\otimes N}$ тривиальны на $\Omega(f)$ для некоторого достаточно большого N.

Тривиализация расслоения Y не может быть продолжена на замыкание цикла Ω, поскольку это расслоение Y нетривиально. Экспоненты примыкания измеряют препятствие к продолжению этой тривиализации на страты соседней коразмерности.

4.3.4. Лемма. *В группе когомологий M с рациональными коэффициентами имеет место соотношение*

$$\frac{1}{N}c_1(Y)\,\Omega = \sum[\Omega, \Theta]\;\Theta,$$

где сумма берется по всевозможным классам особенностей Θ коразмерности $\operatorname{codim}\Theta = \operatorname{codim}\Omega + 1$.

Доказательство. Пусть $Q \subset M$ — пробный компактный цикл вещественной размерности $2(\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}\Omega + 1)$. Без потери общности можно считать, что он представлен гладким подмногообразием, которое пересекает Ω трансверсально, так что $D = Q \cap \Omega$ — вещественная поверхность, гладкая всюду, за исключением конечного множества точек $\operatorname{Sing} D$, соответствующих пересечению Q с классами особенностей комплексной коразмерности $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}}\Omega + 1$. Тогда

$$(c_1(Y)\;\Omega, Q) = (c_1(Y), \overline{D}).$$

Число в правой части можно вычислить, рассматривая ограничение на D сечения s.

Рассмотрим точку $x \in \operatorname{Sing} D \subset \overline{D}$. Зафиксируем тривиализацию расслоения Y вблизи x. Определим индекс $\operatorname{ind}_x(s)$ сечения в точке x как число оборотов сечения при обходе точки базы $\overline{D}$ вокруг x в положительном направлени. Тогда число $(c_1(Y), \overline{D})$ вычисляется как общая сумма индексов всех особых точек из $\operatorname{Sing} D$. Но индекс каждой такой точки $\operatorname{ind}_x(s)$ равен, по определению, экспоненте примыкания особенностей Ω и $\Theta \ni x$, умноженной на N. Следовательно, сумма индексов равна числу пересечения цикла Q с линейной комбинацией коциклов $\sum N\,[\Omega, \Theta]\ \Theta$, взятой по всем классам $\Theta \subset M$, таким, что $\operatorname{codim} \Theta = \operatorname{codim} \Omega + 1$.

Таким образом, обе части равенства леммы принимают одни и те же значения на классах гомологий дополнительной размерности. По двойственности Пуанкаре, это доказывает лемму. $\square$

Для завершения доказательства основных соотношений (4.2) необходимо вычислить экспоненты примыкания. Нахождение экспонент составляет часть доказательства, которая требует достаточно больших вычислений. Необходимо перечислить все возможные примыкания классов соседних коразмерностей и вычислить соответствующие экспоненты. В этих вычислениях мы полагаемся на методы и результаты, изложенные в [4, 83, 77].

4.3.5. Лемма. *Примыкания приведенного ниже списка и комментариев к нему исчерпывают все возможные примыкания классов соседних коразмерностей, не превосходящих* 6. *Функции семейства, соответствующего примыканию $\Theta \to \Omega$, имеют особенность Ω в начале координат для всех значений параметра $\tau \neq 0$, и особенность Θ при $\tau = 0$. В приведенной таблице J — якобиан замены координат, приводящей особенность* *к нормальной форме, $c \in \mathbb{C}$ — константа.*

$\Theta \to \Omega$	f	J	$[\Omega : \Theta]$	*Прим.*
$A_{k+1} \to A_k$	$x^{k+2} + \tau x^{k+1}$	$c\tau^{1/(k+1)}$	$\frac{1}{k+1}$	
$D_{k+1} \to D_k$	$y^k + x^2 y + \tau y^{k-1}$	$c\tau^{1/2(k-1)}$	$\frac{1}{2(k-1)}$	
$D_4 \to A_3$	$y^3 + x^2 y + \tau y^2$	$c\tau^{1/4}$	$3/4$	(i)
$D_5 \to A_4$	$(x^2 + \tau y)^2 + xy^2$	$c\tau^{3/5}$	$3/5$	
$D_6 \to A_5$	$x^5 - xy^2 + \tau(y \pm x^2)^2$	$c\tau^{1/3}$	$2/3$	(ii)
$E_6 \to A_5$	$y^3 + (x^2 + \tau y)^2$	$c\tau^{1/2}$	$1/2$	
$E_6 \to D_5$	$x^4 + (y + \tau x)y^2$	$c\tau^{1/2}$	$1/2$	
$D_7 \to A_6$	$x^6 + xy^2 - \tau^2 x^5 + (\tau^2 x^2 + \tau y)^2$	$c\tau^{5/7}$	$5/7$	
$E_7 \to A_6$	$y^3 + (x^2 - 4\tau y)(xy + \tau x^2 - 4\tau^2 y)$	$c\tau^{11/14}$	$11/14$	
$E_7 \to D_6$	$x^3 y + (y + \tau x)y^2$	$c\tau^{2/5}$	$2/5$	
$E_7 \to E_6$	$x^3 y + \tau y^4 + y^3$	$c\tau^{1/4}$	$1/4$	
$P_8 \to E_6$	$y^3 + x^2 z + axyz + xz^2 + \tau z^2$	$c\tau^{1/4}$	$9/4$	(iii)

Комментарии. (i) Имеются 3 кривые, реализующие примыкание $D_4 \to A_3$, соответствующие трем прямым нулей третьего дифференциала особенности D_4. Для каждой из них мы имеем $J = c\tau^{1/4}$, так что $[A_3, D_4] = 3/4$.

(ii) Имеются 2 кривые, реализующие примыкание $D_6 \to A_5$, соответствующие двум возможным выборам знака $\pm$. Для обеих кривых мы имеем $J = c\tau^{1/3}$, так что $[A_5, D_6] = 2/3$.

(iii) Семейство, реализующее примыкание $P_8 \to E_6$, имеет вид $h_\tau = q + \tau l^2$, где q — кубическая форма от переменных x, y, z, и l — линейная функция, такая, что уравнение $l = 0$ задает касательную в точке уплощения кубики $q = 0$ на проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$. Для каждого такого семейства мы имеем $J = c\tau^{1/4}$ независимо от выбора значения модуля a кубики. На всякой гладкой кубике имеется 9 различных точек перегиба, следовательно, $[E_6, P_8] = 9/4$.

(iv) Особенность P_8 критических точек функций не примыкает ни к D_6, ни к A_6, см. [77].

Доказательство. Метод нахождения примыканий описан в подробностях в [83]. Условие того, что данная функция имеет особенность определенного типа, переформулируется как система алгебраических уравнений на коэффициенты разложения Тейлора функции. Эти уравнения могут быть явно решены, что дает приведенные формулы. Большинство из приведенных формул взято из [4, 83, 77] (иногда с незначительными заменами переменных).

Существенно новая часть наших вычислений состоит в нахождении экспонент примыканий для этих семейств. В качестве примера приведем вычисление асимптотического поведения $J = c\tau^{11/14}$ для примыкания $E_7 \to A_6$. Рассмотрим семейство ростков функций

$$h_\tau(x, y) = y^3 + (x^2 - 4\tau y)(xy + \tau x^2 - 4\tau^2 y).$$

После замены

$$y = \hat{y} + \tfrac{1}{4}\tau^{-1}x^2 + \tfrac{1}{32}\tau^3 x^3$$

мы получаем

$$h_\tau = \tfrac{1}{512}\tau^{-5}x^7 + 16\,\tau^3\hat{y}^2 + \cdots = \tfrac{1}{512}(\tau^{-5/7}x)^7 + 16\,(\tau^{3/2}\hat{y})^2 + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены больших квазиоднородных степеней относительно градуировки, в которой $\deg x = 1/7$, $\deg \hat{y} = 1/2$. Следовательно, росток h_τ имеет особенность A_6 при $\tau \neq 0$, и якобиан J в начале координат, приводящий h_τ к нормальной форме, равен

$$J = c\,\tau^{-5/7}\tau^{3/2} = c\,\tau^{11/14},$$

то есть $[A_6, E_7] = 11/14$.

Вычисления для других примыканий аналогичны, и даже проще, см. [49] $\square$

Комбинируя последние две леммы, мы заканчиваем доказательство основных соотношений леммы 4.3.1. $\square$

4.4 Симметрии особенностей

В этом пункте мы проводим независимое вычисление многочленов Тома теоремы 4.1.9 при помощи метода Римани использования симметрий, изложенного в п. 3.3. В отличие от прямого метода, рассмотренного в предыдущих двух пунктах, этот метод использует теорему существования многочленов Тома в качестве существенного шага доказательства. Он менее геометричен, но использует сравнительно меньше вычислений. Согласно идее, изложенной в п. 3.3, он состоит в рассмотрении конкретных примеров, в которых можно явно вычислить как классы, двойственные особенностям, так и лежандровы характеристические классы.

Примеры строятся следующим способом. Рассмотрим семейство квазиоднородных функций, реализующих трансверсаль к некоторому классу особенностей, скажем

$$f(x, y, a_1, \dots, b_2) = y^5 + x^2y + a_1y^4 + a_2y^3 + a_3y^2 + b_1x^2 + b_2xy.$$

Рассмотрим линейное расслоение $\xi \to B$ с первым классом Чженя $t = c_1(\xi) \in H^2(B)$. С каждой переменной $x, y, a_1, \dots, b_2$ мы связываем линейное расслоение $\xi^{\otimes l}$, где l — вес квазиоднородности переменной. Тогда семейство f может рассматриваться как квазоднородное расслоенное отображение

$$f : \xi^{\otimes 2} \oplus \xi \oplus \xi \oplus \dots \oplus \xi^{\otimes 2} \to \xi^{\otimes 5}, \qquad x \oplus y \oplus a_1 \oplus \dots \oplus b_2 \mapsto f(x, y, a_1, \dots, b_2).$$

Зададим M как тотальное пространство расслоения $\pi : \xi \oplus \dots \oplus \xi^{\otimes 2} \to B$, соответствующего параметрам $a_1, \dots, b_2$ семейства f. Положим в качестве $V \to M$ расслоение $\pi^*\xi^{\otimes 2} \oplus \pi^*\xi$ ранга 2, соответствующее переменным x, y, и положим также $I = \pi^*\xi^{\otimes 5}$. Таким образом, мы построили векторные расслоения $V, I \to M$ и гладкое расслоенное отображение $f : V \to I$. Лежандровы характеристические классы этого примера следующие

$$u = c_1(I) = 5t, \quad a = c(V^* \otimes I - V) = \frac{(1 + (5-1)t)(1 + (5-2)t)}{(1+t)(1+2t)} = 1 + 4t - 2t^2 + \dots .$$

С другой стороны, мы можем также вычислить классы, двойственные разным циклам особенностей. Это дает следующие соотношения на коэффициенты многочленов Тома $P_\Omega(u, a_1, a_2, \dots)$:

- Если $\Omega = D_6$, то $\Omega(f)$ — нулевое сечение расслоения $M \to B$, и двойственный ему класс когомологий равен старшему классу Чженя $e = c_5(M \to B)$ этого расслоения, откуда
$$P_{D_6}(5t, 4t, -2t^2, \dots) = t \cdot 2t \cdot 3t \cdot t \cdot 2t = 12t^5.$$
- Если $\Omega = A_6, E_6$ или если Ω — один из классов особенностей большей коразмерности, то $\Omega(f) = \varnothing$, откуда $P_\Omega(5t, 4t, -2t^2, \dots) = 0$.

(Можно также вычислить классы $P_{D_k}(5t, 4t, -2t^2, \dots)$, $k < 6$, но эти дополнительные соотношения избыточны.) Характеристические классы квазиоднородных деформаций других особенностей вплоть до коразмерности 6 приведены в следующей таблице.

Ω	codim	u	$a = 1 + a_1 + a_2 + \dots$	e
$A_k,\ k \geqslant 1$	$k-1$	$(k{+}1)\,t$	$\dfrac{1+kt}{1+t}$	$(k{-}1)!\,t^{k-1}$
$D_k,\ k \geqslant 4$	$k-1$	$(2k{-}2)\,t$	$\dfrac{(1+(2k{-}4)t)(1+kt)}{(1+2t)(1+(k{-}2)t)}$	$(2k{-}4)!!\,t^{k-1}$
E_6	5	$12\,t$	$\dfrac{(1+9t)(1+8t)}{(1+3t)(1+4t)}$	$6!\,t^5$
E_7	6	$9\,t$	$\dfrac{(1+7t)(1+6t)}{(1+2t)(1+3t)}$	$3 \cdot 5!\,t^6$
P_8	6	$3\,t$	$\dfrac{(1+2t)^3}{(1+t)^3}$	t^6

Соотношений, вытекающих из рассмотрения этих примеров, достаточно, чтобы вычислить многочлены Тома теоремы 4.1.9. □

4.5 Многочлены Тома комплексных лагранжевых, а также вещественных лагранжевых и лежандровых особенностей

Классификация особенностей вещественных лагранжевых отображений, см., например, [8], имеет очевидную комплексную версию. Комплексные лагранжевы особенности связаны с особенностями критических точек функций в той же мере, в какой лежандровы особенности связаны с особенностями $\mathcal{K}$-эквивалентности функций. Каждому ростку голоморфного лагранжева подмногообразия $L \subset (T^*M, 0)$ можно сопоставить однозначно лежандров росток $\widetilde{L} \subset (J^1M, 0) = (T^*M \times \mathbb{C}, 0)$. Это поднятие определяется тем, что проекция z на сомножитель $\mathbb{C}$ удовлетворяет соотношению $dz = p\,dq|_L$, где $p\,dq$ — каноническая 1-форма Лиувилля в T^*M. Росток функции, сопоставляемый особенности лагранжевой проекции $L \hookrightarrow T^*M \to M$ совпадает с ростком функции, сопоставляемым особенности лежандровой проекции $\widetilde{M} \hookrightarrow J^1M \to M \times \mathbb{C}$, однако в последнем случае он рассматривается с точностью до менее строгой $\mathcal{K}$-эквивалентности функций. При переходе от правой эквивалентности к $\mathcal{K}$-эквивалентности количество классов уменьшается, однако до коразмерности 6 обе классификации совпадают.

Контактное многообразие $J^1(M)$, получаемое в результате приведенной выше процедуры контактизации, обладает тем свойством, что нормальное расслоение I контактной структуры тривиализовано. Поэтому, с точки зрения характеристических классов, теория лагранжевых особенностей вкладывается в теорию лежандровых особенностей и соответствует случаю, когда расслоение I тривиально и $u = 0$, и мы получаем в качестве следствия теоремы 4.1.7 следующий результат.

4.5.1. Теорема. *Всякому классу стабильной правой эквивалентности функций однозначно сопоставляется лагранжев характеристиче-*

ский класс, выражаемый как многочлен от классов универсальных лагранжевых классов a_i. Для классов, рассмотренных в теореме 4.1.9, *лагранжев многочлен Тома получается из лежандрова подстановкой* $u = 0$ (*соответствующие слагаемые выделены в таблице теоремы* 4.1.9 *жирным шрифтом*). □

Лагранжевы многочлены Тома описывают, например, классы, двойственные циклам особенностей ограничения на слои для расслоенного отображения векторных расслоений $V \to I$ в случае, когда $I = \mathbb{C}$ — линейное тривиальное расслоение.

Вычислять лагранжевы многочлены Тома можно не ссылаясь на теорему 4.1.9, а повторяя шаг за шагом ее доказательство. В качестве побочного следствия этих рассуждений получается следующий вывод. Рассмотрим классифицирующее пространство комплексных лагранжевых особенностей. Оно строится аналогично вещественному случаю. В частности, это пространство гомотопически эквивалентно комплексному лагранжеву грассманиану $\Lambda^{\mathbb{C}}$, и кольцо его когомологий изоморфно кольцу лагранжевых характеристических классов. С другой стороны, классы лагранжевых особенностей задают разбиение этого пространства. Заметим, что в случае правой эквивалентности группа симметрий всякой конечнократной критической точки конечна, если число переменных равно корангу особенности. Отсюда следует, что всякий класс эквивалентности разбиения классифицирующего пространства лагранжевых особенностей является пространством Эйленберга-Маклейна $K(G_\Sigma, 1)$, где G_Σ — группа симметрий, и его рациональные когомологии тривиальны, то есть такие же, как у точки. Таким образом, до коразмерности 7, когда у классификации впервые появляются модули, классы лагранжевых особенностей образуют с точки зрения рациональных когомологий «клеточное разбиение», что объясняет нумерологию классов критических точек функций, упоминавшуюся в начале этой главы.

Другим следствием теоремы 4.1.9 является вычисление характеристических классов вещественных лагранжевых и лежандровых особенностей. Эти характеристические классы получаются заменой классов a_i на соответствующие классы α_i и приведением коэффициентов по модулю 2. Полученные многочлены приведены в следующей таблице. Лагранжевы классы получаются из лежандровых подстановкой $u = 0$; соответствующие члены выделены полужирным шрифтом. Эти выражения (за исключением равенства $[A_7] = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4$) получены в [83] другим методом.

$$\begin{aligned}
[A_2] &= \boldsymbol{\alpha_1}\\
[A_3] &= \boldsymbol{\alpha_2} + u\,\alpha_1\\
[A_4] &= \boldsymbol{\alpha_1\alpha_2} + u^2\alpha_1\\
[D_4] &= \boldsymbol{\alpha_1\alpha_2} + u\,\alpha_2\\
[A_5] &= \boldsymbol{\alpha_1\alpha_3} + u^3\alpha_1\\
[D_5] &= 0\\
[A_6] &= \boldsymbol{\alpha_2\alpha_3} + u\,(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_4) + u^2\alpha_1\alpha_2 + u^3\alpha_2 + u^4\alpha_1\\
[D_6] &= 0\\
[E_6] &= \boldsymbol{\alpha_2\alpha_3} + u\,\alpha_4 + u^2\alpha_1\alpha_2 + u^3\alpha_2\\
[A_7] &= \boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4} + u\,\alpha_5 + u^2\alpha_1\alpha_3 + u^4\alpha_2 + u^5\alpha_1\\
[D_7] &= 0\\
[E_7] &= \boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + u\,(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4) + u^2\alpha_4 + u^3\alpha_1\alpha_2 + u^4\alpha_2\\
[P_8] &= \boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + u\,\alpha_1\alpha_4
\end{aligned}$$

В заключение этого пункта сделаем еще одно замечание о сравнении многочленов Тома различных (комплексных) классификаций. Пусть имеется расслоенное отображение комплексных векторных расслоений $V \to I$, $\operatorname{rk} V = n$, $\operatorname{rk} I = 1$. Отображение n-мерного пространства в 1-мерное можно рассматривать как голоморфную функцию, и потому для вычисления классов, двойственных циклам различных особенностей, применимы формулы теоремы 4.1.9. С другой стороны, особенность отображения n-мерного пространства в 1-мерное можно рассматривать как особенность $(n-1)$-мерного полного пересечения, и потому для вычисления тех же классов применимы формулы из п. 3.3. В частности, можно убедиться непосредственно подстановкой (4.1), что при $n = 2$ формулы теоремы 4.1.9 дают те же выражения, что и формулы из таблицы примера 3.3.8, см. [49].

Глава 5

Мультиособенности гладких отображений и операции в теории кобордизмов

5.1 Формулировка основной теоремы

Мы рассматриваем голоморфные *собственные* отображения $f : M \to N$ гладких комплексных многообразий относительной размерности $\ell = \dim N - \dim M > 0$. Напомним, что *стабильным классом* $\mathcal{K}$*-особенностей* называется семейство α ростков отображений $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m+\ell})$, заданных при всех $m = 1, 2, \ldots,$ которое инвариантно относительно стабильной $\mathcal{K}$-эквивалентности (т.е. два стабильно эквивалентных ростка принадлежат или не принадлежат α одновременно) и которое, кроме того, удовлетворяет следующим условиям.

- Коранг c всех ростков данного класса одинаков. Таким образом, для описания класса α достаточно задать его представителей $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m+\ell})$ для $m = c$.

- Класс α должен быть конечно определен, то есть вопрос о принадлежности данного ростка классу α должен решаться по его K-струе, где K зависит от α и не зависит от конкретного его представителя. Мы вовсе не требуем, чтобы каждое отображение класса α было конечноопределенным, однако можно показать, что для достаточно больших K подпространство ростков, для которых K-струя достаточна, образует плотное подпространство в классе α.

- K-струи ростков отображений класса α должны образовывать полуалгебраическое гладкое (возможно, незамкнутое) подмногообразие в пространстве K-струй ростков отображений $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m+\ell})$, если K достаточно велико. Коразмерность $\operatorname{codim} \alpha$ этого многообразия не зависит K, m и называется *коразмерностью особенности* α.

Примером класса, состоящего больше, чем из одной орбиты $\mathcal{K}$-эквивалентности, служат классы Портеуса-Тома, обсуждавшиеся в главе 3.

Мультиособенностью называется произвольный конечный упорядоченный набор локальных особенностей. С каждым классом мультиособенностей $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ можно связать соответствующий *цикл мультиособенностей* $M(\underline{\alpha})$ заданного отображения $f : M \to N$. Он определяется как (особое) подмногообразие в декартовом произведении $M^r = M \times \cdots \times M$, задаваемое как замыкание множества наборов попарно различных точек $(x_1, \dots, x_r) \in M^r$, $x_i \neq x_j$, таких, что $f(x_1) = \cdots = f(x_r)$ и f имеет особенность заданного типа α_i в x_i при $i = 1, \dots, r$. Приведенное определение применимо, вообще говоря, только для отображений, удовлетворяющих условию общности (это условие, а также более строгое определение многообразия $X(\underline{\alpha})$ обсуждается в п. 5.6). При выполнении этого условия $M(\underline{\alpha})$ имеет ожидаемую размерность, равную $\dim M - \sum \operatorname{codim} \alpha_i - (r-1)\,\ell$, где $\operatorname{codim} \alpha_i$ — ожидаемая коразмерность цикла локальной особенности α_i в многообразии M области определения отображения, равная истинной коразмерности многообразия этой особенности в пространстве струй отображений.

Рассмотрим естественные проекции $p_M : M(\underline{\alpha}) \to M$ и $p_N : M(\underline{\alpha}) \to N$, задаваемые проекцией на первый сомножитель в декартовом произведении M^r и отображением f соответственно. Если f собственно, то образы этих проекций — замкнутые особые подмногообразия в M и N. Теория характеристических классов мультиособенностей описывает классы когомологий $\overline{m}_{\underline{\alpha}} \in H^*(M)$, $\overline{n}_{\underline{\alpha}} \in H^*(N)$, двойственные образам $p_M(M(\underline{\alpha})) \subset M$, $p_N(M(\underline{\alpha}))$ соответственно (рассматриваемым как особые приведенные подмногообразия).

Мы часто рассматриваем классы $\overline{m}_{\underline{\alpha}}$, $\overline{n}_{\underline{\alpha}}$ с их естественными кратностями, а именно, положим

$$m_{\underline{\alpha}} = \#\,\mathrm{Aut}(\alpha_2, \dots, \alpha_r)\, \overline{m}_{\underline{\alpha}}, \quad n_{\underline{\alpha}} = \#\,\mathrm{Aut}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)\, \overline{n}_{\underline{\alpha}},$$

где $\#\,\mathrm{Aut}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \#\,\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})$ — количество перестановок $\sigma \in S(r)$, таких, что $\alpha_{\sigma(i)} = \alpha_i$ при $i = 1, \dots, r$. Если $\underline{\alpha}$ содержит k_j особенностей одинакового типа β_j, $j = 1, 2, \dots$ с попарно различными β_j, то $\#\,\mathrm{Aut}(\underline{\alpha}) = k_1! \cdot k_2! \cdot \dots$. Эти кратности равны также степеням отображения цикла мультиособенностей $M(\underline{\alpha})$ на свой образ под действием проекций p_M и p_N соответственно.

Отметим, что отображение f индуцирует отображение $p_M(M(\underline{\alpha})) \to p_N(M(\underline{\alpha}))$. Степень этого отображения равна числу особенностей α_1 в наборе $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Следовательно, имеет место очевидное соотношение

$$n_{\underline{\alpha}} = f_* m_{\underline{\alpha}} \in H^*(N),$$

где f_* — гомоморфизм Гизина (который корректно определен, если отображение f собственно).

Приведенная ниже теорема выражает классы $\overline{m}_{\underline{\alpha}}$, $\overline{n}_{\underline{\alpha}}$ через некоторые характеристические классы, связанные с отображением f. Эти классы включают в себя, в частности, классы Чженя самих многообразий $c_i(TM) \in H^*(M)$ и $c_i(N) \in H^*(N)$. Больше классов можно получить из этих применением гомоморфизмов обратного и прямого образа f^* :

$H^*(N) \to H^*(M)$ и $f_* : H^*(N) \to H^*(M)$. В действительности, окончательные выражения включают только определенные комбинации этих классов, определенные следующим образом.

На многообразии M *области определения* отображения заданы *относительные классы Чженя* $c_i(f) = c_i(f^*TN - TM)$ отображения f. Со всяким мономом $c^I = c_1^{i_1}c_2^{i_2}\dots$ от образующих $c_1, c_2, \dots$ мы связываем независимую образующую s_I. Каждая такая переменная определяет на многообразии N *области значений* отображения следующий класс когомологий (называемый *классом Ландвебера-Новикова*):

$$s_I(f) = f_*(c_1(f)^{i_1}c_2(f)^{i_2}\dots) \in H^{2\deg s_I}(N),$$

$\deg s_I = \ell + \deg c^I = \ell + i_1 + 2i_2 + \dots$, где $\ell = \dim N - \dim M$.

Мы рассматриваем $H^*(M)$ как $H^*(N)$-модуль посредством действия, задаваемого гомоморфизмом f^*. Имея это в виду, мы часто используем одно и то же обозначение для класса λ из $H^*(N)$ и для его обратного образа $f^*\lambda$ из $H^*(M)$. В частности, мы сохраняем обозначение $s_I(f)$ для соответствующих классов Ландвебера-Новикова $f^*s_I(f) = f^*f_*(c^I(f)) \in H^*(M)$ на многообразии области определения отображения.

Более формально, рассмотрим кольцо $\mathcal{C} = H^*(BU) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots]$ многочленов от абстрактных классов Чженя и определим новое кольцо

$$\mathcal{S}C = \operatorname{Sym}\mathcal{C} = 1 \oplus \mathcal{C} \oplus \operatorname{Sym}^2\mathcal{C} \oplus \dots$$

многочленов от абстрактных классов Ландвебера-Новикова. Естественное линейное отображение $\mathcal{C} \to \mathcal{S}C$, переводящее многочлен от классов Чженя в соответствующую линейную комбинацию классов Ландвебера-Новикова, продолжается до гомоморфизма $\mathcal{S}C$-модулей

$$s : \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}C \to \mathcal{S}C.$$

Кольца $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}C$, $\mathcal{C} \otimes \mathcal{S}C$ градуированы соглашением $\deg c_i = i$ и условием того, что s повышает градуировку на ℓ.

Для всякого собственного отображения $f : M \to N$ мы определяем характеристические гомоморфизмы

$$\mathcal{C} \to H^*(M), \quad \mathcal{S}C \to H^*(N), \quad \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}C \to H^*(M),$$

вычисляющие соответствующие характеристические классы, ассоциированные с данным отображением f. Эти характеристические гомоморфизмы образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{C} \otimes \mathcal{S}C & \xrightarrow{s} & \mathcal{S}C & \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{Id}} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}C \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^*(M) & \xrightarrow{f_*} & H^*(N) & \xrightarrow{f^*} & H^*(M)
\end{array}$$

5.1.1. Теорема. *Для каждого $\ell > 0$ и всякого набора $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ локальных классов особенностей существует универсальный многочлен $\overline{m}_{\underline{\alpha}} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}C$ с рациональными коэффициентами от классов Чженя и Ландвебера-Новикова, c_i, s_I, такой, что для всякого достаточно общего собственного голоморфного отображения $f : M \to N$ относительной размерности $\ell = \dim N - \dim M$ класс когомологий, двойственный соответствующему циклу мультиособенностей $p_M(M(\underline{\alpha})) \subset M$, равен характеристическому классу $\overline{m}_{\underline{\alpha}}$, вычисленному на заданном отображении f.*

5.1.2. Следствие. *В условиях теоремы, класс когомологий $\overline{n}_{\underline{\alpha}}$, двойственный циклу мультиособенностей $p_N(M(\underline{\alpha})) \subset N$ в многообразии области значений отображения, задается как универсальный многочлен с рациональными коэффициентами от классов Ландвебера-Новикова отображения.*

Различные уточненные формулировки, учитывающие, в частности, целочисленные классы, сформулированы в виде гипотез в п 5.6. В частности, соответствующие многочлены для классов $m_{\underline{\alpha}} = \#\,\mathrm{Aut}(\underline{\alpha}')\,\overline{m}_{\underline{\alpha}}$, где $\underline{\alpha}' = (\alpha_2, \dots, \alpha_r)$, и $n_{\underline{\alpha}} = \#\,\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})\,\overline{n}_{\underline{\alpha}} = f_* m_{\underline{\alpha}}$, имеют, по-видимому, целые коэффициенты, и соответствующее равенство выполняется, по-видимому, в целочисленных когомологиях.

Имеется также аналог этой теоремы для отображений неположительной относительной размерности $\ell = \dim N - \dim M < 0$. Случай $\ell = 0$ обсуждается в п. 5.4.

Набросок доказательства теоремы, основанного на топологических методах теории кобордизмов, приведен в п. 5.5. Было бы интересно получить доказательство методами алгебраической геометрии и теории пересечений. В настоящее время такое доказательство получено только для случая отображений, у которых отсутствуют особенности коранга, большего 1 (или у которых такими особенностями можно пренебречь по соображениям коразмерности), см. главу 7.

5.2 Уточненная формулировка и остаточные многочлены для мультиособенностей

Из существования многочленов $m_{\underline{\alpha}}$ и $n_{\underline{\alpha}}$ вытекает, что они должны иметь довольно специальный вид. Рассмотрим $m_{\underline{\alpha}}$ как многочлен от классов Ландвебера-Новикова s_I, коэффициенты которого лежат в кольце многочленов от классов Чженя c_i.

5.2.1. Определение. *Остаточным многочленом* $R_{\underline{\alpha}}$ мультиособенности $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ называется многочлен от классов c_i, равный свободному члену в многочлене $m_{\underline{\alpha}}$ по отношению к переменным s_I. Иными словами, $R_{\underline{\alpha}}$ получается из $m_{\underline{\alpha}}$, если в последнем приравнять нулю все образующие s_I.

Степень $R_{\underline{\alpha}}$ равна коразмерности соответствующего цикла мультиособенности в M, то есть $\deg R_{\underline{\alpha}} = \sum \operatorname{codim} \alpha_i + (r-1)\,\ell$ (относительно градуировки, в которой $\deg c_i = i$; коразмерность $\operatorname{codim} \alpha_i$ вычисляется в пространстве струй отображений $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m+\ell})$).

Обозначим через $S_{\underline{\alpha}} = s(R_{\underline{\alpha}}) \in \mathcal{S}C$ соответствующую многочлену $R_{\underline{\alpha}}$ линейную комбинацию классов Ландвебера-Новикова. Если $f : M \to N$ —

голоморфное собственное отображение, то, как объяснено выше, многочлены $R_{\underline{\alpha}}$ и $S_{\underline{\alpha}}$ определяют соответствующие характеристические классы когомологий на M и N соответственно.

5.2.2. Теорема. *Многочлены $m_{\underline{\alpha}}$, $n_{\underline{\alpha}}$ однозначно определяются остаточными многочленами $R_{\underline{\alpha}_J} = R_{\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_k}}$ для всевозможных подмножеств $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, r\}$. Более явно, имеют место следующие соотношения*

$$m_{\underline{\alpha}} = \sum_{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k = \{1,\dots,r\}} R_{\underline{\alpha}_{J_1}} \, S_{\underline{\alpha}_{J_2}} \dots S_{\underline{\alpha}_{J_k}}, \tag{5.1}$$

$$n_{\underline{\alpha}} = s(m_{\underline{\alpha}}) = \sum_{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k = \{1,\dots,r\}} S_{\underline{\alpha}_{J_1}} \dots S_{\underline{\alpha}_{J_k}}. \tag{5.2}$$

Суммирование производится по всевозможным разбиениям множества $\{1, \dots, r\}$ в несвязное объединение непустых неупорядоченных подмножеств $\{1, \dots, r\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k$, $k \geqslant 1$. Подмножество, содержащее элемент $1 \in \{1, \dots, r\}$, обозначается через J_1.

Кроме того, остаточный многочлен $R_{\underline{\alpha}}$ не зависит от порядка локальных особенностей α_i, входящих в набор $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

Например, если набор $\underline{\alpha} = \{\alpha\}$ содержит единственный класс особенностей ($r = 1$), то $R_\alpha = m_\alpha$ — соответствующий многочлен Тома.

Комбинируя члены в правой части равенств, мы получаем следующие рекуррентные соотношения, эквивалентные равенствам (5.1–5.2) теоремы.

$$m_{\underline{\alpha}} = R_{\underline{\alpha}} + \sum_{1 \in J \subsetneq \{1,\dots,r\}} R_{\underline{\alpha}_J} \, n_{\underline{\alpha}_{\overline{J}}}, \tag{5.3}$$

$$n_{\underline{\alpha}} = S_{\underline{\alpha}} + \sum_{1 \in J \subsetneq \{1,\dots,r\}} S_{\underline{\alpha}_J} \, n_{\underline{\alpha}_{\overline{J}}}, \tag{5.4}$$

где суммирование производится по всевозможным собственным подмножествам $J \subsetneq \{1, \dots, r\}$, содержащим элемент 1, и $\overline{J} = \{1, \dots, r\} \setminus J$.

Например,

$$\begin{aligned} m_\alpha &= R_\alpha, \\ n_\alpha = s(m_\alpha) &= S_\alpha, \\ m_{\alpha,\beta} &= R_{\alpha,\beta} + R_\alpha\ S_\beta, \\ n_{\alpha,\beta} = s(m_{\alpha,\beta}) &= S_{\alpha,\beta} + S_\alpha\ S_\beta, \\ m_{\alpha,\beta,\gamma} &= R_{\alpha,\beta,\gamma} + R_{\alpha,\gamma}\ S_\beta + R_{\alpha,\beta}\ S_\gamma + R_\alpha\ (S_{\beta,\gamma} + S_\beta\ S_\gamma), \\ n_{\alpha,\beta,\gamma} = s(m_{\alpha,\beta,\gamma}) &= S_{\alpha,\beta,\gamma} + S_{\alpha,\beta}\ S_\gamma + S_{\beta,\gamma}\ S_\alpha + S_{\alpha,\gamma}\ S_\beta + S_\alpha\ S_\beta\ S_\gamma \\ &\text{и т.д.} \end{aligned}$$

5.2.3. Пример. Обозначим через A_r класс особенностей, локальная алгебра которых изоморфна алгебре $\mathbb{C}[x]/\{x^{r+1}\}$ (т.е. класс особенностей, имеющих тип Бордмана $\Sigma^{1,\dots,1}$, r вхождений). Тогда при $\ell = 1$ мы имеем

$$R_{A_0} = \overline{m}_{A_0} = 1, \qquad R_{A_1} = \overline{m}_{A_1} = c_2, \qquad R_{A_0,A_1} = -2c_1c_2 - 2c_3.$$

Классы когомологий, двойственные различным циклам мультиособенностей, составленных из локальных особенностей A_0, A_1, следующие:

$$\begin{aligned} \overline{m}_{A_0,A_1} &= f^*f_*(c_2) - 2c_1c_2 - 2c_3 = s_{0,1} - 2c_1c_2 - 2c_3, \\ \overline{m}_{A_1,A_0} &= c_2\ f^*f_*(1) - 2c_1c_2 - 2c_3 = c_2s_0 - 2c_1c_2 - 2c_3, \\ \overline{n}_{A_0,A_1} &= f_*\overline{m}_{A_0,A_1} = f_*\overline{m}_{A_1,A_0} \qquad (5.5) \\ &= f_*(1)f_*(c_2) - 2f_*(c_1c_2 + c_3) \\ &= s_0s_{0,1} - 2s_{1,1} - 2s_{0,0,1}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что соотношение (5.1) или (5.3) позволяет выразить $R_{\underline{\alpha}}$ по индукции через классы $m_{\underline{\alpha}}$ и $n_{\underline{\alpha}} = s(m_{\underline{\alpha}})$ (доказательство см. ниже):

$$\begin{aligned} R_\alpha &= m_\alpha, \\ R_{\alpha,\beta} &= m_{\alpha,\beta} - m_\alpha n_\beta, \\ R_{\alpha,\beta,\gamma} &= m_{\alpha,\beta,\gamma} + 2m_\alpha\ n_\beta\ n_\gamma - m_\alpha\ n_{\beta,\gamma} - m_{\alpha,\beta}\ n_\gamma - m_{\alpha,\beta}\ n_\gamma, \\ &\dots \\ R_{\underline{\alpha}} &= \sum_{J_1\sqcup\dots\sqcup J_k=\{1,\dots,r\}} (-1)^{k-1}(k-1)!\ m_{\underline{\alpha}_{J_1}}\ n_{\underline{\alpha}_{J_2}}\dots n_{\underline{\alpha}_{J_k}}, \qquad (5.6) \end{aligned}$$

В этой форме теорема 5.2.2 утверждает, что для всякого собственного отображения $f : M \to N$ класс когомологий в M, заданный комбинацией правой части равенства (5.6) от классов мультиособенностей $m_{\underline{\alpha}} = \#\operatorname{Aut}(\alpha_2,\dots,\alpha_r)[p_M(M(\underline{\alpha}))]$ и $n_{\underline{\alpha}} = f^*f_*m_{\underline{\alpha}}$, выражается как универсальный многочлен от относительных классов Чженя $c_i(f)$.

Формула обращения (5.6) является следствием следующего общего комбинаторного тождества. Рассмотрим семейство независимых коммутирующих переменных Q_J, занумерованных всевозможными непустыми подмножествами $J = \{j_1,\dots,j_{|J|}\}$ заданного конечного множества индексов. Положим $Q_J^{(0)} = Q_J$ и

$$Q_J^{(d)} = \sum_{J_1\sqcup\dots\sqcup J_k=J} d^{k-1}Q_{J_1}\dots Q_{J_k}, \quad d\in\mathbb{Z}.$$

5.2.4. Лемма. *При всех d выполняется следующее тождество:*

$$Q_J^{(d)} = \sum_{J_1\sqcup\dots\sqcup J_k=J} (d-1)\dots(d-k+1)\, Q_{J_1}^{(1)}\dots Q_{J_k}^{(1)}.$$

В частности, при $d=0$ мы получаем формулу обращения

$$Q_J = \sum_{J_1\sqcup\dots\sqcup J_k=J} (-1)^{k-1}(k-1)!\, Q_{J_1}^{(1)}\dots Q_{J_k}^{(1)}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Положим

$$Q_J^{(d)}(k) = \sum_{J_1\sqcup\dots\sqcup J_k=J} Q_{J_1}^{(d)}\dots Q_{J_k}^{(d)}, \qquad Q_J(k) = Q_J^{(0)}(k), \qquad 1\leqslant k\leqslant |J|,$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $J = J_1\sqcup\dots\sqcup J_k$, в которых число k подмножеств фиксировано. В частности,

$$Q_J^{(1)} = \sum_{k=1}^{|J|} Q_J(k).$$

Тогда, раскрыв скобки и сгруппировав члены, мы получаем

$$Q_J^{(1)}(k) = \sum_{J_1\sqcup\dots\sqcup J_l=J} S(l,k)\, Q_{J_1}\dots Q_{J_l} = \sum_{l=k}^{|J|} S(l,k)\, Q_J(k),$$

где $S(l,k)$ — *число Стирлинга второго рода*, то есть число разбиений l-элементного множества в несвязное объединение k непустых неупорядоченных подмножеств. Используя известное тождество [18] $\sum_{k=1}^{l}(d-1)...(d-k+1)\ S(l,k)=d^{p-1}$, мы получаем окончательно

$$\sum_{J_1\sqcup\dots\sqcup J_k=J}(d-1)\dots(d-k+1)\ Q^{(1)}_{J_1}\dots Q^{(1)}_{J_k}=\sum_{k=1}^{|J|}(d-1)\dots(d-k+1)Q^{(1)}_J(k)=$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant l\leqslant|J|}(d-1)\dots(d-k+1)\ S(l,k)\ Q_J(l)=\sum_{l=1}^{|J|}d^{l-1}Q_J(l)=Q^{(d)}_J.$$

Лемма доказана. $\square$

Формула обращения (5.6) следует из леммы (при $d=1$), примененной к классам

$$Q_J=\begin{cases}R_{\underline{\alpha}_J}, & 1\in J,\\ S_{\underline{\alpha}_J}, & 1\notin J,\end{cases}\qquad Q^{(1)}_J=\begin{cases}m_{\underline{\alpha}_J}, & 1\in J,\\ n_{\underline{\alpha}_J}, & 1\notin J,\end{cases}\qquad J\subset\{1,\dots,r\},$$

где $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ — фиксированный набор моноособенностей.

Доказательство теоремы 5.2.2. Поменяем временно определение остаточных многочленов $R_{\underline{\alpha}}$. А именно, мы *определим* их индуктивно так, чтобы выполнялось равенство (5.1). Согласно лемме 5.2.4, эквивалентным образом можно определить многочлены $R_{\underline{\alpha}}$ явной формулой (5.6). По теореме 5.1.1 правая часть равенства (5.6) является комбинацией многочленов от классов Чженя и классов Ландвебера-Новикова. Мы должны показать, что в этой комбинации все члены, содержащие классы s_I, сокращаются.

Поскольку многочлены универсальны, соотношение (5.6) применимо для произвольных отображений. Мы будем применять его для последовательности отображений $f^{(d)}:M^{(d)}\to N$, $d=1,2,\dots$, определенной следующим образом. Предположим, что исходное отображение $f:M\to N$ включается в семейство отображений из M в N, такое, что для общих значений параметра семейства его члены находятся в общем положении по отношению друг к другу. Это предположение не является ограничительным. Действительно, имеется достаточно большой запас примеров отображений, удовлетворяющих этому условию, так что всякое соотношение, полученное в этих предположениях, выполняентся и в общем случае. Возьмем в качестве $M^{(d)} = M_1 \sqcup \cdots \sqcup M_d$, $M_i \cong M$, несвязное объединение d копий многообразия M, а в качестве ограничения $f_i : M_i \to N$ отображения $f^{(d)}$ на i-ю компоненту пространства $M^{(d)}$ — маленькое общее шевеление отображения f. Мы хотим применить равенство (5.6) к ограничениям классов мультиособенностей отображения $f^{(d)}$ на первую компоненту $M_1 \cong M$ пространства $M^{(d)}$.

Поскольку каждое из отображений f_i гомотопно исходному f, классы $n_{\underline{\alpha}} = n_{\underline{\alpha}}(f_i) = n_{\underline{\alpha}}(f)$ не зависят от i. Рассмотрим на N цикл мультиособенности $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ отображения $f^{(d)}$. Для общей точки этого цикла, r ее прообразов могут быть распределены произвольным образом между компонентами пространства $M^{(d)}$. Поэтому для класса $m^{(d)}_{\underline{\alpha}}|_{M_1}$ мы имеем очевидное соотношение

$$m^{(d)}_{\underline{\alpha}}|_{M_1} = \sum_{J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_k = \{1,\ldots,r\}} (d-1)...(d-k+1)\, m_{\underline{\alpha}_{J_1}}\, n_{\underline{\alpha}_{J_2}} \ldots n_{\underline{\alpha}_{J_k}},$$

где коэффициент $(d-1)...(d-k+1)$ — количество способов выбрать $k-1$ различных упорядоченных элементов из заданного $(d-1)$-элементного множества $\{M_2, , \ldots, M_d\}$ компонент пространства $M^{(d)}$, отличных от первой. Используя лемму 5.2.4, это выражение можно переписать в виде

$$m^{(d)}_{\underline{\alpha}}|_{M_1} = \sum_{J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_k = \{1,\ldots,r\}} d^{k-1}\, R_{\underline{\alpha}_{J_1}}\, S_{\underline{\alpha}_{J_2}} \ldots S_{\underline{\alpha}_{J_k}}. \tag{5.8}$$

Теперь вычислим классы Чженя-Ландвебера-Новикова отображения $f^{(d)}$. Ясно, что ограничение относительных классов Чженя на каждую компоненту пространства $M^{(d)}$ совпадает с соответствующими относительными классами Чженя отображения f, $c_k(f^{(d)})|_{M_i} = c_k(f)$. Следовательно, $s_I(f^{(d)}) = d\, s_I(f)$, то есть переход от f к $f^{(d)}$ действует на многочленах $m_{\underline{\alpha}}, n_{\underline{\alpha}}$ как однородное растяжение переменных s_I с коэффициентом d.

Следовательно, если рассматривать $m_{\underline{\alpha}}$ как многочлен от s_I, то его свободный член совпадает со слагаемым степени 0 по d в выражении для $m^{(d)}_{\underline{\alpha}}|_{M_1}$. Равенство (5.8) показывает, что это слагаемое равно в точности $R_{\underline{\alpha}}$. Это завершает доказательство равенства (5.1).

Равенство (5.2) вытекает из (5.1) применением гомоморфизма f_* к обеим частям. Тот факт, что $R_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ не зависит от порядка вхождений $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$, вытекает из симметричности явной формулы (5.6) (и очевидного замечания, что классы $n_{\underline{\alpha}}$ не зависят от порядка особенностей α_i). Применив f_* к обеим частям равенства (5.6), можно получить аналогичное выражение для $S_{\underline{\alpha}}$:

$$S_{\underline{\alpha}} = \sum_{J_1\sqcup\cdots\sqcup J_k=\{1,\ldots,r\}} (-1)^{k-1}\,(k-1)!\; n_{\underline{\alpha}_{J_1}} \ldots n_{\underline{\alpha}_{J_k}}.$$

Из этого равенства следует, что классы $S_{\underline{\alpha}}$ не зависят от порядка особенностей α_i, а поскольку $R_{\underline{\alpha}}$ однозначно определяются по $S_{\underline{\alpha}}$, мы получаем, что и $R_{\underline{\alpha}}$ не зависят от порядка элементов во всем наборе $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Теорема доказана.

Замечание. Имеется вариант рассуждений, в котором не приходится шевелить отображение $f : M \to N$. А именно, рассмотрим отображение $f^{(d)} : M^{(d)} \to N^{(d)}$, в котором в качестве $M^{(d)}$ берется d экземпляров многообразий вида $M \times N^{d-1}$, в качестве $N^{(d)} = N^d$ — декартово произведение, а в качестве $f^{(d)}$ — отображение, которое на i-й компоненте $M \times N^{d-1} = N^i \times M \times N^{d-i-1}$ имеет вид $\mathrm{id}^i \times f \times \mathrm{id}^{d-i-1}$. Мы построили отображение многообразий той же относительной размерности $\ell = \dim N^{(d)} - \dim M^{(d)} = \dim N - \dim M$. Кроме того, условие общности положения для построенного отображения выполняется, если оно выполняется для исходного отображения f. Классы Чженя-Ландвебера-Новикова и классы мультиособенностей для отображения $f^{(d)}$ выражаются через соответствующие классы исходного отображения, что приводит к определенным соотношениям между ними. При вложении $\mathrm{id} \times f \times \cdots \times f : M \to M^{(d)}$, задаваемом мультиграфиком отображения f, эти соотношения сводятся к соотношениям, аналогичным (5.8), и те же рассуждения, что и выше, приводят к формулам теоремы 5.2.2.

5.3 Пример: формула кратных особенностей

Предположим, что тип мультиособенности $\underline{\alpha} = \alpha^r = (\alpha, \ldots, \alpha)$ образован r одинаковыми локальными особенностями α. Тогда, по теореме 5.2.2, соответствующие классы когомологий $\overline{m}_{\alpha^r}$, $\overline{n}_{\alpha^r}$ могут быть выражены через многочлены $q_p = q_p(\alpha) = \frac{1}{p!}R_{\alpha^{p+1}} = \frac{1}{p!}R_{\alpha,\ldots,\alpha}$ ($p+1$ вхождений) степени $(\ell+1)\operatorname{codim}\alpha + \ell\, p$. Например, если $\ell = 1$ и $\alpha = A_0$ (класс неособых ростков), то эти многочлены равны (см. п. 5.4)

$$q_0 = 1, \qquad q_1 = -c_1, \qquad q_2 = c_1^2 + c_2, \qquad q_3 = -c_1^3 - 3c_1c_2 - 2c_3, \qquad \ldots .$$

В случае $\ell = 0$, $\alpha = A_1$ (особенность складки) этими многочленами являются (см. п. 5.4)

$$q_0 = c_1, \qquad q_1 = -2(2c_1^2 + c_2), \qquad q_2 = 4(5c_1^3 + 7c_1c_2 + 3c_3), \qquad \ldots .$$

Положим $v_i = v_i(\alpha) = \frac{1}{i} f_*(q_{i-1})$ и определим формальные степенные ряды

$$\begin{aligned}
m(t) &= \overline{m}_\alpha + \overline{m}_{\alpha^2} t + \overline{m}_{\alpha^3} t^2 + \cdots \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{SC} \otimes \mathbb{Q}[[t]],\\
q(t) &= q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots \in \mathcal{C} \otimes \mathbb{Q}[[t]],\\
n(t) &= 1 + \overline{n}_\alpha t + \overline{n}_{\alpha^2} t^2 + \cdots \in \mathcal{SC} \otimes \mathbb{Q}[[t]],\\
v(t) &= v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3 + \cdots \in \mathcal{SC} \otimes \mathbb{Q}[[t]];
\end{aligned}$$

тогда соотношения (5.2) и (5.4) принимают вид следующих двух эквивалентных друг другу равенств

$$n(t) = \exp(v(t)), \quad \text{и} \quad n'(t) = v'(t)\, n(t) \quad ({}' = d/dt),$$

то есть,

$$\overline{n}_{\alpha} = v_1, \quad 2\overline{n}_{\alpha^2} = 2v_2 + v_1^2, \quad 6\overline{n}_{\alpha^3} = 6v_3 + 6v_1v_2 + v_1^3, \quad \dots .$$

(эти полиномиальные выражения для $\overline{n}_{\alpha^i}$ через v_i известны, с точностью до перенормировки, как *многочлены Белла*). Действительно, каждое слагаемое в правой части равенства (5.4) имеет вид $S_{\underline{\alpha}_J}\, n_{\underline{\alpha}_{\overline{J}}} = k!\, v_k \ \ (n{-}k)!\, \overline{n}_{\alpha^{r-k}}$, где k — количество элементов в множестве $J \subset \{1, \dots, r\}$. Количество аналогичных слагаемых с фиксированным k равно C_{r-1}^{k-1}. Отсюда

$$n_{\alpha^r} = r!\, \overline{n}_{\alpha^r} = \sum_{k=1}^{r} C_{r-1}^{k-1}\, k!\, (r-k)!\, v_k\, \overline{n}_{\alpha^{r-k}}, \quad \text{или} \quad r\, \overline{n}_{\alpha^r} = \sum_{k=1}^{r} k\, v_k\, \overline{n}_{\alpha^{r-k}}.$$

В терминах производящих функций последнее соотношение записывается в виде $(\overline{n}_{\alpha} + 2\, \overline{n}_{\alpha^2} t + \dots) = (v_1 + 2\, v_2 t + \dots)(1 + \overline{n}_{\alpha} t + \overline{n}_{\alpha^2} t^2 + \dots)$, или $n'(t) = v'(t)\, n(t)$, как и утверждается.

«Интегрирование» этого равенства приводит к соотношению $n(t) = \exp(v(t))$. Последнее равенство можно получить и непосредственно из (5.2). Действительно, если $\underline{\alpha} = \alpha^r$, то каждый член в правой части (5.2) имеет вид

$$S_{\underline{\alpha}_{J_1}} \dots S_{\underline{\alpha}_{J_k}} = m_1! \dots m_k!\, v_{m_1} \dots v_{m_k}, \quad \text{где} \quad m_i = |J_i|.$$

Количество таких слагаемых с фиксированными $k, m_1, \dots, m_k$ равно

$$\frac{r!}{\#\,\mathrm{Aut}(m_1, \dots, m_k)\, m_1! \dots m_k!},$$

где $\#\,\mathrm{Aut}(m_1, \dots, m_k)$ — порядок подгруппы перестановок из k элементов, сохраняющих мультииндекс $(m_1, \dots, m_k)$. Таким образом, $\overline{n}_r = n_r/r!$ представляется в виде линейной комбинации различных мономов вида $v_{m_1} \dots v_{m_k}$, и коэффициент, с которым входит этот моном в сумму, равен $1/\#\,\mathrm{Aut}(m_1, \dots, m_k)$.

Вычислим теперь коэффициент при t^k в ряду

$$\exp(v(t)) = 1 + v(t) + v^2(t)/2! + \dots .$$

Этот коэффициент также представляется в виде линейной комбинации мономов $v_{m_1} \dots v_{m_k}$. Заметим, что мономы (однородной) степени k могут появиться только из слагаемого $v^k(t)/k!$. Более того, коэффициент при мономе $v_{m_1}, \dots, v_{m_k}$ равен $\#\mathrm{Perm}(m_1, \dots, m_k)/k!$, где $\#\mathrm{Perm}(m_1, \dots, m_k)$ — количество *различных* последовательностей вида $(m_{\sigma_1}, \dots, m_{\sigma_k})$, получаемых всевозможными перестановками набора $(m_1, \dots, m_k)$. Применив очевидное комбинаторное соотношение

$$\#\mathrm{Perm}(m_1, \dots, m_k) = \frac{k!}{\#\,\mathrm{Aut}(m_1, \dots, m_k)},$$

мы получаем доказываемое равенство $n(t) = \exp(v(t))$.

Выражения для $\overline{m}_{\alpha^i}$ получаются аналогичным образом. Из (5.3) вытекает соотношение $m(t) = q(t)\ n(t)$, которое можно переписать в виде рекуррентной *формулы для классов кратной особенности* α:

$$\overline{m}_{\alpha^r} = \sum_{i=0}^{r-1} q_i\, \overline{n}_{\alpha^{r-1-i}}, \qquad \overline{n}_{\alpha^r} = r\, f_*(\overline{m}_{\alpha^r}).$$

Заметим, что если $\alpha = A_0$ — класс неособого отображения, то $q_0 = q_0(A_0) = 1$, ряд $q(t)$ обратим, и последнее соотношение в случае *классов кратных точек* $m_r = m_{A_0^r}$, $n_r = n_{A_0^r}$ может быть переписано в виде

$$n(t) = p(t)\ m(t), \qquad p(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots = \frac{1}{q(t)} \in \mathcal{C} \otimes \mathbb{Q}[[t]],$$

или

$$\overline{m}_r = f^*(\overline{n}_{r-1}) - \sum_{i=1}^{r-1} p_i\, \overline{m}_{r-i}. \tag{5.9}$$

Существование многочленов p_r от относительных классов Чженя $c_i(f^*TN - TM)$, удовлетворяющих соотношениям (5.9), было доказано в статьях Клеймана [51, 52] и Катца [39] в предположении, что отображение

f не имеет особенностей коранга, большего 1 (или когда этими особенностями можно пренебречь по соображениям размерности). Римани [73] показал, что при более удачном выборе многочленов p_6, p_7 (при $\ell = 1$) равенство (5.9) справедливо при $r \leqslant 7$ для любых устойчивых отображений. Мы утверждаем, что равенство (5.9) *имеет место для любого собственного отображения и для любых* $\ell, r \geqslant 1$. *Более того, многочлены* p_r *определяются этим условием однозначно.*

5.4 Определение остаточных многочленов $R_{\underline{\alpha}}$

В этом пункте мы приводим алгоритм для вычисления остаточных многочленов $R_{\underline{\alpha}}$. Самый простой способ их вычислить для какой-либо конкретной мультиособенности $\underline{\alpha}$ — применить метод, предложенный Р. Римани для близкой задачи, см. [72, 73] и п. 3.1.4. Этот метод основан на априорном существовании многочлена $R_{\underline{\alpha}}$, обеспечиваемом теоремой 5.2.2. А именно, мы определяем $R_{\underline{\alpha}}$ индуктивно как единственный многочлен, удовлетворяющий соотношению

$$R_{\underline{\alpha}} = m_{\underline{\alpha}} - \sum_{\substack{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_l = \{1,\dots,r\} \\ l \geqslant 2}} R_{\underline{\alpha}_{J_1}} \; S_{\underline{\alpha}_{J_2}} \dots S_{\underline{\alpha}_{J_l}}.$$

Чтобы вычислить коэффициенты этого многочлена, мы рассматриваем набор примеров, в которых мы можем вычислить как классы Чженя-Ландвебера-Новикова, так и классы, двойственные циклам (мульти)особенностей. Каждый такой пример задает соотношения на коэффициенты многочлена $R_{\underline{\alpha}}$, и при достаточно разумном выборе примеров соотношения определяют многочлен однозначно.

Пусть задана группа Ли H, действующая линейно в пространствах $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}^n$, $n = m + \ell$. Пусть $f_0 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ — собственное H-эквивариантное голоморфное отображение. Тогда в качестве M и N можно взять тотальные пространства векторных расслоений $\mathbb{C}^n_H$, $\mathbb{C}^m_H$ над классифицирующим пространством группы H (или его гладкой конечномерной аппроксимации), ассоциированные с действием группы H в $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ соответственно, и в качестве отображения $f : M \to N$ — расслоенное отображение, совпадающее с f_0 на каждом слое. Тогда для этого конкретного отображения мы имеем:

- оба многообразия M, N гомотопически эквивалентны BH, следовательно, мы можем отождествить когомологии M, N и рассматривать все классы Чженя-Ландвебера-Новикова, а также классы мультиособенностей $m_{\underline{\alpha}}$, $n_{\underline{\alpha}}$, как элементы одного и того же кольца $H^*(M) = H^*(N) = H^*(BH)$ характеристических классов группы H;

- относительный класс Чженя равен $c(f) = c(\mathbb{C}^n_H)/c(\mathbb{C}^m_H)$, где $c(\mathbb{C}^m_H)$ и $c(\mathbb{C}^n_H)$ — полные классы Чженя представлений группы H в $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}^n$ соответственно. Эти классы обычно легко вычисляются при помощи принципа расщепления;

- классы Ландвебера-Новикова имеют вид

  $$s_I(f) = f_*(c^I(f)) = c^I(f)\ f_*(1),$$

  где $f_*(1)$ определяется из соотношения $c_n(\mathbb{C}^n_H) = c_m(\mathbb{C}^m_H)\ f_*(1)$ (это соотношение вытекает из коммутативности диаграммы

  $$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ BH & = & BH \end{array}$$

  в которой вертикальные стрелки — вложения нулевого сечения, индуцирующие в когомологиях умножение на старший класс Чженя соответствующего расслоения);

- если f_0 имеет в начале координат особенность β, коразмерность которой не выше коразмерности мультиособенности $\underline{\alpha}$, то $M(\underline{\alpha})$ пусто и $\overline{m}_{\underline{\alpha}} = 0$, за исключением единственного случая, когда $r = 1$ и $\underline{\alpha} = \{\beta\}$, и тогда $M(\underline{\alpha}) = M(\beta) \subset M$ — нулевое сечение расслоения $M \to BH$ и двойственный класс когомологий $\overline{m}_{\underline{\alpha}} = \overline{m}_{\beta} = c_m(\mathbb{C}^m_H)$ — старший класс Чженя этого расслоения.

В качестве отображения $f_0 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ берется «нормальная форма» одной из особенностей коразмерности меньшей, или равной p, а в качестве H — ее группа симметрий, см. [72] и п. 3.1.4.

5.4.1. Замечание. Больше соотношений можно получить, рассматривая нормальные формы *мультиособенностей*. Эти дополнительные соотношения позволяют непосредственно получить многочлены $m_{\underline{\alpha}}$, $n_{\underline{\alpha}}$ от классов Чженя-Ландвебера-Новикова без использования формул теоремы 5.2.2. Однако в этом нет необходимости, поскольку теорема 5.2.2 сводит вычисление классов мультиособенностей к вычислению остаточных многочленов $R_{\underline{\alpha}}$.

5.4.2. Пример. Пусть $\ell = 1$. Рассмотрим в качестве «пробного отображения» зонтик Кэли-Уитни — особенность, задаваемую отображением

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_1x_2, \quad y_3 = x_2.$$

Эти формулы могут рассматриваться либо как отображение $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{f_0} \mathbb{C}^3$ аффинных координатных пространств, либо как отображение $\xi \oplus \eta \xrightarrow{f} \xi^2 \oplus \xi\eta \oplus \eta$ тотальных пространств векторных расслоений $M \to B$ и $N \to B$ рангов 2 и 3 соответственно над некоторой базой B, где ξ и η — некоторые линейные расслоения на B с первыми классами Чженя $t_1 \in H^2(B)$ и $t_2 \in H^2(B)$ соответственно. Тогда для этого конкретного примера мы имеем

$$1+c_1(f)+c_2(f)+c_3(f)+\dots = \tfrac{(1+2t_1)(1+t_1+t_2)(1+t_2)}{(1+t_1)(1+t_2)} = 1+(2t_1+t_2)+t_1t_2-t_1^2t_2+\dots,$$

и $f_*(1) = \frac{2t_1\,(t_1+t_2)\,t_2}{t_1\,t_2} = 2(t_1+t_2)$. Рассмотрения этого примера достаточно для вычисления коэффициентов a_i остаточного многочлена $R_{A_0A_1} =$

$a_1\,c_1^3 + a_2\,c_1c_2 + a_3\,c_3$ исходя из известных многочленов Тома $R_{A_0} = 1$, $R_{A_1} = c_2$. Действительно, в этом примере цикл $M(A_0A_1)$ пуст и, подставив вычисленные классы в равенство $0 = m_{A_0A_1} = R_{A_0}f_*(R_{A_1}) + R_{A_0A_1}$, мы получаем соотношение

$$8a_1\,t_1^3 + (2 + 12a_1 + 2a_2 - a_3)\,t_1^2t_2 + (2 + 6a_1 + a_2)\,t_1t_2^2 + a_1\,t_2^3 = 0.$$

Приравняв нулю коэффициенты, мы находим $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = -2$, иными словами, $R_{A_0A_1} = -2c_1c_2 - 2c_3$.

Интересно сравнить вычисление, проведенное выше, с вычислением класса $R_{A_0A_1}$ (для $\ell = 1$), предлагаемым теорией пересечений. Обозначим через $Z = M(A_1) \subset M$ множество критических точек отображения f, и положим $X = f(Z) \subset N$. Тогда класс $-R_{A_0A_1}$ определяется как остаточный класс к $m_{A_0,A_1} = [p_M(M(A_0, A_1))]$ в произведении-пересечении $X \cdot M = f^*(X)$. Для упрощения вычислений мы используем следующее наблюдение: если $\Sigma \subset M$ — алгебраическое подмножество коразмерности c, то включение $M \setminus \Sigma \to M$ индуцирует изоморфизм в когомологиях до (вещественной) размерности $2\,(c-1)$. Следовательно, мы можем всегда отбросить, без потери общности, все вырождения высокой коразмерности и предполагать при вычислении класса $-R_{A_0A_1}$, что отображение $f : M \to N$ не имеет мультиособенностей комплексной коразмерности, большей 3.

Таким образом, мы предполагаем, что $Z \subset M$ и $X \subset N$ — гладкие вложенные подмногообразия коразмерностей 2 и 3 соответственно, и f отображает Z на X изоморфно. Полный прообраз $f^{-1}(X)$ имеет две непересекающиеся компоненты, $f^{-1}(X) = p_M(M(A_0, A_1)) \sqcup W$, где схема W имеет носитель на Z. Тогда, по основной формуле теории пересечений, остаточный класс $-R_{A_0A_1} = f^*(X) - [p_M(M(A_0, A_1))]$ имеет вид

$$-R_{A_0A_1}[M] = \{f^*c(\nu_X N) \frown s(W, M)\}_{m-3},$$

где $\nu_X N$ — нормальное расслоение подмногообразия $X \subset N$. Довольно легко определить $f^*\nu_X N = TN - TX = TN - TZ = \nu_f + \nu_Z M$. Остается вычислить класс Сегре $s(W, M)$. Носитель W совпадает с Z, но, как схема, W отлична от Z, и даже не является приведенной. Локальные вычисления показывают, что схема W имеет кратность 2 вдоль Z и «выпирает» в направлении линейного расслоения $\varkappa$ вдоль Z, задаваемого ядрами дифференциала отображения f. Отсюда следует, что эта схема регулярно вложена, и ее нормальное расслоение равно $\nu_W M = \nu_Z M - \varkappa + 2\varkappa$ (см. подробности в главе 7). Следовательно,

$$f^* c(\nu_X N) \frown s(W, M) = c(\nu_X M - \nu_W M) \frown [W] = c(\nu_f + \varkappa - 2\varkappa) \frown 2[Z],$$

откуда мы получаем промежуточный ответ

$$-R_{A_0 A_1}[M] = 2\, c_1(\nu_f + \varkappa - 2\varkappa)\; [Z] = 2\,(c_1(f) - c_1(\varkappa))\; [Z].$$

Осталось вычислить классы $[Z] = m_{A_1}$ и $c_1(\varkappa)\,[Z]$. Первый из них, $[Z]$, является классом Портеуса-Тома Σ^1, а второй — его производным (см. п. 3.1). Согласно простейшему варианту формулы теоремы 3.1.8, который в данном случае передоказать совсем легко, эти классы равны $c_2(f)$ и $-c_3(f)$ соответственно, и мы получаем окончательно

$$-R_{A_0 A_1} = 2\,(c_1(f) - c_1(\varkappa))\,[Z] = 2\,(c_1(f)c_2(f) + c_3(f)).$$

Отметим, что тот факт, что класс $R_{A_0 A_1}$ выражается через относительные классы Чженя $c_i(f)$ (равно как и равенство $R_{A_0 A_1} = R_{A_1 A_0}$), получается при этом подходе как «неожиданный» результат длинных вычислений.

Классы мультиособенностей и остаточные многочлены для $\ell = 0$.

При некоторых оговорках равенство теоремы 5.2.2 выполняется и в случае $\ell = 0$, т.е. для собственных отображений $f : M \to N$ многообразий одинаковой размерности, $\dim M = \dim N$. Если N связно, то корректно определена *степень* отображения f,

$$d = f_*(1) \in H^0(N) = \mathbb{Z}.$$

Пусть задан некоторый тип мультиособенности $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, такой, что $\operatorname{codim} \alpha_i > 0$. Рассмотрим соответствующий цикл мультиособенностей $p_N(M(\underline{\alpha})) \subset N$ в многообразии области значений отображения. Полный прообраз всякой общей точки y этого цикла состоит из p точек $x_1, \ldots, x_p$, в которых f имеет особенности $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, и еще $d - \mu$ точек, в которых f имеет особенность A_0 (точки локального диффеоморфизма), где $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_p$ и μ_i —*локальная кратность* отображения f в x_i, определенная как размерность локальной алгебры ростка f в точке x_i. Отсюда следует, что классы мультиособенностей $(\underline{\alpha}, A_0^r) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, A_0, \ldots, A_0)$ (с r вхождениями A_0) задаются равенством

$$\begin{aligned}
&\overline{m}_{\underline{\alpha}, A_0^r} = C^r_{d-\mu}\, \overline{m}_{\underline{\alpha}}, \\
&m_{\underline{\alpha}, A_0^r} = (d-\mu)(d-\mu-1)\ldots(d-\mu-r+1)\, m_{\underline{\alpha}}.
\end{aligned}$$

5.4.3. Предложение. *Остаточные многочлены $R_{\underline{\alpha}, A_0^r}$ набора особенностей, содержащего классы A_0 локального диффеоморфизма определяются остаточным многочленом $R_{\underline{\alpha}}$ остальных особенностей,*

$$R_{\underline{\alpha}, A_0^r} = (-1)^{(r-1)} \mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1)\, R_{\underline{\alpha}}, \tag{5.10}$$

где $\mu = \mu(\underline{\alpha})$ — сумма локальных кратностей особенностей, образующих набор $\underline{\alpha}$.

Доказательство предложения комбинаторное, оно состоит в проверке тождества (5.1) теоремы 5.2.2 для класса мультиособенности $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, A_0, \ldots, A_0)$. Заметим, что равенство (5.10) справедливо также, если набор $\underline{\alpha}$ содержит особенности A_0, то есть вычисления достаточно проводить только для случая $r = 1$, что совсем несложно.

5.4.4. Пример. Числа, выражающие «классы кратных точек»

$$\overline{m}_r = \overline{m}_{A_0^r} = C_{d-1}^{r-1} \in H^0(M) = \mathbb{Z},$$
$$\overline{n}_r = \overline{n}_{A_0^r} = C_d^r \in H^0(N) = \mathbb{Z}$$

выражаются через «остаточные классы» $q_r = \frac{1}{r!} R_{A_0^{r+1}} = (-1)^r$ по формулам п. 5.3. В частности, мы получаем

$$p(t) = (1 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots)^{-1} = 1 + t,$$

и «формула кратных точек» в случае $\ell = 0$ принимает вид равенства

$$\overline{m}_{r+1} = f^*(\overline{n}_r) - \overline{m}_r \in H^0(M) = \mathbb{Z},$$

которое эквивалентно очевидному тождеству $C_{d-1}^r = C_d^r - C_{d-1}^{r-1}$.

Предложение сводит задачу вычисления остаточных многочленов $R_{\underline{\alpha}}$ к случаю, когда все локальные особенности набора $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ имеют положительную коразмерность.

Таблица локальных особенностей вплоть до коразмерности 8 вместе с разнообразной дополнительной информацией, необходимой для вычисления остаточных многочленов методом Римани, имеется в п. 3.1.4. Полный список соответствующих остаточных многочленов мультиособенностей имеется в [49]. Для особенностей вплоть до коразмерности 4 остаточные многочлены, а также выражения для классов мультиособенностей приведены ниже

Остаточные классы $R_{\underline{\alpha}}$ коразмерности не выше 4 для $\ell = 0$

$$
\begin{aligned}
R_{A_1} &= c_1 \\
R_{A_2} &= c_1^2 + c_2 \\
R_{A_1^2} &= -2\,(2\,c_1^2 + c_2) \\
R_{A_3} &= c_1^3 + 3\,c_1\,c_2 + 2\,c_3 \\
R_{A_1A_2} &= -6\,(c_1^3 + 2\,c_1\,c_2 + c_3) \\
R_{A_1^3} &= 8\,(5\,c_1^3 + 7\,c_1\,c_2 + 3\,c_3) \\
R_{A_4} &= c_1^4 + 6\,c_1^2\,c_2 + 2\,c_2^2 + 9\,c_1\,c_3 + 6\,c_4 \\
R_{I_{22}} &= c_2^2 - c_1\,c_3 \\
R_{A_1A_3} &= -4\,(2\,c_1^4 + 9\,c_1^2\,c_2 + 2\,c_2^2 + 11\,c_1\,c_3 + 6\,c_4) \\
R_{A_2^2} &= -3\,(3\,c_1^4 + 12\,c_1^2\,c_2 + 4\,c_2^2 + 13\,c_1\,c_3 + 8\,c_4) \\
R_{A_1^2A_2} &= 24\,(3\,c_1^4 + 10\,c_1^2\,c_2 + 2\,c_2^2 + 10\,c_1\,c_3 + 5\,c_4) \\
R_{A_1^4} &= -48\,(14\,c_1^4 + 37\,c_1^2\,c_2 + 6\,c_2^2 + 33\,c_1\,c_3 + 15\,c_4)
\end{aligned}
$$

Классы мультиособенностей $m_{\alpha_1,\underline{\alpha}'} = \#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha}')\,\overline{m}_{\alpha_1,\underline{\alpha}'}$ коразмерности не выше 4 для $\ell = 0$

$$
\begin{aligned}
m_{A_1,A_1} &= s_1\,c_1 - 4\,c_1^2 - 2\,c_2\\
m_{A_1,A_2} &= s_2\,c_1 + s_01\,c_1 - 6\,c_1^3 - 12\,c_1\,c_2 - 6\,c_3\\
m_{A_2,A_1} &= s_1\,c_1^2 - 6\,c_1^3 + s_1\,c_2 - 12\,c_1\,c_2 - 6\,c_3\\
m_{A_1,A_1^2} &= s_1^2\,c_1 - 4\,s_2\,c_1 - 2\,s_{01}\,c_1 - 8\,s_1\,c_1^2 + 40\,c_1^3 - 4\,s_1\,c_2 + 56\,c_1\,c_2 + 24\,c_3\\
m_{A_1,A_3} &= s_3\,c_1 + 3\,s_{11}\,c_1 + 2\,s_{001}\,c_1 - 8\,c_1^4 - 36\,c_1^2\,c_2 - 8\,c_2^2 - 44\,c_1\,c_3 - 24\,c_4\\
m_{A_2,A_2} &= s_2\,c_1^2 + s_{01}\,c_1^2 - 9\,c_1^4 + s_2\,c_2 + s_{01}\,c_2 - 36\,c_1^2\,c_2 - 12\,c_2^2 - 39\,c_1\,c_3 - 24\,c_4\\
m_{A_3,A_1} &= s_1\,c_1^3 - 8\,c_1^4 + 3\,s_1\,c_1\,c_2 - 36\,c_1^2\,c_2 - 8\,c_2^2 + 2\,s_1\,c_3 - 44\,c_1\,c_3 - 24\,c_4\\
m_{A_1,A_1A_2} &= s_1\,s_2\,c_1 - 6\,s_3\,c_1 + s_1\,s_{01}\,c_1 - 12\,s_{11}\,c_1 - 6\,s_{001}\,c_1 - 4\,s_2\,c_1^2 - 4\,s_{01}\,c_1^2\\
&\quad - 6\,s_1\,c_1^3 + 72\,c_1^4 - 2\,s_2\,c_2 - 2\,s_{01}\,c_2 - 12\,s_1\,c_1\,c_2 + 240\,c_1^2\,c_2 + 48\,c_2^2\\
&\quad - 6\,s_1\,c_3 + 240\,c_1\,c_3 + 120\,c_4\\
m_{A_2,A_1^2} &= s_1^2\,c_1^2 - 4\,s_2\,c_1^2 - 2\,s_{01}\,c_1^2 - 12\,s_1\,c_1^3 + 72\,c_1^4 + s_1^2\,c_2 - 4\,s_2\,c_2 - 2\,s_{01}\,c_2\\
&\quad - 24\,s_1\,c_1\,c_2 + 240\,c_1^2\,c_2 + 48\,c_2^2 - 12\,s_1\,c_3 + 240\,c_1\,c_3 + 120\,c_4\\
m_{A_1,A_1^3} &= s_1^3\,c_1 - 12\,s_1\,s_2\,c_1 + 40\,s_3\,c_1 - 6\,s_1\,s_{01}\,c_1 + 56\,s_{11}\,c_1 + 24\,s_{001}\,c_1 - 12\,s_1^2\,c_1^2\\
&\quad + 48\,s_2\,c_1^2 + 24\,s_{01}\,c_1^2 + 120\,s_1\,c_1^3 - 672\,c_1^4 - 6\,s_1^2\,c_2 + 24\,s_2\,c_2 + 12\,s_{01}\,c_2\\
&\quad + 168\,s_1\,c_1\,c_2 - 1776\,c_1^2\,c_2 - 288\,c_2^2 + 72\,s_1\,c_3 - 1584\,c_1\,c_3 - 720\,c_4
\end{aligned}
$$

Классы мультиособенностей $n_{\underline{\alpha}} = \#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha})\,\overline{n}_{\underline{\alpha}}$ коразмерности не выше 4 **для** $\ell = 0$

$$
\begin{aligned}
n_{A_1} &= s_1\\
n_{A_2} &= s_2 + s_{01}\\
n_{A_1^2} &= s_1^2 - 4\,s_2 - 2\,s_{01}\\
n_{A_3} &= s_3 + 3\,s_{11} + 2\,s_{001}\\
n_{A_1A_2} &= s_1\,s_2 - 6\,s_3 + s_1\,s_{01} - 12\,s_{11} - 6\,s_{001}\\
n_{A_1^3} &= s_1^3 - 12\,s_1\,s_2 + 40\,s_3 - 6\,s_1\,s_{01} + 56\,s_{11} + 24\,s_{001}\\
n_{A_4} &= s_4 + 2\,s_{02} + 6\,s_{21} + 9\,s_{101} + 6\,s_{0001}\\
n_{I_{22}} &= s_{02} - s_{101}\\
n_{A_1A_3} &= s_1\,s_3 - 8\,s_4 - 8\,s_{02} + 3\,s_1\,s_{11} - 36\,s_{21} + 2\,s_1\,s_{001} - 44\,s_{101} - 24\,s_{0001}\\
n_{A_2^2} &= s_2^2 - 9\,s_4 + 2\,s_2\,s_{01} + s_{01}^2 - 12\,s_{02} - 36\,s_{21} - 39\,s_{101} - 24\,s_{0001}\\
n_{A_1^2A_2} &= s_1^2\,s_2 - 4\,s_2^2 - 12\,s_1\,s_3 + 72\,s_4 + s_1^2\,s_{01} - 6\,s_2\,s_{01} - 2\,s_{01}^2 + 48\,s_{02} - 24\,s_1\,s_{11}\\
&\qquad + 240\,s_{21} - 12\,s_1\,s_{001} + 240\,s_{101} + 120\,s_{0001}\\
n_{A_1^4} &= s_1^4 - 24\,s_1^2\,s_2 + 48\,s_2^2 + 160\,s_1\,s_3 - 672\,s_4 - 12\,s_1^2\,s_{01} + 48\,s_2\,s_{01} + 12\,s_{01}^2\\
&\qquad - 288\,s_{02} + 224\,s_1\,s_{11} - 1776\,s_{21} + 96\,s_1\,s_{001} - 1584\,s_{101} - 720\,s_{0001}
\end{aligned}
$$

Классы мультиособенностей и остаточные многочлены для $\ell = 1$

Таблица классов локальных особенностей ростков отображений $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m+1}, 0)$ вплоть до коразмерности 8 вместе с разнообразной дополнительной информацией, необходимой для вычисления остаточных многочленов методом Римани, имеется в п. 3.1.4. Остаточные многочлены малой степени и выражения для соответствующих классов мультиособенностей приведены ниже. В [49] можно найти полный список остаточных многочленов мультиособенностей до коразмерности 8 (в отображаемом многообразии).

Остаточные классы $R_{\underline{\alpha}}$ коразмерности не выше 5 для $\ell = 1$

$$
\begin{aligned}
R_{A_0} &= 1\\
R_{A_0^2} &= -c_1\\
R_{A_1} &= c_2\\
R_{A_0^3} &= 2\,(c_1^2 + c_2)\\
R_{A_0 A_1} &= -2\,(c_1\,c_2 + c_3)\\
R_{A_0^4} &= -6\,(c_1^3 + 3\,c_1\,c_2 + 2\,c_3)\\
R_{A_2} &= c_2^2 + c_1\,c_3 + 2\,c_4\\
R_{A_0^2 A_1} &= 2\,(3\,c_1^2\,c_2 + 2\,c_2^2 + 7\,c_1\,c_3 + 6\,c_4)\\
R_{A_0^5} &= 24\,(c_1^4 + 6\,c_1^2\,c_2 + 2\,c_2^2 + 9\,c_1\,c_3 + 6\,c_4)\\
R_{A_0 A_2} &= -3\,(c_1\,c_2^2 + c_1^2\,c_3 + 2\,c_2\,c_3 + 4\,c_1\,c_4 + 4\,c_5)\\
R_{A_1^2} &= -2\,(2\,c_1\,c_2^2 + c_1^2\,c_3 + 4\,c_2\,c_3 + 5\,c_1\,c_4 + 6\,c_5)\\
R_{A_0^3 A_1} &= -24\,(c_1^3\,c_2 + 2\,c_1\,c_2^2 + 4\,c_1^2\,c_3 + 3\,c_2\,c_3 + 8\,c_1\,c_4 + 6\,c_5)\\
R_{A_0^6} &= -120\,(c_1^5 + 10\,c_1^3\,c_2 + 10\,c_1\,c_2^2 + 25\,c_1^2\,c_3 + 12\,c_2\,c_3 + 38\,c_1\,c_4 + 24\,c_5)
\end{aligned}
$$

Классы мультиособенностей $m_{\alpha_1,\underline{\alpha}'} = \#\,\mathrm{Aut}(\underline{\alpha}')\,\overline{m}_{\alpha_1,\underline{\alpha}'}$ коразмерности не выше 4 для $\ell = 1$

$$
\begin{aligned}
m_{A_0,A_0} &= s_0 - c_1\\
m_{A_0,A_0^2} &= s_0^2 - s_1 - 2\,s_0\,c_1 + 2\,c_1^2 + 2\,c_2\\
m_{A_0,A_1} &= s_{01} - 2\,c_1\,c_2 - 2\,c_3\\
m_{A_1,A_0} &= s_0\,c_2 - 2\,c_1\,c_2 - 2\,c_3\\
m_{A_0,A_0^3} &= s_0^3 - 3\,s_0\,s_1 + 2\,s_2 + 2\,s_{01} - 3\,s_0^2\,c_1 + 3\,s_1\,c_1 + 6\,s_0\,c_1^2\\
&\quad - 6\,c_1^3 + 6\,s_0\,c_2 - 18\,c_1\,c_2 - 12\,c_3\\
m_{A_0,A_0A_1} &= s_0\,s_{01} - 2\,s_{11} - 2\,s_{001} - s_{01}\,c_1 - 2\,s_0\,c_1\,c_2 + 6\,c_1^2\,c_2 + 4\,c_2^2 - 2\,s_0\,c_3\\
&\quad + 14\,c_1\,c_3 + 12\,c_4\\
m_{A_1,A_0^2} &= s_0^2\,c_2 - s_1\,c_2 - 4\,s_0\,c_1\,c_2 + 6\,c_1^2\,c_2 + 4\,c_2^2 - 4\,s_0\,c_3 + 14\,c_1\,c_3 + 12\,c_4\\
m_{A_0,A_0^4} &= s_0^4 - 6\,s_0^2\,s_1 + 3\,s_1^2 + 8\,s_0\,s_2 - 6\,s_3 + 8\,s_0\,s_{01} - 18\,s_{11} - 12\,s_{001} - 4\,s_0^3\,c_1\\
&\quad + 12\,s_0\,s_1\,c_1 - 8\,s_2\,c_1 - 8\,s_{01}\,c_1 + 12\,s_0^2\,c_1^2 - 12\,s_1\,c_1^2 - 24\,s_0\,c_1^3 + 24\,c_1^4\\
&\quad + 12\,s_0^2\,c_2 - 12\,s_1\,c_2 - 72\,s_0\,c_1\,c_2 + 144\,c_1^2\,c_2 + 48\,c_2^2 - 48\,s_0\,c_3\\
&\quad + 216\,c_1\,c_3 + 144\,c_4
\end{aligned}
$$

Классы мультиособенностей $n_{\underline{\alpha}} = \#\,\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})\,\overline{n}_{\underline{\alpha}}$ коразмерности не выше 5 для $\ell = 1$

$$
\begin{aligned}
n_{A_0} &= s_0\\
n_{A_0^2} &= s_0^2 - s_1\\
n_{A_1} &= s_{01}\\
n_{A_0^3} &= s_0^3 - 3\,s_0\,s_1 + 2\,s_2 + 2\,s_{01}\\
n_{A_0A_1} &= s_0\,s_{01} - 2\,s_{11} - 2\,s_{001}\\
n_{A_0^4} &= s_0^4 - 6\,s_0^2\,s_1 + 3\,s_1^2 + 8\,s_0\,s_2 - 6\,s_3 + 8\,s_0\,s_{01} - 18\,s_{11} - 12\,s_{001}\\
n_{A_2} &= s_{02} + s_{101} + 2\,s_{0001}\\
n_{A_0^2A_1} &= s_0^2\,s_{01} - s_1\,s_{01} + 4\,s_{02} - 4\,s_0\,s_{11} + 6\,s_{21} - 4\,s_0\,s_{001} + 14\,s_{101} + 12\,s_{0001}\\
n_{A_0^5} &= s_0^5 - 10\,s_0^3\,s_1 + 15\,s_0\,s_1^2 + 20\,s_0^2\,s_2 - 20\,s_1\,s_2 - 30\,s_0\,s_3 + 24\,s_4 + 20\,s_0^2\,s_{01}\\
&\qquad - 20\,s_1\,s_{01} + 48\,s_{02} - 90\,s_0\,s_{11} + 144\,s_{21} - 60\,s_0\,s_{001} + 216\,s_{101} + 144\,s_{0001}
\end{aligned}
$$

5.5 Обоснование из теории кобордизмов

В этом пункте мы приводим топологические соображения, обосновывающие теорему 5.1.1. Приведенные соображения довольно схематичны, так что в полной мере теорему 5.1.1 нельзя считать доказанной. При достаточном упорстве эти соображения несложно довести до полной строгости, однако это вряд ли стоит делать: окончательное доказательство, равно как и более строгая формулировка, уточняющая понятия классов особенностей и общности положения, должны формулироваться в рамках алгебраической геометрии и теории пересечений, см. обсуждение этих вопросов в п. 5.6. Поэтому последующие топологические аргументы следует рассматривать как (довольно убедительную) мотивировку всей теории.

Классифицирующее пространство вещественных мультиособенностей

Рассмотрим гладкое собственное отображение общего положения $f : M \to N$ *вещественных* гладких многообразий, $\ell = \dim_{\mathbb{R}} N - \dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 0$. Замыкание цикла мультиособенностей $p_N(M(\underline{\alpha})) \subset N$ является локально полуалгебраическим подмножеством, и его двойственный класс когомологий не всегда корректно определен (даже в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). Такие классы когомологий определены только для определенных линейных комбинаций мультиособенностей, удовлетворяющих некоторым граничным условиям (см [83]). Пусть $\chi(f) \in H^*(N, \mathbb{Z}_2)$ — один из классов, определенный таким способом.

Отображение f может рассматриваться как представитель класса ℓ-мерных кобордизмов на N. Легко увидеть, что класс χ является инвариантом класса кобордизма, другими словами, если два отображения $f : M \to N$ и $f' : M' \to N$ кобордантны, то $\chi(f) = \chi(f')$. Более того, имеет место следующее утверждение.

5.5.1. Предложение. *Если d-мерный класс когомологий (для определенности, по модулю 2), двойственный некоторой линейной комбинации циклов особенностей коразмерности d, корректно определен для всякого общего собственного отображения $f : M \to N$ многообразий относительной размерности $\dim N - \dim M = \ell$, то он задает универсальную когомологическую операцию из ℓ-мерных кобордизмов $O^\ell(\cdot)$ в d-мерные когомологии $H^d(\cdot, \mathbb{Z}_2)$.*

Классификация всех возможных операций может быть получена из классической конструкции Тома. Один из способов описания конструкции Тома состоит в следующем. Имеется «универсальный ℓ-мерный кобордизм» $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{R}} \to \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$, такой, что всякий класс кобордизмов на всяком многообразии N индуцируется из $\boldsymbol{f}$ некоторым непрерывным отображением $\varkappa : N \to \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$, определенным однозначно с точностью до гомотопии.

В качестве пространства $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$ можно взять итерированное пространство петель $\Omega^m MO(m+\ell)$, $m \gg 0$, где $MO(n)$ — пространство Тома классифицирующего расслоения ранга n над $BO(n)$. (Пространства $BO(n)$, $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$ всегда можно заменить их гладкими конечномерными аппроксимациями.) Отображение $\varkappa : N \to \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$ может рассматриваться как отображение $\tilde{\varkappa} : N \times S^m \to MO(m+\ell)$. Предположим, что это отображение гладко в окрестности нулевого сечения $BO(m+\ell) \subset MO(m+\ell)$ и трансверсально ему. Тогда мы можем положить $M = \tilde{\varkappa}^{-1}(BO(m+\ell))$, и $f : M \to N$ — естественная проекция. Всякое гладкое отображение $M \to N$ может быть реализовано этой конструкцией, и два отображения $f_i : M_i \to N$, $i = 1, 2$, кобордантны, если и только если соответствующие отображения $\varkappa_i : N \to \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$ гомотопны (см., например, [80]). Применяя стандартные рассуждения, мы приходим к следующему результату.

5.5.2. Предложение. *Возможные когомологические операции $O^\ell(\cdot) \to H^d(\cdot, \mathbb{Z}_2)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами когомологий группы $H^d(\Omega^m MO(m+\ell), \mathbb{Z}_2)$, $m \gg 0$ (эти группы стабилизируются для достаточно больших m).*

Как известно, пространства Тома $MO(m+\ell)$ в размерностях, не превосходящих $2(m+\ell)$, имеют гомотопический тип произведения пространств Эйленберга-Маклейна $K(\mathbb{Z}_2, n)$ для различных n. На пространствах Эйленберга-Маклейна операция перехода к пространству петель сводится к сдвигу числа n. Это приводит к явному описанию когомологий пространства $\Omega^m MO(m+\ell)$, $m \gg 0$, а следовательно, возможных операций $O^\ell(\cdot) \to H^d(\cdot, \mathbb{Z}_2)$. Мы опускаем подробности, поскольку в дальнейшем будет интересовать, в основном, комплексный случай.

5.5.3. Определение. *Классифицирующим пространством вещественных $\mathcal{K}$-мультиособенностей* называется пространство $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}} = \Omega^m MO(m+\ell)$, $m \gg 0$, или его конечномерная аппроксимация.

Элементы этого пространства — непрерывные отображения $h : (S^m, *) \to (MO(m+\ell), *)$, где $*$ обозначает отмеченные точки в S^m и

$MO(m+\ell)$ соответственно. Без потери общности, можно считать, что это отображение h гладко в окрестности нулевого сечения $BO(m+\ell) \subset MO(m+\ell)$. Поскольку $\ell \geqslant 0$, то за исключением подмножества бесконечной коразмерности, всякое такое отображение h имеет конечное число прообразов нулевого сечения. Для каждой точки $x \in h^{-1}(BO(m+\ell))$ корректно определен ее тип $\mathcal{K}$-особенности (заданный как класс изоморфизма локальной алгебры 0-мерного особого многообразия $h^{-1}(BO(m+\ell))$ в точке x). Следовательно, точки классифицирующего пространства классифицированы в соответствии с различными типами мультиособенностей.

5.5.4. Лемма. *Если каждый класс локальных особенностей α_i, входящих в заданный тип мультиособенности $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, состоит из одной орбиты $\mathcal{K}$-эквивалентности, то подпространство $\boldsymbol{N}(\underline{\alpha}) \subset \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$ гомотопически эквивалентно классифицирующему пространству группы симметрий мультиособенности $\underline{\alpha}$.*

Под группой симметрий мультиособенности $\underline{\alpha}$ мы понимаем полупрямое произведение групп симметрий индивидуальных особенностей $G_{\alpha_1} \times \cdots \times G_{\alpha_r}$ и подгруппы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \subset S(r)$ мультииндекса $\underline{\alpha}$.

Лемма вытекает из аналогичной леммы 2.7.4 для случая локальных особенностей. Действительно, рассмотрим $\#\,\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})$-листное накрытие $\widetilde{\boldsymbol{N}}(\underline{\alpha}) \to \boldsymbol{N}(\underline{\alpha})$, слои которого над точкой $h \in \boldsymbol{N}(\underline{\alpha})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с различными упорядочиваниями точек из полного прообраза $h^{-1}(BO(m+\ell))$, в которых h имеет эквивалентные локальные особенности. Пространство $\widetilde{\boldsymbol{N}}(\underline{\alpha})$ расслоено над конфигурационным пространством упорядоченных наборов из r точек в $\mathbb{R}^m$, и по лемме 2.7.4 слои этого расслоения изоморфны $BG_{\alpha_1} \times \cdots \times BG_{\alpha_r}$.

Поскольку m велико, конфигурационное пространство имеет тривиальную топологию (то есть оно $k(m)$-связно, где $k(m)$ растет неограниченно с ростом m). Группа $\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})$ действует на этом пространстве свободно, откуда и следует результат. $\square$

5.5.5. Замечание. Конструкция Тома предоставляет классифицирующее отображение $\varkappa : N \to \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$, ассоциированное с отображением $f : M \to N$. Отметим, что оно сохраняет разбиения N и $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$ на страты различных типов мультиособенностей. Альтернативно, для построения классифицирующего отображения $\varkappa$ можно использовать «обобщенную конструкцию Понтрягина-Тома» [74] (перенос которой со случая устойчивых отображений, рассмотренного в [74], на случай произвольных отображений представляет техническую, но не принципиальную трудность). Простое наблюдение об эквивалентности обеих конструкций отсутствует в [74].

5.5.6. Замечание. Пространство $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{R}}$ области определения «универсального ℓ-мерного кобордизма» $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{R}} \to \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$ задается как подпространство прямого произведения $S^m \times \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{R}}$, образованное парами вида (x, h), такими, что $h(x) \in BO(m + \ell)$. Пространство $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{R}}$ также имеет естественное разбиение. Страты этого разбиения занумерованы наборами локальных особенностей $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, одна из которых, скажем, α_1, отмечена. Эта классификация отражает классификацию классов мультиособенностей вида $p_M(M(\underline{\alpha}))$ на многообразии M области определения гладкого отображения $M \to N$. Аналог леммы 5.5.4 также справедлив. Группа $\operatorname{Aut}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ должна быть заменена при этом на меньшую подгруппу $\operatorname{Aut}(\alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, содержащую только те перестановки мультииндекса $\underline{\alpha}$, которые оставляют на месте отмеченный элемент α_1.

Классифицирующее пространство комплексных мультиособенностей

Собственное голоморфное отображение $f : M \to N$ комплексных многообразий может рассматриваться как представитель *унитарного* 2ℓ-мерного класса кобордизмов $[f] \in U^{2\ell}(N)$, где $\ell = \dim_{\mathbb{C}} N - \dim_{\mathbb{C}} M$. Неверно, что каждый класс унитарных кобордизмов представляется голоморфным отображением. Тем не менее, можно ожидать, что, аналогично вещественному случаю, соответствие, сопоставляющее отображению $f : M \to N$ класс когомологий в образе N, двойственный некоторому циклу мультиособенностей, продолжается до универсальной когомологической операции $U^{2\ell}(\cdot) \to H^*(\cdot)$. Предложение 5.5.10, сформулированное ниже, утверждает, что это действительно справедливо.

Рассуждения, аналогичные рассмотренным выше для вещественного случая, показывают, что возможные когомологические операции $U^{2\ell}(\cdot) \to H^*(\cdot)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами кольца когомологий $H^*(\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}})$, где $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}} = \Omega^{2m} MU(m+\ell)$, $m \to \infty$, — соответствующее итерированное пространство петель.

Элементы пространства $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}$ — непрерывные отображения $h : (S^{2m}, *) \to (MU(m+\ell), *)$. Обозначим через $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{C}} \subset S^{2m} \times \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}$ подпространство, образованное парами вида (x, h), такими, что $h(x) \in BU(m+\ell)$. Естественная проекция $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{C}} \to \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}$ может рассматриваться как «универсальный унитарный кобордизм».

Известно, что когомологии пространства $\Omega^{2m} MU(m+\ell)$, $m \gg 0$ не имеют кручения, тем не менее полное описание мультипликативной структуры в кольце целочисленных когомологий классифицирующего пространства довольно сложно, и здесь важную роль играют вопросы делимости, см. [17, 71].

К счастью, ситуация сильно упрощается, если перейти к когомологиям с рациональными коэффициентами. Для всякого монома $c^I = c_1^{i_1} c_2^{i_2} \dots$ соответствующий ему класс Ландвебера-Новикова s_I не зависит от отображения, представляющего данный класс кобордизмов. Это дает большой запас искомых операций. Операции Ландвебера-Новикова хорошо известны в теории кобордизмов. В действительности, они определены в кобордизмах, здесь же мы рассматриваем их образы в когомологиях. Из операций Ландвебера-Новикова можно получать новые, переходя к произведению (произведение рассматривается в смысле кольцевой структуры в когомологиях, а не в смысле взятия композиции операций).

5.5.7. Теорема. *Для всякого $l > 0$ кольца когомологий $H^*(\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$ и*

$H^*(\boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$ представляют собой кольца многочленов, образующими которых служат абстрактные классы Ландвебера-Новикова s_I и Чженя-Ландвебера-Новикова c_i, s_I соответственно.

5.5.8. Следствие. *Для всякого $\ell > 0$ имеется взаимно однозначное соответствие между операциями $U^{2\ell}(\cdot) \to H^*(\cdot, \mathbb{Q})$ и элементами кольца многочленов от классов Ландвебера-Новикова s_I.*

Доказательство. Как известно, стабильный остов пространства $MU(m+\ell)$ при $m \to \infty$ имеет рациональный гомотопический тип произведения пространств Эйленберга-Маклейна $K(\mathbb{Z}, 2n)$ для различных n. Более подробно, зафиксируем базис c_I в группе когомологий пространства $BU(m+\ell)$. Например, в качестве такого базиса можно взять всевозможные мономы от классов Чженя тавтологического векторного расслоения ранга $m+\ell$. Обозначим через $\varphi_I \in H^*(MU(m+\ell))$ образ класса c_I при изоморфизме Тома $H^*(BU(m+\ell)) \simeq H^*(MU(m+\ell))$. Класс φ_I задает, в свою очередь, отображение $MU(m+\ell) \to K(\mathbb{Z}, 2(m+\ell+|I|))$, где $|I|$ — степень монома c_I относительно градуировки, в которой $\deg c_i = i$. Переходя к произведению, мы получаем отображение

$$MU(m+\ell) \longrightarrow \prod K(\mathbb{Z}, 2(m+\ell+|I|)).$$

Из теоремы Картана-Серра вытекает, что это отображение индуцирует изоморфизм в рациональных когомологиях в степенях $2(m+\ell)+d$ при $m \gg d$, см., например, [65]. Переходя к пространствам петель, мы получаем отображение

$$\Omega^{2m} MU(m+\ell) \longrightarrow \prod K(\mathbb{Z}, 2(\ell+|I|)),$$

которое также индуцирует изоморфизм в d-мерных рациональных когомологиях при фиксированном d и достаточно большом m. Поскольку $2(\ell+|I|)$ четно, кольцо $H^*(K(\mathbb{Z}, 2(\ell+|I|)), \mathbb{Q})$ изоморфно кольцу многочленов от одной образующей s_I, в точности соответствующей операции Ландвебера-Новикова. Отсюда вытекает описание кольца когомологий пространства

$H^*(\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}) = \Omega^{2m} MU(m+\ell)$. Описание целочисленного кольца когомологий классифицирующего пространства сложнее. В [17] ответ формулируется в терминах характера Чженя-Дольда.

Структура рациональных когомологий пространства $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{C}}$ вычисляется аналогично. Элементы этого пространства образованы отображениями сферы S^{2m} с двумя отмеченными точками в пространство $MU(m+\ell)$, такими, что первая отмеченная точка переходит в отмеченную точку пространства Тома, а вторая — в одну из точек нулевого сечения $BU(m+\ell) \subset MU(m+\ell)$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{C}}$ расслоено над $BU(m+\ell)$, а когомологии слоя в стабильных размерностях не отличаются от когомологий пространства $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}$. Таким образом, из рассмотрения спектральной последовательности этого расслоения мы получаем искомое равенство $H^*(\boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{C}}) \simeq H^*(BU) \otimes H^*(\boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}})$. Теорема 5.5.7 полностью доказана. $\square$

Рассмотрим сферу S^{2m} как одноточечную компактификацию комплексного пространства $\mathbb{C}^m$. Тогда пространства областей определения и значения отображения $h : (S^{2m}, *) \to (MU(m+\ell), *)$, представляющего элемент $h \in \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}$, являются гладкими комплексными многообразиями всюду, за исключением отмеченных точек. Обозначим через $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}} \subset \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}$ подпространство, содержащее только такие отображения h, которые голоморфны в окрестности нулевого сечения $BU(m+l) \subset MU(m+\ell)$, и положим $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathrm{hol}} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}}) \subset \boldsymbol{M}_\ell^{\mathbb{C}}$

5.5.9. Определение. Пространства $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}}$, $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathrm{hol}}$, $\ell > 0$, называются *классифицирующими пространствами комплексных $\mathcal{K}$-мультиособенностей.*

5.5.10. Предложение. *Для всякого класса мультиособенностей $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ соответствие $f \mapsto \overline{n}_{\underline{\alpha}} \in H^*(N)$, заданное на собственных голоморфных отображениях $f : M \to N$, продолжается до универсальной когомологической операции $U^{2\ell}(\cdot) \to H^*(\cdot, \mathbb{Q})$, и, следовательно, $\overline{n}_{\underline{\alpha}}$ может быть выражено как универсальный многочлен с рациональными коэффициентами от классов Ландвебера-Новикова.*

Доказательство предложения 5.5.10 и теоремы 5.1.1. Можно показать, что вложение $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}} \subset \boldsymbol{N}_\ell^{\mathbb{C}}$ индуцирует изоморфизм когомологий. Это утверждение является одним из проявлений общего принципа Смейла-Хирша и может быть доказано методами, изложенными в книге [84]. Точки пространства $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}}$ классифицированы по типам мультиособенностей голоморфных отображений. Аналогично вещественному случаю, подпространство $\boldsymbol{N}(\underline{\alpha}) \subset \boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}}$, соответствующее фиксированному типу мультиособенностей $\underline{\alpha}$, гомотопически эквивалентно классифицирующему пространству $BG_{\underline{\alpha}}$ группы симметрий $G_{\underline{\alpha}}$ особенности $\underline{\alpha}$. По теореме 5.5.7 класс когомологий в $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}}$, двойственный по Пуанкаре замыканию цикла $\boldsymbol{N}(\underline{\alpha})$, является многочленом с рациональными коэффициентами от классов Ландвебера-Новикова.

Если $f : M \to N$ — собственное голоморфное отображение, то, используя обобщенную конструкцию Понтрягина-Тома, изложенную в [74], можно построить классифицирующее отображение $\varkappa : N \to \boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}}$, которое сохраняет разбиение на типы мультиособенностей. Следовательно, класс когомологий $n_{\underline{\alpha}} \in H^*(N)$, соответствующий мультиособенности $\underline{\alpha}$, индуцирован отображением $\varkappa$ из класса $[\boldsymbol{N}(\underline{\alpha})] \in H^*(\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}})$. Композиция $\varkappa$ с вложением $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}} \subset \Omega^{2m} MU(m+\ell)$ — отображение, предоставляемое классической конструкцией Тома. Следовательно, образующие $s_I \in H^*(\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}})$ переводятся гомоморфизмом $\varkappa^*$ в соответствующие классы Ландвебера-Новикова, ассоциированные с отображением f. Это доказывает предложение.

Теорема 5.1.1 следует из подобных рассуждений, примененных к пространству $\boldsymbol{M}_\ell^{\mathrm{hol}}$ вместо $\boldsymbol{N}_\ell^{\mathrm{hol}}$. □

5.5.11. Замечание. Рассуждения этого пункта послужили начальной точкой наших исследований мультиособенностей. Удостоверившись в существовании многочленов предложения 5.5.10, мы вычислили их явно для большого количества мультиособенностей при помощи метода, предложенного Р. Римани для близкой задачи. Затем мы обнаружили между этими многочленами много интересных соотношений. Например, степень (однородная) многочлена равна числу индивидуальных особенностей, образующих данную мультиособенность; старшая однородная компонента равна, с точностью до множителя $\#\,\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})$, произведению классов, соответствующих моноособенностям, и т.д. Исследуя эти соотношения, мы пришли в результате к окончательным формулам (5.1–5.4).

5.6 Целочисленная формула и другие обобщения

В этом пункте мы обсуждаем различные гипотетические обобщения теорем 5.1.1 и 5.2.2. В окончательном виде теория характеристических классов, двойственных циклам мультиособенностей, должна использовать, по-видимому, язык теории пересечений и вместо когомологий $H^*(X)$ комплексного (квазипроективного, возможно, особого) многообразия X следует использовать группы Чжоу A_*X линейных комбинаций алгебраических циклов по модулю рациональной эквивалентности. Заметим, однако, что всюду в этом пункте без большой потери группу A_kX можно заменить на группу $H_{2k}(X) \simeq H^{2m-2k}(X)$, $m = \dim X$, если X — гладко, или на группу $H^{2n-2k}(W, W \setminus X)$, $n = \dim W$, если X особо и $W \supset X$ — произвольное гладкое объемлющее многообразие (эти группы не зависят, с точностью до изоморфизма, от вложения $X \subset W$). Если X — гладко, то основная конструкция теории пересечений превращает A_*X в кольцо, в котором единицей служит фундаментальный класс $[X]$ многообразия.

Трансверсальность

Пусть задано гладкое собственное отображение $f : X \to Y$, и $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ — класс $\mathcal{K}$-мультиособенностей. В п. 5.1 мы определили цикл

$X(\underline{\alpha}) \subset X^k$ для «общего» отображения f как подпространство, являющееся замыканием множества наборов попарно различных точек $x_1, \dots, x_r$, таких, что $f(x_1) = \dots = f(x_r)$, и таких, что f имеет особенность α_i в x_i. В этом подпункте мы уточняем условие общности положения и приводим определение схемы мультиособенностей $X(\underline{\alpha})$ для произвольного f, не обязательно удовлетворяющего условию общности.

Схема $X(\underline{\alpha})$ определяется задающим ее пучком идеалов. Иными словами, нам достаточно определить эту схему в окрестности каждой точки $(x_1, \dots, x_r) \in X^r$. Мы можем предполагать, что среди точек x_i имеется k попарно различных $s_1, \dots, s_k$, и что $f(s_1) = \dots = f(s_k)$. Выбрав подходящие координаты в окрестности точек s_i и $f(x_i)$, мы можем считать f мультиростком $f : (\mathbb{C}^m, S) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, где $S = \{s_1, \dots, s_r\} \subset \mathbb{C}^m$. Рассмотрим деформацию F этого мультиростка вида

$$F : (x, P) \mapsto f(x) + P(x),$$

где P — точка пространства $P(m, n, K)$ глобально заданных полиномиальных отображений $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ степени не выше K. Обозначим через $\widetilde{X}^0(\underline{\alpha})$ пространство наборов вида $(x_1, \dots, x_r, P) \subset X^r \times P(m, n, K)$, таких, что:

1) точки x_i попарно различны и каждая из них лежит в некоторой малой окрестности подмножества $S \subset \mathbb{C}^m$;

2) $F(x_1, P) = \dots = F(x_r, P)$;

3) росток отображения $F(\cdot, P)$ в точке x_i имеет особенность α_i.

Из леммы 1.6.4 главы 1 следует, что при достаточно больших K (K определяется мультиособенностью $\underline{\alpha}$ и не зависит от f), подпространство $\widetilde{X}^0(\underline{\alpha})$ является гладким (незамкнутым) подмногообразием ожидаемой размерности. Пусть $\widetilde{X}(\underline{\alpha})$ — его замыкание, рассматриваемое как особое приведенное подмногообразие. Тогда *определим $X(\underline{\alpha})$ как схемный прообраз многообразия $\widetilde{X}(\underline{\alpha})$ при естественном вложении $j : X^r = X^r \times \{0\} \hookrightarrow X^r \times P(m, n, K)$.*

Из леммы 1.6.4 нетрудно вывести, что схема $X(\underline{\alpha})$ не зависит от выбора $K \gg 0$ и от остального произвола в ее определении, в частности, приведенные ее локальные описания склеиваются в глобально определенную схему.

Заметим, что если мультиросток $f : (\mathbb{C}^m, S) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ конечноопределен, то вместо семейства F можно было бы взять произвольную версальную деформацию мультиростка f. Однако приведенная выше конструкция более общая и не требует конечной определенности особенностей отображения f.

Условие трансверсальности отображения f по отношению к мультиособенности $\underline{\alpha}$ заключается в том, что схема $X(\underline{\alpha})$ приведенная, имеет ожидаемую размерность, и, кроме того, замкнутое подмногообразие $j^{-1}(\widetilde{X}(\underline{\alpha}) \setminus \widetilde{X}^0(\underline{\alpha}))$ имеет строго меньшую размерность. При выполнении этого условия определение п. 5.1, очевидно, эквивалентно приведенному выше.

Кроме того, построенная схема удовлетворяет следующему свойству функториальности: пусть имеется расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow_{f'} & & \downarrow_{f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Предположим, что Y' гладко и что отображение $f{\times}g : X{\times}Y' \to Y^2$ трансверсально диагонали $\Delta_Y \subset Y^2$. Тогда пространство расслоенного произведения $X' = X{\times}_Y Y' = (f{\times}g)^{-1}\Delta_Y$ также гладко, проекция $f' : X' \to Y'$ собственна и имеет ту же относительную размерность $\dim Y' - \dim X' = \dim Y - \dim X$. Мы скажем, что отображение $f' : X' \to Y'$ *индуцировано* из отображения $f : X \to Y$ отображением g. Кроме того, проекция $g' : X \to X'$ индуцирует отображение $g'^r : X'^r \to X^r$. *Свойство функториальности* заключается в том, что схема $X'(\underline{\alpha}) \subset X'^r$, предоставляемая приведенной конструкцией, примененной к отображению f', совпадает со схемным прообразом $(g'^r)^{-1}X(\underline{\alpha})$.

Гипотетические обобщения основной теоремы

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма. Пусть задан набор гладких отображений $f_i : X_i \to Y$, $i = 1, \ldots, r$. Положим $\widehat{X} = X_1 \times_Y \ldots \times_Y X_r = \widehat{f}^{-1} \Delta_Y$, где $\widehat{f} = f_1 \times \ldots \times f_r : X_1 \times \ldots \times X_r \to Y$ и $\Delta_Y \simeq Y \subset Y^r$ — диагональ. Пусть все отображения f_i *собственны.* Тогда проектирование на первый множитель $p_1 : \widehat{X} \to X_1$ также собственно, и определен соответствующий гомоморфизм прямого образа

$$p_{1*} : A_* \widehat{X} \to A_* X_1.$$

(Заметим, что проекцию p_1 можно разложить в композицию $\widehat{X} \hookrightarrow X_1 \times \ldots \times X_r \to X_1$, однако гомоморфизм p_{1*} раскладывается в соответствующую композицию гомоморфизмов прямых образов, только если все многообразия X_i полны). Конструкция произведения-пересечения задает для всякого набора классов $a_i \in A_* X_i$ элемент

$$a_1 \times_Y \ldots \times_Y a_r = \Delta_Y \cdot (a_1 \times \ldots \times a_r) = (a_1 \times \ldots \times a_r) \frown \widehat{f}^* [\Delta_Y] \in A_d \widehat{X},$$

где $d = \sum_{i=1} \deg a_i - (r-1) \dim Y$.

5.6.1. Лемма. *Если $f_i : X_i \to Y$ $i = 1, \ldots, r$ — собственные гладкие отображения, то для всякого набора элементов $a_i \in A_* X_i$ выполняется равенство*

$$p_{1*}\, a_1 \times_Y \ldots \times_Y a_r = a_1\, (f_1^* f_{2*} a_2) \ldots (f_1^* f_{r*} a_r) \in A_* X_1.$$

Доказательство. В действительности, для корректности определения классов $a_1 \times_Y \ldots \times_Y a_r$ и справедливости леммы гладкость X_i не нужна. Необходимо только, чтобы Y было гладким. Заменив, при необходимости, X_i на циклы, представляющие классы a_i, можно свести лемму к случаю, когда $a_i = [X_i]$. Далее, из функториальности конструкции вытекает, что лемму достаточно доказать только для случая $r = 2$, то есть осталось проверить равенство

$$p_{1*}(\Delta_Y \cdot (X_1 \times X_2)) = f_1^* f_{2*} [X_2].$$

Это равенство доказано, фактически, в [28] (см. доказательство теоремы 9.3). $\square$

Вернемся к теории характеристических классов мультиособенностей. Эта теория, в своем окончательном варианте, для гладкого собственного отображения[1] $f : X \to Y$ и для всякого набора локальных типов $\mathcal{K}$-особенностей $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ должна предоставлять конструкцию класса $\widehat{m}_{\underline{\alpha}} \in A_d X(\underline{\alpha})$, где $X(\underline{\alpha})$ — определенная выше схема мультиособенности и $d = \dim X - \operatorname{codim} \underline{\alpha}$ — ее ожидаемая размерность. Этот класс должен удовлетворять свойству функториальности по отношению к операции индуцирования отображений, кроме того, если $X(\underline{\alpha})$ имеет ожидаемую размерность, например, в случае выполнения условий трансверсальности, то $\widehat{m}_{\underline{\alpha}}$ должен совпадать с фундаментальным циклом многообразия $X(\underline{\alpha})$.

Предположим, что конструкция для классов $\widehat{m}_{\underline{\alpha}}$, обладающая перечисленными свойствами, имеется. Заметим, что, по построению, $X(\underline{\alpha}) \subset X[r]$, где схема $X[r] = X \times_Y \dots \times_Y X \subset X^r$ определяется как прообраз диагонали при отображении $f^r : X^r \to Y^r$. Поэтому корректно определены гомоморфизмы прямого образа ограничения на $X(\underline{\alpha})$ отображения $p_X : X[r] \to X$, задаваемого проекцией на первый множитель, и структурного отображения $p_Y = f p_X : X[r] \to Y$, и мы можем положить

$$m_{\underline{\alpha}} = p_{X*} \widehat{m}_{\underline{\alpha}} \in A_* X, \qquad n_{\underline{\alpha}} = p_{Y*} \widehat{m}_{\underline{\alpha}} = f_* m_{\underline{\alpha}} \in A_* Y.$$

В случае выполнения условия трансверсальности для отображения f эти определения классов $m_{\underline{\alpha}}$, $n_{\underline{\alpha}}$ совпадают с определениями п. 5.1.

Пусть $\delta^r : X \to X[r]$ — диагональное вложение. Всякое разбиение $\{1, \dots, r\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k$ множества индексов $\{1, \dots, r\}$ в несвязное объединение неупорядоченных непустых подмножеств $J_1, \dots, J_k$ мощностей $|J_1|, \dots, |J_k|$ задает отождествление $X[r] = X[|J_1|] \times_Y \dots \times_Y X[|J_k|]$ и соответствующее этому отождествлению мультидиагональное вложение

[1] Класс отображений, к которым теория должна быть применима, достаточно широк. Например, при $\ell = \dim Y - \dim X > 0$ можно допускать даже отображения, не являющиеся конечными

$\delta^{J_1,\dots,J_k} = \delta^{|J_1|}\times_Y \dots \times_Y \delta^{|J_r|} : X[k] \to X[r]$. Это вложение задает для произвольного набора классов $a_1,\dots,a_k \in A_*X$ их относительное произведение

$$(\delta_*^{|J_1|}a_1)\times_Y \dots \times_Y (\delta_*^{|J_k|}a_k) = \delta_*^{J_1,\dots,J_k}\,(a_1\times_Y \dots \times_Y a_k) \in A_*X[r].$$

5.6.2. Гипотеза. *Для всякого гладкого собственного отображения $f : X \to Y$ положительной относительной размерности $\ell = \dim Y - \dim X > 0$ при надлежащем определении классов $\widehat{m}_{\underline{\alpha}} \in A_*X(\underline{\alpha})$ следующая комбинация классов мультиособенностей*

$$\sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} (-1)^{k-1}(k-1)!\, \widehat{m}_{\underline{\alpha}_{J_1}}\times_Y \dots \times_Y \widehat{m}_{\underline{\alpha}_{J_k}} \in A_*X[r]$$

представляется циклом, имеющим носитель на диагонали $\delta^r X \subset X[r]$, и выражается в виде $\delta_*^r R_{\underline{\alpha}}$, где класс $R_{\underline{\alpha}} \in A_*X$ задается универсальным многочленом от относительных классов Чженя отображения f. Этот многочлен, называемый остаточным многочленом мультиособенности $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_r)$, *зависит только от (неупорядоченного) набора локальных типов α_i особенностей (и числа $\ell > 0$).*

При помощи леммы 5.2.4 из соотношения гипотезы вытекают равенства

$$\widehat{m}_{\underline{\alpha}} = \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} \delta_*^{J_1,\dots,J_k}\, R_{\underline{\alpha}_{J_1}}\times_Y \dots \times_Y R_{\underline{\alpha}_{J_k}} \tag{5.11}$$

$$= \delta_*^r R_{\underline{\alpha}} + \sum_{1\in J\subsetneq\{1,\dots,r\}} (\delta_*^{|J|}R_{\underline{\alpha}_J})\times_Y \widehat{m}_{\underline{\alpha}_{\overline{J}}}, \qquad \overline{J} = \{1,\dots,r\}\setminus J, \tag{5.12}$$

Суммирование в этих формулах производится по тем же множествам, что и в формулах (5.1–5.4). Формулы (5.1,5.3) и (5.2,5.4) вытекают из формул гипотезы применением гомоморфизмов p_{X*} и p_{Y*} соответственно с использованием леммы 5.6.1.

Утверждение гипотезы и равенства (5.11,5.12) справедливы, по-видимому, при произвольных $\ell = \dim Y - \dim X$, не обязательно положительных. Условие собственности отображения f в указанной формулировке также, по-видимому, не существенно.

Целочисленные формулы

Остаточный многочлен $R_{\underline{\alpha}}$ гипотезы 5.6.2 имеет целые коэффициенты и формулы (5.11,5.12), а следовательно, (5.1–5.4) справедливы с учетом кручения. Этот факт можно вывести из гипотезы, поскольку класс в формуле гипотезы целочисленный. Однако имеются более тонкие гипотетические целочисленные равенства, которые мы формулируем ниже. Эксперименты показывают, что в случае, когда среди особенностей набора $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ имеются повторяющиеся, остаточный многочлен имеет большой числовой множитель.

5.6.3. Определение. *Приведенным остаточным многочленом* мультиособенности $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ называется многочлен

$$R^{\mathrm{red}}_{\underline{\alpha}} = R^{\mathrm{red}}_{\alpha_1;\underline{\alpha}'} = \tfrac{1}{\#\,\mathrm{Aut}(\alpha')} R_{\underline{\alpha}},$$

где $\underline{\alpha}' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Заметим, что этот многочлен, в отличие от $R_{\underline{\alpha}}$, инвариантен относительно только тех перестановок в наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, которые сохраняют элемент α_1. Первый элемент α_1 набора $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \underline{\alpha}')$ мы назовем *отмеченным.*

Рассмотрим соотношение (5.3). Левая часть этого равенства является кратным другого целочисленного класса, поскольку $m_{\underline{\alpha}} = \#\,\mathrm{Aut}(\alpha')\,\overline{m}_{\underline{\alpha}}$, где $\overline{m}_{\underline{\alpha}}$ — класс, двойственный соответствующему приведенному циклу мультиособенностей. Правая часть равенства также является кратным, поскольку из симметрии мультииндекса $\underline{\alpha}$ следует, что в правой части имеется много повторяющихся слагаемых. Разделив обе части (5.3) на $\#\,\mathrm{Aut}(\alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, мы получаем равенство

$$\overline{m}_{\underline{\alpha}} = R^{\mathrm{red}}_{\underline{\alpha}} + \sum_{\alpha_1 \in \underline{\alpha}_J \subsetneq (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)} R^{\mathrm{red}}_{\underline{\alpha}_J}\, \overline{n}_{\underline{\alpha}_{\overline{J}}}, \tag{5.13}$$

где суммирование производится по всем *существенно различным* разбиениям набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ на два поднабора, обозначаемые нами через $\underline{\alpha}_J$ и $\underline{\alpha}_{\overline{J}}$. При этом мы считаем, что $\underline{\alpha}_J$ содержит элемент α_1 и что этот элемент — отмеченный. Действительно, каждому слагаемому в равенстве (5.13) соответствует количество слагаемых равенства (5.3), равное $\frac{\#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha}')}{\#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha}'_I)\#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha}_{\overline{J}})}$, и каждое из этих слагаемых равно $R_{\underline{\alpha}_J} n_{\underline{\alpha}_{\overline{J}}} = \#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha}'_I)\,\#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha}_{\overline{J}})\,\overline{R}_{\underline{\alpha}_J}\,\overline{n}_{\underline{\alpha}_{\overline{J}}}$, откуда и следует равенство (5.13).

5.6.4. Гипотеза. *Приведенные остаточные многочлены имеют целые коэффициенты, и соотношение* (5.13) *выполняется с учетом кручения.*

Эта гипотеза тоже имеет обобщение, аналогичное гипотезе 5.6.2. Оно формулируется в виде соотношений между классами «утонченных» многообразий мультиособенностей, получаемых факторизацией многообразий $X(\underline{\alpha})$ по действию группы $\operatorname{Aut}(\underline{\alpha})$ автоморфизмов мультииндекса $\underline{\alpha}$ или некоторой ее подгруппы.

Для всех гипотез этого пункта имеется прямое доказательство в частном случае отображений, не имеющих особенностей коранга больше 1. Соответствующие результаты приведены в главе 7.

Глава 6

Лежандровы мультиособенности и мультиособенности гиперповерхностей

6.1 Изолированные особенности гиперповерхностей и лежандровы характеристические классы

Почти все результаты о многочленах Тома особенностей и мультиособенностей отображений переносятся на параллельную теорию лежандровых (лагранжевых) особенностей и, как частный случай, на теорию изолированных (мульти)особенностей гиперповерхностей. Главное отличие состоит в том, что кольцо $\mathcal{C} = H^*(BU)$ многочленов от классов Чженя заменяется на кольцо $\mathcal{L}$ универсальных лежандровых характеристических классов. Напомним (см. пп. 1.5 и 4.1), что кольцом универсальных лежандровых характеристических классов $\mathcal{L}$ называется факторкольцо многочленов от образующих $u, a_1, a_2, \ldots$ степеней $\deg u = 1$, $\deg a_i = i$ по идеалу соотношений, вытекающих из тождества

$$(1 + a_1 + a_2 + \ldots)\left(1 - \frac{a_1}{1+u} + \frac{a_2}{(1+u)^2} - \ldots\right) = 1. \tag{6.1}$$

Для всякого голоморфного лежандрова многообразия $M \subset PT^*N$ имеется канонический гомоморфизм $\mathcal{L} \to H^*(M)$, задающий на M лежандровы характеристические классы. А именно, нужно положить

$$u = c_1(I), \quad a_i = c_i(f^*TN - TM - I),$$

где линейное расслоение I — нормальное расслоение контактной структуры (оно совпадает также с расслоением, сопряженным тавтологическому линейному на PT^*N) и $f : M \to N$ — ограничение на M естественной проекции $PT^*N \to N$.

Лежандровы многообразия и отображения естественно возникают в приложениях, связанных с семействами гиперповерхностей. А именно, рассмотрим гладкое локально тривиальное расслоение и гладкую гиперповерхность в его тотальном пространстве,

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & W \\ & & \downarrow p \\ & & N \end{array}$$

Обозначим через $M \subset H$ подмножество точек, в которых H касается слоев расслоения p. Тогда при выполнении условий трансверсальности M является гладким многообразием, и его проекция f на базу N расслоения p естественно раскладывается в композицию $M \to PT^*N \to N$, в которой первое отображение — лежандрова иммерсия. Лежандровы характеристические классы, соответствующие этой лежандровой иммерсии, равны

$$u = [H] = c_1(I), \qquad a_i = c_i(V^* \otimes I - V),$$

где линейное расслоение I определено на всем W как расслоение дивизора H (его ограничение на H совпадает с нормальным расслоением гиперповерхности H), и $V = \ker p_*$ — подрасслоение в касательном расслоении к W, состоящее из векторов, касающихся слоев расслоения p.

Применение гомоморфизма Гизина $f_* : H^*(M) \to H^*(N)$ позволяет переносить лежандровы характеристические классы с лежандрова многообразия M на N. Аналогично случаю обычных отображений, возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L} \otimes \mathcal{S}L & \xrightarrow{s} & \mathcal{S}L & \xrightarrow{1\otimes \mathrm{Id}} & \mathcal{L} \otimes \mathcal{S}L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^*(M) & \xrightarrow{f_*} & H^*(N) & \xrightarrow{f^*} & H^*(M) \end{array}$$

где $\mathcal{S}L$ — полиномиальное кольцо

$$\mathcal{S}L = \operatorname{Sym} \mathcal{L} = 1 \oplus \mathcal{L} \oplus \operatorname{Sym}^2 \mathcal{L} \oplus \ldots$$

(без дополнительных соотношений).

(Мульти)особенности лежандровых отображений, равно как и изолированные (мульти)особенности гиперповерхностей, нумеруются наборами вида $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, где α_i — класс стабильной $\mathcal{K}$-эквивалентности функций. Аналогично случаю обычных отображений, всякий тип $\underline{\alpha}$ мультиособенности задает соответствующие циклы $M(\underline{\alpha}) \subset M^r$, $p_M(M(\underline{\alpha})) \subset M$, $p_N(M(\underline{\alpha})) \subset N$ и двойственные им классы

$$\overline{m}_{\underline{\alpha}} = [p_M(M(\underline{\alpha}))] \in H^*(M), \qquad \overline{n}_{\underline{\alpha}} = [p_N(M(\underline{\alpha}))] \in H^*(N),$$

где многообразия $p_M(M(\underline{\alpha}))$, $p_N(M(\underline{\alpha}))$ рассматриваются с приведенной структурой, а также кратные им классы

$$m_{\underline{\alpha}} = \#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha}')\,\overline{m}_{\underline{\alpha}}, \qquad n_{\underline{\alpha}} = \#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha})\,\overline{n}_{\underline{\alpha}},$$

где $\operatorname{Aut}(\underline{\alpha})$ — группа автоморфизмов мультииндекса $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ и $\operatorname{Aut}(\underline{\alpha}') = \operatorname{Aut}(\alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ — подгруппа в $\operatorname{Aut}(\underline{\alpha})$, содержащая только те перестановки, которые оставляют на месте первый элемент.

6.1.1. Теорема. *Для всякого набора классов изолированных особенностей гиперповерхностей $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ существует универсальный* *остаточный лежандров характеристический класс* $R_{\underline{\alpha}} \in \mathcal{L}$, *такой, что классы* $m_{\underline{\alpha}}$, $n_{\underline{\alpha}}$ *лежандровых мультиособенностей лежандрова отображения* $f : M \to PT^*N \to N$ *общего положения задаются формулами, аналогичными формулам теоремы* (5.2.2),

$$m_{\underline{\alpha}} = \sum_{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k = \{1,\dots,r\}} R_{\underline{\alpha}_{J_1}} S_{\underline{\alpha}_{J_2}} \dots S_{\underline{\alpha}_{J_k}},$$
$$n_{\underline{\alpha}} = s(m_{\underline{\alpha}}) = \sum_{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k = \{1,\dots,r\}} S_{\underline{\alpha}_{J_1}} \dots S_{\underline{\alpha}_{J_k}},$$

где $S_{\underline{\alpha}} = s(R_{\underline{\alpha}})$, *и суммирование производится по всевозможным разбиениям множества* $\{1,\dots,r\}$ *в несвязное объединение непустых неупорядоченных подмножеств* $\{1,\dots,r\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k$, $k \geqslant 1$. *Подмножество, содержащее элемент* $1 \in \{1,\dots,r\}$, *обозначается через* J_1.

Кроме того, остаточный класс $R_{\underline{\alpha}}$ *не зависит от порядка локальных особенностей* α_i, *входящих в набор* $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_r)$.

Топологическое обоснование этой теоремы проводится по той же схеме, что и аналогичные рассуждения п. 5.5, использовавшиеся при обосновании соответствующего результата для обычных отображений. Основное отличие состоит в том, что пространство Тома $MU(n)$ классифицирующего векторного расслоения над $BU(n)$ нужно заменить на пространство Тома тавтологического векторного расслоения над соответствующим лагранжевым (или лежандровым) грассманианом. Мы не приводим подробностей этих рассуждений, поскольку, как и в случае теорем 5.1.1, 5.2.2, мы надеемся получить доказательство, основанное на методах теории пересечений.

6.1.2. Пример. Аналогично случаю обычных отображений, мы получаем, в частности, следующую *формулу для кратных точек лежандровых отображений*:

$$\overline{m}_r = f^*(\overline{n}_{r-1}) - \sum_{i=1}^{r-1} p_{r-i}\overline{m}_r, \tag{6.2}$$

где $p_i \in \mathcal{L}$ — универсальные лежандровы характеристические классы, определенные соотношением

$$1 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots = \left(1 + \tfrac{1}{1!} R_{A_1^2} t + \tfrac{1}{2!} R_{A_1^3} t^2 + \dots\right)^{-1},$$

$p_1 = u+3\,a_1, \quad p_2 = -4\,(u\,a_1 + 3\,a_2)\,, \quad p_3 = 16\,u^2\,a_1+59\,u\,a_2+45\,a_1\,a_2+78\,a_3, \dots .$

Большое количество других примеров будет приведено в последующих пунктах этой главы.

6.2 Вычисление лежандровых остаточных классов

Для классов монoособенностей вплоть до коразмерности 6 лежандровы характеристические классы вычислены в главе 4. Эти вычисления проведены двумя независимыми способами, при помощи классических методов разрешения, использования гомоморфизма Гизина и т.д., а также при помощи метода Римани использования симметрий. Метод Римани менее геометричен и полагается на теорему об априорном существовании соответствующих многочленов. Однако этот метод требует меньшего объема вычислений и может быть с успехом приспособлен к вычислению классов мультиособенностей. Подробности использования этого метода для вычисления остаточных классов мультиособенностей изложены в пункте 5.4. Информации, собранной в таблице в конце пункта 4.4, достаточно для вычисления всех остаточных классов вплоть до коразмерности 6. Для особенностей коразмерности не выше 4 эти классы приведены в следующей таблице.

Остаточные классы $R_{\underline{\alpha}}$ коразмерности не выше 4 лежандровых отображений

$$
\begin{aligned}
R_{A_1} &= 1\\
R_{A_2} &= a_1\\
R_{A_1^2} &= -u - 3\,a_1\\
R_{A_3} &= u\,a_1 + 3\,a_2\\
R_{A_1\,A_2} &= -6\,(u\,a_1 + 2\,a_2)\\
R_{A_1^3} &= 2\,(u^2 + 19\,u\,a_1 + 30\,a_2)\\
R_{A_4} &= u^2\,a_1 + 4\,u\,a_2 + 3\,a_1\,a_2 + 6\,a_3\\
R_{D_4} &= -(u\,a_2) + a_1\,a_2 - 2\,a_3\\
R_{A_1\,A_3} &= -4\,(2\,u^2\,a_1 + 5\,u\,a_2 + 6\,a_1\,a_2 + 3\,a_3)\\
R_{A_2^2} &= -3\,(3\,u^2\,a_1 + 8\,u\,a_2 + 7\,a_1\,a_2 + 6\,a_3)\\
R_{A_1^2\,A_2} &= 24\,(3\,u^2\,a_1 + 7\,u\,a_2 + 6\,a_1\,a_2 + 3\,a_3)\\
R_{A_1^4} &= -6\,(u^3 + 111\,u^2\,a_1 + 239\,u\,a_2 + 171\,a_1\,a_2 + 78\,a_3)\\
R_{A_5} &= u^3\,a_1 - 4\,u^2\,a_2 + 16\,u\,a_1\,a_2 - 12\,u\,a_3 + 27\,a_1\,a_3 + 6\,a_4\\
R_{D_5} &= -2\,(2\,u^2\,a_2 - 2\,u\,a_1\,a_2 + 7\,u\,a_3 - 3\,a_1\,a_3 + 6\,a_4)\\
R_{A_1\,A_4} &= -10\,(u^3\,a_1 - 4\,u^2\,a_2 + 14\,u\,a_1\,a_2 - 16\,u\,a_3 + 21\,a_1\,a_3 - 6\,a_4)\\
R_{A_1\,D_4} &= 4\,(5\,u^2\,a_2 - 5\,u\,a_1\,a_2 + 16\,u\,a_3 - 6\,a_1\,a_3 + 12\,a_4)\\
R_{A_2\,A_3} &= -6\,(2\,u^3\,a_1 - 10\,u^2\,a_2 + 28\,u\,a_1\,a_2 - 39\,u\,a_3 + 39\,a_1\,a_3 - 18\,a_4)\\
R_{A_1^2\,A_3} &= 2\,(56\,u^3\,a_1 - 220\,u^2\,a_2 + 684\,u\,a_1\,a_2 - 951\,u\,a_3 + 891\,a_1\,a_3 - 522\,a_4)\\
R_{A_1\,A_2^2} &= 18\,(7\,u^3\,a_1 - 20\,u^2\,a_2 + 74\,u\,a_1\,a_2 - 96\,u\,a_3 + 95\,a_1\,a_3 - 50\,a_4)\\
R_{A_1^3\,A_2} &= -48\,(28\,u^3\,a_1 - 55\,u^2\,a_2 + 250\,u\,a_1\,a_2 - 318\,u\,a_3 + 300\,a_1\,a_3 - 180\,a_4)\\
R_{A_1^5} &= 24\,(u^4 + 671\,u^3\,a_1 - 701\,u^2\,a_2 + 4863\,u\,a_1\,a_2 - 5844\,u\,a_3 + 5490\,a_1\,a_3 - 3420\,a_4)
\end{aligned}
$$

6.3 Приложения к исчислительной геометрии

Необъятное количество (несколько сотен) конкретных исчислительных результатов, вытекающих из формул для классов мультиособенностей, невозможно привести здесь полностью ввиду огромного количества занимаемого ими места (см. страницу [49] в интернете). Здесь мы приведем только несколько примеров.

6.3.1 Исчисление особых кривых на поверхностях

Простейшим приложением описанной выше теории является исчисление особых кривых на поверхностях. Рассмотрим n-мерную линейную систему $|L|$ дивизоров на компактной неособой комплексной поверхности S. Тогда формула теоремы 6.1.1 предсказывает число особых кривых этой системы, имеющих предписанный набор $\underline{\alpha}$ особенностей и проходящих через общие $n - \operatorname{codim} \underline{\alpha}$ точек. Пространством параметров $N = \mathbb{C}P^n$ в этой задаче служит пространство параметров системы. Расслоение $W \to N$ — тривиальное расслоение $N \times S \to N$, гиперповерхность $H \subset N \times S$ — многообразие инцидентности, состоящее из пар вида (кривая семейства, точка на этой кривой). $M \subset H$ — многообразие всех особых точек всех кривых семейства.

Лежандровы характеристические классы, отвечающие за эту ситуацию, следующие. Пусть $h \in H^2(S)$ — первый класс Чженя системы, $1 + c_1 + c_2 = c(T^*S)$, и пусть t — класс гиперплоскости в $N = \mathbb{C}P^n$. Тогда

$$u = c_1(I) = [H] = t+h, \quad a = c(T^*S \otimes I - TS) = \frac{(1+t+h)^2 + (1+t+h)c_1 + c_2}{1 - c_1 + c_2},$$

иными словами,

$$a_1 = 2\,(h+t+c_1), \quad a_2 = (h+t+c_1)(h+t+2\,c_1), \quad a_3 = t\,(2\,h\,c_1 + t\,c_1 + 3\,c_1^2 - 2\,c_2),$$

$$a_4 = t^2\,(c_1^2 - c_2), \quad a_k = 0 \text{ при } k \geqslant 5.$$

Гомоморфизм $f_* : H^*(M) \to H^*(N)$ можно разложить в композицию $f_* = p_* i_*$, где $i : M \to N \times S$ — вложение, и $p : N \times S \to N$ — проекция на первый множитель. Тогда i_* задается умножением на класс подмногообразия M в $S \times N$,

$$\begin{aligned}[M] = i_*(1) &= c_2(T^*S \otimes I) \cdot [H] = ((t+h)^2 + c_1(t+h) + c_2))\,(t+h) \\ &= t^3 + t^2\,(3\,h + c_1) + t\,(3\,h^2 + 2\,h\,c_1 + c_2),\end{aligned}$$

а гомоморфизм p_* определяется следующим образом. Он коммутирует с умножением на t, на мономах степени 2 от классов h, c_1, c_2 он равен соответствующему характеристическому числу,

$$\begin{aligned} d &:= p_*(h^2) = L \cdot L, & k &:= p_*(hc_1) = L \cdot K_S, \\ s &:= p_*(c_1^2) = K_S \cdot K_S, & x &:= p_*(c_2) = c_2 \frown [S]; \end{aligned}$$

на остальных мономах от классов h, c_1, c_2 гомоморфизм p_* обращается в ноль. В качестве следствия мы получаем, что для произвольной мультиособенности $\underline{\alpha}$ класс $S_{\underline{\alpha}} = f_* R_{\underline{\alpha}}$ является универсальной линейной комбинацией чисел d, k, s, x, умноженной на $t^{\operatorname{codim} \underline{\alpha}}$, и равенства теоремы 6.1.1 сводятся к следующему результату, частными случаями которого являются гипотеза Готтше [32] и некоторые из известных формул Клеймана и Пьен [55, 56].

6.3.1. Теорема. *Для всякого типа мультиособенностей плоских кривых $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ существует универсальная целочисленная линейная комбинация $S_{\underline{\alpha}}$ чисел d, k, s, x, такая, что для всякой поверхности и для всякой достаточно общей линейной системы L на ней число особых кривых системы, имеющих заданный набор $\underline{\alpha}$ особенностей и проходящих через заданные $n - \operatorname{codim} \underline{\alpha}$ точек общего положения, даются формулами теоремы* 6.1.1:

$$N_{\underline{\alpha}} = \frac{1}{\#\operatorname{Aut}(\underline{\alpha})} \sum_{J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_l = \{1,\ldots,r\}} S_{\underline{\alpha}_{J_1}} \ldots S_{\underline{\alpha}_{J_l}}.$$

Условие общности системы формулируется следующим образом. Обозначим через $N_{\mathrm{reg}} \subset N$ подмножество тех кривых C системы, которые имеют конечное число особых точек и удовлетворяют следующему условию трансверсальности: деформация кривой C, индуцированная системой, является версальной деформацией для мультиростка особенностей кривой C. Обозначим через $\Sigma = N \setminus N_{\mathrm{reg}}$ его дополнение. Тогда формулы теоремы справедливы для всех классов $\underline{\alpha}$ коразмерности

$$\operatorname{codim} \underline{\alpha} < \operatorname{codim} \Sigma.$$

6.3.2. Пример. Обозначим через $N_i = N_{A_1,\dots,A_1}$ степень соответствующего многообразия нодальных кривых, имеющих i простых двойных точек. Составим из этих чисел формальный ряд $T(t) = \sum_i N_i t^i$. Тогда, по формулам п. 5.2.1, эта производящая функция имеет вид

$$T(t) = \exp(V_1(t)\, d + V_2(t)\, k + V_3(t)\, s + V_4(t)\, x),$$

где коэффициент при t^i в ряду, представленном показателем экспоненты, равен $\frac{1}{i!} S_{A_1,\dots,A_1}$ (i вхождений особенности A_1 простого двойного пересечения). Приведенная формула является одной из формулировок гипотезы Готтше [32] (в этой работе ряды $V_i(t)$ обозначаются через A_i). Необходимо отметить, что хотя аргументы п. 5.5 дают топологическое обоснование теоремы 6.3.1, а вместе с ней, и гипотезы Готтше, все же остается открытым вопрос о получении доказательства методами алгебраической геометрии.

Для мультиособенностей малых коразмерностей числа $S_{\underline{\alpha}}$ приведены ниже. Эти выражения совпадают с соответствующими выражениями, вычисленными Клейманом и Пьен [55, 56] для нодальных мультиособенностей A_1^r (полный список этих чисел для всех мультиособенностей вплоть до коразмерности 8 приведен в [49]).

$$\begin{aligned} &\operatorname{codim} = 1: \\ &S_{A_1} = 3\, d + 2\, k + x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{codim} = 2: \\
S_{A_2} &= 12\,d + 12\,k + 2\,s + 2\,x \\
S_{A_1^2} &= -42\,d - 39\,k - 6\,s - 7\,x \\
&\text{codim} = 3: \\
S_{A_3} &= 50\,d + 64\,k + 17\,s + 5\,x \\
S_{A_1\,A_2} &= -240\,d - 288\,k - 72\,s - 24\,x \\
S_{A_1^3} &= 1380\,d + 1576\,k + 376\,s + 138\,x \\
&\text{codim} = 4: \\
S_{A_4} &= 180\,d + 280\,k + 100\,s \\
S_{D_4} &= 15\,d + 20\,k + 5\,s + 5\,x \\
S_{A_1\,A_3} &= -1260\,d - 1820\,k - 596\,s - 60\,x \\
S_{A_2^2} &= -1260\,d - 1800\,k - 588\,s - 48\,x \\
S_{A_1^2\,A_2} &= 9000\,d + 12360\,k + 3864\,s + 456\,x \\
S_{A_1^4} &= -72360\,d - 95670\,k - 28842\,s - 3888\,x \\
&\text{codim} = 5: \\
S_{A_5} &= 630\,d + 1140\,k + 498\,s - 60\,x \\
S_{D_5} &= 84\,d + 132\,k + 44\,s + 20\,x \\
S_{A_1\,A_4} &= -5460\,d - 9240\,k - 3740\,s + 200\,x \\
S_{A_1\,D_4} &= -420\,d - 624\,k - 196\,s - 100\,x \\
S_{A_2\,A_3} &= -6300\,d - 10332\,k - 4044\,s + 60\,x \\
S_{A_1^2\,A_3} &= 52920\,d + 84180\,k + 31816\,s + 240\,x \\
S_{A_1\,A_2^2} &= 53676\,d + 84456\,k + 31716\,s + 72\,x \\
S_{A_1^3\,A_2} &= -505008\,d - 770112\,k - 279792\,s - 5616\,x \\
S_{A_1^5} &= 5225472\,d + 7725168\,k + 2723400\,s + 84384\,x \\
&\dots \\
S_{A_1^6} &= -481239360\,d - 778065120\,k - 308078520\,s + 7918560\,x \\
S_{A_1^7} &= 53917151040\,d + 93895251840\,k + 40747613760\,s - 2465471520\,x
\end{aligned}
$$

Например, в частном случае полной линейной системы плоских кривых степени m мы имеем $S = \mathbb{C}P^2$, $n = \frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$, $d = m^2$, $k = 3m$, $s = 9$, $x = 3$. Формула теоремы справедлива, предположительно, при

$$\operatorname{codim} \underline{\alpha} \leqslant 2\,(m-1)$$

(аналогичная оценка сформулирована в виде гипотезы в [32].) Ограничение $\operatorname{codim} \Sigma \leqslant 2m - 1$ вытекает из того, что Σ содержит подмногообразие коразмерности $2m-1$, состоящее из кривых, которые распадаются на кривую степени $m - 2$ и двойную прямую. Такие кривые имеют неизолированные особенности, то есть особенности, которые бесконечно вырождены с точки зрения теории особенностей.

6.3.3. Пример. Для плоских проективных кривых степени $m = 3$ приведенные формулы справедливы при $\operatorname{codim} \underline{\alpha} \leqslant 4$, и мы получаем:

$\underline{\alpha}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3	A_1A_2	A_1^3	A_4	D_4	A_1A_3	A_2^2	$A_1^2A_2$	A_1^4
$N_{\underline{\alpha}}$	12	24	21	42	0	15	0	15	0	0	0	0

Все эти числа легко проверить элементарными прямыми вычислениями. Например, $N_{A_1} = 12$ — число рациональных кривых степени 3, проходящих через общие 8 точек, $N_{D_4} = 15$ — число конфигураций из трех прямых, пересекающихся в одной точке и проходящих через заданные 5 точек плоскости и т.д.

6.3.4. Пример. Количество плоских кривых степени 4 с 3 двойными точками и проходящих через общие 11 точек плоскости равно $N_{A_1^3}|_{m=4} = 675$. Это число включает $\binom{11}{2} = 55$ приводимых кривых, распадающихся на прямую и кубику, и 620 рациональных кривых.

6.3.5. Пример. Подставляя $m = 5$ в формулу для $N_{A_1^6}$, мы получаем число 109781 кривых степени 5 с 6 двойными точками, проходящих через 14 заданных точек плоскости. Для каждой такой кривой C мы имеем одну из трех следующих возможностей: а) кривая C распадается на кубику и квадрику; б) кривая C распадается на прямую и кривую степени 4 с двумя двойными точками; в) C — неприводимая рациональная кривая. Число кривых типа а) равно $\binom{14}{5} = 2002$. Число кривых типа б) равно $225\binom{14}{2} = 20475$ (число $225 = \deg A_1^2|_{m=4}$ кривых степени 4 с двумя двойными точками, проходящих через заданные 12 точек плоскости, берется из той же таблицы). Следовательно, число рациональных кривых типа в) равно $109781 - 2002 - 20475 = 87304$, что согласуется с известными вычислениями из [57].

Более общим образом, рассмотрим число $N_{m,g}$ неприводимых плоских кривых степени m и рода g, проходящих через заданные общие $3m-1-g$ точек. Эти числа изучаются в теории инвариантов Громова-Виттена. Они связаны с числами $M_{m,k}$ всех плоских кривых степени m с k двойными точками, проходящих через общие $\frac{m(m+3)}{2} - k$ точек, при помощи следующего соотношения, которое обобщает вычисления, проведенные выше для $m \leqslant 5$:

$$1 + \sum_{m,k} M_{m,k} \frac{x^m y^{\frac{m(m+3)}{2}-k}}{(\frac{m(m+3)}{2} - k)!} = \exp\left(\sum_{m,g} N_{m,g} \frac{x^m y^{3m+g-1}}{(3m+g-1)!}\right).$$

К сожалению, наш метод для вычисления чисел $M_{m,k}$, а следовательно, чисел $N_{m,g}$, дает правильный ответ только при $k \leqslant 2(m-1)$. При больших же k нужно учитывать вклад неизолированных особенностей.

6.3.2 Исчисление касаний проективных многообразий с гиперплоскостями

Рассмотренная выше задача исчисления плоских особых кривых является частным случаем следующей более общей задачи. Пусть на неособом многообразии V задана n-мерная линейная система дивизоров. Параметры этой системы образуют проективное пространство $N \simeq \mathbb{C}P^n$. Требуется определить степень подмногообразия параметров, для которых дивизор системы имеет предписанный набор особенностей. Для простоты будем считать, что эта система задает проективное вложение. Тогда в качестве дивизоров системы выступают гиперплоские сечения. (Например, в случае задачи исчисления плоских кривых степени m подмногообразием V служит вложение Веронезе $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^{\frac{(d+1)(d+2)}{2}-1}$.) Легко видеть, что мы находимся в ситуации примера 4.1.2, где $N = \mathbb{C}P^{n*}$ — многообразие гиперплоскостей в проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, $W = V \times N$, $p : V \times N \to N$ — тривиальное расслоение и $H \subset V \times N$ — гиперповерхность инцидентности, образованная парами вида (точка $x \in V$; проходящая через нее гиперплоскость в $\mathbb{C}P^n$). Лежандровым многообразием M соответствующего лежандрового отображения является пространство проективизированного конормального расслоения на V, и лежандровы характеристические классы легко вычисляются при помощи подходящих формул присоединения.

Пусть, например, $V \subset \mathbb{C}P^n$— гиперповерхность степени d. Тогда $M = V$. Конормальное расслоение к V является d-й тензорной степенью линейного тавтологического расслоения на $\mathbb{C}P^n$, откуда

$$u = c_1(I) = c_1(\nu_V) = [V] = d\,t,$$

где $t = c_1(\mathcal{O}(1))$ — класс гиперплоского сечения. Далее, из точных последовательностей

$$0 \to TV \to T_V\mathbb{C}P^n \to \nu_V \to 0, \qquad 0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}^{n+1}(1) \to T\mathbb{C}P^n \to 0$$

мы получаем $c(TV) = c(\mathcal{O}^{n+1}(1) - \nu_V - \mathbb{C}) = (1+t)^{n+1}/(1+d\,t)$ и

$$a = c(T^*V \otimes I - TV) = \left(\frac{1+(d-1)\,t}{1+t}\right)^{n+1}.$$

Числа особых гиперплоских сечений различных типов гиперповерхности V степени d в $\mathbb{C}P^n$ для малых n приведены ниже[1].

[1] Точками обозначены члены, которые мы опустили для экономии места. Полный список полученных формул можно найти в [49], где приведены также выражения для степеней соответствующих циклов мультиособенностей в случае, когда они имеют положительную размерность.

Мультикасательные прямые к кривой в $\mathbb{C}P^2$

$$
\begin{aligned}
\#A_2 &= 3\,d\,(d-2)\\
\#A_1^2 &= \frac{1}{2}\,d\,(d-3)(d-2)(d+3)
\end{aligned}
$$

Мультикасательные плоскости к поверхности в $\mathbb{C}P^3$

$$
\begin{aligned}
\#A_3 &= 2\,d\,(11\,d-24)(d-2)\\
\#A_1A_2 &= 4\,d\,(d-3)(d-2)(d^3+3\,d-16)\\
\#A_1^3 &= \frac{1}{6}\,d\,(d-2)(d^7-4\,d^6+7\,d^5-45\,d^4+114\,d^3-111\,d^2+548\,d-960)
\end{aligned}
$$

Мультикасательные гиперплоскости к гиперповерхности в $\mathbb{C}P^4$

$$
\begin{aligned}
\#A_4 &= 5\,d\,(17\,d-36)(3\,d-7)(d-2)\\
\#D_4 &= 20\,d\,(d-2)^3\\
\#A_1A_3 &= 5\,d\,(d-2)(7\,d^6-43\,d^5+102\,d^4-118\,d^3-245\,d^2+1309\,d-1404)\\
\#A_2^2 &= \frac{5}{2}\,d\,(d-3)(d-2)(5\,d^5-15\,d^4+25\,d^3-5\,d^2-273\,d+452)\\
\#A_1^2A_2 &= \frac{5}{2}\,d\,(d-2)(d^{10}-8\,d^9+28\,d^8-56\,d^7-6\,d^6+398\,d^5-1028\,d^4\\
&\qquad +1196\,d^3+1317\,d^2-8034\,d+8424)\\
\#A_1^4 &= \frac{1}{24}\,d\,(d-2)(d^{14}-10\,d^{13}+46\,d^{12}-128\,d^{11}+143\,d^{10}+442\,d^9+\ldots\\
&\qquad +50434\,d^4-59080\,d^3-40415\,d^2+287430\,d-296280)
\end{aligned}
$$

Мультикасательные гиперплоскости к гиперповерхности в $\mathbb{C}P^5$

$$
\begin{aligned}
\#A_5 &= 6\,d\,(d-2)(746\,d^3 - 5012\,d^2 + 11207\,d - 8340)\\
\#D_5 &= 140\,d\,(4\,d-9)(d-2)^3\\
\#A_1A_4 &= 4\,d\,(d-2)(114\,d^8 - 1068\,d^7 + 4173\,d^6 - 8835\,d^5 + 10980\,d^4\\
&\qquad - 16324\,d^3 + 57313\,d^2 - 118138\,d + 85140)\\
\#A_1D_4 &= 35\,d\,(d-2)^3(d^6 - 5\,d^5 + 10\,d^4 - 10\,d^3 + 5\,d^2 - 69\,d + 144)\\
\#A_2A_3 &= 18\,d\,(d-2)(17\,d^8 - 155\,d^7 + 592\,d^6 - 1230\,d^5 + 1505\,d^4 - 3091\,d^3\\
&\qquad + 13376\,d^2 - 27964\,d + 20040)\\
\#A_1^2A_3 &= \frac{3}{2}\,d\,(d-2)(17\,d^{13} - 206\,d^{12} + 1125\,d^{11} - 3660\,d^{10} + 7890\,d^9 + \ldots\\
&\qquad - 196245\,d^4 + 233696\,d^3 - 643864\,d^2 + 1256408\,d - 882000)\\
\#A_1A_2^2 &= 18\,d\,(d-2)(d^{13} - 12\,d^{12} + 65\,d^{11} - 210\,d^{10} + 450\,d^9 - 818\,d^8 + \ldots\\
&\qquad - 12940\,d^4 + 16853\,d^3 - 51677\,d^2 + 102274\,d - 71820)\\
\#A_1^3A_2 &= d\,(d-2)(d^{18} - 15\,d^{17} + 105\,d^{16} - 455\,d^{15} + 1365\,d^{14} - 3168\,d^{13} + \ldots\\
&\qquad - 1129608\,d^3 + 2730828\,d^2 - 5141832\,d + 3548160)\\
\#A_1^5 &= \frac{1}{120}\,d\,(d-2)(d^{23} - 18\,d^{22} + 154\,d^{21} - 832\,d^{20} + 3181\,d^{19} - 9332\,d^{18} + \ldots\\
&\qquad + 73475394\,d^3 - 156527928\,d^2 + 284455368\,d - 193415040)
\end{aligned}
$$

Мультикасательные гиперплоскости к гиперповерхности в $\mathbb{C}P^6$

$$
\begin{aligned}
\#A_6 &= 7\,d\,(d-2)(15926\,d^4 - 142734\,d^3 + 479213\,d^2 - 714314\,d + 398856)\\
\#D_6 &= 224\,d\,(d-2)^3(46\,d^2 - 209\,d + 237)\\
\#E_6 &= 42\,d\,(d-2)^3(97\,d^2 - 426\,d + 468)\\
\#A_1A_5 &= 7\,d\,(d-2)(1240\,d^{10} - 15630\,d^9 + 85751\,d^8 - 268904\,d^7 + 531693\,d^6 + \ldots\\
&\qquad + 881076\,d^3 - 3841807\,d^2 + 5752566\,d - 3162744)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\#A_1D_5 &= 56\,d\,(d-2)^3(19\,d^8 - 156\,d^7 + 537\,d^6 - 1010\,d^5 + 1125\,d^4 - 744\,d^3 \\
&\qquad - 1617\,d^2 + 8182\,d - 8952) \\
\#A_2A_4 &= 7\,d\,(d-2)(742\,d^{10} - 9135\,d^9 + 49070\,d^8 - 151025\,d^7 + 293748\,d^6 + \dots \\
&\qquad + 1132215\,d^3 - 4197325\,d^2 + 6167502\,d - 3364920) \\
\#A_2D_4 &= 56\,d\,(d-2)^3(7\,d^8 - 56\,d^7 + 189\,d^6 - 350\,d^5 + 385\,d^4 - 252\,d^3 + \dots \\
&\qquad - 1205\,d^2 + 5626\,d - 6144) \\
\#A_3^2 &= \frac{7}{2}\,d\,(d-2)(700\,d^{10} - 8540\,d^9 + 45507\,d^8 - 139076\,d^7 + 268849\,d^6 + \dots \\
&\qquad + 1299760\,d^3 - 4672757\,d^2 + 6818290\,d - 3701976) \\
\#A_1^2A_4 &= \frac{7}{2}\,d\,(d-2)(106\,d^{16} - 1729\,d^{15} + 12972\,d^{14} - 59386\,d^{13} + 185482\,d^{12} + \dots \\
&\qquad - 6493787\,d^3 + 35146830\,d^2 - 52506056\,d + 28436160) \\
\#A_1^2D_4 &= 28\,d\,(d-2)^3(d^{14} - 12\,d^{13} + 66\,d^{12} - 220\,d^{11} + 495\,d^{10} - 792\,d^9 + \dots \\
&\qquad + 9090\,d^5 - 10224\,d^4 + 6750\,d^3 + 8471\,d^2 - 46098\,d + 49500) \\
\#A_1A_2A_3 &= 7\,d\,(d-2)(70\,d^{16} - 1127\,d^{15} + 8358\,d^{14} - 37870\,d^{13} + 117194\,d^{12} + \dots \\
&\qquad - 8489681\,d^3 + 38495186\,d^2 - 56595816\,d + 30458304) \\
\#A_2^3 &= \frac{7}{6}\,d\,(d-2)(49\,d^{16} - 784\,d^{15} + 5782\,d^{14} - 26068\,d^{13} + 80311\,d^{12} + \dots \\
&\qquad - 9304861\,d^3 + 37829206\,d^2 - 55148904\,d + 29638080) \\
\#A_1^3A_3 &= \frac{7}{6}\,d\,(d-2)(10\,d^{22} - 201\,d^{21} + 1908\,d^{20} - 11373\,d^{19} + 47736\,d^{18} + \dots \\
&\qquad + 56118029\,d^3 - 358281042\,d^2 + 532314216\,d - 284437440) \\
\#A_1^2A_2^2 &= \frac{7}{4}\,d\,(d-2)(7\,d^{22} - 140\,d^{21} + 1323\,d^{20} - 7854\,d^{19} + 32844\,d^{18} + \dots \\
&\qquad + 64936185\,d^3 - 356391246\,d^2 + 525011976\,d - 280089792) \\
\#A_1^4A_2 &= \frac{7}{24}\,d\,(d-2)(d^{28} - 24\,d^{27} + 276\,d^{26} - 2024\,d^{25} + 10626\,d^{24} + \dots \\
&\qquad 494311612\,d^3 + 3664055868\,d^2 - 5430061008\,d + 2876929920) \\
\#A_1^6 &= \frac{1}{720}\,d\,(d-2)(d^{34} - 28\,d^{33} + 379\,d^{32} - 3302\,d^{31} + 20801\,d^{30} + \dots \\
&\qquad - 287028053004\,d^2 + 426393893520\,d - 224430998400)
\end{aligned}
$$

Формулы для прямых на плоскости и плоскостей в трехмерном пространстве — классические результаты Плюккера и Сальмона. По-видимому, подобные формулы для гиперповерхностей в $\mathbb{C}P^n$, $n \geqslant 4$, не были известны ранее. Простейший случай — **495** гиперплоскостей в $\mathbb{C}P^4$, касающихся в 4 точках заданную гиперповерхность степени 3 (число $\#A_1^4$ из соответствующей таблицы при $d=3$).

6.3.3 Исчисление касаний проективных гиперповерхностей с с проективными подпространствами

Очень близкая задача состоит в следующем. Рассмотрим гладкую проективную гиперповерхность $V \subset \mathbb{C}P^n$ степени d. Развитая выше теория позволяет вычислить число k-мерных проективных подпространств K, имеющих заданный набор особенностей пересечения $K \cap V$. Лежандровым многообразием в этой задаче служит $M = G_k(TV)$, грассманово расслоение над V, образованное k-мерными касательными подпространствами, а базой лежандрова расслоения — грассманиан $N = G_{k+1,n+1}$ всех k-мерных проективных подпространств в $\mathbb{C}P^n$. Отображение $f : M \to N$ состоит в забывании точки касания k-мерного проективного пространства с поверхностью V. Ассоциированные лежандровы характеристические классы на M и гомоморфизм Гизина $f_* : H^*(M) \to H^*(N)$ легко вычисляются при помощи разнообразных формул присоединения аналогично случаю, рассмотренному в предыдущем пункте. Некоторые из результатов этих вычислений приведены ниже[2].

$k=1$**,** $n=3$ **(прямые в пространстве)**

$$\#A_4 = 5\,d\,(7\,d-12)(d-4)$$

[2]См. сноску на стр. 206.

$$
\begin{aligned}
\#A_1A_3 &= 2\,d\,(d-5)(3\,d-5)(d-4)(d+6)\\
\#A_2^2 &= \frac{1}{2}\,d\,(d-5)(d-4)(d^3+3\,d^2+29\,d-60)\\
\#A_1^2A_2 &= \frac{1}{2}\,d\,(d-6)(d-5)(d-4)(d^3+9\,d^2+20\,d-60)\\
\#A_1^4 &= \frac{1}{12}\,d\,(d-7)(d-6)(d-5)(d-4)(d^3+6\,d^2+7\,d-30)
\end{aligned}
$$

$k=1$, $n=4$ (прямые в $\mathbb{C}P^4$)

$$
\begin{aligned}
\#A_6 &= 35\,d\,(7\,d-12)(3\,d-10)(d-6)\\
\#A_1A_5 &= 5\,d\,(d-7)(d-6)(17\,d^3+69\,d^2-662\,d+840)\\
\#A_2A_4 &= 5\,d\,(d-7)(d-6)(2\,d^4+6\,d^3+91\,d^2-678\,d+840)\\
\#A_3^2 &= \frac{1}{2}\,d\,(d-7)(d-6)(d^5+d^4+65\,d^3+395\,d^2-3350\,d+4200)\\
\#A_1^2A_4 &= \frac{5}{2}\,d\,(d-8)(d-7)(d-6)(2\,d^4+23\,d^3+13\,d^2-598\,d+840)\\
\#A_1A_2A_3 &= d\,(d-8)(d-7)(d-6)(d^5+11\,d^4+95\,d^3+115\,d^2-3030\,d+4200)\\
\#A_2^3 &= \frac{1}{6}\,d\,(d-8)(d-7)(d-6)(d^5+21\,d^4+40\,d^3+225\,d^2-3110\,d+4200)\\
\#A_1^3A_3 &= \frac{1}{6}\,d\,(d-9)(d-8)(d-7)(d-6)(d^5+21\,d^4+125\,d^3-165\,d^2\\
&\qquad -2710\,d+4200)\\
\#A_1^2A_2^2 &= \frac{1}{4}\,d\,(d-9)(d-8)(d-7)(d-6)(2\,d^5+22\,d^4+105\,d^3\\
&\qquad -115\,d^2-2750\,d+4200)\\
\#A_1^4A_2 &= \frac{1}{24}\,d\,(d-10)(d-9)(d-8)(d-7)(d-6)(3\,d^5+33\,d^4+115\,d^3\\
&\qquad -345\,d^2-2470\,d+4200)\\
\#A_1^6 &= \frac{1}{144}\,d\,(d-11)(d-10)(d-9)(d-8)(d-7)(d-6)(d^5+9\,d^4+21\,d^3\\
&\qquad -105\,d^2-446\,d+840)
\end{aligned}
$$

$k = 2$, $n = 4$ **(плоскости в $\mathbb{C}P^4$)**

$$\begin{aligned}
\#A_6 &= 35\,d\,(187\,d^3 - 1495\,d^2 + 3794\,d - 3072)\\
\#D_6 &= 10\,d\,(d-2)(71\,d^2 - 376\,d + 456)\\
\#E_6 &= 15\,d\,(19\,d - 36)(d-3)(d-2)\\
\#A_1A_5 &= 5\,d\,(236\,d^6 - 2116\,d^5 + 7092\,d^4 - 22919\,d^3 + 98239\,d^2 - 222282\,d + 172656)\\
\#A_1D_5 &= 10\,d\,(d-2)(15\,d^5 - 89\,d^4 + 181\,d^3 - 917\,d^2 + 3752\,d - 4224)\\
\#A_2A_4 &= 5\,d\,(40\,d^7 - 312\,d^6 + 864\,d^5 - 976\,d^4 - 12859\,d^3 + \dots - 237618\,d + 184320)\\
\#A_2D_4 &= 10\,d\,(d-4)(d-2)(d^5 + d^4 + d^3 + 21\,d^2 - 460\,d + 732)\\
\#A_3^2 &= \frac{1}{2}\,d\,(256\,d^7 - 2336\,d^6 + 8981\,d^5 - 19846\,d^4 + \dots - 1317380\,d + 1022520)\\
\#A_1^2A_4 &= 10\,d\,(d-4)(10\,d^8 - 56\,d^7 + 117\,d^6 - 950\,d^5 + \dots - 105884\,d + 97860)\\
\#A_1^2D_4 &= \frac{5}{2}\,d\,(d-2)(3\,d^8 - 20\,d^7 + 47\,d^6 - 319\,d^5 + \dots - 43272\,d + 46800)\\
\#A_1A_2A_3 &= 2\,d\,(16\,d^{10} - 137\,d^9 + 499\,d^8 - 2274\,d^7 + \dots + 5600880\,d - 4213440)\\
\#A_2^3 &= \frac{4}{3}\,d\,(d^{11} - 12\,d^{10} + 75\,d^9 - 302\,d^8 + 354\,d^7 + \dots + 1356750\,d - 1022400)\\
\#A_1^3A_3 &= \frac{1}{6}\,d\,(32\,d^{12} - 316\,d^{11} + 994\,d^{10} - 4051\,d^9 + \dots - 107808480\,d + 78883200)\\
\#A_1^2A_2^2 &= d\,(d-4)(d^{12} - 4\,d^{11} + 5\,d^{10} - 110\,d^9 + \dots + 5382180\,d - 4849740)\\
\#A_1^4A_2 &= \frac{1}{12}\,d\,(d-4)(2\,d^{14} - 10\,d^{13} - 18\,d^{12} + \dots - 113728680\,d + 99802800)\\
\#A_1^6 &= \frac{1}{144}\,d\,(d^{17} - 12\,d^{16} + 24\,d^{15} + 155\,d^{14} - 405\,d^{13} + 1082\,d^{12} + \dots\\
&\qquad - 415820104\,d^3 + 1293514896\,d^2 - 2517392160\,d + 1781049600)
\end{aligned}$$

Эти формулы согласуются с результатами, которые получили Ле Барц [60] и Коллей [21, 22] в задаче исчисления мультикасательных прямых к проективным многообразиям, а также Вайнзенкер [82], Клейман и Пьен [55, 56] в задаче исчисления плоских особых кривых.

Глава 7

Характеристические классы особенностей коранга 1

7.1 Локальное строение особенностей коранга 1 и принцип итерации

Локальное поведение

Обозначим через $\Sigma^{1_p} = \Sigma^{1,\dots,1}$ (p единиц) особенность ростка отображения $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^{m+\ell}, 0)$ с локальной алгеброй, изоморфной $\mathbb{C}[[x]]/x^{p+1}$. Струи отображений с особенностью Σ^{1_p} образуют гладкое (незамкнутое при $p > 0$) подмногообразие коразмерности $(\ell + 1)p$ в пространстве K-струй отображений (если порядок струй K достаточно велик).

7.1.1. Определение. Говорят, что гладкое отображение $f : X^m \to Y^{m+\ell}$, $\ell \geqslant 0$, является *отображением коранга* 1, если размерность ядра его производной df не превосходит 1 в любой точке $x \in X$. Отображение коранга 1 называется *общим*, если, вдобавок, оно удовлетворяет следующему условию трансверсальности:

- струйное расширение отображения f трансверсально разбиению пространства струй на классы особенностей Σ^{1_p};

- отображение f является конечным, и его мультиструйное расширение в точках полного прообраза $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ трансверсально соответствующей стратификации пространства мультиструй для любой точки $y \in Y$.

Локально всякий росток отображения коранга 1 может быть представлен как развертка подходящего семейства кривых,

$$(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m-1}, 0) \to (\mathbb{C}^{\ell+1} \times \mathbb{C}^{m-1}, 0) : (x, \lambda) \mapsto (F(x, \lambda), \lambda). \tag{7.1}$$

Условие трансверсальности для ростка, задаваемого семейством F, равносильно условию того, что это семейство является $\mathcal{K}$-версальной деформацией начальной кривой семейства $F(\cdot, 0) : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^{\ell+1}, 0)$. Развертки любых двух версальных деформаций, с точностью до тривиального расширения, лево-право эквивалентны друг другу, а следовательно, ростку отображения, у которого семейство F имеет следующую нормальную форму:

$$F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x^{p+1} & + \lambda_{0,p-1} x^{p-1} + \cdots + \lambda_{0,1} x \\ \lambda_{1,p} x^p & + \lambda_{1,p-1} x^{p-1} + \cdots + \lambda_{1,1} x \\ & \cdots \\ \lambda_{\ell,p} x^p & + \lambda_{\ell,p-1} x^{p-1} + \cdots + \lambda_{\ell,1} x \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

где мы предполагаем, что отображение имеет особенность Σ^{1_p} в начале координат.

Соответственно, для всякой точки $y \in Y$ многообразия-образа общего отображения $f : X \to Y$ коранга 1 мультиросток этого отображения в $f^{-1}(y)$ лево-право эквивалентен прямому произведению нескольких копий стандартных устойчивых особенностей Σ^{1_p}.

7.1.2. Пример. Исходя из произвольного отображения $X \to Y$, можно получить отображения коранга 1, перейдя к ограничению $X \setminus f^{-1}(\overline{\Sigma}^2) \to Y \setminus \overline{\Sigma}^2$, где $\overline{\Sigma}^2$ — образ точек, в которых размерность ядра производной не меньше двух. Если исходное отображение было достаточно общим, то полученное отображение также является общим. При переходе от X к $X \setminus f^{-1}(\overline{\Sigma}^2)$ некоторая информация может быть потеряна. Например, если многообразие X компактно, то оно обладает фундаментальным классом, и можно говорить о характеристических числах, но для открытого подмногообразия $X \setminus f^{-1}(\overline{\Sigma}^2)$ эти инварианты отсутствуют. Тем не менее, если отображение f общее, то подмножество $f^{-1}(\overline{\Sigma}^2)$ имеет коразмерность $2(\ell+2)$, и вложение $X \setminus f^{-1}(\overline{\Sigma}^2) \to X$ индуцирует изоморфизм когомологий в малых размерностях.

7.1.3. Пример. Предположим, что многообразия X, Y гладко расслоены над общей гладкой базой B, причем $\dim X - \dim B = 1$, и отображение f расслоено над B. Тогда f является отображением коранга 1.

Обобщая этот пример, предположим, что задано локально тривиальное гладкое расслоение $W \to Y$ относительной размерности $\dim W - \dim Y = 1$. Пусть $X \hookrightarrow W$ — гладкое вложение коразмерности $\ell + 1$. Тогда ограничение на X проекции $W \to Y$ также является отображением коранга 1 (в предыдущем примере нужно положить $W = X \times_B Y$).

В дальнейшем нам будет более удобно пользоваться следующей отличной от (7.1) локальной моделью для отображения коранга 1. Обозначим через $P_p \simeq \mathbb{C}^{(\ell+1)(p+1)}$ пространство полиномиальных отображений $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\ell+1}$ вида

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^{p+1} + \lambda_{0,p}x^p + \dots + \lambda_{0,1}x + \lambda_{0,0} \\ \lambda_{1,p}x^p + \dots + \lambda_{1,1}x + \lambda_{1,0} \\ \dots \\ \lambda_{\ell,p}x^p + \dots + \lambda_{p,1}x + \lambda_{\ell,0} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $\lambda_{i,j}$ являются координатами в P_p. Рассмотрим отобра-

жение
$$\psi_p : \mathbb{C} \times P_{p-1} \to P_p,$$
которое значению $x_1 \in \mathbb{C}$ и столбцу многочленов $f \in P_{p-1}$ сопоставляет столбец многочленов
$$\psi_p(x_1, f) \in P_p, \qquad \psi_p(x_1, f) : x \mapsto (x - x_1)f(x). \tag{7.3}$$

Нетрудно увидеть, что *отображение* (7.3) *имеет устойчивую особенность* Σ^{1_p} *в начале координат. Более того, оно является тривиальным одномерным расширением отображения, задаваемого формулами* (7.1)–(7.2). Действительно, аддитивная группа чисел $\mathbb{C}$ действует сдвигами аргумента x в пространствах прообраза и образа отображения ψ_p, причем ψ_p инвариантно относительно этого действия. Индуцированное отображение пространства орбит отличается от отображения (7.1)–(7.2) лишь очевидной полиномиальной заменой координат.

Циклы мультиособенностей

Под мультиособенностью мы понимаем набор локальных особенностей. Для отображений коранга 1 различные типы мультиособенностей нумеруются разбиениями $\underline{\alpha} = (a_1, \dots, a_r)$ числа $|\underline{\alpha}| = a_1 + \dots + a_r$. Со всяким разбиением $\underline{\alpha}$ и отображением $f : X \to Y$ коранга 1 мы связываем соответствующий цикл мультиособенностей $X(\underline{\alpha}) \subset X^r$, задаваемый как замыкание множества наборов попарно различных точек $(x_1, \dots, x_r)$, таких, что $f(x_1) = \dots = f(x_r)$, и f имеет особенность $\Sigma^{1_{a_i - 1}}$ в точке x_i. В частности, $X(p) \subset X$ — замыкание множества особенностей $\Sigma^{1_{p-1}}$ отображения f.

7.1.4. Теорема [62]. *Для произвольного общего отображения коранга 1 и произвольного разбиения $\underline{\alpha}$ многообразие $X(\underline{\alpha})$ является гладким (если оно не пусто) и имеет размерность*
$$\dim X(\underline{\alpha}) = \dim X - ((|\underline{\alpha}|(\ell + 1) - r + 1).$$

Доказательство. Поскольку утверждение локально, его достаточно проверять для модельного отображения (7.3). Если столбец многочленов $f \in P_p$ таков, что ψ_p имеет мультиособенность $\underline{\alpha} = (a_1, \ldots, a_r)$ в точках полного прообраза $\psi_p^{-1}(f)$, то этот столбец многочленов представляется в виде

$$f(x) = (x - x_1)^{a_1} \ldots (x - x_r)^{a_r}\, g, \qquad g \in P_{p-|\underline{\alpha}|},$$

где все числа x_i различны. Переходя к замыканию, получаем, что набор чисел $x_1, \ldots, x_r$ и коэффициентов многочленов столбца g задают координаты на многообразии $X(\underline{\alpha}) \simeq \mathbb{C}^r \times P_{p-|\underline{\alpha}|}$. Подробности см. в [62] $\square$

7.1.5. Следствие. *Все многообразия $X(\underline{\alpha})$ с равными $k = |\underline{\alpha}|$ являются подмногообразиями многообразия $X(1_k) = X(1, \ldots, 1)$ (k единиц). Локальные особенности разбиения многообразия $X(1_k)$ на подмногообразия вида $X(\underline{\alpha})$ изоморфны особенностям разбиения стандартной конфигурации плоскостей A_k (задаваемой пересечением различных плоскостей $z_i = z_j$ с гиперплоскостью $z_0 + \cdots + z_k = 0$ в $\mathbb{C}^{k+1}$), умноженным на аффинное пространство подходящей размерности.*

Согласно следствию, многообразие $X(2)$ является гиперповерхностью в $X(1,1)$, что задает на $X(2)$ линейное нормальное расслоение $\nu = \nu_{X(2)}X(1,1)$. С другой стороны, $X(2)$ можно рассматривать как многообразие критических точек отображения f, что задает на $X(2)$ линейное расслоение $\varkappa = \ker df$ ядер производной df.

7.1.6. Лемма. *Линейные расслоения ν и $\varkappa$ на $X(2)$ естественно изоморфны.*

Из функториальности вытекают аналогичные утверждения и для более сложных многообразий мультиособенностей. Например, согласно следствию 7.1.5, подмногообразие $X(k) \subset X(1_k)$ можно рассматривать как гладкую гиперповерхность в любом из $2^{k-1} - 1$ подмногообразий вида $X(i, k-i)$ (подмногообразия такого вида в $X(k)$ нумеруются всевозможными разбиениями набора индексов $(1, \ldots, k)$ на два непустых подмножества). Каждое из таких представлений задает на $X(k)$ линейное нормальное расслоение. Из сформулированной леммы вытекает, что все получаемые таким способом линейные расслоения изоморфны между собой и изоморфны ограничению на $X(k)$ расслоения ядер производной отображения f.

Доказательство леммы (Д. Монд). Точная последовательность

$$0 \to TX(2) \to T_{X(2)}X(1,1) \to \nu \to 0$$

расщепляется естественным образом. Конструкция этого расщепления состоит в следующем. Рассмотрим на многообразии $X(1,1) \subset X \times X$ инволюцию σ, индуцированную перестановкой сомножителей в $X \times X$. Гиперповерхность $X(2) \subset X(1,1)$ является множеством неподвижных точек этой инволюции. Следовательно, нормальное расслоение ν можно отождествить с подрасслоением $\xi_{-1} \subset T_{X(2)}X(1,1)$, образованным собственными подпространствами инволюции с собственным значением -1.

Обозначим через $\varphi : X(1,1) \to X$ ограничение проекции $X \times X \to X$ на первый множитель. Нам осталось проверить, что производная отображения φ переводит изоморфно ξ_{-1} в $\varkappa$. Последнее утверждение локально, и его достаточно проверить только для модельного отображения (7.1.3), что совсем несложно. □

Производные отображения

С данным отображением f мы связываем семейство гладких многообразий $X(\underline{\alpha})$, занумерованных различными разбиениями $\underline{\alpha}$. Эти многообразия связаны друг с другом естественными отображениями. Например, если $\underline{\alpha} = (a_1, \dots, a_r)$ и $\underline{\alpha}' = (a'_1, \dots, a'_{r'})$ — два разбиения, такие, что $r \geqslant r'$, и индексы a_i, a'_i упорядочены таким образом, что $a_i \geqslant a'_i$ при $i = 1, \dots, r'$, то имеется естественная проекция $X(\underline{\alpha}) \to X(\underline{\alpha}')$. Таким образом, имеется громадная коммутативная диаграмма гладких многообразий и отображений между ними. В частности, рассмотрим следующий фрагмент этой диаграммы:

$$X(\underline{\alpha}, k+1) \xrightarrow{j_k} X(\underline{\alpha}, k) \xrightarrow{j_{k-1}} \ldots \xrightarrow{j_1} X(\underline{\alpha}, 1) \xrightarrow{f^{\underline{\alpha}}} X(\underline{\alpha}),$$

где $(\underline{\alpha}, k) = (a_1, \ldots, a_r, k)$.

7.1.7. Теорема. 1. *Отображения j_k являются гладкими вложениями коразмерности $\ell + 1$.*

2. *Отображение $f^{\underline{\alpha}}$ является общим отображением коранга* 1 (*относительной размерности* ℓ).

3. *Подмногообразие $X(\underline{\alpha}, k) \subset X(\underline{\alpha}, 1)$ может быть отождествлено с замыканием цикла особенности $\Sigma^{1_{k-1}}$ для отображения $f^{\underline{\alpha}}$.*

4. *Более того, для всякого дополнительного разбиения $\underline{\alpha}' = (a'_1, \ldots, a'_{r'})$ многообразие мультиособенностей $X'(\underline{\alpha}')$ отображения $f^{\underline{\alpha}}$, где $X' = X(\underline{\alpha}, 1)$, естественно отождествляется с многообразием мультиособенностей $X(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}')$ исходного отображения f, где $(\underline{\alpha}, \underline{\alpha}') = (a_1, \ldots, a_r, a'_1, \ldots, a'_{r'})$.*

Отображение $f^{\underline{\alpha}} : X(a_1, \ldots, a_r, 1) \to X(a_1, \ldots, a_r)$ называется *производным отображением* отображения f, ассоциированным с разбиением $\underline{\alpha}$. Частный случай теоремы, когда все a_i равны 1, известен как *принцип итерации* [51]. На существование производных отображений, связанных с произвольной мультиособенностью, автору указал В. Д. Седых.

Доказательство. Поскольку утверждение теоремы локально, его достаточно проверять только для модельного отображения (7.3). В этом случае теорема вытекает из явных формул, приведенных в доказательстве теоремы 7.1.4. Действительно, в указанных координатах отображение $f^{\underline{\alpha}}$ сопоставляет коэффициентам полиномиального отображения

$$x \mapsto (x - x_1)^{a_1} \ldots (x - x_r)^{a_r} (x - x_{n+1})\, f, \qquad f \in P_{p - |\underline{\alpha}|},$$

коэффициенты полиномиального отображения

$$x \mapsto (x - x_1)^{a_1} \ldots (x - x_r)^{a_r}\, g, \qquad \text{где} \quad g(x) = (x - x_{n+1})\, f(x).$$

Сравнивая с (7.3), мы видим, что это отображение совпадает с отображением $\psi_{p-|\underline{\alpha}|}$, тривиально расширенным при помощи пространства координат $x_1, \ldots, x_r$. Отсюда вытекают все утверждения теоремы. $\square$

Утонченные циклы мультиособенностей

Предположим, что числа a_i заданного разбиения $\underline{\alpha} = (a_1, \ldots, a_r)$ подразбиты на подмножества, содержащие k_j элементов, $\sum k_i = r$, причем все числа j-го подмножества равны между собой и равны числу b_j:

$$(a_1, \ldots, a_r) = (b_{1k_1}; \ldots; b_{sk_s}).$$

Тогда группа $G = S(k_1) \times \cdots \times S(k_s)$ перестановок элементов внутри подмножеств действует как группа автоморфизмов разбиения $\underline{\alpha}$, и, следовательно, действует на многообразии мультиособенностей $X(\underline{\alpha})$. Обозначим через $V(\underline{\beta})$ фактормногообразие относительно этого действия, где через

$$\underline{\beta} = (b_{1k_1}; \ldots; b_{sk_s})$$

мы обозначаем соответствующее подразбиение разбиения $\underline{\alpha}$. Эти многообразия называются *утонченными многообразиями мультиособенностей.* Мы не требуем, чтобы все b_j были различны. В частности, обычные многообразия мультиособенностей $X(\underline{\alpha})$ являются частными случаями многообразий $V(\underline{\beta})$, для которых каждое из подмножеств $(b_{j_{k_j}})$ содержит $k_j = 1$ элемент и группа G тривиальна. Утверждения теорем 7.1.4 и 7.1.7 справедливы и для утонченных многообразий мультиособенностей.

7.1.8. Теорема.1. *Многообразие $V(\underline{\beta})$ является гладким (если оно не пусто) для произвольного общего отображения f коранга 1 и произвольного набора $\underline{\beta} = (b_{1k_1}; \ldots; b_{sk_s})$.*

2. *Естественная проекция $f^{\underline{\beta}} : V(\underline{\beta}; 1) \to V(\underline{\beta})$ является общим отображением коранга 1 (относительной размерности ℓ).*

3. *Для всякого дополнительного набора* $\underline{\beta}' = (b'_{1k'_1}; \ldots; b'_{s'k'_{s'}})$ *многообразие мультиособенностей* $V(\underline{\beta}')$ *для производного отображения* $f^{\underline{\beta}}$ *естественно отождествляется с многообразием мультиособенностей* $V(\underline{\beta}; \underline{\beta}')$ *исходного отображения* f, *где* $(\underline{\beta}; \underline{\beta}') = (b_{1k_1}; \ldots; b_{sk_s}; b'_{1k'_1}; \ldots; b'_{s'k'_{s'}})$.

Доказательство. Утверждение 1 теоремы вытекает из доказательства теоремы 7.1.4 и является проявлением хорошо известного факта, что пространство орбит группы отражений A_k является гладким, или, в другой формулировке, что схема Гильберта 0-мерных подсхем заданной степени на гладком одномерном многообразии гладко. Для модельного отображения $f = \psi_p$, заданного формулами (7.3), многообразие $V(b_{1k_1}; \ldots; b_{sk_s})$ параметризует полиномиальные отображения вида

$$x \mapsto \prod_{j=1}^{s} (x^{k_j} + \mu_{j,k_j-1} x^{k_j-1} + \cdots + \mu_{j,0})^{b_j} \ g,$$

где полиномиальное отображение $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\ell+1}$ принадлежит пространству $P_{p-|\underline{\beta}|}$ и где $|\underline{\beta}| = \sum k_j b_j$. Координатами на гладком многообразии $V(\underline{\beta})$ служат коэффициенты $\mu_{j,i}$ и коэффициенты многочленов, задающих отображение g. Из этих локальных формул вытекают все утверждения теоремы, аналогично доказательству теоремы 7.1.7. $\square$

7.2 Характеристические классы отображений коранга 1

Пусть задано голоморфное отображение $f : X^m \to Y^{m+\ell}$. Обозначим через $\nu_f = f^*TY - TX$ виртуальное нормальное расслоение отображения f и через $c_i = c_i(\nu_f) \in H^{2i}(X)$ — соответствующие относительные классы Чженя.

7.2.1. Предложение. *Если f — отображение коранга 1, то его относительные классы Чженя удовлетворяют соотношениям*

$$c_i\, c_j - c_{\imath'}\, c_{\jmath'} = 0$$

для всех $i, j, \imath', \jmath' \geqslant \ell + 1$, таких, что $i + j = \imath' + \jmath'$.

Доказательство. Поскольку отображение не имеет особенностей коранга, большего 2, все классы Портеуса-Тома $[\overline{\Sigma}^r]$, а также их производные, обращаются в ноль при $r \geqslant 2$, что и утверждается в теореме.

Более подробно, рассмотрим многообразие F_2, образованное флагами вида

$$0 = D_{0x} \subset D_{1x} \subset D_{2x} \subset \ker df_x \subset T_x X,$$

где $x \in X$, $\dim D_{ix} = i$. Обозначим через $p_2 : F_2 \to X$ естественную проекцию. По формуле теоремы 3.1.9 главы 3,

$$p_{2*}(t_1^{s_1} t_2^{s_2}) = \Delta_{\ell+s_1+1, \ell+s_2+2}(c(\nu_f)) = c_{\ell+s_1+1} c_{\ell+s_2+2} - c_{\ell+s_1+2} c_{\ell+s_2+1}$$

для всех $s_1, s_2 \geqslant 0$, где $t_i = -c_1(D_i/D_{i-1})$. В случае отображения коранга 1 многообразие F_2 пусто, и выражение в правой части равенства равно нулю. □

7.2.2. Определение. *Кольцом $\mathcal{M}$ характеристических классов отображений коранга* 1 называется факторкольцо кольца многочленов от переменных $c_1, c_2, \ldots$, $\deg c_i = i$, по идеалу K, порожденному соотношениями предложения 7.2.1.

Идеал соотношений K имеет следующее удобное описание. Введем дополнительную переменную t, $\deg t = 1$, и рассмотрим следующий гомоморфизм колец многочленов,

$$\rho : \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots] \to \mathbb{Z}[t, c_1, \ldots, c_{\ell+1}], \quad \rho(c_k) = \begin{cases} c_k & \text{если } k \leqslant \ell + 1, \\ t^{k-\ell-1} c_{\ell+1} & \text{если } k > \ell + 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что K является ядром этого гомоморфизма, $K = \ker \rho$. Следовательно, кольцо $\mathcal{M}$ может быть отождествлено с образом гомоморфизма ρ. Иными словами, *всякий характеристический класс отображения коранга* 1 *может быть представлен многочленом от переменных* $t, c_1, \ldots, c_{\ell+1}$, при условии, что всякий моном, содержащий переменную t, содержит также переменную $c_{\ell+1}$. Чтобы выразить этот класс в терминах только образующих c_i, достаточно просто заменить всякий моном вида $t^k c_{\ell+1}$ на $c_{\ell+k+1}$. Это представление не единственно: два многочлена от c_i представляют один и тот же класс в $\mathcal{M}$, если они отличаются на элемент из K.

Пусть $f : X \to Y$ — отображение коранга 1. Обозначим через $\eta : \Sigma \to X$ вложение подмногообразия критических точек. Над Σ производная отображения f имеет нетривиальное ядро. Обозначим через $\varkappa = \ker df$ соответствующее линейное расслоение над Σ и положим $t = -c_1(\varkappa) = c_1(\varkappa^*)$. Тогда индуцированный морфизм расслоений $T_\Sigma X/\varkappa \to f^*TY|_\Sigma$ инъективен, и мы получаем, что $\nu_f|_\Sigma + \varkappa$ является векторным расслоением ранга $\ell + 1$ на Σ. Следовательно,

$$0 = c_{i+1}(\nu_f|_\Sigma + \varkappa) = c_{i+1} - t\, c_i \quad \text{при} \quad i \geqslant \ell + 1,$$

и $c_{\ell+1+k} = t^k c_{\ell+1}$, где c_i — относительные классы Чженя $c_i = c_i(\nu_f)$ (ограниченные на Σ). Следовательно, *класс* $-t$ *может рассматриваться как первый класс Чженя «виртуального продолжения» линейного расслоения* $\varkappa$ *на все многообразие* X. В другой интерпретации умножение на t может рассматриваться как линейный эндоморфизм кольца $\mathcal{M}$, переводящий элемент вида $c_k a$, где $k \geqslant \ell + 1$, в $c_{k+1} a$.

Продолжение расслоения $\varkappa = \ker df$ на все многообразие X не обязано существовать, и t не обязательно соответствует классу когомологий, определенному на всем X. Однако во многих частных случаях такое продолжение существует.

7.2.3. Пример. Предположим, что заданное отображение $X \to Y$ разлагается в композицию $X \overset{i}{\hookrightarrow} W \overset{\pi}{\to} Y$, где первое отображение — вложение коразмерности $\ell+1$ с нормальным расслоением ν, а второе — локально тривиальное расслоение с одномерными слоями. Обозначим через $\varkappa = \ker \pi_*$ линейное расслоение на W, образованное векторами, касательными к слоям расслоения π, и положим $t = c_1(\varkappa^*) = -c_1(\varkappa)$. Тогда из точных последовательностей

$$0 \to \varkappa \to TW \to \pi^* TY \to 0, \qquad 0 \to TX \to T_X W \to \nu \to 0$$

мы получаем $\nu = \nu_f + \varkappa$, и $c(\nu) = (1 + c_1(\nu_f) + \dots)\,(1-t)$.

Поскольку ν — векторное расслоение ранга $\ell+1$, мы получаем при всех $i > \ell+1$ равенство $0 = c_i(\nu) = c_i(\nu_f) - t c_{i-1}(\nu_f)$, то есть

$$c_{\ell+1+k}(\nu_f) = t^k c_{\ell+1}(\nu_f).$$

Таким образом, мы получаем, что в этом примере «виртуальный» класс t является первым классом Чженя расслоения, определенного глобально на X.

Ясно, что в приведенном выше примере между классами $t, c_1(\nu), \dots, c_{\ell+1}(\nu)$ нет никаких дополнительных априорных соотношений, а следовательно, нет соотношений и между классами $t, c_1(\nu_f), \dots, c_{\ell+1}(\nu_f)$ (иными словами, существует отображение, имеющее такой же вид, как в примере 7.2.3, такое, что гомоморфизм $\mathcal{M} \to H^*(X)$ инъективен вплоть до произвольной наперед заданной степени). Это наблюдение мы формулируем в виде следующего общего принципа:

7.2.4. *При вычислении характеристических классов, связанных с особенностями отображений коранга* 1, *достаточно предполагать, что заданное отображение f имеет вид отображения примера* 7.2.3. *Полученные в этом предположении формулы справедливы и в общем случае.*

Алгебраически проявление этого принципа заключается в том, что на промежуточных шагах вычислений мы можем использовать многочлены от переменных $t, c_1, \dots, c_{\ell+1}$, которые не лежат в образе гомоморфизма ρ, и, следовательно, не принадлежат кольцу $\mathcal{M}$. Как мы увидим, применение этого принципа существенно сокращает все вычисления. После того, как желаемая формула получена, ее доказательство легко может быть переформулировано таким образом, чтобы оно было применимо к произвольным отображениям коранга 1 (отметим, однако, что в этом нет особой необходимости ввиду общих утверждений о существовании универсальных формул).

Проиллюстрируем применение этого принципа на доказательстве следующего утверждения. Пусть $f : M \to Y$ — отображение коранга 1 с относительными классами Чженя $c_i = c_i(\nu_f)$. Пусть $\Sigma = \overline{\Sigma}^1(f)$ — множество критических точек, $\eta : \Sigma \to X$ — естественное вложение, $\varkappa = \ker df$ — линейное расслоение ядер производной на Σ, и $t = -c_1(\varkappa)$. Рассмотрим произвольный многочлен P от переменных $t, c_1, c_2, \ldots$.

7.2.5. Предложение. *Гомоморфизм $\eta_* : H^*(\Sigma) \to H^*(X)$ действует на P умножением на $c_{\ell+1}$,*

$$\eta_*(P) = c_{\ell+1}P.$$

В левой части равенства t рассматривается как корректно определенный класс когомологий на Σ и под c_i мы понимаем ограничение на Σ классов $c_i = c_i(\nu_f)$. Многочлен в правой части равенства рассматривается как универсальный характеристический класс отображения коранга 1. Иными словами, $c_{\ell+1}t^k$ рассматривается как обозначение для класса $c_{\ell+1+k}(\nu_f)$.

Доказательство. В случае отображения примера 7.2.3 многообразие Σ определяется как геометрическое место точек, в которых слои расслоения π касаются X, то есть Σ является множеством нулей сечения расслоения $\mathrm{Hom}(\varkappa, \nu)$. Следовательно, класс $[\Sigma] = \eta_*(1)$ равен старшему классу Чженя этого расслоения,

$$\eta_*(1) = c_{\ell+1}(\mathrm{Hom}(\varkappa, \nu)) = c_{\ell+1}(\nu - \varkappa) = c_{\ell+1}(\nu_f).$$

(См. тождество 1.3.9 главы 1). Поскольку класс t определен глобально на

X, по формуле проекции получаем

$$\eta_*(P) = \eta_*(1)\ P = c_{\ell+1}P.$$

Согласно сформулированному принципу, полученное соотношение выполняется для произвольных отображений коранга 1. $\square$

7.2.6. Полезно сравнить приведенные простые рассуждения с вычислениями, которые применимы в общем случае. Пусть $f : X^m \to Y^{m+\ell}$ — отображение коранга 1. Тогда Σ гладко. Обозначим через $\varkappa$ линейное расслоение ядер $\varkappa = \ker df$ (теперь это расслоение определено только на Σ!). Положим $t = -c_1(\varkappa)$. Тогда формула предложения может быть эквивалентным образом переформулирована в виде

$$\eta_*(t^k) = t^k c_{\ell+1} = c_{\ell+1+k}.$$

В таком виде утверждение является частным случаем теоремы 3.1.9 главы 3. Для независимого его доказательства необходимо следующее дополнительное построение. Обозначим через $\pi : P = P(TX) \to X$ проективизацию касательного расслоения TX. Ограничение этого расслоения на Σ допускает естественное сечение $s : \Sigma \to P$, которое сопоставляет точке $x \in \Sigma \subset X$ прямую $\ker df(x) \subset T_xX$. Согласно построению, расслоение $\varkappa$ на Σ совпадает с $s^*(\mathcal{O}(-1))$, где $\mathcal{O}(-1)$ — тавтологическое линейное расслоение на P. Соответственно, класс $t = -c_1(\varkappa)$ индуцирован из класса $c_1(\mathcal{O}(1)) = -c_1(\mathcal{O}(-1))$ на P, который мы обозначим также через t.

Далее, дифференциал df задает сечение расслоения $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1), f^*TY)$, и подмногообразие $s(\Sigma) \subset P$ является множеством нулей этого сечения. Следовательно,

$$[s(\Sigma)] = c_{m+l}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1), f^*TY)) = \sum_{i+j=m+\ell} t^i c_j(f^*TY).$$

Используя известное равенство $\pi_*(t^i) = c_{i-m+1}(-TX)$ (см. п. 1.3.4 главы 1), мы получаем

$$\eta_*(t^k) = \pi_*(t^k[s(\Sigma)]) = \pi_*\Big(t^k \sum_{i+j=m+\ell} t^i c_j(f^*TY)\Big) = \pi_* \sum_{i+j=m+\ell+k} t^i c_j(f^*TY)$$
$$= \sum_{i+j=\ell+1+k} c_i(-TX)c_j(f^*TY) = c_{\ell+1+k}(f^*TY - TX),$$

что и требовалось. □

7.3 Многочлены Тома для локальных особенностей

Согласно теореме о существовании многочлена Тома, класс когомологий, двойственный замыканию всякого множества локальных особенностей общего отображения f (в частности, особенностей Σ^{1_p}), выражается как универсальный многочлен от относительных классов Чженя $c_i(\nu_f)$. Если f — отображение коранга 1, то этот многочлен определен только с точностью до элемента идеала соотношений K в кольце $\mathcal{M}$ характеристических классов отображений коранга 1. Конечно, для всевозможных многочленов, представляющих один и тот же элемент кольца $\mathcal{M}$ имеется предпочтительный выбор, а именно, многочлен, представляющий класс, двойственный замыканию особенности Σ^{1_p} для *произвольного* достаточно общего отображения. Задача нахождения общей формулы для такого представителя выглядит безнадежной, поскольку он зависит от полной классификации ростков отображений, которая, как известно, ведет себя сравнительно нерегулярным образом. Тем не менее, имеется следующая простая формула для этого класса, с точностью до элемента из K.

Рассмотрим следующую последовательность классов взвешенной степени $\ell+1$:

$$\sigma_0 = c_{\ell+1} - t\,c_\ell, \quad \sigma_1 = c_{\ell+1}, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \dots\,,$$
$$\sigma_k = c_{\ell+1}(\varkappa^{*k} \otimes \nu_f + \varkappa^{*(k-1)}) = c_{\ell+1} + (k-1)\sum_{j=0}^{\ell} k^j t^{j+1} c_{\ell-j}.$$

7.3.1. Теорема. *Если $f : X^m \to Y^{m+\ell}$, $\ell \geqslant 0$, — общее отображение коранга 1, то класс когомологий, двойственный замыканию множества особенностей $\overline{\Sigma}^{1_p}$, задается многочленом*

$$[\overline{\Sigma}^{1_p}] = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_p \in \mathcal{M},$$

вычисленном на характеристическом гомоморфизме $\mathcal{M} \to H^*(X)$, ассоциированном с отображением f.

Заметим, что наименьшая степень нетривиального элемента в K равна $2(\ell+2)$, что совпадает с коразмерностью множества $\overline{\Sigma}^2$ особенностей коранга не меньше двух. Следовательно, формула теоремы может быть применена к отображениям, допускающим особенности Σ^2 при условии $p(\ell+1) < 2(\ell+2)$. В частности, при $p=2$ эта формула имеет место для произвольного отображения и сводится к следующему выражению, полученному еще в работе [75]:

$$[\overline{\Sigma}^{1,1}] = c_{\ell+1}^2 + \sum_{j=0}^{\ell} 2^j\, c_{\ell+j+2}\, c_{\ell-j}.$$

Для $\ell = 0$ формула сводится к равенству

$$[\overline{\Sigma}^{1_p}] = c_1\,(c_1+t)\,(c_1+2\,t)\dots(c_1+(p-1)t).$$

Аналогичное выражение было получено Куликовым в [58]. Это выражение эквивалентно рекуррентной формуле Портеуса [67]

$$[\overline{\Sigma}^{1_p}] = [\overline{\Sigma}^{1_{p-1}}]\,c_1 + (p-1)\,[\overline{\Sigma}^{1_{p-2}}]\,c_2 + (p-1)(p-2)\,[\overline{\Sigma}^{1_{p-3}}]\,c_3 + \dots + (p-1)!\,c_{\ell+1}.$$

Аналогично, для $\ell = 1$ мы получаем

$$[\overline{\Sigma}^{1_p}] = c_2\,(c_2 + t\,c_1 + 2\,t^2)\,(c_2 + 2\,t\,c_1 + 6\,t^2)\dots(c_2 + (p-1)\,t\,c_1 + (p-1)p\,t^2)\ .$$

Доказательство. Пусть $\eta : \Sigma = \overline{\Sigma}^1 \to X$ — вложение многообразия критических точек отображения f. Тогда для $p = 1$ мы получаем, согласно предложению 7.2.5,

$$[\overline{\Sigma}^1] = \eta_*(1) = c_{\ell+1}.$$

Далее, обозначим через $E_1 = \nu_\Sigma X$ нормальное расслоение и через $\varkappa = \ker df$ соответствующее линейное расслоение ядер на Σ. Тогда $\overline{\Sigma}^{1,1} \subset \Sigma$ задается как множество точек, в которых прямые расслоения $\varkappa$ касаются слоев Σ, то есть обращением в ноль сечения расслоения $E_2 = \mathrm{Hom}(\varkappa, E_1) = \varkappa^* \otimes E_1$. Отсюда мы получаем, что $[\overline{\Sigma}^{1,1}] = \eta_*(c_{\ell+1}(E_2))$ и что нормальное расслоение подмногообразия $\overline{\Sigma}^{1,1} \subset \Sigma$ совпадает с ограничением на $\Sigma^{1,1}$ расслоения E_2. Аналогично, $\overline{\Sigma}^{1,1,1} \subset \overline{\Sigma}^{1,1}$ определяется как множество точек, в которых прямые расслоения $\varkappa$ касаются $\overline{\Sigma}^{1,1}$, то есть обращением в ноль сечения расслоения $E_3 = \mathrm{Hom}(\varkappa, E_2) = \varkappa^{*2} \otimes E_1$. Отсюда мы получаем, что $[\overline{\Sigma}^{1,1,1}] = \eta_*(c_{\ell+1}(E_2)c_{\ell+1}(E_3))$ и что нормальное расслоение подмногообразия $\overline{\Sigma}^{1,1,1} \subset \overline{\Sigma}^{1,1}$ совпадает с ограничением на $\Sigma^{1,1,1}$ расслоения E_3.

Продолжая таким же образом, мы получаем по индукции равенство

$$[\overline{\Sigma}^{1_p}] = \eta_*(\,c_{\ell+1}(E_2)\dots c_{\ell+1}(E_p)), \qquad E_k = \varkappa^{*(k-1)} \otimes E_1.$$

Гомоморфизм η_* вычислен в предложении 7.2.5. Остается определить классы Чженя расслоения $E_1 = \nu_\Sigma X$. Согласно принципу 7.2.4, мы можем предполагать, что отображение f имеет вид отображения примера 7.2.3. Тогда, в обозначениях этого примера, многообразие Σ является множеством нулей сечения расслоения $\mathrm{Hom}(\varkappa, \nu) = \varkappa^* \otimes \nu$, где расслоение $\varkappa$ определено на всем X и $\nu = \nu_X W = \nu_f + \varkappa$. Следовательно, E_1 является ограничением этого расслоения на Σ, $E_1 = \varkappa^* \otimes \nu$, откуда

$$c(E_k) = c(\varkappa^{*k} \otimes \nu) = c(\varkappa^{*k} \otimes \nu_f + \varkappa^{*(k-1)}).$$

Отсюда мы получаем $c_{\ell+1}(E_k) = \sigma_k$, и, окончательно,

$$[\overline{\Sigma}^{1_p}] = \eta_*(\sigma_2 \dots \sigma_p) = c_{\ell+1}\,\sigma_2 \dots \sigma_p. \qquad \square$$

7.3.2. Для сравнения методов покажем, как получить выражение для расслоения $E_1 = \nu_\Sigma X$ в общем случае. В обозначениях п. 7.2.6, многообразие $\Sigma \subset X$ можно отождествить с его естественным поднятием $s(\Sigma) \subset P$, таким, что $\varkappa = s^*(\mathcal{O}(-1))$, где $\pi : P \to X$ — проективизация касательного расслоения и $s(\Sigma)$ — множество нулей сечения расслоения $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1), f^*TY) = \mathcal{O}(1) \otimes f^*TY$. Поскольку f — общее отображение коранга 1, слои расслоения π не касаются подмногообразия $s(\Sigma)$, и мы получаем точную последовательность

$$0 \to V|_{s(\Sigma)} \to \mathcal{O}(1) \otimes f^*TY|_{s(\Sigma)} \to E_1 \to 0\ ,$$

где $V = \ker \pi_*$ — расслоение векторов, касательных к слоям расслоения π. Полный класс Чженя расслоения V можно вычислить при помощи присоединенной точной последовательности

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}(1) \otimes \pi^*TX \to V \to 0.$$

Комбинируя эти две последовательности, мы приходим к тому же выражению, что и в доказательстве теоремы 7.3.1,

$$E_1 = \varkappa^* \otimes f^*TY - \varkappa^* \otimes TX + \mathbb{C} = \varkappa^* \otimes \nu_f + \mathbb{C},$$

где линейное расслоение $\varkappa = \ker df$ уже не обязательно продолжается на все многообразие X. $\square$

7.4 Остаточные классы мультиособенностей

Пусть $f : X \to Y$ — отображение коранга 1. Напомним, что мультиособенности отображения f нумеруются разбиениями $\underline{\alpha} = (a_1, \dots, a_r)$. С данным разбиением $\underline{\alpha}$ связан цикл мультиособенностей $X(\underline{\alpha}) \subset X^r$. Проекция на первый множитель $p_X : X^r \to X$ и отображение $p_Y = f\,p_X : X^r \to Y$ задают классы когомологий

$$m_{\underline{\alpha}} = p_{X*}[X(\underline{\alpha})] = \#\mathrm{Aut}(a_2, \dots, a_r)\,[p_X(X(\underline{\alpha}))] \in H^*(X),$$
$$n_{\underline{\alpha}} = p_{Y*}[X(\underline{\alpha})] = \#\mathrm{Aut}(a_1, \dots, a_r)\,[p_Y(X(\underline{\alpha}))] \in H^*(Y).$$

Согласно теореме 5.2.2, эти классы мультиособенностей выражаются универсальным образом через так называемые остаточные многочлены $R_{\underline{\alpha}}$ от относительных классов Чженя $c_i(\nu_f)$ при помощи формул

$$m_{\underline{\alpha}} = \sum_{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k = \{1,\dots,r\}} R_{\underline{\alpha}_{J_1}}\ f^*f_* R_{\underline{\alpha}_{J_2}} \dots f^*f_* R_{\underline{\alpha}_{J_k}}, \tag{7.4}$$

$$n_{\underline{\alpha}} = f_* m_{\underline{\alpha}} = \sum_{J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k = \{1,\dots,r\}} f_* R_{\underline{\alpha}_{J_1}} \dots f_* R_{\underline{\alpha}_{J_k}}, \tag{7.5}$$

где суммирование производится по всевозможным разбиениям множества $\{1, \dots, r\}$ в несвязное объединение непустых неупорядоченных подмножеств $\{1, \dots, r\} = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_k$, $k \geqslant 1$, и где подмножество, содержащее элемент $1 \in \{1, \dots, r\}$ обозначается через J_1.

В случае отображений коранга 1 для остаточных многочленов имеются приведенные ниже две различные явные формулы, которые задают эти многочлены как элементы кольца $\mathcal{M}$, то есть с точностью до соотношений, имеющих место в кольце характеристических классов отображений коранга 1. Важно отметить, что доказательство этих формул содержит также прямое доказательство соотношений (7.4-7.5), не использующее априорной теоремы 5.1.1 о существовании универсальной формулы, но использующее предположение о том, что отображение не имеет особенностей коранга, большего 1.

При $r = 1$, то есть для классов моноособенностей, соответствующие многочлены Тома описаны в теореме 7.3.1 предыдущего пункта,

$$R_p = m_p = [\overline{\Sigma}^{1_{p-1}}] = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-1}.$$

При $r > 1$ классы $R_{a_1,\dots,a_r}$ выражаются через классы R_k для различных k. Положим $\sigma_0 = c_{\ell+1} - t c_\ell$.

7.4.1. Теорема. *Для отображений коранга* 1 *многочлены* $R_{\underline{\alpha}} = R_{a_1,\dots,a_r}$ *задаются следующей явной формулой*

$$R_{a_1,\dots,a_r} = \frac{1}{t^{r-1}} \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} (-1)^{r-k}\,(k-1)!\,\sigma_0^{k-1}\,R_{|\underline{\alpha}_{J_1}|}\dots R_{|\underline{\alpha}_{J_1}|}. \tag{7.6}$$

Здесь $|\underline{\alpha}_J|$ обозначает $\sum_{i\in J} a_i$. Теорема утверждает, в частности, что сумма в правой части делится на t^{k-1} и что частное, представленное многочленом от переменных $t, c_1, \dots, c_{\ell+1}$, принадлежит кольцу $\mathcal{M}$, точнее, образу гомоморфизма $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}[t, c_1, \dots, c_{\ell+1}]$, изоморфному $\mathcal{M}$.

7.4.2. Пример. Для мультиособенностей малых кратностей мы имеем

$$\begin{aligned}
m_p &= R_p,\\
m_{p,q} &= R_p f^*f_*(R_q) + R_{p,q},\\
m_{p,q,r} &= R_p f^*f_*(R_q) f^*f_*(R_r) + R_p f^*f_*(R_{q,r}) + R_{p,q} f^*f_*(R_r) + R_{p,r} f^*f_*(R_q) + R_{p,q,r}\\
&\quad \text{и т. д.,}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{p,q} &= \frac{1}{t}(\sigma_0 R_p R_q - R_{p+q}),\\
R_{p,q,r} &= \frac{1}{t^2}(2\sigma_0^2 R_p R_q R_r - \sigma_0 R_p R_{q+r} - \sigma_0 R_q R_{r+p} - \sigma_0 R_r R_{p+q} + R_{p+q+r})\\
&\quad \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Остаточные многочлены малых степеней для $\ell = 0, 1$ приведены ниже.

$\ell = 0$	$\ell = 1$
$R_1 = 1$	$R_{1,1} = -c_1$
$R_2 = c_1$	$R_2 = c_2$
$R_{2,2} = -2\,c_1(2\,c_1 + t)$	$R_{1,1,1} = 2\,(c_1^2 + c_2)$
$= -2\,(2\,c_1^2 + c_2)$	$R_{1,2} = -2\,c_2(c_1 + t) = -2\,(c_1c_2 + c_3)$
$R_3 = c_1\,(c_1 + t)$	$R_{1_4} = -6\,(c_1^3 + 3\,c_1c_2 + 2\,tc_2)$
$= c_1^2 + c_2$	$= -6\,(c_1^3 + 3\,c_1c_2 + 2\,c_3)$
$R_{2,2,2} = 8\,c_1(5\,c_1^2 + 7\,t\,c_1 + 3\,t^2)$	$R_3 = c_2(c_2 + t\,c_1 + 2\,t^2)$
$= 8\,(5\,c_1^2 + 7\,c_1c_2 + 3\,c_3)$	$= c_2^2 + c_1c_3 + 2\,c_4$
$R_{2,3} = -6\,c_1(c_1 + t)^2$	$R_{1,1,2} = 2\,c_2(3\,c_1^2 + 2\,c_2 + 7\,t\,c_1 + 6\,t^2)$
$= -6\,(c_1^3 + 2\,c_1c_2 + c_3)$	$= 2\,(3\,c_1^2c_2 + 2\,c_2^2 + 7\,c_1c_3 + 6\,c_4)$
$R_4 = c_1(c_1 + t)(c_1 + 2\,t)$	$R_{1_5} = 24\,(c_1^4 + 6\,c_1^2\,c_2 + 2\,c_2^2 + 9\,t\,c_1c_2 + 6\,t^2c_2)$
$= c_1^3 + 3\,c_1c_2 + 2\,c_3$	$= 24\,(c_1^4 + 6\,c_1^2c_2 + 2\,c_2^2 + 9\,c_1c_3 + 6\,c_4)$

Вторая формула для классов $R_{\underline{\alpha}}$ состоит в следующем. Введем дополнительную переменную θ, $\deg\theta = 1$, и положим

$$\sigma(\theta) = c_{\ell+1} + (\theta - t)\sum_{i=0}^{\ell} \theta^i c_{\ell-i}.$$

Если положить $c_i = c_i(\nu_f)$, $t = -c_1(\varkappa)$ и рассматривать переменную θ как класс $\theta = -c_1(\zeta)$ для вспомогательного линейного расслоения ζ, то $\sigma(\theta)$ определяется формальным равенством

$$\sigma(\theta) = c_{\ell+1}(\nu_f + \varkappa - \zeta) = c_{\ell+1}((\nu_f + \varkappa) \otimes \zeta^*).$$

В частности, в обозначениях предыдущего пункта, мы имеем $\sigma_k = \sigma(k\,t)$. Определим многочлены $\widetilde{R}_{\underline{\alpha}}(\theta)$ индуктивно равенствами

$$\widetilde{R}_p(\theta) = \sigma(\theta + t)\sigma(\theta + 2t)\ldots\sigma(\theta + (p-1)t),$$

$$\widetilde{R}_{a_1,a_2,\ldots,a_r}(\theta) = -\sum_{k=2}^{r} a_k\,\widetilde{R}_{a_k}(\theta)\,\Delta Q_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_r}(\theta + a_k t), \quad r > 1, \quad (7.7)$$

где $\quad Q_{\underline{\alpha}}(\theta) = \sigma(\theta)\widetilde{R}_{\underline{\alpha}}(\theta) \quad$ и $\quad \Delta Q_{\underline{\alpha}}(\theta) = \dfrac{Q_{\underline{\alpha}}(\theta) - Q_{\underline{\alpha}}(0)}{\theta}.$

7.4.3. Теорема. *Остаточные многочлены мультиособенностей отображений коранга* 1 *даются равенством*

$$R_{\underline{\alpha}} = \widetilde{R}_{\underline{\alpha}}(0).$$

Отметим, что в 7.7 суммирование производится по $k \geqslant 2$. В результате многочлен $\widetilde{R}_{\underline{\alpha}}(\theta)$ оказывается инвариантным относительно только тех перестановок элементов разбиения $\underline{\alpha} = (a_1, \ldots, a_r)$, которые оставляют на месте первый элемент a_1. Тот факт, что значение этого многочлена при $\theta = 0$ инвариантно относительно всех перестановок элементов $a_1, \ldots, a_r$, вытекает из единственности многочлена $R_{\underline{\alpha}}$.

Доказательство обеих теорем, 7.4.1 и 7.4.3, использует следующее простое наблюдение, известное как *принцип итерации*: по теореме 7.1.7 циклы более сложных особенностей исходного отображения f могут быть проинтерпретированы как циклы более простых особенностей различных его производных отображений. Формулы избыточного пересечения позволяют связать характеристические классы производных отображений с характеристическими классами исходного отображения f, и это позволяет вычислить классы циклов мультиособенностей по индукции.

Отличие в доказательствах теорем 7.4.1 и 7.4.3 состоит в различной организации индуктивного процесса. В теореме 7.4.1 мы интерпретируем многообразие мультиособенности $\underline{\alpha} = (a_1, \ldots, a_r)$ как многообразие мультиособенности $(a_2, \ldots, a_r)$ производного отображения $f^{(a_1)} : X(a_1, 1) \to X(a_1)$, с другой стороны, в доказательстве теоремы 7.4.3 — как подмногообразие особенности $(a_r) = \Sigma^{1_{a_r - 1}}$ производного отображения $f^{(a_1, \ldots, a_{r-1})} : X(a_1, \ldots, a_{r-1}, 1) \to X(a_1, \ldots, a_{r-1})$. Реализации этой программы посвящены последующие пункты главы.

7.5 Формулы избыточного пересечения (по С. Клейману)

В этом пункте мы обсуждаем некоторые формулы избыточного пересечения, по существу принадлежащие С.Клейману. Мы приводим эти формулы в форме, наиболее подходящей для наших приложений. Чтобы избежать повторения, мы не даем здесь полного доказательства. Вместо этого, мы приводим некоторые рассуждения, целью которых служит *получение* этих формул без строгого их обоснования. Мы надеемся, что эти рассуждения помогут читателю разобраться в деталях доказательств, данных в [51].

Основная формула теории пересечений

Пусть $h : V \to Y$ — голоморфное отображение гладких комплексных многообразий, и $X \subset Y$ — подмногообразие. Если f трансверсально по отношению к X, то по теореме о неявной функции подмногообразие $U = h^{-1}X \subset V$ также гладко и имеет ту же коразмерность, $\operatorname{codim}_V U = \operatorname{codim}_Y X$. Более того, нормальное расслоение ν_U этого подмногообразия и его фундаментальный класс $[U]$ (в группе Чжоу A_*V или в группе когомологий $H^*(V)$) являются обратными образами соответствующих нормальных расслоений ν_X и фундаментального класса $[X]$ подмногообразия $X \subset Y$,

$$\nu_U = h^*\nu_X, \qquad [U] = h^*[X]. \tag{7.8}$$

Формулы избыточного пересечения применяются в случае, когда условие трансверсальности для отображения h нарушается. Обозначим через $W = h^{-1}X$ схемно-теоретический прообраз подмногообразия X. Поскольку W может быть особым и даже неприведенным, в данном контексте вместо когомологий более естественно рассматривать группы Чжоу алгебраических циклов по модулю рациональной эквивалентности. Заметим, однако, что все приведенные в этом пункте формулы остаются справедливыми, если группу Чжоу $A_k W$ заменить на группу когомологий $H^{2(n-k)}(V, V \backslash W)$, где V — гладкое n-мерное объемлющее многообразие. Основная формула теории пересечений формулируется следующим образом:

$$\{c(\nu_X) \frown s(W,V)\}_d = h^*[X], \tag{7.9}$$

$$\{c(\nu_X) \frown s(W,V)\}_k = 0, \qquad k < d, \tag{7.10}$$

где $d = \dim V - \operatorname{codim}_Y X$ — «ожидаемая» размерность многообразия $W = h^{-1}X$. Первая из этих двух формул использована в [28], фактически, в качестве определения класса произведения-пересечения $V \cdot X = h^*[X]$. Вторая формула не сформулирована явно в [28], однако она мгновенно вытекает из конструкции произведения-пересечения.). Значение этих формул состоит в том, что классы Сегре $s(W,V)_k$, входящие в выражения в левой части, определяются однозначно подсхемой $W \subset V$ и не зависят явно от отображения h.

Полный класс Сегре $s(W,V) = \sum_k s(W,V)_k$ характеризуется однозначно следующими двумя свойствами:

1) Если W — гладкое подмногообразие, тогда

$$s(W,V) = c(-\nu_W V) \frown [V].$$

Другими словами, класс Сегре пары (W,V) сводится в этом случае к классу Сегре нормального расслоения $\nu_W V$. Это же свойство выполняется, если, возможно, особая подсхема W регулярно вложена (то есть W имеет чистую коразмерность, и все ее особенности являются особенностями полных пересечений). В этом случае нормальное расслоение $\nu_W V$ также определено, и приведенная формула имеет смысл. В частности, если $W = H$ — дивизор, то

$$s(H,V) = \frac{H}{1+H} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H^{k+1}.$$

2) Если $\rho : \widetilde{V} \to V$ — собственный морфизм степени 1 схем равных размерностей и $\widetilde{W} = \rho^{-1}W \subset \widetilde{V}$, то

$$s(W, V) = \rho_* s(\widetilde{W}, \widetilde{V}).$$

Эти два свойства определяют классы Сегре полностью. Действительно, раздувая V вдоль W, можно свести задачу вычисления классов Сегре произвольной подсхемы к случаю дивизора.

Остаточные пересечения для подмногообразий

Чтобы получить более явные формулы по сравнению с (7.9,7.10), необходимо иметь больше информации об особенностях схемы $W = h^{-1}X$. Предположим, что W имеет две компоненты, $W = U \cup Z$, где компонента U гладкая и имеет ожидаемую коразмерность, $\operatorname{codim}_V U = \operatorname{codim}_Y X$. Тогда соотношения (7.8) должны быть подправлены некоторыми «остаточными» слагаемыми, которые выражаются через Z и $D = U \cap Z$. Предположения, использованные в формулах этого пункта, следующие.

- *Z гладко.* Обозначим через $\ell = \dim Z - \dim U$ превышение размерности Z над ожидаемой.
- *пересечение $D = U \cap Z$ является гладким дивизором в U.* Обозначим через ζ линейное расслоение дивизора $D \subset U$ и положим $\theta = -[D] = c_1(\zeta^*) = -c_1(\zeta)$. Ограничение ζ на D изоморфно нормальному расслоению $\zeta|_D = \nu_D U$.

Локально эти условия означают, что для подходящего выбора координат (x, y, z, w) на V с $x \in \mathbb{C}^m$, $y \in \mathbb{C}^{\ell+1}$, $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}^k$, схема $W \subset V$ задается уравнениями $x = 0$, $z\,y = 0$, в то время как уравнения подмногообразий U и Z имеют вид $x = y = 0$ и $x = z = 0$ соответственно.

Прежде чем формулировать основные результаты, мы сделаем следующее замечание по поводу обозначений.

7.5.1. Замечание. Пусть E — (виртуальное) векторное расслоение (виртуального) ранга n над U. Классы Чженя разности $E - E \otimes \zeta$ вычисляются как однородные слагаемые в разложении

$$c(E - E \otimes \zeta) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i}{\sum_{i=0}^{\infty} (1-\theta)^{n-i} c_i}, \qquad c_i = c_i(E), \quad \theta = -c_1(\zeta).$$

Заметим, что каждый член положительной степени в этом разложении имеет множитель θ. Поскольку $\theta \frown [U] = -[D]$, мы получаем

$$c_{k+1}(E - E \otimes \zeta) \frown [U] = \Delta_k \frown [D], \qquad k \geqslant 0, \tag{7.11}$$

где Δ_k — многочлены от классов $c_i = c_i(E)$ и $\theta = -c_1(\zeta)$ взвешенной степени k, заданные формальным равенством

$$\Delta_k = -\frac{1}{\theta} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_i}{\sum_{i=0}^{\infty} (1-\theta)^{n-i} c_i} \right\}_{k+1},$$

$$\Delta_0 = -n, \quad \Delta_1 = c_1 - \binom{n+1}{2} \theta, \quad \Delta_2 = 2\, c_2 - c_1^2 + (n+1)\, c_1\, \theta - \binom{n+2}{3} \theta^2, \quad \ldots .$$

Следовательно, *классы Чженя разности* $E - E \otimes \zeta$ *имеют носитель в* D *и определяются однозначно ограничением* E *на* D. *Более того, равенство* (7.11) *придает смысл классам* $c_k(E - E \otimes \zeta)$ *на* U, *даже если расслоение* E *определено только на* D *и не обязательно продолжается на все* U.

В последующих равенствах мы применяем это замечание к расслоению η ранга $n = \ell + 1$ на D, заданному равенством

$$\eta = \nu_D Z = \nu_D - \nu_Z|_D = (\nu_U + \zeta - \nu_Z)|_D.$$

7.5.2. Теорема. *В условиях сделанных предположений, классы Чженя* $c(\nu_U)$ *и* $c(\nu_X|_U)$ *отличаются слагаемыми, имеющими носитель на* D,

$$c(\nu_U - \nu_X|_U) = c(\eta - \eta \otimes \zeta) \in A^* U. \tag{7.12}$$

Подставляя выражение для η в это равенство и раскрывая скобки, мы получаем следующее эквивалентное равенство

$$c(\nu_U) = c(\nu_X|_U \otimes \zeta^* + \mathbb{C} - \zeta + (\nu_Z - \nu_Z \otimes \zeta^*)|_D). \tag{7.13}$$

7.5.3. Теорема. *В условиях сделанных предположений полный класс Сегре $s(W,V) = s(U \cup Z, V)$ задается равенством*

$$s(W,V) = s(Z,V) + c(-\nu_U - \zeta + \eta - \eta \otimes \zeta) \frown [U]. \tag{7.14}$$

Теорема 7.5.2 позволяет переписать последнее равенство в следующей эквивалентной форме

$$s(W,V) = s(Z,V) + c(-\nu_X - \zeta) \frown [U]. \tag{7.15}$$

Умножая обе части на $c(\nu_X)$, мы получаем также

$$c(\nu_X) \frown s(W,V) = c(\nu_X - \nu_Z) \frown [Z] + c(-\zeta) \frown [U],$$

что дает, ввиду (7.9,7.10), соотношения

$$[U] = h^*[X] - c_\ell(\nu_X - \nu_Z) \frown [Z], \tag{7.16}$$
$$\theta^k \frown [U] = -\theta^{k-1} \frown [D] = -c_{\ell+k}(\nu_X - \nu_Z) \frown [Z], \qquad k \geqslant 1. \tag{7.17}$$

Набросок доказательства теоремы 7.5.2. Дифференциал отображения h индуцирует морфизм векторных расслоений $\nu_U \to \nu_X|_U$. Из сделанных предположений об особенностях W следует, что этот морфизм является изоморфизмом вне D, а вблизи D он может быть записан локально в форме $\xi \oplus \eta \to \xi \oplus \zeta \otimes \eta$, $(x,y) \mapsto (x, z_0 \otimes y)$, где ξ, η — некоторые векторные расслоения, определенные в данной карте, такие, что $\eta|_D = \nu_D Z$, и z_0 — каноническое сечение расслоения ζ, обращающееся в ноль на D.

Предположим, что расщепление $\nu_U = \xi \oplus \eta$, $\nu_X|_U = \xi \oplus \zeta \otimes \eta$ продолжается глобально на все U. Тогда мы получаем $\nu_U - \nu_X|_U = \eta - \zeta \otimes \eta$, что и требовалось.

В действительности, предположение о расщеплении нормального расслоения может быть опущено. Это можно показать либо при помощи аргументов, подобных использованным в п. 7.2, либо можно применить стандартный аппарат теории пересечений (раздуть вдоль Z, затем использовать формулу раздутия для определения нормального расслоения собственного преобразования подмногообразия U, и т.д.) Хотя эти вычисления технически более сложные, они приводят, по существу, к той же самой формуле, ср. [51] $\square$

Набросок доказательства теоремы 7.5.3. Во-первых, заметим, что, раздувая V вдоль Z, можно свести доказательство утверждения теоремы к случаю, когда $Z \subset V$ является дивизором. Действительно, из сделанных предположений об особенностях W вытекает, что собственное преобразование подмногообразия U при раздутии вдоль Z отображается на U изоморфно и что линейное расслоение ζ соответствует при этом изоморфизме линейному расслоению исключительного дивизора. Следовательно, каждый член равенства (7.15) равен прямому образу соответствующего равенства в пространстве раздутия.

В случае, когда $Z \subset V$ — гиперповерхность, линейное расслоение ζ продолжается на все V как расслоение дивизора Z и, более того, $\eta = \zeta$. Следовательно, равенство (7.14) или (7.15) принимает в этом случае вид

$$s(W, V) = s(Z, V) + c(-(\nu_\varphi + \mathbb{C}) \otimes \zeta) \frown [U].$$

В таком виде равенство совпадает с явной формулой остаточного пересечения, приведенной в [28]. Действительно, положим $n = \operatorname{codim}_U V$. Тогда

$$\begin{aligned} c(-(\nu_\varphi + \mathbb{C}) \otimes \zeta) \frown [U] &= \sum_{j \geqslant 0} (1-\theta)^{-n-1-j} c_j(-\nu_\varphi) \frown [U] \\ &= \sum_{k \geqslant j \geqslant 0} \binom{n+k}{k-j} \theta^{k-j} \frown s(U, V)_{\dim U - j}. \end{aligned}$$

Именно такое выражение для класса $s(W, V) - s(Z, V)$ приведено в предложении 9.2 книги [28]. $\square$

7.5.4. Замечание. Утверждения теорем 7.5.2, 7.5.3 остаются справедливыми, если гладкие подмногообразия заменить регулярными вложениями. Стандартная техника теории пересечений, достаточная для доказательства этого обобщения, развита в [28], подробности см. в [51].

Остаточные пересечения для отображений

Пусть $f : X \to Y$ — гладкое отображение, которое не обязательно является вложением, и пусть $h : V \to Y$ — другое отображение. Расслоенное произведение $W = X \times_Y V$ определяется как подсхема в декартовом произведении $X \times V$, заданная как прообраз диагонали $\delta_Y \subset Y^2$ при отображении $f \times h : X \times V \to Y^2$. Предположим, что W имеет две компоненты, $W = U \cup Z$, удовлетворяющие предположениям предыдущего пункта, а именно:

- U и Z гладкие. Более того, U имеет «ожидаемую» размерность, $\dim V - \dim U = \dim Y - \dim X$, и мы обозначаем через ℓ превышение размерности Z над ожидаемой, $\dim Z = \dim U + \ell$.

- Пересечение $D = U \cap Z$ является гладким дивизором в U. Как и выше, мы обозначаем через ζ линейное расслоение на U, соответствующее дивизору D, и полагаем $\theta = -c_1(\zeta)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & U & \leftarrow & D \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \leftarrow & W & \leftarrow & Z \\ \downarrow f & & \downarrow & & \\ Y & \xleftarrow{h} & V & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \leftarrow & U \\ \downarrow f & & \downarrow \varphi \\ Y & \xleftarrow{h} & V \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \leftarrow & Z \\ \downarrow f & & \downarrow \psi \\ Y & \xleftarrow{h} & V \end{array} \tag{7.18}$$

Обозначим через $\varphi : U \to V$ и $\psi : Z \to V$ соответствующие отображения, индуцированные естественной проекцией $X \times V \to V$ на второй множитель. Отображение φ называется *производным отображением* отображения f посредством h.

Применяя результаты предыдущего пункта к вложению $\delta_Y \subset Y^2$ и к отображению $f \times h : X \times V \to Y^2$, мы получаем следующие соотношения, которые непосредственно вытекают из (7.12–7.17) и которые выражают различные характеристические классы, связанные с производным отображением φ через соответствующие классы для исходного отображения f.

$$c(\nu_\varphi) = c(\nu_f \otimes \zeta^* + \mathbb{C} - \zeta + (\nu_\psi - \nu_\psi \otimes \zeta^*)|_D), \qquad (7.19)$$

$$c(\nu_{\delta_Y} Y^2) \frown s(W, X \times V) = c(\nu_f - \nu_\psi) \frown [Z] + c(-\zeta) \frown [U], \qquad (7.20)$$

$$[U] = (f \times h)^*[\delta_Y] - c_\ell(\nu_f - \nu_\psi) \frown [Z], \qquad (7.21)$$

$$\theta^k \frown [U] = -\theta^{k-1} \frown [D] = -c_{\ell+k}(\nu_f - \nu_\psi) \frown [Z] \quad (k \geqslant 1). \qquad (7.22)$$

Соотношение (7.19) следует рассматривать в A^*U, несмотря на то, что расслоение $\nu_\psi|_D$ определено только на $D \subset U$ и не обязательно продолжается на все U, см. замечание 7.5.1. Равенства (7.20–7.22) выполняются в A_*W.

На практике эти равенства применяются следующим образом. Пусть P — заданный многочлен от абстрактных переменных $c_1, c_2, \ldots$. Обозначим через P_f и P_φ характеристические классы, получаемые подстановкой в P классов $c_i(\nu_f)$ и $c_i(\nu_\varphi)$ вместо c_i соответственно. Тогда равенства (7.19–7.22) позволяют выразить характеристический класс $P_\varphi \frown [U]$ производного отображения $\varphi : U \to V$ через классы, имеющие носитель в Z. Действительно, согласно (7.19), класс P_φ выражается как многочлен от классов $c_i(\nu_f)$, $c_i(\nu_\psi)$ и $\theta = -c_1(\zeta)$. При $\theta = 0$ этот многочлен обращается в P_f, поэтому он представляется в виде

$$P_\varphi = P_f - \frac{P_f - P_\varphi}{\theta}\,\theta, \quad \text{т.е.} \quad P_\varphi \frown [U] = P_f \frown [U] + \frac{P_f - P_\varphi}{\theta} \frown [D].$$

Ввиду (7.21) последнее равенство принимает вид

$$P_\varphi \frown [U] = P_f \frown (f \times h)^*[\delta_Y] - c_\ell(\nu_f - \nu_\psi)\, P_f \frown [Z] + \frac{P_f - P_\varphi}{\theta} \frown [D]. \quad (7.23)$$

Поскольку $D \subset Z$, равенство (7.23) дает желаемое представление. Соотношение (7.22) позволяет исключить из последнего слагаемого переменную θ. С другой стороны, если линейное расслоение $\zeta = \nu_D U$ и класс

$\theta = -c_1(\zeta)$, определенные на D, продолжаются на все Z, то, подставляя в последнее равенство выражение $[D] = c_{\ell+1}(\nu_f - \nu_\psi) \frown [Z]$ (7.22), мы получаем, с учетом соотношения $c_{\ell+1}(\nu_f - \nu_\psi) - \theta\, c_\ell(\nu_f - \nu_\psi) = c_{\ell+1}(\nu_f - \nu_\psi + \zeta)$, следующее равенство:

$$\begin{aligned} &P_\varphi \frown [U] = P_f \frown (f \times h)^*[\delta_Y] + R \frown [Z], \\ &\text{где} \quad R = \frac{1}{\theta}\Big(c_{\ell+1}(\nu_f - \nu_\psi + \zeta)\, P_f - c_{\ell+1}(\nu_f - \nu_\psi)\, P_\varphi\Big). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Операция θ^{-1} в кольце когомологий не определена. Поэтому множители, входящие в выражения (7.23, 7.24), нужно понимать формально, как обозначение для соответствующих полиномиальных комбинаций классов $c_i(\nu_f)$, $c_i(\nu_\psi)$ и т.п. Для завершения вычислений необходимо найти выражения для классов Чженя $c_i(\nu_\psi)$. Для этого необходима дополнительная информация об особенностях отображения $\psi : Z \to V$.

В приложениях часто бывает более естественно рассматривать не сами эти равенства, а их прямой образ в X или V соответственно при естественных проекциях

$$p_X : X \times_Y V \to X, \qquad a_V : X \times_Y V \to V.$$

Эти прямые образы проясняют также смысл члена $(f \times h)^*[\delta_Y]$: из леммы 5.6.1 главы 5 вытекают равенства

$$p_{X*}(P_f \frown (f \times h)^*[\delta_Y]) = P_f\, f^*h_*(1), \qquad p_{V*}(P_f \frown (f \times h)^*[\delta_Y]) = h^*f_*(P_f). \tag{7.25}$$

7.5.5. Замечание. Соотношения (7.19–7.22) доказаны в [51] в значительно менее ограничительных предположениях, а именно, все гладкие отображения могут быть заменены так называемыми *л.п.п. морфизмами* (морфизмами локально полных пересечений). Это обобщение очень полезно: мы применяем эти соотношения в последующих пунктах в случае, когда компонента Z схемы $W = U \cup Z \subset X \times V$ — регулярно вложенная особая (и даже не приведенная!) схема, так что пересечение $D = U \cap Z \subset U$ — дивизор с кратными компонентами.

7.6 Характеристические классы производного отображения $X(k,1) \to X(k)$

В этом пункте мы применяем формулы Клеймана для избыточных пересечений, описанные в п. 7.5, для получения характеристических классов, связанных с производным отображением $X(k,1) \to X(k)$. Случай $k = 1$ изучен подробно в [51].

Рассмотрим диаграмму (7.18), в которой в качестве отображения $f : X \to Y$ выступает исходное отображение коранга 1, а в качестве $h : V \to Y$ — композиция

$$h : X(k) \xhookrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y.$$

Тогда выполняются предположения, сделанные в начале пункта 4, с учетом обобщения, обсуждаемого в замечании 7.5.5. При этом имеют место следующие отождествления (доказательство приведено ниже).

- В качестве многообразия U и производного отображения $\varphi : U \to V$ выступает отображение $f^{(k)} : X(k,1) \to X(k)$.

- Остаточная схема Z к U в полном прообразе $(f \times h)^{-1}\delta_Y$ имеет носитель на гладком многообразии Z^{red}, являющемся образом многообразия $X(k) \simeq V$ при диагональном вложении $j \times \mathrm{id} : X(k) \to X \times X(k)$. При $k = 1$ схема Z гладкая и совпадает с этим образом, откуда, в частности, вытекают равенства $\psi = \mathrm{id}$ и $\nu_\psi = 0$.

  При $k > 1$ схема Z не является приведенной, однако справедливо следующее утверждение: *схема Z регулярно вложена, имеет кратность k вдоль $X(k)$, и при этом $\nu_\psi = \varkappa^k - \varkappa$*, где $\varkappa$ — линейное расслоение ядер вдоль $X(k)$.

- Дивизор $D \subset U$ диаграммы (7.18) является k-кратным гладкого дивизора $X(k+1) \subset X(k,1)$. Отсюда, по лемме 7.1.6, вытекает равен-

ство
$$\zeta|_D = \varkappa^k.$$

Докажем приведенные утверждения. Поскольку утверждения об особенностях схемы $W = X \times_Y V = (f \times h)^{-1}\delta_Y$ локальны, их достаточно проверять для модельного отображения ψ_p, заданного формулами (7.3). Для этого отображения многообразие $V = X(k)$ параметризует полиномиальные отображения вида
$$x \mapsto (x - x_1)^k \, g(x), \quad g \in P_{p-k},$$
а схема W вкладывается в пространство $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times P_{p-1}$ с координатами (x, x_1) в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ и задается в нем уравнениями
$$(x - x_1)^k g(x) = 0.$$
Эта схема имеет две неприводимые компоненты. Первая из них, U, задается уравнениями $g(x) = 0$, а вторая, Z, является дивизором $(x - x_1)^k = 0$, откуда и вытекают утверждения об особенностях схем Z, D. Из этих вычислений следует, дивизор $D \subset U$ совпадает с k-кратным дивизором $D^{\mathrm{red}} = X(k+1) \subset X(k,1) = U$. Отсюда, с использованием леммы 7.1.6, находим
$$\zeta|_D = \nu_D U \simeq (\nu_{D^{\mathrm{red}}} U)^{\otimes k} \simeq \varkappa^k.$$

Аналогично мы получаем, что для произвольного общего отображения коранга 1 схема Z локально вкладывается как дивизор вида kZ^{red} в гладкое многообразие S размерности $\dim Z^{\mathrm{red}} + 1$, где $Z^{\mathrm{red}} \simeq X(k)$ — диагональ в $X \times X(k)$.

Многообразие S не определено глобально, однако при $k > 1$ определена его $(k-1)$-струя вдоль Z^{red}, и, в частности, линейное расслоение $\nu_{Z^{\mathrm{red}}} S$, которое оказывается изоморфным расслоению $\varkappa$ ядер производной отображения f. Ограничение на Z^{red} отображения $\psi : Z \to V$ является изоморфизмом. Следовательно, в случае, когда многообразие S определено глобально, мы получаем
$$\nu_\psi = \nu_Z S - \nu_{Z^{\mathrm{red}}} S = \varkappa^k - \varkappa.$$

Предположение о существовании глобально определенного многообразия S можно отбросить. Обосновать это утверждение можно, например, при помощи подходящей серии раздутий. Это доказывает равенство $\nu_\psi = \varkappa^k - \varkappa$ при $k > 1$. При $k = 1$ отображение ψ является изоморфизмом, $\nu_\psi = 0$, и хотя расслоение $\varkappa$ в этом случае не определено на $V \simeq X(1) = X$, оно не входит в выражение для $\nu_\psi = \varkappa^1 - \varkappa = 0$, так что равенство $\nu_\psi = \varkappa^k - \varkappa$ можно формально применять при всех k. $\square$

Таким образом, условия для применения формул избыточного пересечения п. 7.5 выполняются, и мы приходим к соотношениям, сформулированным в следующей лемме. Эти соотношения удобно формулировать при помощи автоморфизма Ψ кольца многочленов $\mathbb{Z}[t, c_1, \ldots, c_{\ell+1}]$, заданного равенствами

$$\Psi(t) = t, \qquad 1 + \Psi(c_1) + \Psi(c_2) + \cdots = \frac{(1+t)^\ell}{1-t}\left(1 + \frac{c_1}{1+t} + \frac{c_2}{(1+t)^2} + \ldots\right)$$

(в обоих рядах нужно рассматривать члены до порядка $\ell + 1$, либо можно рассматривать бесконечные ряды, если положить формально $c_{\ell+1+k} = t^k c_{\ell+1}$).

Обозначим через $\Psi^k = \Psi \circ \cdots \circ \Psi$ k-ю итерацию этого автоморфизма. Если рассматривать формально c_i как i-й класс Чженя виртуального ℓ-мерного расслоения ν_f и $-t$ — как первый класс Чженя линейного расслоения $\varkappa$, то

$$\Psi^k(c_i) = c_i(\nu_f \otimes \varkappa^{*k} + \varkappa^{*(k-1)} - \varkappa).$$

Мы обозначаем через $c_i = c_i(\nu_f), m_{\underline{\alpha}}, n_{\underline{\alpha}}, \ldots$ различные характеристические классы, связанные с исходным отображением f и через $c_i^{(k)} = c_i(\nu_{f^{(k)}}), m_{\underline{\alpha}}^{(k)}, n_{\underline{\alpha}}^{(k)}, \ldots$ аналогичные классы, связанные с производным отображением $f^{(k)}$. Положим также $\sigma_0 = \Psi^{-1}(c_{\ell+1}) = c_{\ell+1} - t\, c_\ell$.

7.6.1. Лемма (основные соотношения).

1) $m_{k,\underline{\alpha}} = j_{k*}(n_{\underline{\alpha}}^{(k)}) = j_{k*} f_*^{(k)}(m_{\underline{\alpha}}^{(k)})$.

2) *Для всякого характеристического класса $P \in \mathcal{M}$, заданного многочленом от образующих c_i, выполняется соотношение*

$$f_*^{(k)}(P^{(k)}) = \Big(f^*f_*(P) + \Phi_k(P)\Big)\Big|_{X(k)}, \quad \text{где} \quad \Phi_k(P) = \frac{1}{t}(\sigma_0 P - \Psi^k(\sigma_0 P)). \tag{7.26}$$

3) *Гомоморфизм j_{k*} действует на характеристических классах умножением на многочлен R_k,*

$$j_{k*}(P|_{X(k)}) = R_k\, P. \tag{7.27}$$

В последнем равенстве $R_k = m_k = \sigma_1 \dots \sigma_{k-1}$ — многочлен Тома особенности $\Sigma^{1_{k-1}}$, предоставляемый теоремой 7.3.1.

При $k > 1$ класс $t \in H^*(X(k))$ в правой части равенства (7.26) — взятый со знаком минус первый класс линейного расслоения ядер $\varkappa = \ker df$. В случае $k = 1$, равно как и в правой части равенства (7.27), этот класс t имеет виртуальный смысл, т.е. $t^k c_{\ell+1}$ следует понимать просто как обозначение для класса $c_{\ell+1+k}$.

Доказательство. Соотношение 1 очевидным образом вытекает из теоремы 7.1.7: соответствующие циклы особенностей совпадают.

Доказательство утверждения 3 использует те же рассуждения, что и доказательство предложения 7.2.5 (которое является частным случаем утверждения 3 теоремы при $k = 2$).

Наконец, решающее утверждение 2 вытекает из (7.24) (с учетом замечания 7.5.5 и соотношений (7.19), (7.25)). Действительно, подставляя в (7.19) найденные значения $\zeta = \varkappa^k$, $\nu_\psi = \varkappa^k - \varkappa$, мы получаем

$$c(\nu_{f^{(k)}}) = c(\nu_f \otimes \varkappa^{*k} + \varkappa^{*(k-1)} - \varkappa), \quad \text{т.е.} \quad P_\varphi = P^{(k)} = f^{(k)*}\Psi^k(P).$$

Аналогично, подставляя в (7.24) значения

$$[Z] = k[X(k)], \quad \theta = kt, \quad c_{\ell+1}(\nu_f - \nu_\psi + \zeta) = \sigma_0, \quad c_{\ell+1}(\nu_f - \nu_\psi) = \Psi^k(\sigma_0) = \sigma_k,$$

мы получаем искомое выражение для остаточного класса

$$R \frown [Z] = \frac{1}{kt}\Big(\sigma_0 P - \sigma_k \Psi^k(P)\Big) \frown k[X(k)] = \Phi_k(P) \frown [X(k)]. \qquad \square$$

Прежде чем переходить к дальнейшим вычислениям, отметим, что на классах $\sigma_k = c_{\ell+1} + (k-1)t\sum_{j=0}^{\ell}(kt)^j c_{\ell-j}$ действие автоморфизма Ψ сводится к

$$\Psi^p \sigma_q = \sigma_{p+q}.$$

Отсюда мгновенно вытекает соотношение

$$R_p\,\Psi^p(\sigma_0 R_q) = R_{p+q}, \quad p, q \geqslant 1. \tag{7.28}$$

7.6.2. Примеры. Последовательно применяя соотношения леммы, мы получаем для классов мультиособенностей малых кратностей равенства:

$$\begin{aligned}
m_r &= R_r;\\
n_r &= f_*(m_r) = f_*(R_r);\\
m_{q,r} &= R_q\Big(f^*f_*(R_r) + \Phi_q(R_r)\Big) = R_q f^*f_*(R_r) + R_{q,r},\\
&\qquad \text{где } R_{q,r} = R_q\Phi_q(R_r) = R_q\frac{1}{t}(\sigma_0 R_r - \Psi^q(\sigma_0 R_r)) = \frac{1}{t}(\sigma_0 R_q R_r - R_{q+r});\\
n_{q,r} &= f_*(m_{q,r}) = f_*(R_q)f_*(R_r) + f_*(R_{q,r});\\
m_{p,q,r} &= R_p\Big(\Big(f^*f_*(R_q) + \Phi_p(R_q)\Big)\Big(f^*f_*(R_r) + \Phi_p(R_r)\Big) + f^*f_*(R_{q,r}) + \Phi_p(R_{q,r})\Big)\\
&= R_p f^*f_*(R_q)f^*f_*(R_r) + R_{p,q}f^*f_*(R_r) + R_{p,r}f^*f_*(R_q) + R_p f^*f_*(R_{q,r}) + R_{p,q,r},\\
&\qquad \text{где } R_{p,q,r} = R_p\Phi_p(R_q)\Phi_p(R_r) + R_p\Phi_p(R_{q,r}).
\end{aligned}$$

Подставив полученные уже выражения для классов Φ_p, $R_{q,r}$, раскрыв скобки и применив равенство (7.28), мы получаем такое же выражение для класса $R_{p,q,r}$, какое утверждается в теореме 7.4.1.

Доказательство теоремы 7.4.1. Рассуждая по индукции, предположим, что класс $n_{\underline{\alpha}}$ для заданного разбиения $\underline{\alpha} = (a_1, \ldots, a_r)$ задается равенством (7.6). Тогда по лемме 7.6.1 мы получаем

$$m_{q,\underline{\alpha}} = R_q \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} (f^*f_*(R_{\underline{\alpha}_{J_1}}) + \Phi_q(R_{\underline{\alpha}_{J_1}}))\dots(f^*f_*(R_{\underline{\alpha}_{J_k}}) + \Phi_q(R_{\underline{\alpha}_{J_k}})).$$

Раскрывая скобки, мы получаем выражение в форме (7.4), где

$$R_{q,\underline{\alpha}} = R_q \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} \Phi_q(R_{\underline{\alpha}_{J_1}})\dots\Phi_q(R_{\underline{\alpha}_{J_k}}). \tag{7.29}$$

Это дает прямое доказательство равенства (7.4). Заметим, что из приведенного выражения не видно, что класс $R_{a_1,\dots,a_r}$ не зависит от порядка элементов $a_1,\dots,a_r$.

Нам осталось показать, что многочлены $R_{\underline{\alpha}}$, определяемые рекуррентными соотношениями (7.29), (7.26), даются явной формулой (7.6). Это утверждение является полиномиальным тождеством, которое может быть доказано чисто алгебраически. Для доказательства мы применяем комбинаторную лемму 5.2.4 главы 5 к многочленам $R_{\underline{\alpha}}$, перенормированным подходящим образом. А именно, положим

$$Q_{\underline{\alpha}} = \sigma_0\,(-1)^{r-1}t^{r-1}R_{\underline{\alpha}}, \quad Q_{\underline{\alpha}}^{(d)} = \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} d^{k-1}Q_{\underline{\alpha}_{J_1}}\dots Q_{\underline{\alpha}_{J_k}}.$$

Тогда, согласно лемме 5.2.4, имеет место тождество

$$Q_{\underline{\alpha}}^{(d)} = \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} (d-1)\dots(d-k+1)\,Q^{(1)}_{\alpha_{J_1}}\dots Q^{(1)}_{\alpha_{J_k}}. \tag{7.30}$$

В терминах многочленов $Q_{\underline{\alpha}}$ равенства (7.28) и (7.29) принимают вид

$$Q_p\,\Psi^p(Q_q) = Q_{p+q}, \quad p,q \geqslant 1, \tag{7.31}$$

$$Q_{q,\underline{\alpha}} = Q_q \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} (\Psi^q(Q_{\underline{\alpha}_{J_1}}) - Q_{\underline{\alpha}_{J_1}})\dots(\Psi^q(Q_{\underline{\alpha}_{J_1}}) - Q_{\underline{\alpha}_{J_k}}) \tag{7.32}$$

соответственно. Раскрывая в (7.32) скобки и группируя отдельно члены, содержащие Ψ^q, и члены, не содержащие Ψ^q, мы получаем

$$Q_{q,\underline{\alpha}} = Q_q\Psi^q(Q^{(1)}_{\underline{\alpha}}) - \sum_{\{1,\dots,r\}=I\sqcup J} Q_q\Psi^q(Q^{(1)}_{\underline{\alpha}_I})\,Q^{(-1)}_{\underline{\alpha}_J},$$

где суммирование производится по всем разбиениям множества $\{1,\dots,r\}$ в несвязное объединение двух подмножеств I и J, таких, что J не пусто. С другой стороны, если в равенстве (7.30) при $d=0$ собрать вместе слагаемые с одним и тем же подмножеством J_1, мы получим

$$Q_{q,\underline{\alpha}} = Q^{(1)}_{q,\underline{\alpha}} - \sum_{\{1,\dots,r\}=I\sqcup J} Q^{(1)}_{q,\underline{\alpha}_I} Q^{(-1)}_{\underline{\alpha}_J}.$$

Сравнивая последние два выражения, мы получаем по индукции равенство

$$Q^{(1)}_{q,\underline{\alpha}} = Q_q \Psi^q(Q^{(1)}_{\underline{\alpha}}),$$

откуда с использованием равенства (7.31) мы получаем

$$Q^{(1)}_p = Q_p, \quad Q^{(1)}_{p,q} = Q_p\Psi^p(Q_q) = Q_{p+q}, \quad Q^{(1)}_{p,q,r} = Q_p\Psi^p(Q_{q+r}) = Q_{p+q+r}, \quad \dots,$$

то есть $Q^{(1)}_{\underline{\alpha}} = Q_{|\underline{\alpha}|} = \sigma_0\, R_{|\underline{\alpha}|}$, где $|\underline{\alpha}| = \sum a_i$. Подставляя эти выражения в (7.30), мы получаем окончательно

$$\sigma_0\,(-1)^{r-1}t^{r-1}R_{\underline{\alpha}} = \sum_{\{1,\dots,r\}=J_1\sqcup\dots\sqcup J_k} (-1)^{k-1}\,(k-1)!\;\sigma_0^k\,R_{|\underline{\alpha}_{J_1}|}\dots R_{|\underline{\alpha}_{J_1}|}.$$

Поскольку в кольце многочленов нет делителей нуля, последнее равенство эквивалентно доказываемому равенству (7.6). $\square$

7.7 Характеристические классы производного отображения в общем случае

Пусть задано общее отображение $f: X\to Y$ коранга 1. Напомним, что со всяким разбиением $\underline{\alpha}=(a_1,\dots,a_r)$ связано гладкое многообразие $X(\underline{\alpha})$, задаваемое как замыкание множества наборов попарно различных точек $(x_1,\dots,x_r)\in X^r$, таких, что $f(x_1)=\dots=f(x_r)$, и f имеет особенность $\Sigma^{1_{a_i-1}}$ в точке x_i при $i=1,\dots,r$.

Мы рассматриваем многообразие $X(\underline{\alpha})$ вместе с его естественной проекцией на первый множитель

$$p^{\underline{\alpha}} : X(\underline{\alpha}) \to X, \qquad (x_1, \ldots, x_r) \mapsto x_1.$$

Характеристические классы $c_i = c_i(\nu_f)$, $t = -c_1(\varkappa)$, связанные с отображением f, переносятся посредством $p^{\underline{\alpha}}$ на $X(\underline{\alpha})$, и мы будем часто опускать $p^{\underline{\alpha}*}$ в обозначении поднятий этих классов. Формально, поднятие класса t определено на всем $X(\underline{\alpha})$ лишь при $a_1 > 1$, однако рассуждения п. 7.2 позволяют во многих случаях и при $a_1 = 1$ придать смысл полиномиальным комбинациям характеристических классов, содержащим t.

Отображение $p^{\underline{\alpha}}$ позволяет также переносить на X всевозможные характеристические классы, определенные на $X(\underline{\alpha})$. Всякий класс, представленный в виде

$$p^{\underline{\alpha}}_*(P) \in H^*(X), \quad \text{где} \quad P \in H^*(X(\underline{\alpha})),$$

называется *производным* характеристическим классом, ассоциированным с мультиособенностью $\underline{\alpha}$. В частности, мы имеем, согласно определению,

$$m_{\underline{\alpha}} = p^{\underline{\alpha}}_*(1).$$

В дальнейшем нам будет удобно несколько изменить обозначение и считать, что разбиение, задающее данный тип мультиособенности, содержит $r + 1$ компонент и имеет вид $(\alpha_0, \underline{\alpha}) = (a_0, a_1, \ldots, a_r)$ В приведенных ниже формулах для производных классов элемент $P \in H^*(X(a_0, \underline{\alpha}))$ выражается полиномиально через классы $c_i = c_i(\nu_f)$, $t = -c_1(\varkappa)$ и еще один дополнительный класс $\theta_{\underline{\alpha}} \in H^2(X(a_0, \underline{\alpha}))$, определяемый следующим образом. Обозначим через D_i пересечение $X(a_0, \underline{\alpha})$ с диагональю $x_0 = x_i$. Нетрудно видеть (см. следствие 7.1.5), что $D_i \subset X(a_0, \underline{\alpha})$ — гладкая гиперповерхность, естественно изоморфная $D_i \simeq X(a_0 + a_i, \underline{\alpha}_i)$, где $\alpha_i = (a_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, a_r)$. Тогда мы полагаем

$$\theta_{\underline{\alpha}} = -c_1(\zeta_{\underline{\alpha}}),$$

где $\zeta_{\underline{\alpha}}$ — линейное расслоение, ассоциированное с дивизором

$$D = a_1 D_1 + \dots + a_r D_r.$$

Класс $\theta_{\underline{\alpha}}$ совпадает с ограничением на $X(a_0, \underline{\alpha}) \subset X(1, \underline{\alpha})$ соответствующего класса, определенного для $a_0 = 1$, поэтому мы опускаем зависимость от a_0 в определении класса $\theta_{\underline{\alpha}}$. Приведенное определение класса $\theta_{\underline{\alpha}}$ имеет смысл при $r > 0$. Если же $r = 0$, то дивизор D нулевой, и мы полагаем $\theta_{\varnothing} = 0$.

При $\alpha_0 = 1$ мы рассматриваем также отображение

$$f^{\underline{\alpha}} : X(1, \underline{\alpha}) \to X(\underline{\alpha}),$$

задаваемое забыванием точки x_0 набора $(x_0, \dots, x_r) \in X(1, \underline{\alpha})$. Это отображение совпадает, с точностью до незначительного изменения обозначений, с производным отображением теоремы 7.1.8. Отметим сразу же, что проекция $p^{1,\underline{\alpha}} : X(1, \underline{\alpha}) \to X$, переводит критическое множество $X(2, \underline{\alpha}) \subset X(1, \underline{\alpha})$ производного отображения $f^{\underline{\alpha}}$ в критическое множество $X(2) \subset X$ исходного отображения f. При этом, как нетрудно видеть, расслоение ядер производной отображения $f^{\underline{\alpha}}$ изоморфно обратному образу расслоения ядер производной отображения f. Поэтому мы сохраняем обозначения $\varkappa$ и $-t = c_1(\varkappa)$ для обоих расслоений и их первых классов Чженя.

7.7.1. Лемма (основные соотношения). 1. *Классы Чженя производного отображения $f^{\underline{\alpha}}$ выражаются полиномиально через классы $c_i = c_i(\nu_f)$, $t = -c_1(\varkappa)$, $\theta_{\underline{\alpha}} = -c_1(\zeta_{\underline{\alpha}})$,*

$$\begin{aligned} c(\nu_{f^{\underline{\alpha}}}) &= c(\nu_f \otimes \zeta_{\underline{\alpha}}^* + \varkappa \otimes \zeta_{\underline{\alpha}}^* - \varkappa) \\ &= \frac{(1+\theta_{\underline{\alpha}})^{\ell+1}}{1-t} \left(1 + \frac{a_1 - t}{1+\theta_{\underline{\alpha}}} + \frac{a_2 - t\, a_1}{(1+\theta_{\underline{\alpha}})^2} + \frac{a_3 - t\, a_2}{(1+\theta_{\underline{\alpha}})^3} + \dots \right). \end{aligned} \tag{7.33}$$

2. *Для всякого многочлена $P(\theta)$ от переменных c_i, t, θ имеет место следующее соотношение, выражающее соответствующий этому многочлену производный характеристический класс, ассоциированный с данной мультиособенностью $(a_0, \underline{\alpha})$, через производные характеристические*

классы, ассоциированные с более простыми мультиособенностями $(1,\underline{\alpha})$, $(a_i,\underline{\alpha}_i)$, *где* $\underline{\alpha}_i=(a_1,\dots,p_{i-1},p_{i+1},\dots,a_r)$*:*

$$p_*^{a_0,\underline{\alpha}}(P(\theta_{\underline{\alpha}}))=p_*^{1,\underline{\alpha}}(\widetilde{R}_{a_0}(\theta_{\underline{\alpha}})\,P(\theta_{\underline{\alpha}})), \tag{7.34}$$

$$p_*^{1,\underline{\alpha}}(P(\theta_{\underline{\alpha}}))=P(0)f^*n_{\underline{\alpha}}+\sum_{i=1}^{r}a_i\,p_*^{a_i,\underline{\alpha}_i}(\Phi(\theta_{\underline{\alpha}_i}+a_it)), \tag{7.35}$$

где

$$\Phi(\theta)=\frac{\sigma(0)P(0)-\sigma(\theta)P(\theta)}{\theta}.$$

Многочлены $\sigma(\theta)=c_{\ell+1}+(\theta-t)\sum_{i=0}^{\ell}\theta^i c_{\ell-i}$ и $\widetilde{R}_p(\theta)=\prod_{k=1}^{p-1}\sigma(\theta+kt)$ в приведенных формулах имеют тот же смысл, что и в теореме 7.4.3.

Доказательство теоремы 7.4.3. Применим соотношения (7.34–7.35) к каждому слагаемому в правой части равенства (7.35). Продолжая далее таким же образом, через r шагов мы приходим к выражению вида

$$p_*^{a_0,\underline{\alpha}}(P(\theta_{\underline{\alpha}}))=R(a_0,\underline{\alpha},P,\varnothing)+\sum_{\varnothing\neq J\subset\{1,\dots,r\}}R(a_0,\underline{\alpha},P,J)\;f^*n_{\underline{\alpha}_J},$$

где $R(a_0,\underline{\alpha},P,J)$ — универсальный многочлен от классов $c_i=c_i(\nu_f)$, однозначно определяемый соответствующими данными. Внимательный анализ рекуррентных соотношений показывает, что при $P(\theta)=1$ многочлен $R(a_0,\underline{\alpha},1,J)$ однозначно определяется мультииндексом $(a_0,\underline{\alpha}_{\overline{J}})$, где $\overline{J}=\{1,\dots,r\}\setminus J$, и дается формулой теоремы 7.35. Мы оставляем читателю подробности этих громоздких, но прямолинейных комбинаторных вычислений. Таким образом, мы приходим к равенству

$$m_{a_0,\underline{\alpha}}=p_*^{a_0,\underline{\alpha}}(1)=R_{a_0,\underline{\alpha}}+\sum_{I\sqcup J\subset\{1,\dots,r\},\ J\neq\varnothing}R_{a_0,\underline{\alpha}_I}\,f^*n_{\underline{\alpha}_J},$$

откуда вытекает еще одно независимое доказательство соотношений (7.4–7.5) и теоремы 7.4.3. □

Соотношения леммы 7.7.1 выводятся из формул избыточного пересечения аналогично тому, как это сделано в доказательстве леммы 7.6.1. Действительно, многообразие $U = X(1, \underline{\alpha})$ вкладывается в произведение $X \times V$, где $V = X(\underline{\alpha})$ как одна из компонент схемы $W = X \times_Y V$, и отображение $\varphi^{\underline{\alpha}}$ можно рассматривать как производное отображение $\varphi : U \to V$ в смысле п. 7.5.

Мы хотим показать, что в этой ситуации также выполняются условия применения формул остаточного пересечения, обсуждавшиеся в п. 4, при этом имеют место следующие отождествления.

- Остаточная схема Z к U в $W = X \times_Y V \subset X \times V$ имеет носитель на объединении гладких многообразий Z_i, $i = 1, \ldots, r$, где $Z_i \simeq X(a_i, \underline{\alpha}_i) \subset X \times X(\underline{\alpha})$ задается как график проекции на i-й множитель $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto x_0 = x_i$. Схема Z особа в общем случае, однако она регулярно вложена и относительные классы Чженя проекции $\psi : Z \to V$ корректно определены. При этом выполняются равенства
$$[Z] = a_1 [Z_1] + \cdots + a_r [Z_r], \qquad Z_i \simeq X(a_i, \underline{\alpha}_i),$$
$$c(\nu_\psi)|_{Z_i} = c(\zeta_{\underline{\alpha}_i} \otimes \varkappa^{a_i} - \varkappa). \tag{7.36}$$
В последнем равенстве расслоение $\varkappa$ определено глобально на всем Z_i только при $a_i > 1$. Если же $a_i = 1$, то выражение в правой части имеет следующий смысл. Каждое слагаемое положительной степени в классе $c(\zeta_{\underline{\alpha}_i} \otimes \varkappa - \varkappa)$ имеет сомножитель $\theta_{\underline{\alpha}_i} = -c_1(\zeta_{\underline{\alpha}_i})$, поэтому этот класс имеет носитель на дивизоре, задающем расслоение $\zeta_{\underline{\alpha}_i}$, а на этом дивизоре $\varkappa$ уже определено.

- Дивизор $D \subset U$ диаграммы (7.18) имеет вид
$$D = a_1 D_1 + \cdots + a_r D_r, \quad \text{где} \quad D_i \simeq X(a_i + 1, \underline{\alpha}_i) = U \cap Z_i.$$

- Линейные расслоения $\zeta_{\underline{\alpha}}$ на $U = X(1, \underline{\alpha})$ и $\zeta_{\underline{\alpha}_i}$ на $Z_i = X(a_i, \underline{\alpha}_i)$ согласованы следующим образом на пересечении $D_i = U \cap Z_i$:
$$\zeta_{\underline{\alpha}}|_{D_i} \simeq \zeta_{\underline{\alpha}_i} \otimes \varkappa^{a_i}, \qquad \text{т.е.} \qquad \theta_{\underline{\alpha}}|_{D_i} = \theta_{\underline{\alpha}_i}|_{D_i} + a_i\, t. \tag{7.37}$$

Докажем приведенные утверждения. Поскольку утверждения об особенностях схемы $W = X \times_Y V$ локальны, их достаточно проверять для случая, когда отображение f является модельным отображением, заданным формулами (7.3). Для этого отображения многообразие $V = X(\underline{\alpha})$ параметризует полиномиальные отображения вида

$$x \mapsto (x - x_1)^{a_1} \dots (x - x_r)^{a_r}\, g(x), \quad g \in P_{p-|\underline{\alpha}|},$$

а схема W вкладывается в пространство $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \times P_{p-|\underline{\alpha}|}$ с координатами $(x, x_1, \dots, x_r)$ в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ и задается в нем уравнениями

$$(x - x_1)^{a_1} \dots (x - x_r)^{a_r} g(x) = 0 \in \mathbb{C}^{\ell+1}.$$

Эта схема приводима и имеет следующие две компоненты. Первая из них, U, задается уравнениями $g(x) = 0$, а вторая, Z, является дивизором $(x - x_1)^{a_1} \dots (x - x_r)^{a_r} = 0$, откуда и вытекают утверждения об особенностях схем W, Z, D.

Из этих вычислений следует, что схема Z локально вкладывается как дивизор вида $Z = a_1 Z_1 + \dots + a_r Z_r$ в гладкое многообразие S размерности $\dim X(\underline{\alpha}) + 1$. Предположим, что многообразие S определено глобально. Тогда имеет место изоморфизм

$$\nu_{Z_i} S|_{D_i} = \nu_{D_i} U = \varkappa|_{D_i},$$

так что расслоение $\varkappa$ продолжается с D_i на Z_i как расслоение дивизора $Z_i \subset S$. Кроме того, отождествляя линейные расслоения и соответствующие им дивизоры, мы имеем равенства

$$\zeta_{\underline{\alpha}} = [Z] = \sum_{j=1}^{r} a_j\, [Z_j], \quad \zeta_{\underline{\alpha}_i} = \sum_{j \neq i} a_j\, [Z_j] = [Z] - a_i [Z_i],$$

откуда вытекает (7.37).

Заметим, что ограничение на Z_i проекции $\psi : Z \to V$ является изоморфизмом. Следовательно,

$$c(\nu_\psi | Z_i) = c(\nu_Z S - \nu_{Z_i} S) = c(\zeta_{\underline{\alpha}} - \varkappa) = c(\zeta_{\underline{\alpha}_i} \otimes \varkappa^{a_i} - \varkappa),$$

что доказывает (7.36).

Приведенные рассуждения применимы в предположении, что многообразие S определено глобально, что вовсе не обязательно выполняется. Более того, если $a_i = 1$ для некоторого i, то в точках дополнения $Z_i \setminus D_i$ у этого многообразия не определена даже 1-струя, то есть не определено линейное расслоение $\nu_{Z_i} S$. Тем не менее, предположение о существовании S можно отбросить: можно проверить, что во всех доказываемых равенствах классы определены таким образом, что их носитель содержится в действительности в схеме (возможно, меньшей), на которой все используемые расслоения определены. $\square$

Доказательство леммы 7.7.1. Из (7.36), (7.37), вытекает соотношение

$$c(\nu_\psi|_D) = c(\zeta_{\underline{\alpha}} - \varkappa).$$

Подставляя это выражение в (7.19), мы приходим, после раскрытия скобок, к равенству (7.33) леммы. Из него вытекает, в частности, что классы σ_k, вычисленные для отображения $f^{\underline{\alpha}}$, имеют вид

$$\sigma_k(f^{\underline{\alpha}}) = c_{\ell+1}((\nu_{f^{\underline{\alpha}}} + \varkappa) \otimes \varkappa^{*k}) = c_{\ell+1}((\nu_f + \varkappa) \otimes \zeta_{\underline{\alpha}} \otimes \varkappa^{*k}) = \sigma(\theta_{\underline{\alpha}} + kt).$$

Поскольку подмногообразие $X(a_0, \underline{\alpha}) \subset X(1, \underline{\alpha})$ является циклом особенности $\Sigma^{1_{a_0-1}}$ производного отображения $f^{\underline{\alpha}}$, двойственный ему класс когомологий задается, по теореме 7.3.1, равенством

$$[X(a_0, \underline{\alpha})] = \prod_{k=1}^{a_0-1} \sigma_k(f^{\underline{\alpha}}) = \prod_{k=1}^{a_0-1} \sigma(\theta_{\underline{\alpha}} + k\,t) = \widetilde{R}_{\underline{\alpha}}(\theta_{\underline{\alpha}}) \in H^*(X(1, \underline{\alpha})).$$

Это равенство вместе с формулой проекции доказывает соотношение (7.34) (строго говоря, вместо формулы проекции нужно применять соображения, аналогичные доказательству предложения 7.2.5, однако, согласно сформулированному принципу 7.2.4, это не меняет существа дела).

Докажем теперь формулу (7.35). Для этого представим класс $P(\theta_{\underline{\alpha}})$ в виде $P(\theta_{\underline{\alpha}}) = P(0) + \Delta P(\theta_{\underline{\alpha}})\,\theta_{\underline{\alpha}}$, где $\Delta P(\theta) = \frac{P(\theta)-P(0)}{\theta}$. Для производного класса, задаваемого первым слагаемым этого разложения, применимо соотношение (7.21), которое дает, с учетом первой из формул (7.25),

$$
\begin{aligned}
p_*^{1,\underline{\alpha}}(P(0)) = P(0)p_*^{1,\underline{\alpha}}(1) &= P(0)f^*n_{\underline{\alpha}} - p_*^{\underline{\alpha}}(P(0)\,c_\ell(\nu_f-\nu_\psi)\frown[Z]) \\
&= P(0)f^*n_{\underline{\alpha}} - \sum_{i=1}^r p_*^{\underline{\alpha}}(P(0)\,c_\ell(\nu_f-\nu_\psi)\frown a_i\,[Z_i]) \\
&= P(0)f^*n_{\underline{\alpha}} - \sum_{i=1}^r a_i\,p_*^{a_i,\underline{\alpha}_i}(P(0)\,c_\ell(\nu_f+\varkappa-\zeta_{\underline{\alpha}_i}\otimes\varkappa^{a_i})).
\end{aligned}
$$

Аналогично, применяя соотношение (7.22) (при $k=1$), находим

$$
\begin{aligned}
&p_*^{\underline{\alpha}}([D]) = -p_*^{\underline{\alpha}}(c_{\ell+1}(\nu_f-\nu_\psi)\frown[Z]) \\
&\qquad = -\sum_{i=1}^r a_i\,p_*^{a_i,\underline{\alpha}_i}(c_{\ell+1}(\nu_f-\zeta_{\underline{\alpha}_i}\otimes\varkappa^{a_i}+\varkappa)) = -\sum_{i=1}^r a_i\,p_*^{a_i,\underline{\alpha}_i}(\sigma(\theta_{\underline{\alpha}_i}+a_i\,t)),
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
p_*^{1,\underline{\alpha}}(\Delta P(\theta_{\underline{\alpha}})\,\theta) &= -p_*^{\underline{\alpha}}(\Delta P(\theta_{\underline{\alpha}})\frown D) \\
&= -\sum_{i=1}^r a_i\,p_*^{a_i,\underline{\alpha}_i}(\Delta P(\theta_{\underline{\alpha}_i}+a_i\,t)\,\sigma(\theta_{\underline{\alpha}_i}+a_i\,t)).
\end{aligned}
$$

Сложив полученные выражения для $p_*^{1,\underline{\alpha}}(P(0))$, $p_*^{1,\underline{\alpha}}(\Delta P(\theta_{\underline{\alpha}})\,\theta)$ и сгруппировав члены, мы получаем, с учетом равенства

$$
c_{\ell+1}(\nu_f+\varkappa-\zeta_{\underline{\alpha}})) - \theta_{\underline{\alpha}}\,c_\ell(\nu_f+\varkappa-\zeta_{\underline{\alpha}}) = c_{\ell+1}(\nu_f+\varkappa) = \sigma(0),
$$

в точности (7.35). $\square$

7.8 Целочисленные соотношения

В пункте 5.6 сформулирован целый ряд гипотетических обобщений теорем 5.1.1 и 5.2.2 о существовании универсальных формул для классов мультиособенностей. Прямые методы этой главы позволяют доказать все эти обобщения для случая, когда отображение f является отображением коранга 1. Поскольку доказательства достаточно громоздки, а обобщения, как правило, не дают новых приложений, мы приведем здесь доказательство лишь одного из них.

Пусть $\overline{m}_{a_0,\underline{\alpha}}$, $\overline{n}_{\underline{\alpha}}$ — классы приведенных циклов мультиособенностей, так что $m_{a_0,\underline{\alpha}} = \#\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})\,\overline{m}_{\underline{\alpha}}$, $n_{a_0,\underline{\alpha}} = \#\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})\,\overline{n}_{\underline{\alpha}}$. Положим

$$\widetilde{R}^{\mathrm{red}}_{a_0,\underline{\alpha}}(\theta) = \tfrac{1}{\#\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})}\widetilde{R}_{a_0,\underline{\alpha}}, \qquad R^{\mathrm{red}}_{a_0,\underline{\alpha}} = \widetilde{R}^{\mathrm{red}}_{a_0,\underline{\alpha}}(0) = \tfrac{1}{\#\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})}\widetilde{R}_{a_0,\underline{\alpha}}(0),$$

где $\widetilde{R}_{a_0,\underline{\alpha}}(\theta)$ — многочлены от образующих $c_1,\dots,c_{\ell+1},t,\theta$, задаваемые рекуррентными формулами 7.7. По построению, эти многочлены не зависят от порядка элементов набора $\underline{\alpha} = (a_1,\dots,a_r)$.

7.8.1. Теорема. *Для всякой мультиособенности* $(a_0,\underline{\alpha}) = (a_0,\dots,a_r)$ *многочлены* $\widetilde{R}^{\mathrm{red}}_{a_0,\underline{\alpha}}(\theta)$ *и* $R^{\mathrm{red}}_{a_0,\underline{\alpha}} = \widetilde{R}^{\mathrm{red}}_{a_0,\underline{\alpha}}(0)$ *имеют целые коэффициенты, и в кольце целочисленных когомологий многообразия* X *выполняется равенство*

$$\overline{m}_{a_0,\underline{\alpha}} = R^{\mathrm{red}}_{a_0,\underline{\alpha}} + \sum_{\underline{\alpha}_J \subsetneq (\alpha_1,\dots,\alpha_r)} R^{\mathrm{red}}_{a_0,\underline{\alpha}_J}\,\overline{n}_{\underline{\alpha}_{\overline{J}}}, \tag{7.38}$$

где суммирование производится по всем различным *неупорядоченным поднаборам* $\underline{\alpha}_J$ *набора* $\underline{\alpha} = (a_1,\dots,a_r)$, *и где* $\underline{\alpha}_{\overline{J}}$ *обозначает дополнительный набор.*

Доказательство проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 7.4.3, только вместо многообразий мультиособенностей $X(\underline{\alpha})$ нужно рассматривать утонченные многообразия мультиособенностей, рассмотренные в теореме 7.1.8. В терминологии [52] этот подход носит название *метода схем Гильберта*, однако мы рассматриваем его как вариант метода итерации.

Предположим, что данное разбиение $\underline{\alpha}$ содержит k_1 элементов, равных b_1, k_2 элементов, равных b_2, и т.д., причем все b_i попарно различны,

$$\underline{\alpha} = (b_{1k_1};\dots;b_{sk_s}).$$

Тогда группа $\mathrm{Aut}(\underline{\alpha}) = S(k_1) \times \cdots \times S(k_s)$ действует на многообразиях мультиособенностей $X(\underline{\alpha})$, $X(a_0, \underline{\alpha})$, и соответствующие многообразия орбит $V(\underline{\alpha}) = X(\underline{\alpha})/\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})$, $U(a_0; \underline{\alpha}) = X(a_0, \underline{\alpha})/\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})$ являются гладкими, согласно теореме 7.1.8.

Естественная проекция $p_X : U(a_0; \underline{\alpha}) \to X$ на первый множитель позволяет определить *утонченные производные характеристические классы* данной мультиособенности

$$u_{a_0;\underline{\alpha}}(P) = p_{X*}(P) \in H^*(X), \quad \text{где} \quad P \in H^*(U(a_0; \underline{\alpha})).$$

В частности,

$$\overline{m}_{a_0,\underline{\alpha}} = p_{X*}([U(a_0; \underline{\alpha})]) = u_{a_0;\underline{\alpha}}(1).$$

По аналогичным соображениям, имеет место равенство

$$\overline{n}_{\underline{\alpha}} = h_*([V(\underline{\alpha})]),$$

где $h : V(\underline{\alpha}) \to Y$ сопоставляет набору точек $(x_1, \ldots, x_r)$, заданному с точностью до действия группы $\mathrm{Aut}(\underline{\alpha})$, общее значение $f(x_1) = \cdots = f(x_r) \in Y$.

На многообразии $U(a_0; \underline{\alpha}) = U(a_0; b_{1k_1}; \ldots; b_{sk_s})$ имеется s гладких гиперповерхностей вида

$$D_i \simeq U(a_0 + b_i; b_{1k_1}; \ldots; b_{ik_s-1}; \ldots; b_{sk_s}),$$

определенных соответствующими соотношениями инцидентности, и мы полагаем

$$D = b_1 D_1 + \cdots + b_s D_s.$$

Как и в случае, изученном в предыдущем пункте, мы рассматриваем производные классы $u_{a_0;\underline{\alpha}}(P)$, в которых P задается как многочлен от классов $c_i = c_i(\nu_f)$, $t = -c_1(\varkappa)$, поднятых на $U(a_0; \underline{\alpha})$ при помощи p_X, и еще одного дополнительного класса $\theta_{\underline{\alpha}} = -c_1(\zeta_{\underline{\alpha}})$, где $\zeta_{\underline{\alpha}}$ — линейное расслоение дивизора $D \subset U(a_0; \underline{\alpha})$. Следующая лемма является аналогом леммы 7.7.1.

7.8.2. Лемма (основные соотношения). *Пусть $P(\theta)$ — заданный многочлен от переменных θ, c_i, t. Тогда имеют место соотношения*

$$u_{a0;\underline{\alpha}}(P(\theta_{\underline{\alpha}})) = u_{1;\underline{\alpha}}(\widetilde{R}_{a_0}(\theta_{\underline{\alpha}})\, P(\theta_{\underline{\alpha}})),$$
$$u_{1;\underline{\alpha}}(P(\theta_{\underline{\alpha}})) = P(0) f^*\overline{n}_{\underline{\alpha}} + \sum_{i=1}^{s} b_i\, u_{b_i;\underline{\alpha}_i}(\Phi(\theta_{\underline{\alpha}_i} + b_i t)),$$

где $\underline{\alpha}_i = (b_{1k_1}; \ldots; b_{ik_s-1}; \ldots; b_{sk_s})$ и $\Phi(\theta) = \frac{1}{\theta}(\sigma(0)P(0) - \sigma(\theta)P(\theta))$.

Теорема 7.8.1 выводится формально из этой леммы аналогично тому, как теорема 7.4.3 выводится из леммы 7.7.1. В свою очередь, лемма доказывается применением формул остаточного пересечения. Действительно, многообразие $U = U(1; \underline{\alpha})$ можно рассматривать как одну из компонент расслоенного произведения $W = X \times_{Y} V$, где $V = V(\underline{\alpha})$. Локальные вычисления, аналогичные проведенным в предыдущем пункте, показывают, что условия применения формул остаточного пересечения выполняются, и эти формулы приводят к тем же соотношениям (7.36), (7.37) предыдущего пункта, с той разницей, что компонента Z_i остаточной схемы Z имеет вид $Z_i \simeq U(b_i; \underline{\alpha}_i) \subset X \times_{Y} V(\underline{\alpha})$, и $D_i = Z_i \cap U \simeq U(b_i + 1; \underline{\alpha}_i)$, $i = 1, \ldots, s$.

Применяя соотношения (7.19–7.22), мы получаем, в частности, выражение для классов Чженя производного отображения $\varphi : U(1; \underline{\alpha}) \to V(\underline{\alpha})$:

$$c(\nu_\varphi) = c(\nu_f \otimes \zeta^*_{\underline{\alpha}} + \varkappa \otimes \zeta^*_{\underline{\alpha}} - \varkappa),$$

а также соотношения леммы, аналогично доказательству леммы 7.7.1. Это завершает доказательство леммы 7.8.2 и теоремы 7.8.1. $\square$

7.9 Мультиособенности лежандровых отображений коранга 1 и отображений Морэна

Пусть задано общее голоморфное лежандрово отображение $L \hookrightarrow PT^*Y \to Y$ (см. главу 4). Скажем, что это отображение является отображением коранга 1, если размерность ядра производной композиции $f : L \to Y$ не превосходит 1 ни в одной точке. Локальными особенностями такого отображения могут быть только особенности A_k.

7.9.1. Пример. Пусть задано общее отображение коранга 1 многообразий одинаковой размерности $g : X \to Y$. Тогда многообразие критических точек $L = \overline{\Sigma}^1 = X(2)$ отображения g гладко, и ограничение g на L является лежандровым отображением коранга 1 (см. пример 4.1.3). Более того, многообразие особенностей A_k полученного лежандрова отображения совпадает с многообразием особенности $\overline{\Sigma}^{1_k} = X(k+1)$ исходного отображения.

Напомним, что лежандровы характеристические классы образуют кольцо $\mathcal{L}$, порожденное образующими $u, a_1, a_2, \ldots,$ удовлетворяющими определенным соотношениям, см. главу 4. Кроме того, для лежандровых отображений коранга 1 имеются дополнительные соотношения, аналогично случаю обычных отображений. Рассмотрим гомоморфизм

$$\psi : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}[t, c_1], \quad a_i \mapsto t^{i-1}(c_1 + t), \quad u \mapsto c_1 - t.$$

Нетрудно проверить, что этот гомоморфизм корректно определен (т.е. идеал соотношений в $\mathcal{L}$ переходит в ноль под действием ψ).

7.9.2. Предложение. *Всякий характеристический класс лежандрова отображения коранга* 1 *однозначно определяется своим образом при гомоморфизме ψ. Иными словами, всякий класс из ядра гомоморфизма ψ обращается в ноль для лежандрова отображения коранга* 1.

Доказательство. Пусть данное лежандрово отображение имеет такой вид, как в примере 7.9.1. Согласно обсуждению в п. 7.2, всякий характеристический класс отображения $g : X \to Y$ коранга 1 многообразий равной размерности выражается через классы $c_1 = c_1(\nu_g)$ и $t = c_1(\varkappa)$ (последний определен только на многообразии L критических точек отображения

g). Следовательно, через эти классы должны выражаться и лежандровы классы индуцированного отображения $f : L \to Y$. Несложные вычисления показывают, что это действительно так, и соответствующие выражения задаются формулами для гомоморфизма ψ. Таким образом, для отображения, имеющего вид отображения примера, предложение доказано. Согласно варианту принципа 7.2.4, эти же соотношения справедливы и в общем случае (строгое доказательство нетрудно вывести из формул для производных классов Арнольда-Фукса главы 3, аналогично доказательству предложения 7.2.1). □

Как видно из доказательства, смысл класса t состоит в том, что он равен $t = -c_1(\varkappa)$, где $\varkappa$ — линейное расслоение ядер производной отображения $f : L \to Y$ (которое определено в общем случае только на гиперповерхности критических точек отображения f).

Из доказательства предложения вытекает также, что формулы для характеристических классов (мульти)особенностей отображений коранга 1 многообразий равной размерности дают также формулы для лежандровых мультиособенностей. Для всякой лежандровой мультиособенности $\underline{\alpha} = (A_{a_1}, \ldots, A_{a_r})$ положим

$$R^{\mathrm{leg}}_{\underline{\alpha}} = \tfrac{1}{c_1} R_{a_1+1,\ldots,a_r+1},$$

где многочлен $R_{a_1+1,\ldots,a_r+1}$ в правой части — остаточный многочлен теорем 7.4.1 и 7.4.3, соответствующий мультиособенности $(a_1{+}1, \ldots, a_r{+}1)$ отображения коранга 1 многообразий равной размерности ($\ell = 0$) и выраженный через образующие t, c_1. Нетрудно проверить, что $R^{\mathrm{leg}}_{\underline{\alpha}}$ является многочленом и лежит в образе гомоморфизма ψ.

7.9.3. Следствие. *Универсальные формулы* (7.4–7.5) *для характеристических классов мультиособенностей через остаточные многочлены справедливы и в частном случае мультиособенностей собственного лежандрова отображения коранга* 1. *При этом остаточный многочлен лежандровой мультиособенности* $\underline{\alpha} = (A_{a_1}, \ldots, A_{a_r})$ *равен* $R^{\mathrm{leg}}_{\underline{\alpha}}$. □

Формулы для характеристических классов мультиособенностей отображений коранга 1 многообразий равных размерностей можно применить и для нахождения классов мультиособенностей отображений Морэна.

7.9.4. Определение. Общее отображение $f : X \to Y$ многообразий неположительной относительной размерности $\ell = \dim Y - \dim X \leqslant 0$ называется *отображением Морэна*, если выполняются следующие два условия:

1. размерность коядра (то есть коразмерность образа) производной отображения не превосходит 1 ни в одной точке;

2. размерность ядра ограничения f на многообразие L критических точек (которое является гладким в силу предыдущего условия и общности f) не превосходит 1 ни в одной точке.

Эквивалентным образом можно сказать, что отображение является отображением Морэна, если оно общее и обладает только особенностями с символом Тома-Бордмана $\Sigma^{1-\ell,1_k}$, где $\ell = \dim Y - \dim X \leqslant 0$. Особенность $\Sigma^{1-\ell,1_k}$ обозначается также через A_{k+1}.

Ограничение на L отображения Морэна является лежандровым (см пример 4.1.3 главы 4), причем коранг этого лежандрова отображения не превосходит 1. Отображение f имеет особенность A_k в некоторой точке тогда и только тогда, когда ограничение этого отображения на L имеет одноименную особенность в этой точке.

7.9.5. Следствие. *Универсальные формулы* (7.4–7.5) *для характеристических классов мультиособенностей через остаточные многочлены справедливы и в случае мультиособенностей собственного отображения Морэна. При этом остаточный многочлен мультиособенности* $\underline{\alpha} = (A_{a_1}, \ldots, A_{a_r})$ *равен* $j_* R^{\mathrm{leg}}_{\underline{\alpha}}$, *где* $j : L \to X$ *— вложение и* $R^{\mathrm{leg}}_{\underline{\alpha}}$ *— остаточный многочлен соответствующей лежандровой мультиособенности ограничения* f *на* L. □

Покажем, что класс $j_*R^{\mathrm{leg}}_{\underline{\alpha}}$ выражается через относительные классы Чженя $c_i(\nu_f)$ отображения f. Действительно, согласно следствию 7.9.3, класс $R^{\mathrm{leg}}_{\underline{\alpha}}$ выражается полиномиально через лежандровы классы u, a_i. Из соотношений главы 4 вытекает, что в данном случае эти классы выражаются как

$$u = c_1(I), \qquad a_i = c_i(\nu_f - \nu_f^* \otimes I - I + \mathbb{C}),$$

где линейное расслоение I на L — расслоения коядер производной отображения f. Это позволяет выразить класс $R^{\mathrm{leg}}_{\underline{\alpha}}$ через классы $u, c_i(\nu_f)$. Заметим, что расслоение I^* можно определить также как расслоение ядер сопряженного отображения расслоений $df^* : f^*T^*Y \to T^*X$. Следовательно, для гомоморфизма j_* можно применить формулу главы 3 для производных классов Портеуса-Тома, см. также предложение 7.2.5:

$$j_*(u^k) = c_{1-\ell+k}(-\nu_f^*) = (-1)^{1-\ell+k} c_{1-\ell+k}(-\nu_f),$$

где $c(-\nu_f) = c(TX - f^*TY) = 1/c(\nu_f)$. Это соотношение позволяет окончательно выразить остаточный класс морэновской мультиособенности как многочлен от классов $c_i(\nu_f)$. Такое представление, конечно, не единственно, а определено с точностью до соотношений в кольце характеристических классов отображений Морэна, полное описание которых довольно громоздко, и мы его не приводим. $\square$

Заключение

1) Преимущество подхода теории особенностей к задачам исчислительной геометрии заключается в том, что он позволяет рассматривать с единой точки зрения совершенно разные задачи. Действительно, исчисление особых кривых на поверхностях, или исчисление мультикасательных прямых к гиперповерхности, или исчисление особых гиперплоских сечений заданного проективного многообразия рассматриваются здесь как различные переформулировки одной и той же задачи исчисления лежандровых особенностей и мультиособенностей (но, скажем, за исчисление мультикасательных прямых к подмногообразию коразмерности больше 1 отвечает другая классификационная задача теории особенностей, а именно, классификация особенностей полных пересечений).

2) Многообразия, расслоения, и т.д., возникающие в геометрических задачах, обладают различными характеристическими классами. Априорные формулы, подобные формулам этой статьи, показывают, что окончательный результат формулируется в терминах определенных комбинаций этих характеристических классов. Этот факт не всегда виден при геометрическом рассмотрении задачи; однако учет этого факта существенно упрощает нахождение желаемой формулы.

3) Чтобы придать смысл формулам п. 6.3, мы требуем выполнения некоторых условий трансверсальности. Эти условия обязательно выполняются, если степень d (входящая в качестве параметра в эти формулы) достаточно велика. Случаи малых степеней требуют более подробного изучения, подобного предпринятому в [56]. Например, бессмысленно подсчитывать мультикасательные прямые к кубической поверхности, поскольку она содержит прямые целиком.

4) Даже если существование остаточных многочленов и универсальных формул для классов мультиособенностей установлены, нет никакой надежды получить в замкнутом виде формулу для серии особенностей (скажем,

для классов особенностей A_r, $r = 1, 2, \ldots$, или для классов кратных точек $\overline{m}_r$, $r = 1, 2, \ldots$). Причина заключается в том, что полная классификация особенностей ведет себя крайне нерегулярным образом. Вычисление этих классов (либо при помощи методов теории пересечений с использованием раздутий, схем Гильберта и остаточных пересечений, либо при помощи более простого метода Римани использования симметрий) основано на полной классификации особенностей, которая неизвестна.

5) Тем не менее, можно надеяться получить соответствующие формулы для серий классов особенностей, если рассматривать полученные многочлены после некоторой факторизации. Это значит, что желаемая формула может быть получена с точностью до слагаемых, которые обращаются в ноль для данной геометрической задачи. Типичным примером служит исчисление рациональных нодальных кривых на поверхностях, см. результаты Концевича-Манина [57] и Браена-Леунга [14, 15, 16] (обращение в ноль старших классов Чженя c_i, $i > 2$, для поверхности убивает большую часть кольца лежандровых характеристических классов). Результаты Клеймана [51, 52], Катц [39], Коллей [21] и главы 7 об отображениях, допускающих лишь особенности коранга 1, служат еще одним примером. Рассуждения, использующиеся для нахождения таких формул, зависят в сильной мере от специфики задачи. Тем не менее, даже в этом случае знание существования универсальной формулы может оказаться чрезвычайно полезным.

Литература

[1] Ando, Y, On the higher Thom polynomials for Morin singularities. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **23** (1987), no. 1, 195–207.

[2] Ando, Y, On Thom polynomials of the singularities D_k and E_k. J. Math. Soc. Japan **48** (1996), no. 3, 593–606.

[3] Арнольд В.И., *О характеристическом классе, входящем в условия квантования.* Функц. анализ и его прил., 1967, **1**, 1, с.1–14.

[4] Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности. Функц. анализ и его прил., 1972, **6** (4), 3–25.

[5] Арнольд В.И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. УМН, 1982, Т. **37** (2), 179

[6] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М., Особенности дифференцируемых отображений. Т.1, М. Наука, 1982.

[7] Арнольд В.И., Васильев В.А., Горюнов В.В., Ляшко О.В., *Особенности. I.* ВИНИТИ, Совр. пробл. мат., Фунд. напр., Т.**6**, М., 1988, 5–256.

[8] Арнольд В.И., Гивенталь А.В., *Симплектическая геометрия.* ВИНИТИ, Совр. пробл. мат., Фунд. напр., Т.**4**, М., 1985, 7–139.

[9] Audin, M., *Classes caractéristique d'immersions lagrangiennes définies par des variétés de caustiques (d'après V.A. Vassiliev)*, Séminare Sud-Rhodanien de Géométry, travaux en cours, **1**, Hermann, Paris (1984).

[10] Audin, M., *Cobordismes d'immersions lagrangiennes et legendriennes*, travaux en cours, **20**, Hermann, Paris (1987), 216 pp.

[11] Borel, A., *La cohomologie* mod 2 *de certains espaces homogènes,* Comm. Math. Helv., **27** (1953), 165–197.

[12] Borel, A. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann of Math.* **57**:2 (1957), 115–207.

[13] Borel, A; Haefliger, A. La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique. *Bull. Soc. Math. France* **89** (1961) 461–513.

[14] J. Bryan and C. Leung, The enumerative geometry of K3 surfaces and modular forms. alg-geom/9711031, *J. Amer. Math. Soc.* **13**(2) (2000), 371–410.

[15] J. Bryan and C. Leung, Generating functions for the number of curves on Abelian surfaces, math.AG/9802125, *Duke Math. J.*, **99**(2) (1999), 311–28.

[16] J. Bryan and C. Leung, Counting curves on irrational surfaces, *Surveys in Dif. Geom.* **5** (1999), 313–39.

[17] Бухштабер В.М. Характер Чженя-Дольда в кобордизмах // Матем. Сборник 1970 Т.83 (125) с. 576–595.

[18] P.J. Cameron, Combinatorics: topics, techniques, algorithms. Cambridge University Press, 1994

[19] L. Caporaso and J. Harris, Counting plane curves of any genus, *Invent. Math.*, **131**, (1998), 345-92.

[20] D. S. Chess, A note on classes $[S_1^k(f)]$. Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981), 221–224, Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Mat. Soc., Providence, R.I., 1983.

[21] S.J. Colley, Multiple-point formulas and line complexes, in "Enumerative and classical Algebraic Geometry", (Proc. Conf. Nice, 1981), P. Le Barz, Y. Hervier, Eds., *Prog. Math.* **24**, Birkhäuser, 1982, 9–22.

[22] S.J. Colley, Lines having specified contact with projective varieties, Proc. Vancouver Conf 1984 in Algebraic Geometry, J. Carrell, A.V. Geramita, P. Russell, eds., 47–70.

[23] Damon, J. Thom polynomials for contact class singularities, Ph.D. thesis, 1972, Harvard University.

[24] Eliashberg, Ya. M. and Mishachev, N. M. Wrinkling of smooth mappings and its applications, *Invent. Math.* **130** (1997), 345–369.

[25] Fehér, L., Rimányi, R. Calculation of Thom polynomials for group actions, preprint.

[26] Fehér, L., Rimányi, R. Thom polynomials with integer coefficients, preprint.

[27] D. B. Fuks, Maslov-Arnold Characteristic classes, *Soviet. Math. Docl.* **9** (1968), 96–99.

[28] W. Fulton, Intersection Theory, Ergebnisse der Math., 3 Folge, Vol. 2., Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[29] W. Fulton, Determinantal formulas for orthogonal and symplectic degeneracy loci, J. Diff. Geom. 43 (1996), 276–290.

[30] W. Fulton, P. Pragacz, Schubert Varieties and Degeneracy Loci, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1689, Springer-Verlag, 1998.

[31] T. Gaffney, The Thom polynomial of $\overline{\Sigma^{1111}}$. Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981), 399–408, Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Mat. Soc., Providence, R.I., 1983.

[32] L. Göttsche, A conjectural generating function for numbers of curves on surfaces, *Comm. Math. Phys.*, **196** (1998), 523–533.

[33] Griffiths, P. and Harris, J. Principles of Algebraic Geometry, Wiley, 1978, NY.

[34] Haefliger, A; Kosiński, A. Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables. (French) 1958 *Séminaire Henri Cartan*; 9e anné: 1956/57. Quelques questions de topologie, Exposé no. 8, 6 pp.

[35] J. Harris, L.W. Tu, On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties, *Topology*, **23** (1984), 71–84.

[36] Harris J., Tu L. Chern numbers of kernel and cokernel bundles, Inventiones Math. 75 (1984), 467–475.

[37] Hohchschild G., *The structure of Lie groups*, Holden-Day, 1965.

[38] Т. Жозефиак, А. Ласку, П. Прагач, Классы детерминантных многообразий, ассоциированные с симметричными и антисимметричными матрицами, Известия АН СССР, 45 (1981), 662–273.

[39] S. Katz, Iteration of multiple point formulas and applications to conics, in "Enumerative and classical Algebraic Geometry", (Proc. Conf. Nice, 1981), P. Le Barz, Y. Hervier, Eds., *Prog. Math.* **24**, Birkhäuser, 1982, 237–252.

[40] Казарян М.Э., *Скрытые особенности и гомологический комплекс Васильева классов особенностей*, Математ. сборник, 1995, Т.**186**, 12, с.119–128.

[41] Казарян М.Э., *Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей*, Успехи мат. наук, 1995, Т.**50** (304), с.45–70.

[42] Kazarian, M. Characteristic classes of Singularity theory, in: *Arnold-Gelfand Mathematical Seminars,* Birkhäuser, Basel, 1997, 325–340.

[43] Kazarian, M., *The Chern-Euler Number of Circle Bundle via Singularity Theory*, Matemática Contemporanea, **12** (1997), 131–165.

[44] Kazarian, M., *Topological Invariants of Fiber Singularities*, V.I.Arnold's 60-th anniversary Collection, AMS Translations, Ser.2, **180** (1997), 141–146.

[45] Казарян М.Э., *Относительная теория Морса одномерных расслоений и циклические гомологии*, Функц. анализ и его прил., 1997, Т.**31**, 1, с.20–31.

[46] Казарян М.Э. Характеристическая спектральная последовательность (добавление к книге [83], 243–310.

[47] Kazarian, M. Classifying spaces of singularities and Thom polynomials, in *New developments in Singularity Theory (Cambridge 2000)*, NATO Sci.Ser. II Math.Phys.Chem, 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 117-134.

[48] Kazarian, M. Thom polynomials for Lagrange, Legendre and isolated hypersurface singularities, *Proc. London Math. Soc.* (3) **86** (2003) 707–734.

[49] Персональная страница автора,
`http://www.mi.ras.ru/~kazarian`.

[50] S.L. Kleiman, The enumerative theory of singularities. Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), pp. 297–396. Sijthoff and Noordhoff, Alphen

aan den Rijn, 1977. (Перевод на рус. яз.: С. Л. Клейман. Численная теория особенностей. УМН, **35** (1980), No. 6, с. 69-148.)

[51] S.L. Kleiman, Multiple-point formulas I: Iteration, *Acta Math.*, **147** (1981), 13–49.

[52] S.L. Kleiman, Multiple-point formulas II: The Hilbert scheme. Enumerative geometry (Sitges, 1987), 101–138, Lecture Notes in Math., 1436, Springer, Berlin, 1990.

[53] S.L. Kleiman, Intersection theory and enumerative geometry: a decade in review. With the collaboration of Anders Thorup on Sect. 3. Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 2, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 321–370, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[54] S.L. Kleiman, J. Lipman, B. Ulrich, The multiple-point schemes of a finite curvilinear map of codimension one. Ark. Mat. 34 (1996), no. 2, 285–326.

[55] S.L. Kleiman, R. Piene, Enumerating curves on surfaces, in "Algebraic geometry — Hirzebruch 70", *Contemporary Math.*, **241** (1999), 209–238. (Corrections in math.AG/9903192).

[56] S.L. Kleiman, R. Piene, Node polynomials for families: results and examples, math.AG/0111299.

[57] M. Kontsevich, Yu. Manin, Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry, *Comm. Math. Phys.*, **164**, 525–562 (1994).

[58] В.С. Куликов, Исчисление особенностей вложения общей алгебраической поверхности в проективное пространство P^3. Функц. анализ и его прил., 1983, **17**, 3, 15–27.

[59] Landweber P.S. Cobordism operations and Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 129, No. 1, p. 94–110.

[60] P. Le Barz, Géométrie énumérative pour les multisécantes, *Lect. Notes in Math.*, 683, 116–167, Springer, Berlin, 1978.

[61] J. Mather, Stability of C^∞-mappings. I–VI. *Ann. Math.*, 1968, **87**, 89–104; 1969, **89**, 254–291; *Publ. Sci. IHES*, 1969, **35**, 127–156; 1970, **37**, 223–248; *Adv. Math.*, 1970, **4**, 301–335; *Lect. Notes Math.*, 1971, **192**, 207–253.

[62] W.L. Marar, D.Mond, Multiple point schemes for corank 1 maps, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), 553–567.

[63] J. P. May. Geometry of iterated loop spaces. Lecture Notes in Math. 271, Springer-Verlag (1972). (Имеется перевод: Дж, Мэй. Геометрия итерированных пространств петель. В кн. Дж. Бордман, Р. Фогт. Гомотопические инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977.)

[64] Morvan, J.-M., Niglio, L., *Classes caractéristiques des couples de sousfibrés Lagrangiens,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **36** (1986), 193-209.

[65] Новиков С. П. Теорема Картана-Серра и внутренние гомологии // УМН, 21 (1966), N 5, 217-232.

[66] Новиков С. П. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967 Т.31 с. 855–951.

[67] Porteous, I. R., Simple singularities of maps, in: C. T. C. Wall (ed.), *Proc. Liverpool Singularity Symposium* I, Springer LNM **192** New York, 1971, 286–307.

[68] Porteous, I. R., The second-order decomposition in Σ^2. Topology, 1972, **11**, 4, 325–224.

[69] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials, *Lect. Notes in Math.*, Vol. **1478** (1991), 130–191.

[70] Ran Z., Curvilinear enumerative geometry. Acta Math. **155** (1985), no. 1–2, 81–101.

[71] D. C. Ravenel and W. S. Wilson. The Hopf ring for complex cobordism. Bull. AMS, V. 80, no. 6 (1974), 1185–1189.

[72] Rimányi, R. Thom polynomials, Symmetries and Incidences of Singularities, Invent. Math. 143(3) (2001), 499–521.

[73] Rimányi, R. Multiple point formulas—a new point of view, to appear in *Pacific J. Math*, 202(2) (2002), 475–489.

[74] Rimányi, R. and Szücs, A. Generalized Pontrjagin-Thom construction for maps with singularities, *Topology* **37** (1998), 1177–1191.

[75] F. Ronga, *Le calcul des classes duales aux singularites de Boardman d'ordre deux*, Comm. Math. Helv., **47** (1972), 15–35.

[76] F. Ronga. On the number of planes triply tangent to a surface in projective space. (Proc. 1984 Vancouver Conf. in Algebraic Geometry, July 1984), J. Carrell, A. V. Geramita, P. Russell, editors, CMS Conf. Proc., vol. 6, Providence, Amer. Math. Soc., 1986, pp. 389–397.

[77] D. Siersma, Classification and deformation of singularities, Doctoral dissertation, Univ. of Amsterdam, 1974.

[78] P. Slodowy, Einige Bemerkungen zur Entfaltung symmetrischer Funktionen. (German) Math. Z. 158 (1978), no. 2, 157–170.

[79] Szücs, A. Multiple points of singular maps, *Math. Proc. Cam.Ph.S.*, **100** (1986), 331-346.

[80] R. Thom. Quelques propriétés globales des varités différentiables. Comment. math. helv., 1954, 28, 17–86 (Пер. на рус. яз.: Том Р., Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий. Расслоенные пространства и их приложения. М.: ИЛ, 1958, 293–351.

[81] Thom, R. Les singularités des applications différentiables. (French) *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **6** (1955–1956), 43–87.

[82] I. Vainsencher, Enumeration of n-fold tangent hyperplanes to a surface, *J. Alg. Geom.*, **4** (1995), 503–526.

[83] V. A. Vassiliev, Lagrange and Legendre Characteristic Classes, 2nd edition, Gordon and Breach, 1993, New York a.o. (Дополненный перевод на рус. яз.: В. А. Васильев, Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. Москва, МЦНМО, 2000).

[84] V. A. Vassiliev. Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications. Transl. Math. Monographs. V. 98, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Дополненный перевод на рус. яз.: В. А. Васильев, Топология дополнения к дискриминантам. М. Фазис, 1997.)

[85] Васильев В.А., Серганова В.В., О числе вещественных и комплексных модулей особенностей гладких функций и реализации матроидов, Матем. Заметки **49**, (1991), no. 1–2, 15–20

[86] C.T.C. Wall, A second note on symmetry of singularities, Bull. London Math. Soc. 12 (1980) 347–354.