РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Математический институт им. В.А.Стеклова

На правах рукописи
УДК 512.272+515.173.2

Ландо Сергей Константинович

Теория пересечений в пространствах мероморфных функций на комплексных кривых

Специальность
01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2005

Содержание

Введение

0.1 Разветвленные накрытия сферы

Отправной точкой описываемых нами исследований послужила задача классификации разветвленных накрытий двумерной сферы. Пусть C, Y — две связные ориентированные двумерные компактные поверхности. Непрерывное отображение $f : C \to Y$, сохраняющее ориентацию, называется *разветвленным накрытием*, если

- в образе имеется конечное подмножество точек $\{t_1, \ldots, t_c\}$, такое, что над дополнением к этому множеству отображение f является накрытием;

- в некоторой окрестности каждой из точек t_i можно ввести комплексную координату и в некоторой окрестности каждого из ее прообразов можно ввести комплексную координату x таким образом, что отображение принимает координатный вид $f(x) = x^k$ при некотором натуральном k.

Ниже мы будем говорить в первую очередь о разветвленных накрытиях сферы и считать, что поверхность Y гомеоморфна S^2.

Если отображение $f : C \to S^2$ является разветвленным накрытием, то в окрестности *любой* точки поверхности C можно ввести комплексную координату x таким образом, что в подходящей комплексной координате в окрестности образа этой точки отображение записывается в виде $f(x) = x^k$. Число k для каждой точки из C определено однозначно. Мы будем называть его *порядком*, или *кратностью*, точки относительно отображения f. Порядок точки равен числу близких к ней прообразов точки, близкой к ее образу. Порядок равен 1 в том и только в том случае, если ограничение отображения f на некоторую окрестность точки является гомеоморфизмом. Точка, порядок которой больше 1, называется *критической точкой* отображения f. Образ критической точки мы будем называть *критическим значением*, или *точкой ветвления*, отображения f. Как число критических точек, так и число критических значений разветвленного накрытия конечно. Над дополнением к множеству точек ветвления отображение f является неразветвленным накрытием.

Сумма порядков прообразов любой точки при разветвленном накрытии одинакова. Это общее значение называется *степенью* разветвленного накрытия. У некритического значения разветвленного накрытия степени n имеется n геометрически различных прообразов; число геометрически различных прообразов точки ветвления меньше, чем n. Набор порядков прообразов любой точки определяет разбиение числа n. Род накрывающей кривой, степень накрытия и порядки критических точек связаны между собой формулой Римана–Гурвица, которая является следствием формулы Эйлера для рода.

Два разветвленных накрытия $f_1 : C_1 \to S^2$, $f_2 : C_2 \to S^2$ называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $h : C_1 \to C_2$ поверхности C_1 на поверхность C_2, такой, что $f_1 = f_2 \circ h$, т.е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_1"'] & & C_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & S^2 & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Из определения непосредственно вытекает, что поверхности определения C_1, C_2 двух изоморфных разветвленных накрытий обязательно гомеоморфны, а степени накрытий совпадают.

Точки ветвления разветвленного накрытия играют очень существенную роль в классификации накрытий: у изоморфных накрытий множества критических значений совпадают. Более того, у изоморфных накрытий совпадают разбиения их степени над соответственными точками образа. Разумеется, интерес представляет только конечное число разбиений степени над точками ветвления. Мы будем называть этот конечный набор разбиений *типом ветвления*. Следующая задача была поставлена А. Гурвицем в [39]:

Сколько существует классов изоморфизма разветвленных накрытий с предписанными типами ветвления над предписанными точками ветвления?

Число классов изоморфизма разветвленных накрытий с данными типами ветвления называется *числом Гурвица*, отвечающим этим типам ветвления.

Приведенная формулировка задачи требует уточнения. На самом деле, нас будет интересовать не число классов изоморфизма накрытий, а число таких классов, взятых с весом, обратно пропорциональным порядку группы автоморфизмов накрытия. (Определение изоморфизма накрытий превращается в определение автоморфизма в случае, если функции f_1, f_2 совпадают. Например, у двукратного накрытия всегда есть автоморфизм порядка два: он меняет местами листы накрытия.)

Однако, как правило, у накрытий нет нетривиальных автоморфизмов, так что модифицированная формулировка, по существу, совпадает с исходной.

За столетие, прошедшее с момента появления работ Гурвица, математики не раз обращались к поставленной им задаче, хотя до недавнего времени проявленное ими внимание нельзя было считать особенно пристальным. Однако последнее десятилетие привело к взрывному росту интереса к разветвленным накрытиям. У этого интереса было три независимых источника: двумерная квантовая хромодинамика и связанные с ней струнные теории, изучение подгрупп симметрической группы и исследование топологии дополнений к дискриминантам в различных функциональных пространствах. Интересно, что во всех трех случаях исследователи не знали о предшествующих работах Гурвица и переоткрывали его численные результаты.

Как будет показано в первой главе, задачу Гурвица можно переформулировать в терминах подгрупп симметрической группы и в терминах графов, вложенных в накрывающую поверхность. Соответственно, она допускает как теоретико-групповые, так и чисто комбинаторные подходы к своему решению. Именно теоретико-групповыми методами действовал Гурвиц. Диссертация посвящена третьему пути, корни которого лежат в теории особенностей и алгебраической геометрии. Этот путь основывается на наблюдении В. И. Арнольда, согласно которому подсчет классов изоморфизма разветвленных накрытий можно заменить подсчетом степени отображения Ляшко–Лойенги. Это отображение сопоставляет мероморфной функции на комплексной кривой набор ее критических значений. Как правило, оно является накрытием и понятие степени для него корректно определено.

В настоящее время именно этот путь выглядит наиболее плодотворным. Он связан с изучением геометрии пространств модулей мероморфных функций, в первую очередь, с теорией пересечений на таких пространствах. Полученные на этом пути результаты лежат на стыке топологии, математической физики, алгебраической геометрии, теории римановых поверхностей, комбинаторики и теории особенностей. Полученные результаты будут интересны специалистам в этих областях.

0.2 Исторический обзор

0.2.1 Задача Гурвица

Задача Гурвица о перечислении классов изоморфизма накрытий сферы с заданными типами ветвления сформулирована им в [39]. Этой же задаче посвящена работа [40]. В [40] Гурвиц привел формулу для числа $h_{0;k_1,\dots,k_n}$ классов изоморфизмов накрытий сферы сферой с одной вырожденной точкой ветвления, с данными порядками ветвления $k_1,\dots,k_n$ над вырожденной точкой. Формула Гурвица гласит

$$h_{0;k_1,\dots,k_n} = \frac{(k_1+\dots+k_n+n-2)!}{\#\mathrm{Aut}(k_1,\dots,k_n)}\prod_{i=1}^{n}\frac{k_i^{k_i}}{k_i!}(k_1+\dots+k_n)^{n-3}. \qquad (1)$$

Здесь $\#\mathrm{Aut}(k_1,\dots,k_n)$ — число автоморфизмов набора $k_1,\dots,k_n$. Статья Гурвица не содержит доказательства формулы в силу, как там указано, его громоздкости. Предположительно Гурвиц доказывал свою формулу методами близкими к методам Гульдена и Джексона, см. ниже.

Затем к этой же задаче обращался Г. Вейль [83], однако в целом она была забыта до работ Медных [63, 64, 65]. Возрождение интереса к задаче Гурвица связано с задачей вычисления коэффициентов связи в симметрической группе (см., например [41]), с работами по струнной теории и двумерной квантовой хромодинамике ([36]), и с изучением дополнения к дискриминанту в пространствах версальных деформаций простых особенностей ([58, 60, 3]). Численные результаты Гурвица были при этом переоткрыты (см. [10, 27, 2] и восстановление доказательства Гурвица в [77]). Подход, основанный на теории особенностей, оказался новым и чрезвычайно плодотворным, и в настоящей работе мы описываем развитие именно этого подхода.

0.2.2 Работы Ляшко, Лойенги, Арнольда

Задача, которой независимо занимались Ляшко и Лойенга [60, 58], не тождественна задаче Гурвица. Эта задача состоит в изучении топологии дополнения к дискриминанту в пространстве версальных деформаций простых особенностей. Мы отсылаем читателя за всеми необходимыми определениями к [4]. В пространствах версальных деформаций можно рассматривать различные дискриминанты, и нас интересует тот из них, который состоит из функций с кратными критическими значениями. На связь этой задачи для особенности серии A с задачей Гурвица для общих многочленов первым обратил внимание Арнольд [2]; он же распространил технику отображения Ляшко–Лойенги на общие тригонометрические многочлены (т.е. рациональные отображения с двумя полюсами произвольных порядков). В главе 4 настоящей работы приведено также описание связи задачи классификации общих тригонометрических многочленов с одним полюсом первого порядка с геометрией дополнения к дискриминанту в пространстве версальной деформации простых особенностей серии D.

Фактически, в работе Арнольда содержится — в частном случае двух полюсов — и идея продолжения отображения Ляшко–Лойенги на мероморфные функции на вырожденных кривых. Эта линия была в дальнейшем продолжена в [25]. Сочетание этой идеи с идеей представления пространств мероморфных функций в виде конусов над пространствами модулей кривых лежит в основе результатов главы 4 настоящей работы.

0.2.3 Работы Медных

В [63] А. Медных предложил формальное решение наиболее общей задачи Гурвица для фиксированного ветвления произвольного типа. Мы приведем его ответ для случая, когда род накрываемой поверхности равен нулю, т.е. для рассматриваемого нами случая мероморфных функций. Рассмотрим разветвленное накрытие степени K сферы римановой поверхностью рода g с c точками ветвления в образе, типы ветвления в которых заданы: $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$, где $X_i = 1^{m_{i1}} \dots K^{m_{iK}}$, $i = 1, \dots, c$.

Обозначим через $T_{K;\mathbf{X}}$ число наборов перестановок типов $X_1, \dots, X_c$ в группе S_K, порождающих транзитивную подгруппу этой группы.

Теорема 0.1 ([63]) *Число классов изоморфизма мероморфных функций с типом ветвления* $\mathbf{X}$ *равно*

$$
\begin{aligned}
h_{K;\mathbf{X}} &= \frac{1}{K} \sum_{\substack{\ell | v \\ m\ell = K}} \sum_{\frac{1}{(t,\ell)} | d | \ell} \frac{\mu\left(\frac{\ell}{d}\right) d^{(2g-2+c)m+1}}{(m-1)!} \left[\sum_{j^s_{k,i}} T_{N;(s^i_k)} \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{a=1}^{d} \prod_{s,k,i} \left[\frac{\Phi(a, s/k)}{d} \right]^{j^s_{k,i}} \prod_{k,p} \binom{s^i_k}{j^1_{k,i}, \dots, j^{md}_{k,i}} \right],
\end{aligned}
$$

где $t = \text{НОД}(m_{is})$, $v = \text{НОД}(sm_{is})$, $(t, \ell) = \text{НОД}(t, \ell)$, $s^i_k = \sum_{s=1}^{md} j^s_{k,i}$, *а переменные суммирования* $j^s_{k,i}$ *пробегают все наборы этих индексов,* *удовлетворяющие условию*

$$\sum_{\substack{1\le k\le sm_{is}/\ell \\ (s/(s,d))|k|s}} kj^s_{k,i} = \frac{sm_{is}}{\ell},$$

причем $j^s_{k,i}$ *отличны от нуля только для* $1 \le k \le sm_{is}/\ell$ *и* $(s/(s,d))|k|s$. *Функции* μ *и* Φ *являются соответственно функцией Мебиуса и функцией фон Штернека.*

Доказательство теоремы Медных основано на классической формуле Бернсайда. Как уже отмечалась, приведенная здесь формула не отражает геометрии задачи и ее удается довести до явного числового ответа лишь в незначительном числе простых случаев, (один из которых рассмотрен в [57]).

0.2.4 Подход Гульдена и Джексона

Канадские специалисты по комбинаторике Я. Гульден и Д. Джексон получили целый ряд значительных результатов по перечислению разветвленных накрытий сферы [27, 28, 29, 30, 31, 41, 42]. Подход Гульдена и Джексона к задаче Гурвица базируется на анализе рекуррентных соотношений для чисел Гурвица и на применении комбинаторной техники обращения Лагранжа. Указанные комбинаторные соотношения компактнее всего записываются в виде уравнений в частных производных на производящие функции для чисел Гурвица. Приведем одно из таких уравнений.

Рассмотрим производящую функцию

$$\Phi(u,z;p_1,p_2,\dots) = \sum_{\substack{K,n\ge 1\\ g\ge 0}} \sum_{\substack{X\vdash K\\ l(X)=n}} \frac{\#\mathrm{Aut}(X)}{K!} h_{g;X}\frac{u^\mu}{\mu!} z^g p_X.$$

Здесь X пробегает все разбиения числа K, $l(X)=n$ есть число частей в разбиении X, $\mu = K+n+2g-2$, и для $X = 1^{m_1}\dots K^{m_k}$ имеем $p_X = p_1^{m_1}\dots p_K^{m_K}$.

Лемма 0.2 ([30]) *Функция* Φ *удовлетворяет следующему уравнению в частных производных второго порядка:*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{1}{2}\sum_{i,j\ge 1}\left(ijp_{i+j}z\frac{\partial^2\Phi}{\partial p_i\partial p_j} + ijp_{i+j}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{\partial\Phi}{\partial p_j} + (i+j)p_ip_j\frac{\partial\Phi}{\partial p_{i+j}}\right).$$

Это утверждение дает рекурсивный алгоритм для вычисления чисел Гурвица. Его доказательство основано на изучении следующих вариантов взаимоотношения между произвольной перестановкой $\pi \in S_K$ и транспозицией $\sigma \in S_K$:

- σ может переставлять два элемента из одного цикла перестановки π, и в этом случае число циклов в $\pi\sigma$ на единицу больше, чем в π;

- σ может переставлять элементы двух различных циклов в π, и в этом случае число циклов в $\pi\sigma$ на единицу меньше, чем в π.

Анализ этих вариантов для случая перестановки π, отвечающей вырожденному критическому значению, и транспозиции σ_{c-1}, отвечающей последнему невырожденному критическому значению, и дает нужные рекуррентные соотношения. В некоторых случаях (например, для случая накрывающей поверхности рода 0) уравнение в частных производных удается заменить функциональным уравнением и воспользоваться теоремой обращения Лагранжа. Именно так выглядит в [27] доказательство формулы Гурвица (1).

0.3 Структура работы

В первой главе мы описываем связь задачи Гурвица с геометрией пространств модулей мероморфных функций на комплексных кривых, определяем основные понятия и приводим формулировки главных теорем. Во второй главе обсуждается отображение Ляшко–Лойенги и его свойства. Третья глава, излагающая результаты [55, 53], посвящена классификации, с точностью до изоморфизма, многочленов с произвольным ветвлением над конечными точками. На языке перестановок это означает, что мы перечисляем наборы перестановок $(\pi_1, \dots, \pi_c)$, где перестановка π_1 циклическая и произведение $\pi_1 \dots \pi_c$ является тождественной перестановкой. В этой главе описана стратификация пространства многочленов в соответствии с типами ветвления, приведено доказательство теоремы Ляшко–Лойенги для случая общих многочленов и ее обобщение на случай произвольных стратов.

В четвертой главе изучается геометрия пространств мероморфных функций на кривых рода g с единственным вырожденным критическим значением. Изложение следует [15, 16, 53]. В ней построены пополнения таких пространств, имеющие вид тотальных пространств конусов над компактифицированными пространствами модулей комплексных кривых с отмеченными точками. Затем показывается, что отображение Ляшко–Лойенги на пространстве мероморфных функций продолжается на пополненное пространство, причем продолженное отображение является морфизмом конусов. Это утверждение используется для выражения степени отображения ЛЛ в терминах теории пересечения на пространстве модулей кривых с отмеченными точками. Полученная формула обобщает перечислительный результат Гурвица для накрытий сферы сферой на накрывающие кривые старших родов.

Пятая глава посвящена исследованию теории пересечений на пространствах Гурвица с точки зрения глобальной теории особенностей. Она основана на работах [56], [48]. Основным пространством в этой главе служит один из частных случаев построенных в предыдущей главе компактифицированных пространств мероморфных функций, а именно, пространство функций, не имеющих ветвления над бесконечностью. Любое пространство Гурвица вкладывается в пространство такого вида и образует в нем страт естественной стратификации функционального пространства по типам особенностей. Классы когомологий таких стратов порождают некоторое подкольцо кольца когомологий компактифицированного пространства Гурвица, причем знание структуры этого подкольца позволило бы вычислить и числа Гурвица. Для исследования этой структуры мы применяем методы глобальной теории особенностей (теории Тома-Казаряна). Мы выводим важные соотношения на классы стратов в кольце когомологий и вычислительные следствия из этих соотношений.

0.4 Благодарности

Мне трудно переоценить вклад в эту работу моих соавторов по статьям, посвященным разветвленным накрытиям сферы: Д. Звонкина, В. В. Горюнова, М. Э. Казаряна, Т. Экедала, М. З. Шапиро, А. Вайнштейна. Большое влияние на работу оказали идеи, заложенные в работах В. И. Арнольда. Чрезвычайно полезными были беседы с Д. Загиром, А. К. Звонкиным, С. А. Кулешовым, С. М. Натанзоном, А. Г. Хованским и многими другими. В процессе работы над этой тематикой я пользовался гостеприимством университетов городов Ливерпуля, Стокгольма и Ренна, а также института математики общества Макса Планка в Бонне, и я им очень благодарен. Мои исследования были поддержаны грантами РФФИ 01-01-00660, NWO-RFBR 047.008.005, INTAS-00-259.

Глава 1

Общие сведения о классификации разветвленных накрытий и формулировка основных теорем

1.1 Классификация мероморфных функций

Разветвленные накрытия двумерной сферы находятся в тесной связи с мероморфными функциями на комплексных кривых.

Мероморфная функция на гладкой комплексной кривой C это голоморфное отображение $f : C \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ из этой кривой в комплексную проективную прямую. С топологической точки зрения каждая непостоянная мероморфная функция задает разветвленное накрытие двумерной сферы. Соответственно, для нее определены понятия степени, критической точки, точки ветвления. Критические точки мероморфной функции — это нули ее дифференциала df.

В обратную сторону связь осуществляется посредством следующего утверждения.

Теорема 1.1 (Риман) *Пусть $f : C \to S^2$ разветвленное накрытие двумерной сферы. Если на этой сфере выбрана какая-нибудь комплексная структура, то на C существует комплексная структура, отно-*

сительно которой f является мероморфной функцией, и эта комплексная структура единственна.

Комплексная структура, существование которой гарантируется теоремой Римана, есть не что иное как комплексная структура, поднятая на накрывающую поверхность с накрываемой сферы.

Таким образом, при фиксированной комплексной структуре на S^2, фиксированных точках ветвления и типах ветвления в них, классы изоморфизма разветвленных накрытий сферы с данными типами ветвления находятся во взаимно-однозначном соответствии с мероморфными функциями с указанными типами ветвления. Это означает, что задачу подсчета числа классов изоморфизма можно заменить задачей подсчета числа мероморфных функций с указанными типами ветвления. Эта последняя задача, в свою очередь, оказывается тесно связанной с геометрией пространств мероморфных функций.

Идея о связи задачи классификации разветвленных накрытий с геометрией пространства мероморфных функций восходит к В. И. Арнольду [2]. В этой работе Арнольд связывает задачу классификации общих многочленов с более ранними результатами Ляшко и Лойенги (см. [3, 60, 58]) о топологии дополнения к дискриминанту в пространстве многочленов.

У *общего многочлена* все отличные от бесконечности точки ветвления простые. Бесконечность является единственной непростой точкой ветвления, и у нее есть единственный прообраз. *Дискриминант* — это множество многочленов, у которых есть непростые конечные точки ветвления, т.е. множество необщих многочленов. Дискриминант является (вообще говоря, особым) подмногообразием коразмерности 1 в пространстве всех многочленов.

Замечание 1.2 Термин *дискриминант* будет далее означать как подмногообразие функций с теми или иными вырождениями, так и образующую идеала в кольце функций на пространстве функций, нулями которой это многообразие является. Подобное словоупотребление, к сожалению, стало стандартным. Мы будем всякий раз оговаривать, о чем именно идет речь, и надеемся, что такая двузначность не породит недоразумений.

Результаты анализа пространства многочленов Арнольд обобщает на случай *общих тригонометрических многочленов* на рациональной кривой, т.е. рациональных функций с одной вырожденной точкой ветвления, причем у этой точки в точности два прообраза, а все остальные точки ветвления невырождены. Как и в случае многочленов, существует естественное вложение подходящего накрытия пространства общих тригонометрических многочленов в комплексное векторное пространство. Последующий перенос результатов Ляшко и Лойенги на эту ситуацию позволяет найти решение задачи Гурвица для данного частного случая.

Несмотря на то, что полученные Арнольдом численные результаты по большей части являются частными случаями формулы Гурвица, предложенный им подход открывает принципиально новые возможности в задаче классификации мероморфных функций. Дальнейшее обобщение результатов Арнольда может идти по двум направлениям:

- изучение геометрии дополнения к дискриминанту в пространстве общих мероморфных функций на кривых произвольного рода с одной вырожденной точкой ветвления с произвольным типом ветвления над ней;

- исследование геометрии *стратов* дискриминанта и классификация многочленов, тригонометрических многочленов и произвольных мероморфных функций с произвольным ветвлением над конечными точками.

В идеале эти два направления должны были бы слиться, что привело бы к решению задачи Гурвица в полном объеме. Однако подобное решение еще не получено. В настоящей работе описан достигнутый в обоих направлениях прогресс:

- полностью решена задача классификации многочленов с произвольным типом ветвления в конечных точках ветвления;

- построена компактификация пространства Гурвица мероморфных функций с предписанным ветвлением над бесконечностью;

- доказано совпадение построенной компактификации с компактификацией стабильными мероморфными функциями;

- получена формула, выражающая число классов изоморфизма общих мероморфных функций с заданным типом ветвления в единственной вырожденной точке ветвления через характеристические классы некоторых расслоений над пространством модулей стабильных кривых;

- разработаны общие методы поиска соотношений на когомологические классы компактифицированного пространства Гурвица функций, не имеющих ветвления над бесконечностью, представленные функциями с предписанными особенностями;

- с помощью разработанных методов найдены некоторые соотношения, приводящие к новым, неизвестным ранее, формулам для чисел Гурвица.

Замечание 1.3 К рассматриваемой классификационной задаче близка по формулировке задача классификации относительно следующего отношения эквивалентности: две мероморфные функции $f_1 : C_1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, $f_2 : C_2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ называются *топологически эквивалентными*, если существуют два гомеоморфизма $h : C_1 \to C_2$ и $h' : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, такие, что $f_2 \circ h = h' \circ f_1$, т.е. такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{h} & C_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ \mathbb{C}\mathrm{P}^1 & \xrightarrow{h'} & \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \end{array}$$

коммутативна. Другими словами, на множестве классов изоморфизма добавляется действие группы кос — фундаментальной группы дополнения к множеству критических значений в сфере S^2. Орбиты действия группы кос находятся во взаимно-однозначном соответствии с компонентами связности соответствующего пространства отображений.

Этой задаче также посвящено много работ (см., например, [8, 49, 69, 70, 82]), однако полученные в этом направлении результаты носят лишь частичный характер. Например, в [49, 69, 70] установлены некоторые простые достаточные условия для того, чтобы число классов равнялось 1, а в [8] классифицированы все многочлены до степени 11. По-видимому, эта задача намного сложнее предыдущей. Так, в случае мероморфных функций с тремя критическими значениями она тесно связана со структурой полной группы Галуа [75], что, вероятно, означает отсутствие у нее геометрически прозрачного решения.

1.2 Определения и формулировка основных результатов

1.2.1 Определения

Все рассматриваемые нами объекты (кривые, отображения и проч.) определены над полем комплексных чисел. Пусть $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — комплексная прямая с фиксированной точкой $\infty \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ на ней и фиксированной голоморфной координатой t в дополнении к бесконечности.

Пусть C — гладкая компактная комплексная кривая. У кривой имеется род, который будет обозначаться через g. Кривая рода 0 будет называться также рациональной кривой, или сферой, а кривые рода 1 — эллиптическими кривыми. Прообразы точки ∞ относительно мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ мы будем называть *полюсами* этой функции.

Критическую точку порядка 2 мы будем называть *простой*, а критическое значение, в прообразе которого лежит лишь одна критическая точка, причем она простая, будем также называть *простым*. Простые критические точки и критические значения мы будем также называть *морсовскими*. Обычно мы будем предполагать, что тип ветвления над бесконечностью фиксирован.

Многочленом на кривой C называется функция, у которой прообраз одной из точек состоит из единственной точки (в частности, кратность этого прообраза равна степени функции). Мы будем рассматривать многочлены лишь на рациональных кривых и предполагать, что точкой с единственным прообразом является бесконечность.

1.2.2 Стратификация пространства многочленов на рациональной кривой и классы изоморфизма многочленов

Пусть $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — многочлен степени $\mu + 1$. Считая прообраз точки ∞ бесконечностью на кривой-прообразе, мы можем выбрать на дополнении к этой точке в прообразе координату x таким образом, что многочлен f запишется в виде

$$f(x) = x^{\mu+1} + p_2 x^{\mu-1} + \cdots + p_{\mu+1}, \qquad p_i \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

При таком выборе координаты коэффициент при старшей степени переменной равен 1, а коэффициент при следующей степени обращается в нуль. Такой выбор координаты не единственный: замена $x \mapsto \zeta x$, где $\zeta \in \mathbb{C}$ — корень степени $\mu+1$ из единицы, приводит к многочлену такого же вида.

Рассмотрим пространство $\mathcal{P}$ многочленов вида (1.1). Это пространство представляет собой μ-мерное комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^\mu$ наборов коэффициентов $(p_2, \dots, p_{\mu+1})$.

Замечание 1.4 Структура векторного пространства, возникающая на пространстве $\mathcal{P}$ в результате его отождествления с пространством коэффициентов многочленов, естественна в следующем смысле. На пространстве $\mathcal{P}$ есть аффинная структура: через любую пару многочленов f_1, f_2 можно провести прямую $\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Кроме того в нем имеется начало координат $x^{\mu+1}$: это единственный многочлен, инвариантный относительно замен $x \mapsto \zeta x$, $\zeta^{\mu+1} = 1$. Мы также интенсивно пользуемся естественными операциями прибавления константы к многочлену (задающей действие группы $\mathbb{C}$ комплексных чисел по сложению на $\mathcal{P}$) и умножения многочлена на ненулевое комплексное число (задающей действие группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению на $\mathcal{P}$), т.е. действием группы аффинных преобразований образа.

Пространство $\mathcal{P}$ следующим образом стратифицировано в соответствии с типом ветвления многочлена.

Пусть уравнение $f(x) = t_0$, $t_0 \in \mathbb{C}$, имеет m_0 корней кратности 1, m_1 корней кратности 2, ..., m_μ корней кратности $\mu+1$. Другими словами, числа $m_0, \dots, m_\mu$ задают разбиение числа $\mu+1$: $m_0 + 2m_1 + 3m_2 + \dots + (\mu+1)m_\mu = \mu+1$; у этого разбиения m_0 частей величины 1, m_1 часть величины 2, ..., m_μ частей величины $\mu+1$. Такое разбиение мы будем записывать также в мультипликативной форме $1^{m_0} \dots (\mu+1)^{m_\mu}$ и обозначать через $X(t_0)$. Простому критическому значению отвечает разбиение $1^{\mu-1}2^1$.

Пусть $t_1, \dots, t_c$ — все критические значения многочлена p. Набор разбиений $\mathbf{X} = \{X(t_1), \dots, X(t_c)\}$ будем называть, следуя Протопопову [74], *паспортом* многочлена p. Паспорт общего многочлена состоит из μ экземпляров разбиения $1^{\mu-1}2^1$.

Каждому набору разбиений $\mathbf{X} = \{X(t_1), \dots, X(t_c)\}$ мы сопоставим *страт* $\Sigma_{\mathbf{X}} \subset \mathcal{P}$ в пространстве многочленов. Такой страт состоит в точности из всех многочленов с паспортом $\mathbf{X}$. Группа $\mathbb{C}$ комплексных чисел по сложению действует на пространстве $\mathcal{P}$ прибавлением константы к многочлену. Каждый страт инвариантен относительно этого действия, и поэтому является цилиндром с одномерной образующей. Изоморфные многочлены имеют одинаковые типы ветвления, поэтому они принадлежат одному страту в пространстве многочленов.

Назовем *вырожденностью разбиения* $X = 1^{m_0} \dots (\mu+1)^{m_\mu}$ величину $A(X) = 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \dots + \mu \cdot m_\mu$.

Следующее утверждение впервые высказано Томом [78], однако в его доказательстве имеется ошибка, которая была затем исправлена в [68, 14, 49]. В п. 3.4 мы приводим доказательство этой теоремы, близкое к предложенному в [68].

Теорема 1.5 *Пусть* $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ *— множество разбиений числа* $\mu+1$. *Страт* $\Sigma_{\mathbf{X}}$ *непуст в том и только в том случае, если суммарная вырожденность всех разбиений* X_i *равна* μ,

$$A(X_1) + \dots + A(X_c) = \mu. \tag{1.2}$$

В этом случае он является гладким комплексным подмногообразием в $\mathcal{P}$ *комплексной коразмерности* $\mu - c = (A(X_1) - 1) + \dots + (A(X_c) - 1)$.

Равенство (1.2) представляет собой частный случай формулы Римана–Гурвица, поэтому содержательным является лишь утверждение о непустоте страта при выполнении этого равенства.

Общие многочлены образуют открытый страт $\Sigma_{\{1^{\mu-1}2^1, \dots, 1^{\mu-1}2^1\}} \subset \mathcal{P}$. Это единственный открытый страт в $\mathcal{P}$. Задача классификации общих многочленов решается теоремой Ляшко–Лойенги.

Теорема 1.6 ([58, 3, 60]) *Пусть* $t_1, \dots, t_\mu$ *— произвольный набор попарно различных точек комплексной плоскости. Тогда число классов изоморфизма многочленов с простыми точками ветвления* $t_1, \dots, t_\mu$ *равно* $(\mu+1)^{\mu-2}$.

Страт $\Sigma_{\mathbf{X}}$ называется *примитивным*, если лишь одно из разбиений X_i необщее. Согласно теореме 1.5, такой страт однозначно определяется своим единственным необщим разбиением X_1: множество $\mathbf{X}$ состоит из разбиения X_1 и $\mu - A(X_1)$ экземпляров разбиения $1^{\mu-1}2^1$. Так, примитивными являются оба страта коразмерности один: *страт Максвелла*, отвечающий разбиению $1^{\mu-3}2^2$, т.е. случаю двух простых критических точек с одинаковым критическим значением, и *каустика*, отвечающая разбиению $1^{\mu-2}3^1$, т.е. случаю двух слившихся критических точек. Примитивный страт, отвечающий необщему разбиению X, будем обозначать через Σ_X (в индексе указано разбиение, а не паспорт).

Задача классификации многочленов, принадлежащих одному примитивному страту, решается простым обобщением результатов Ляшко и Лойенги. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.7 ([55]) *Пусть $t_1, \dots, t_c$ — фиксированные точки ветвления с заданными типами ветвления $X_1, 1^{\mu-1}2^1, \dots, 1^{\mu-1}2^1$ над ними, причем $\mu - A(X_1) = c - 1$. Тогда число классов изоморфизма многочленов с такими данными ветвления равно*

$$(\mu+1)^{c-2}\frac{(c-1)!}{\#\mathrm{Aut}(X_1)},$$

где через $\#\mathrm{Aut}(X_1)$ обозначено число автоморфизмов разбиения $X_1 = 1^{m_0}2^{m_1}\dots(\mu+1)^{m_\mu}$, т.е. число $m_0!\dots m_\mu!$.

Сопоставим каждому паспорту $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ разбиение $T(\mathbf{X})$ числа μ в соответствии с кратностями критических значений многочленов этого страта: $\mu = A(X_1) + \dots + A(X_c)$. Символами $\#\mathrm{Aut}(\mathbf{X})$, $\#\mathrm{Aut}(T(\mathbf{X}))$, $\#\mathrm{Aut}(X_i)$, $\#\mathrm{Aut}(T(X_i))$ обозначены числа элементов в группе автоморфизмов соответственно паспорта $\mathbf{X}$, разбиения $T(\mathbf{X})$, разбиения X_i и разбиения $T(X_i)$, отвечающего примитивному страту Σ_{X_i}. В частности, для вырожденного разбиения X_i имеем $T(X_i) = 1^{\mu - A(X_i)}A(X_i)^1$, для невырожденного разбиения $T(X_i) = 1^\mu$; в первом случае $\#\mathrm{Aut}(X_i) = (\mu - A(X_i))!$ (автоморфизмы — это перестановки простых критических значений), а во втором $\#\mathrm{Aut}(X_i) = \mu!$.

Теорема 1.8 ([55]) *Пусть $t_1, \dots, t_c$ — фиксированные точки ветвления с заданными типами ветвления $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_c\}$ над ними, удовлетворяющими условию (1.2). Тогда число классов изоморфизма многочленов с такими данными ветвления равно*

$$h_{\mathbf{X}} = (n+1)^{c-1}\frac{\#\mathrm{Aut}(T(\mathbf{X}))}{\#\mathrm{Aut}(\mathbf{X})}\prod_{i=1}^{c}\frac{\#\mathrm{Aut}(T(X_i))}{\#\mathrm{Aut}(X_i)}.$$

Эта теорема впервые была выведена в [86] из результатов Гульдена и Джексона [27], полученных чисто комбинаторными методами, которые мы обсуждаем в п. 0.2. В [5] результаты теоремы 1.8 перенесены на многочлены с симметриями.

1.2.3 Пространства мероморфных функций на кривых произвольного рода и классы изоморфизма общих мероморфных функций

Осуществленная Арнольдом в [2] классификация общих тригонометрических многочленов, т.е. мероморфных функций на рациональной кривой с двумя полюсами, основывается на вложении пространства тригонометрических многочленов (точнее говоря, подходящего накрытия этого пространства) в векторное пространство. Этот подход допускает непосредственное обобщение на случай трех полюсов на рациональной кривой, однако в случае большего числа полюсов и кривых большего рода работать отказывается. Препятствие к переносу результатов Арнольда на более общий случай носит чисто геометрический характер: конфигурация из более чем трех точек на сфере и из произвольного числа точек на кривых большего рода имеет непрерывные модули.

Описываемый здесь подход к преодолению этого препятствия базируется на следующем наблюдении: пространство мероморфных функций с n полюсами на кривых рода g расслоено над пространством модулей кривых рода g с n отмеченными точками. Расслаивающее отображение сопоставляет каждой мероморфной функции кривую, на которой она определена, с отмеченными на ней полюсами этой мероморфной функции. В результате мы связываем задачу классификации с геометрией пространства модулей кривых, точнее с теорией пересечений на нем. Для придания смысла теории пересечений пространство модулей следует компактифицировать и соответствующим образом пополнить пространство мероморфных функций. Использование компактификации Делиня–Мамфорда позволило получить классификацию мероморфных функций с одним вырожденным критическим значением на кривых произвольного рода [15, 16].

Итак, мы фиксируем тип ветвления мероморфной функции на кривых рода g над точкой ∞, т.е. порядки $k_1, \dots, k_n$ всех полюсов, и предполагаем, что все остальные точки ветвления простые. В дальнейшем под словосочетанием «критические значения» мы будем понимать лишь конечные точки ветвления функции. Множество таких мероморфных функций образует пространство комплексной размерности $\mu = k_1 + \dots + k_n + n + 2g - 2$, и, по формуле Римана–Гурвица, это число μ в точности равно числу конечных критических значений у любой такой функции. Выбор нумерации полюсов определяет накрытие кратности $n!$ над пространством мероморфных функций. На тотальном пространстве этого накрытия действует аддитивная группа комплексных чисел $\mathbb{C}$ прибавлением к мероморфной функции константы. Выбором константы мы можем добиться того, чтобы сумма конечных критических значений функции равнялась нулю, поэтому пространство орбит этого действия естественно отождествляется с пространством мероморфных функций с нулевой суммой критических значений. Это последнее пространство мы обозначаем через $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ и называем *пространством Гурвица*. Пространство Гурвица связно. В частном случае, когда все точки ветвления, включая бесконечность, простые, это утверждение было доказано Люротом [59] и Клебшем [9]. На общую ситуацию его распространил Натанзон [69]; комбинаторное доказательство можно найти в [49].

Отметим, что, согласно Дубровину [13], пространства Гурвица образуют серию примеров так называемых фробениусовых многообразий.

Пространство Гурвица расслоено над пространством модулей комплексных кривых с n отмеченными точками: расслаивающее отображение сопоставляет мероморфной функции кривую, на которой она определена, с n отмеченными на этой кривой полюсами. В дальнейшем мы будем считать, что отмеченные точки занумерованы; пространство модулей гладких кривых рода g с n занумерованными отмеченными точками обозначается через $\mathcal{M}_{g;n}$. Компактификация Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ пространства модулей $\mathcal{M}_{g;n}$ является гладким орбиобразием. В п. 4.5.5 мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 1.9 ([16]) *Существует естественное вложение пространства Гурвица $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ в качестве открытого всюду плотного подмножества некоторого конуса над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$.*

Конструкция упоминаемого в теореме конуса весьма тесно связана с некоторыми векторными расслоениями над $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Нас будут интересовать в первую очередь линейные расслоения $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$: слоем расслоения $\mathcal{L}_i$ в точке $(C; x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}$ является кокасательная прямая к кривой C в точке x_i, а также тензорные произведения этих расслоений. Во-вторых, над этим многообразием есть расслоение Ходжа $\Lambda_{g;n}$, слоем которого в точке $(C; x_1, \dots, x_n)$ является пространство голоморфных дифференциалов на кривой C. Связь мероморфных функций с этими расслоениями основана на следующих наблюдениях.

Пусть x_i — полюс первого порядка функции f. Главная часть p_i функции f в точке x_i определяет касательный вектор в этой точке: такому ростку сопоставляется линейное отображение

$$\omega \mapsto \mathrm{Res}_{x_i} f\omega,$$

где 1-форма ω представляет кокасательный вектор. Аналогично, главная часть функции в полюсе порядка k_i определяет k_i-ую тензорную степень касательного вектора, т.е. элемент слоя расслоения $(\mathcal{L}_i^\vee)^{\otimes k_i}$. (Верхним индексом $\vee$ мы обозначаем двойственные векторные пространства и векторные расслоения.) С другой стороны, набор главных частей $p_1, \dots, p_n$ в отмеченных точках $x_1, \dots, x_n$ на кривой C является набором главных частей некоторой мероморфной функции в том и только в том случае, если выполняется условие

$$\mathrm{Res}_{x_1} p_1\omega + \cdots + \mathrm{Res}_{x_n} p_n\omega = 0$$

для любой голоморфной 1-формы ω на C.

Другими словами, пространство $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ отображается в тотальное пространство расслоения главных частей порядков $k_1, \dots, k_n$ в отмеченных точках над $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, и образ этого расслоения лежит в ядре отображения конусов, заданного как «сумма вычетов в отмеченных точках». Кроме того, построенное отображение является вложением, т.е. оно взаимно-однозначно на свой образ. Мы определяем пополнение $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ пространства Гурвица как замыкание образа этого вложения и доказываем следующее утверждение.

Теорема 1.10 ([53]) *Пополненное пространство Гурвица* $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ *изоморфно как комплексное орбиобразие неприводимой компоненте, содержащей все отображения гладких кривых, в пространстве стабильных отображений комплексных кривых рода g с n отмеченными точками в проективную прямую, таких, что все отмеченные точки переходят в общую точку ∞, причем порядок отображения в i-ой отмеченной точке равен k_i.*

Здесь понятие «стабильное отображение» понимается в смысле Концевича [52]: отображение комплексной кривой *стабильно*, если его группа автоморфизмов конечна.

В [22] строится теория конусов и их *классов Сегре*. Векторные расслоения являются частным случаем конусов, и полный класс Сегре векторного расслоения является обращением его полного класса Черна. Мы показываем, что число классов изоморфизма общих мероморфных функций пропорционально (с известным коэффициентом пропорциональности) значению *старшего класса Сегре* конуса $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Развивая методы Фултона, мы выражаем это значение через полные классы Черна расслоений $\mathcal{L}_i$ и $\Lambda_{g;n}$.

Теорема 1.11 ([15, 16]) *Значение старшего класса Сегре s_{top} конуса* $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ *на фундаментальном классе базы равно*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{k_i^{k_i}}{(k_i-1)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \frac{c(\Lambda_{g;n}^{\vee})}{\prod_{i=1}^{n}(1-k_i c_1(\mathcal{L}_i))}.$$

Здесь $c_1(\mathcal{L}_i)$ – первый класс Черна расслоения $\mathcal{L}_i$, а $c(\Lambda^\vee_{g;n}) = 1 - c_1(\Lambda_{g;n}) + c_2(\Lambda_{g;n}) - \dots$ –полный класс Черна расслоения, двойственного расслоению Ходжа. Интеграл по пространству модулей понимается как индекс пересечения соответствующих классов, см. подробности ниже.

Отсюда вытекает

Теорема 1.12 ([15, 16]) *Число классов изоморфизма общих разветвленных накрытий римановой сферы кривыми рода g с n полюсами порядков $k_1, \dots, k_n$ с заданными точками ветвления равно*

$$h_{g;k_1,\dots,k_n} = \frac{(K+n+2g-2)!}{\#\mathrm{Aut}(k_1,\dots,k_n)} \prod_{i=1}^{n} \frac{k_i^{k_i}}{k_i!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \frac{c(\Lambda^\vee_{g;n})}{\prod_{i=1}^{n}(1-k_i c_1(\mathcal{L}_i))}, \qquad (1.3)$$

где $K = k_1 + \dots + k_n$, а через $\#\mathrm{Aut}(k_1,\dots,k_n)$ обозначено число автоморфизмов набора $(k_1,\dots,k_n)$.

Напомним, что классы изоморфизма считаются с весом, обратным числу элементов в их группе автоморфизмов. Числа $h_{g;k_1,\dots,k_n}$ мы будем называть *числами Гурвица.*

В частном случае отсутствия ветвления на бесконечности ($k_1 = \dots = k_n = 1$) теорема 1.12 была независимо обнаружена и доказана Р. Пандарипанде. Доказательство этой теоремы в полном виде, отличное от приведенного в [16], содержится в [34], см. также [73]. Это доказательство основано на технике виртуальной локализации, разработанной в [20, 33].

В работе [31] была высказана гипотеза, согласно которой в числа Гурвица $h_{g;k_1,\dots,k_n}$ в качестве сомножителя входит сумма конечного числа однородных многочленов от k_i. Следующее очевидное утверждение доказывает усиленный вариант этой гипотезы и позволяет прояснить структуру формулы (1.3).

Лемма 1.13 *Интеграл в формуле* (1.3) *является суммой однородных многочленов от $k_1, \dots, k_n$ степеней $n+3g-3$, ...,$n+2g-3$ с рациональными коэффициентами.*

Формула (1.3) задает принципиально новую вычислительную среду для подсчета чисел Гурвица. Основой этой вычислительной среды служит бурно развивающаяся в последние годы теория пересечений на пространстве модулей кривых. Одной из жемчужин этой теории является гипотеза Виттена [84]. Эта гипотеза дает простые рекуррентные формулы для многочленов старшей степени, т.е. степени $n+3g-3$, по k_i в интеграле и позволяет вычислить их, по крайней мере в принципе, сколь угодно далеко. Для случая рода $g = 0$ справедливость гипотезы была проверена самим Виттеном [84], и из нее непосредственно вытекает явная формула для чисел Гурвица в роде нуль, совпадающая, естественно, с формулой Гурвица.

Теорема 1.14 ([39, 27, 77, 26]) *Справедливо равенство*

$$h_{0;k_1,\dots,k_n} = \frac{(K+n-2)!}{\#\mathrm{Aut}(k_1,\dots,k_n)} \prod_{i=1}^{n} \frac{k_i^{k_i}}{k_i!} K^{n-3}.$$

В случае старших родов интеграл (1.3) содержит слагаемые, вычисление которых требует более развитой техники, и в настоящее время явное выписывание его значений возможно лишь в некоторых частных случаях (см. [18, 19]). В то же время при $g = 1$ эти частные случаи позволяют полностью выписать ответ, который в качестве гипотезы был высказан в [30].

Теорема 1.15 ([29, 80, 16]) *Справедливо равенство*

$$h_{1;k_1,\dots,k_n} = \frac{(K+n)!}{24\#\mathrm{Aut}(k_1,\dots,k_n)} \prod_{i=1}^{n} \frac{k_i^{k_i}}{k_i!} \left(K^n - \sum_{i=2}^{n} (i-2)! e_i K^{n-i} - K^{n-1} \right),$$

где $e_i = e_i(k_1,\dots,k_n)$ — i-ая элементарная симметрическая функция от $k_1,\dots,k_n$.

Замечание 1.16 Концевич [50] доказал гипотезу Виттена посредством изящного и чрезвычайно глубокого по идеям рассуждения, не все звенья которого были, однако, строго обоснованы. Недостающее обоснование приведено в недавней диссертации Д. Звонкина [87]. В [73] было получено доказательство гипотезы Виттена, основанное на использовании формулы (1.3) в обратном направлении: независимый способ подсчета чисел Гурвица приводит к вычислению значений интеграла в правой части. Если зафиксировать некоторое разбиение X числа K и рассмотреть разбиение NX числа NK, то при $N \to \infty$ старший член асимптотики интеграла в правой части определяется старшей однородной по k_i компонентой. Эта компонента включает в себя интегралы, не содержащие классов $c_j(\Lambda_{g;n})$ при $j > 0$, т.е. в точности индексы пересечения, описываемые гипотезой Виттена. Для вычисления же чисел Гурвица в левой части в [73] используется техника асимптотического анализа чисел вложенных графов. Описание связи между разветвленными накрытиями сферы и графами на поверхностях см. в п. 1.3.

Принципиальным вопросом, ждущим своего решения, однако, остается проблема доказательства гипотезы Виттена чисто алгебро-геометрическими средствами.

1.2.4 Стратификация пространства Гурвица функций, неветвящихся над бесконечностью

Обозначим через $\mathcal{H}_{g,n}$ пространство мероморфных функций степени n на кривых рода g, обладающих следующими свойствами:

- все полюса функций простые, т.е. мероморфная функция имеет n полюсов порядка один; кроме того мы предполагаем, что все полюса каждой функции занумерованы;
- сумма критических значений функции равна нулю.

В силу описанных выше результатов это пространство является гладким комплексным орбиобразием (или даже гладким комплексным многообразием, если $g = 0$ или n достаточно велико). Оно расслоено над пространством модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ комплексных кривых рода g с n отмеченными точками: всякой мероморфной функции можно сопоставить кривую ее определения с n отмеченными полюсами.

Как указано выше, у пространства $\mathcal{H}_{g,n}$ есть пополнение, обозначаемое через $\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$, состоящее из *стабильных* мероморфных функций. Его *граница* $\overline{\mathcal{H}}_{g,n} \setminus \mathcal{H}_{g,n}$ состоит из стабильных функций, кривая определения которых особа (но которые являются предельными для семейств функций на гладких кривых), причем единственные допустимые особенности это узлы (точки простого двойного самопересечения). Проекция $\mathcal{H}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}$ продолжается до проекции $\overline{\mathcal{H}}_{g,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ пополненного пространства в пространство модулей *стабильных* кривых с отмеченными точками. Слои этой проекции — векторные пространства, поскольку линейная комбинация мероморфных функций с полюсами не выше первого порядка в отмеченных точках является функцией того же вида. Отметим, однако, что вообще говоря эта проекция не является векторным расслоением, поскольку размерность слоя может меняться от одной точки базы к другой. Послойная проективизация $P\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$ пополненного пространства Гурвица является компактным комплексным орбиобразием. Оно и будет служить далее нашим основным пространством модулей, а все остальные нужные пространства будут конструироваться на его основе. Допуская некоторую вольность речи, мы говорим ниже о многообразиях и подмногообразиях, имея в виду, что наши пространства являются на самом деле орбиобразиями и подорбиобразиями (т.е. устроены локально как факторпространства комплексного шара по модулю действия конечной группы).

На пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$, поскольку оно является проективизацией, естественным образом выделен класс вторых когомологий, а именно первый класс Черна тавтологического пучка, который мы обозначаем через $\psi = \psi_{g,n} = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{g,n})$.

С другой стороны, в этом пространстве есть подмногообразия, состоящие из функций с вырожденными ветвлениями. Согласно формуле Римана–Гурвица общая мероморфная функция степени n на кривой рода g имеет $2n + 2g - 2$ точки невырожденного ветвления (как в образе, так и в прообразе). Как и в случае многочленов, функции с меньшим количеством точек ветвления в сфере-образе образуют *дискриминант* в пространстве функций. Каждой точке ветвления в образе можно сопоставить разбиение числа n, представляющее собой (неупорядоченный) набор кратностей прообразов данной точки. Нам будет удобнее, однако, пользоваться *приведенными разбиениями*, т.е. наборами уменьшенных на 1 кратностей прообразов точек ветвления. Замыкание в $P\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$ множества функций, имеющих ветвления предписанного типа, будет обозначаться через $\sigma_{\alpha_1,\dots,\alpha_c}$, где индекс состоит из приведенных разбиений над точками вырожденного ветвления. Эти подмногообразия называются *стратами* дискриминанта. Так $\sigma_{2^1} \subset P\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$ обозначает *каустику*, т.е. страт, состоящий из функций, у которых две точки ветвления в прообразе склеились вместе, а σ_{1^2} — это *страт Максвелла*, открытая часть которого состоит из функций, принимающих одинаковые значения в двух различных критических точках. Каустика и страт Максвелла — единственные страты (комплексной) коразмерности 1. Аналогично, страт $\sigma_{2^1,1^2}$, имеющий коразмерность 2, представляет собой замыкание множества функций с двумя вырожденными критическими значениями, над одним из которых имеется точка ветвления кратности 3, а над другим — две простые точки ветвления, и т.д. Число невырожденных критических точек (соответствующих приведенному разбиению 1^1) для общей функции данного страта легко вычисляется по формуле Римана–Гурвица. Для упрощения обозначений мы не включаем эти невырожденные приведенные разбиения, а также значения g и n, в обозначения стратов.

Каждый страт представляет собой комплексное подмногообразие чистой размерности в $P\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$, а значит определяет по двойственности

Пуанкаре однородный элемент кольца когомологий $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{g,n})$. (Всюду ниже нас интересуют когомологии с рациональными коэффициентами, и мы опускаем это основное кольцо в обозначениях когомологий.) Степень этого элемента попросту совпадает с (вещественной) коразмерностью страта. Его произведение с дополнительной степенью класса ψ есть просто рациональное число, которое, как мы уже видели, тесно связано с интересующим нас числом накрытий. Сформулируем наше общее наблюдение применительно к рассматриваемому случаю.

Теорема 1.17 *Имеет место равенство*

$$h_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} = \frac{|\mathrm{Aut}(\alpha_1,\alpha_2,\dots)|}{n!}\langle\sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots},\psi^d\rangle,$$

где через $|\mathrm{Aut}(\alpha_1,\alpha_2,\dots)|$ *обозначен порядок группы автоморфизмов множества приведенных разбиений, т.е. произведение факториалов чисел совпадающих разбиений, а угловые скобки обозначают умножение в когомологиях пространства* $P\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$.

Вообще говоря, кольца когомологий пространств модулей стабильных кривых и тесно связанных с ними пространств Гурвица очень сложны даже в случае рациональных кривых и функций ($g = 0$). Наш опыт подсказывает, однако, что все естественные геометрические классы, связанные с исчислением особенностей (а также мультиособенностей и мультимультиособенностей — это в точности классы, играющие центральную роль в задаче Гурвица), выражаются в терминах относительно простого набора «основных» (в некотором смысле тавтологических) классов. Наша цель — выделить эти основные классы, описать соотношения между ними, и найти выражения для стратов в терминах этих классов.

Начнем с результатов о числах Гурвица.

Теорема 1.18 ([48]) *Для рациональных (т.е. относящихся к случаю* $g = 0$*) чисел Гурвица имеют место следующие формулы:*

$$\begin{aligned}
h_{2^1,2^1} &= \frac{3}{4}\,(27\,n^2 - 137\,n + 180)\,\frac{(2\,n-6)!}{(n-3)!}\,n^{n-6}\\
h_{2^1,1^2} &= 3\,(3\,n^2 - 15\,n + 20)\,\frac{(2\,n-6)!}{(n-4)!}\,n^{n-6}\\
h_{1^2,1^2} &= 2\,(2\,n^3 - 16\,n^2 + 43\,n - 40)\,\frac{(2\,n-6)!}{(n-4)!}\,n^{n-6}.
\end{aligned}$$

Эти формулы относятся к случаю мультимультиособенностей, т.е. ситуации, в которой ветвление невырождено над *несколькими* точками в сфере-образе. Для мультиособенностей, где ветвление вырождено лишь над одной точкой, рациональные числа Гурвица даются формулой Гурвица (1).

Доказательство этих результатов основано на некоторых соотношениях в когомологиях пространств Гурвица на классы, представленные стратами дискриминанта, и класс ψ. Мы также будем активно использовать класс $\delta \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{g,n})$, представленный функциями на особых кривых. Класс δ очень близок к поднятию граничного класса в $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ относительно проекции $\overline{\mathcal{H}}_{g,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (они различаются на дивизор функций, имеющих один полюс на некоторой рациональной неприводимой компоненте, прикрепленной к другим компонентам в единственной точке). Значение последнего в геометрии пространств модулей стабильных кривых хорошо известно. Например, индекс максимального самопересечения этого класса представляет собой *объем Вейля–Петерссона* пространства модулей, см. [62]. Принципиальное отличие пространств Гурвица от пространств модулей кривых состоит в появлении еще одного естественного класса вторых когомологий, а именно, класса ψ.

Отметим, что все приводимые в пятой главе результаты справедливы не только в кольце когомологий, но и в кольце Чжоу пространства $P\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$. Единственная причина, по которой мы говорим именно о когомологиях, состоит в том, что когомологические вычисления достаточны для предполагаемых вычислительных приложений.

Насколько нам известно, первые соотношения на классы стратов в кольцах когомологий пространств Гурвица были получены в [56]. Они выражают каустику и страт Максвелла в пространствах рациональных функций ($g = 0$) через граничный страт и класс ψ:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{2^1} & = & 6(n-1)\psi - 3\delta \\ \sigma_{1^2} & = & 2(n-1)(n-6)\psi + 4\delta. \end{array} \tag{1.4}$$

В пятой главе мы приводим два вывода этих формул. Первый следует [56] и основан на подсчете индексов пересечений стратов коразмерности 1 с базисным набором классов дополнительной размерности (кривыми). Второй способ, разработанный в [48], представляется значительно более перспективным. Он основан на глобальной теории особенностей и носит универсальный характер: он применим и к классам более высоких коразмерностей. Эти классы также подчиняются многочисленным соотношениям, которые более подробно описаны в основном тексте пятой главы, поскольку их описание требует дополнительных определений.

1.3 Другие интерпретации задачи классификации

Как понимал еще А. Гурвиц [39] (и что впоследствии было переоткрыто в современных работах, см. [85, 10, 7, 27, 32]), задачи классификации конечнократных разветвленных накрытий сферы с точностью до изоморфизма можно свести к чисто перечислительным задачам. Эти перечислительные задачи могут формулироваться либо в терминах разложения перестановок в произведение перестановок, принадлежащих заданным классам сопряженности, либо в терминах графов, вложенных в накрывающие поверхности.

1.3.1 Разложение перестановок в произведение перестановок из данных классов сопряженности

Начнем с переформулировки задачи классификации для общих многочленов. Каждому общему многочлену степени $\mu+1$ можно сопоставить

- циклическую перестановку π на множестве из $\mu+1$ элемента;
- набор из μ транспозиций $\sigma_1, \dots, \sigma_\mu$ на том же самом множестве,

такие, что произведение $\pi\sigma_\mu \dots \sigma_1$ есть тождественная перестановка. Заметим, что поскольку перестановка π циклическая, подгруппа в $S_{\mu+1}$, порожденная элементами $\pi, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu$, действует транзитивно. Сопоставление осуществляется следующим образом.

Пусть $t_1, \dots, t_\mu$ — различные критические значения многочлена f вида (1.1). Рассмотрим некритическое значение $\bar{t}$ многочлена f. Прообраз $f^{-1}(\bar{t})$ точки $\bar{t}$ состоит из $\mu+1$ точки, и мы реализуем $S_{\mu+1}$ как группу перестановок множества этих точек. Каждой петле с концами в точке $\bar{t}$, не проходящей через критические значения многочлена f, соответствует перестановка точек прообраза $f^{-1}(\bar{t})$ — *монодромия* вдоль этой петли. Тем самым, определено представление фундаментальной группы сферы, проколотой в критических значениях многочлена, в группе перестановок некритического слоя. Образ этого представления называется *группой монодромии* разветвленного накрытия. Поскольку накрывающая поверхность связна, группа монодромии действует на слое транзитивно. Действительно, любые два прообраза точки $\bar{t}$ можно соединить кривой на накрывающей поверхности. Сдвинув, если необходимо, образ этой кривой с критических значений, мы получим представителя элемента фундаментальной группы, монодромия вдоль которого переставляет два заданных прообраза точки $\bar{t}$.

Соединим значение $\bar{t}$ несамопересекающимися отрезками кривых, не имеющих общих точек, отличных от $\bar{t}$, с критическими значениями. Потребуем при этом, чтобы порядок выхода отрезков из точки $\bar{t}$ совпадал с нумерацией критических значений. Будем называть такой граф на сфере μ-звездой. Отрезок, соединяющий $\bar{t}$ с критическим значением t_i, определяет транспозицию σ_i на множестве прообразов: эта транспозиция переставляет те два прообраза в $f^{-1}(t)$, которые сливаются при движении точки t по отрезку от $\bar{t}$ к t_i. Другими словами, транспозиция σ_i на слое $f^{-1}(\bar{t})$ отображения f задается монодромией слоя вдоль пути в образе, состоящего из движения по i-ому отрезку, обхода по малой петле вокруг i-ой критической точки в положительном направлении и возвращения по i-ому отрезку в обратном направлении.

Композиция $\sigma_\mu \circ \cdots \circ \sigma_1$ всех транспозиций задается монодромией вдоль петли, обходящей точку ∞ в отрицательном направлении, т.е. циклической перестановкой точек слоя $f^{-1}(t)$, которую мы и обозначим через π^{-1}. Поскольку циклическая перестановка длины $\mu+1$ не может быть разложена в произведение менее, чем μ транспозиций, построенное разложение является *минимальным.* Мы будем говорить, что многочлен f *реализует* перестановки π и σ_i.

Заметим, что на самом деле мы сопоставили набор перестановок не просто многочлену f, а многочлену с некоторой дополнительной структурой. Эта дополнительная структура состоит в выборе *базисной звезды*: некритического значения, отрезков, соединяющих его с критическими значениями, и нумерации критических значений. (В [3] базисная звезда называется *поляризацией.*) Базисная звезда определена с точностью до изотопической эквивалентности: деформация центра звезды и соответствующая деформация ее лучей с сохранением их нумерации задает изоморфизм наборов перестановок, отвечающих различным некритическим слоям.

Из теоремы Римана немедленно вытекает следующее утверждение (см., например [17]).

Теорема 1.19 *Для любой циклической перестановки π на множестве из $\mu+1$ элемента и любого упорядоченного набора $(\sigma_1,\dots,\sigma_\mu)$ из μ транспозиций на этом множестве, таких что $\pi\sigma_\mu\dots\sigma_1$ есть тожде-*

ственная перестановка, существует многочлен f степени $\mu+1$, реализующий эти перестановки. При этом класс изоморфизма многочлена с базисной звездой однозначно определен набором перестановок.

Описанная выше конструкция легко переносится на случай общих накрытий любого рода с произвольными типами ветвления. Фиксируя тип ветвления над данным критическим значением, мы тем самым фиксируем цикловой тип перестановки π_i (т.е. набор длин циклов в разложении этой перестановки в произведение коммутирующих циклических перестановок). Задача перечисления классов изоморфизма общих мероморфных функций с данным типом ветвления на кривых рода g сводится, тем самым, к перечислению наборов перестановок $(\pi_1, \dots, \pi_c)$ заданных цикловых типов, удовлетворяющих условиям

- $\pi_c \circ \dots \circ \pi_1 = \mathrm{id}$;
- подгруппа $\langle \pi_1, \dots, \pi_c \rangle$ в полной группе перестановок, порожденная перестановками $\pi_1, \dots, \pi_c$, транзитивна.

С топологической точки зрения второе условие означает, что накрывающая поверхность связна. Если одна из перестановок π_i циклическая, то оно выполняется автоматически.

Тем самым, задача классификации разветвленных накрытий сферы с точностью до изоморфизма связана с задачей вычисления коэффициентов связи в симметрической группе S_K, которые определяются следующим образом. Фиксируем разбиения $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ числа K и рассмотрим множество всех перестановок на множестве $\{1, \dots, K\}$ с цикловыми типами X_i. Формальная сумма $K_{\mathbf{X}}$ элементов этого множества является элементом центра групповой алгебры $\mathbb{C}S_K$. Произведение таких элементов в групповой алгебре представляется в виде линейной комбинации

$$K_{X_1} \dots K_{X_c} = \sum C^Y_{X_1,\dots,X_c} K_Y$$

классов такого же вида. Коэффициенты $C^Y_{X_1,\dots,X_c}$ этой линейной комбинации называются *коэффициентами связи* симметрической группы. Их вычислению также посвящена обширная литература. Стандартный подход к вычислению коэффициентов связи позволяет представить их в виде суммы по характерам симметрической группы (см., например, [41, 63, 64]), однако подобное представление не проясняет природу этих чисел и мало что говорит о их значениях.

1.3.2 Графы на поверхностях и кактусы, ассоциированные с мероморфными функциями

С разветвленными накрытиями сферы можно связать графы двух видов, вложенные в накрывающую поверхность. Графы первого вида универсальны, их конструкция проще, однако сами они более громоздки. Графы второго вида применимы, если мы рассматриваем общие накрытия с одним вырожденным критическим значением.

Пусть сначала f — разветвленное накрытие сферы с произвольными типами ветвления над критическими значениями $t_1, \dots, t_c$. Рассмотрим базисную звезду с центром в некритическом значении $\bar{t}$ и с концами в точках t_i и сопоставим ей граф, вложенный в накрывающую поверхность. Этот граф является полным прообразом базисной звезды. У него есть вершины двух типов: прообразы некритического значения $\bar{t}$ (*белые вершины*) и прообразы критических значений t_i (*черные вершины*). Кроме того, у каждой черной вершины есть номер, совпадающий с номером соответствующего критического значения. С точностью до изотопии поверхности построенный граф однозначно определяется выбором базисной звезды. Полученный граф склеен из нескольких экземпляров c-звезд с белым центром по черным вершинам. Дополнение к графу в накрывающей поверхности является несвязным объединением открытых областей, каждая из которых гомеоморфна диску. Действительно, это дополнение накрывает дополнение к звезде в сфере-образе, т.е. топологический диск.

Наоборот, если нам задан граф, вложенный в поверхность и полученный склейкой c-звезд с занумерованными черными вершинами, то мы можем единственным с точностью до изоморфизма образом сопоставить ему разветвленное накрытие сферы с базисной c-звездой. Если на накрываемой сфере задана комплексная структура, то, по теореме Римана, такому графу можно сопоставить единственную с точностью до изоморфизма мероморфную функцию, осуществляющую указанное накрытие. Вложенные графы такого вида называются *обобщенными кактусами* (термин *кактус* зарезервирован для обобщенных кактусов, представляющих собой деревья на сфере Римана).

Представление класса изоморфизма мероморфных функций с базисной звездой графом на поверхности можно упростить, если лишь одно из критических значений является вырожденным. Пусть f — такая мероморфная функция степени n. Зафиксируем $(c-1)$-звезду на множестве невырожденных критических значений, и вместо ее полного прообраза рассмотрим лишь следующую его часть. Полный прообраз каждого луча звезды состоит из n отрезков, причем ровно два из этих отрезков имеют общий конец. Рассмотрим граф на накрывающей поверхности, вершины которого — это прообразы $f^{-1}(\bar{t})$ некритического значения $\bar{t}$, а ребра составлены из двух отрезков-прообразов лучей звезды, имеющих общий конец. Тем самым, у построенного графа n вершин; число его ребер равно числу лучей звезды, т.е. равно $c-1$, а его дополнение разбивается на клетки, число которых равно числу циклов в перестановки монодромии, отвечающей вырожденному критическому значению. Кроме того, ребра графа занумерованы: их нумерация совпадает с нумерацией соответствующих критических значений. Подробнее о работе с такими графами в некоторых специальных случаях см. в [3, 76].

1.4 Применения чисел Гурвица в физике

1.4.1 Инварианты Громова–Виттена

С алгебро-геометрической точки зрения инварианты Громова-Виттена многообразия V перечисляют различные отображения комплексных кривых в это многообразие, образ которых лежит в заданном классе двумерных гомологий. Точнее, пусть V — гладкое комплексное многообразие; фиксируем класс $\beta \in H_2(V, \mathbf{Z})$ в его целочисленных когомологиях (на который обычно накладывается условие $(\beta, L) > 0$ для любого обильного дивизора L в V). Будем рассматривать отображения $C \to V$ стабильных комплексных кривых рода g с n отмеченными точками, таких, что образ кривой принадлежит классу β. Если дополнительно требуется, чтобы образы отмеченных точек лежали на некотором фиксированном подмногообразии в V, то говорят об *относительных* инвариантах Громова–Виттена. Инварианты Громова–Виттена корректно определены, если число таких отображений конечно; в этом случае оно обозначается через $I^V_{g,n,\beta}$.

Подсчет инвариантов Громова–Виттена обычно представляет собой сложную задачу. В тех немногих случаях, когда их удается вычислить, эти вычисления, как правило, позволяют подсчитать лишь отображения рациональных кривых ($g = 0$). Так, Концевичу [51, 52] удалось подсчитать число рациональных кривых фиксированной степени d на проективной плоскости (число d задает класс гомологий β, равный d-кратному классу прямой в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$), проходящих через заданный набор точек в общем положении. В более общем случае проективных пространств следует подсчитывать рациональные кривые, пересекающие заданные подпространства, находящиеся в общем положении [61].

Подсчет классов изоморфизма разветвленных накрытий сферы можно рассматривать как задачу вычисления относительных инвариантов Громова–Виттена комплексной проективной прямой $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Когомологический класс β задается степенью накрытия. В случае, если тип ветвления над одной точкой фиксирован, мы можем считать, что отмеченные точки на кривой-прообразе переходят в заданную точку (бесконечность) на сфере. Тем самым, значение $h_{g;k_1,\dots,k_n}$ фактически совпадает с $I^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{g,n,K}$, и теорема 1.8 дает значения этих инвариантов. Что не удивительно, случай проективной прямой оказывается проще случая проективных пространств старшей размерности, и эти значения удается вычислить явно не только для рациональных кривых, но и для кривых старших родов.

1.4.2 Теория струн

Одним из наиболее ярких применений разветвленных накрытий в современной теоретической физике служит принадлежащее Гроссу и Тейлору [36] утверждение об эквивалентности двумерной квантовой хромодинамики струнной теории двумерных многообразий. Перейдем к его — поневоле не совсем точной — формулировке.

Пусть C — гладкая замкнутая двумерная поверхность рода G с фиксированной на ней метрикой (или, что достаточно, формой объема). Фиксируем главное $\mathrm{SU}(N)$-расслоение над C; можно, например, считать, что это расслоение тривиально. Аналогичные построения имеют место и для других компактных групп Ли, однако именно группа $\mathrm{SU}(N)$ наиболее тесно связана с классами изоморфизма комплексных накрытий.

Двумерная квантовая хромодинамика задается действием Янга–Миллса

$$\mathrm{YM}(A) = \frac{1}{2}\int_C |F|^2 d^2x,$$

где A — связность на выбранном расслоении, F — форма кривизны этой связности, а через d^2x обозначен элемент площади на поверхности. Рассмотрим функцию

$$Z_G(a,N) = \int e^{-YM(A)}\mathcal{D}(A),$$

где через a обозначена площадь поверхности, а интегрирование ведется по пространству всех связностей A на поверхностях с данной площадью. Точный смысл выписанному интегралу придать трудно; в физической литературе его адекватным дискретным аналогом принято считать предложенную Мигдалом [66] функцию

$$Z_G(a,N)=\sum_R (\dim R)^{2-2G} e^{-\frac{1}{2}\frac{a}{N}C_2(R)}, \tag{1.5}$$

где суммирование идет по всем неприводимым представлениям R группы $\mathrm{SU}(N)$, а через $C_2(R)$ обозначен второй Казимир представления R. Переход от интегрального представления к представлению (1.5) осуществляется путем выбора клеточного разбиения поверхности C (т.е. выбора вложенного в нее графа) и заменой непрерывной связности ее дискретным аналогом — «связностью вдоль каждого ребра». Можно затем показать, что результат дискретизации не зависит от выбора клеточного разбиения. Представление (1.5) мы и будем считать определением ряда теории возмущений двумерной квантовой хромодинамики.

Функцию $Z_G(a,N)$ следует рассматривать как асимптотический ряд по степеням переменной $1/N$. Ее логарифм $\log Z_G(a,N)$ также является таким асимптотическим рядом, причем его старшая степень по $1/N$ равна $2G-2$. Положим

$$\log Z_G(a,N)=\sum_{g=G}^{\infty}\Phi_g(a)\left(\frac{1}{N}\right)^{2g-2}.$$

Теорема 1.20 (Гросс, Тейлор [36]) *Коэффициенты $\Phi_g(a)$ в представлении функции $\log Z_G(a,N)$ в виде ряда по степеням параметра $1/N$ имеют вид*

$$\Phi_g(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{g;n}(a)e^{-\frac{1}{2}an}, \tag{1.6}$$

где

$$\phi_{g;n}(a)=\sum\frac{(-a)^{\text{число неспециальных особых точек накрытия}}}{\#\mathrm{Aut}}.$$

Здесь суммирование идет по всем классам изоморфизма разветвленных накрытий степени n поверхности C связными поверхностями рода g, причем такое накрытие имеет $|2-2g|$ специальные точки ветвления, где тип ветвления может быть произвольным, и дополнительное число простых точек ветвления (определяемое по формуле Римана–Гурвица). Через $\#\mathrm{Aut}$ обозначен порядок группы автоморфизмов накрытия.

Теорема Гросса и Тейлора позволяет тем самым, по крайней мере в принципе, дать полное описание квантовой хромодинамики на двумерных поверхностях в терминах чисел классов изоморфизма их разветвленных накрытий и указывает на важность подсчета этих чисел. Особенно важным при этом оказывается подсчет классов изоморфизма накрытий с $|2-2g|$ точками ветвления, над которыми ветвление произвольно. Для накрытий сферы значительный прогресс в этом направлении был достигнут в недавней работе А. Окунькова [72], показавшего что производящие функции для этих чисел (названных им *двойными числами Гурвица*) подчиняются некоторым системам дифференциальных уравнений — уравнениям Тоды, что приводит к простым рекуррентным соотношениям на сами числа.

Пример 1.21 В работах [10, 36] подсчитаны первые члены разложения (1.6) в некоторых простейших случаях. Так, для $G = 0$ (т.е. накрываемая поверхность — сфера) старший член разложения по $1/N$ имеет степень -2 и соответствует сферическим накрытиям сферы ($g = 0$). Вот несколько первых функций $\phi_{0;n}$:

$$\phi_{0;1}(a) = 1; \tag{1.7}$$

$$\phi_{0;2}(a) = \frac{1}{2} - a + \frac{1}{4}a^2; \tag{1.8}$$

$$\phi_{0;3}(a) = \frac{1}{3} - 2a + 3a^2 - \frac{4}{3}a^3 + \frac{1}{6}a^4; \tag{1.9}$$

$$\phi_{0;4}(a) = \frac{1}{4} - 3a + \frac{21}{2}a^2 - \frac{43}{2}a^3 + \frac{33}{4}a^4 - 2a^5 + \frac{1}{6}a^6. \tag{1.10}$$

Эти равенства имеют следующий смысл. Имеется единственное накрытие сферы сферой степени 1, причем у этого накрытия нет точек ветвления, поэтому $\phi_{0;1}(a) = 1$. Есть единственное накрытие сферы сферой степени 2, ветвящееся только над 0 и ∞ (порядки ветвления тоже равны двум); его группа автоморфизмов равна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Поэтому $\phi_{0;2}(0) = 1/2$. Накрытие, имеющее степень ветвления 2 и порядок ветвления 2 над точкой 0 и 1 над точкой ∞, единственно. Порядок его группы автоморфизмов равен 2 (можно поменять местами ∞ и третью точку ветвления). То же можно сказать и про накрытие с ветвлением порядка 2 в ∞. В результате мы получаем член $-a$ в $\phi_2(a)$. Старший же коэффициент равен $\frac{1}{4}$, так как имеется одно накрытие порядка 2 с четырьмя простыми точками ветвления.

Вообще, постоянный член в $\phi_{0;n}$ равен $\frac{1}{n}$, так как есть единственное накрытие сферы сферой степени n с двумя точками ветвления порядка

n, и группа автоморфизмов этого накрытия имеет порядок n. С другой стороны, старший коэффициент в $\phi_{0;n}$ равен $n^{n-3}/n!$, так как число неразветвленных накрытий сферы сферой степени n с $2n-2$ простыми точками ветвления равно $(2n-2)!n^{n-3}/n!$ (это частный случай формулы Гурвица из п. 2.3, который был передоказан в [10]), а порядок группы автоморфизмов такого накрытия равен $(2n-2)!$.

Тор не может быть разветвленно накрыт поверхностью меньшего рода. Поэтому старший член разложения по параметру $1/N$ функции Z_1 имеет степень 0 и соответствует неразветвленным накрытиям тора тором. Определение (1.5) дает следующее разложение для старшего члена функции Z_1: $\sum p_n x^n = \prod_i (1/(1-x^i))$, где p_n — число разбиений числа n (т.е. число диаграмм Юнга из n клеток), а $x = e^{-an/2}$. Логарифм этого выражения равен $\sum_n (\sum_{k|n} \frac{k}{n} x^n)$, так как коэффициент при x^n в $-\log(1-x^k)$ равен k/n, если k делит n, и нулю в противном случае. С другой стороны, число (неразветвленных) накрытий тора тором степени n равно $\sum_{k|n} k$. Действительно, такое накрытие определяется гомоморфизмом из когомологий накрываемого пространства в когомологии накрывающего, при котором фундаментальный квадрат целочисленной решетки переходит в параллелограмм площади n. Для первой образующей целочисленной длины k, $k|n$, такого параллелограмма вторую образующую можно выбрать k попарно неэквивалентными способами. Группа автоморфизмов такого накрытия имеет порядок n, что и дает требуемое равенство.

Глава 2

Отображение Ляшко–Лойенги и его связь с классификацией

2.1 Определение и алгебраическая природа отображения Ляшко–Лойенги

Основным инструментом для нахождения вычислительных характеристик, как в случае вырожденных многочленов, так и в случае общих мероморфных функций, служит отображение Ляшко–Лойенги. Отображение Ляшко–Лойенги (далее — ЛЛ в тексте и $\mathcal{LL}$ в формулах) сопоставляет мероморфной функции неупорядоченный набор ее критических значений (с учетом кратностей). Поскольку мы фиксируем ветвление на бесконечности и оно одинаково у всех функций, мы можем забыть про точку ветвления в бесконечности и будем сопоставлять функции набор ее *конечных* критических значений. Пространство неупорядоченных наборов из μ комплексных чисел изоморфно μ-мерному комплексному пространству: каждому такому набору можно сопоставить многочлен степени μ от одной переменной со старшим коэффициентом 1, корнями которого являются элементы набора. Пусть у нас есть голоморфное семейство мероморфных функций, такое, что для любого члена семейства множество его критических значений конечно и состоит из одного и того же количества элементов. Тогда отображение ЛЛ можно понимать как отображение из этого семейства в пространство $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\mu$ многочленов вида

$$d(t) = t^\mu + d_1 t^{\mu-1} + \cdots + d_\mu.$$

Это пространство изоморфно комплексному векторному пространству $\mathbb{C}^\mu$. *Дискриминантом* в пространстве $\mathcal{D}$ мы будем называть подмногообразие многочленов, имеющих кратные корни.

Для нашего исследования существенным оказывается тот факт, что во всех рассматриваемых ситуациях отображение ЛЛ является алгебраическим. Так, отображение $\mathcal{LL} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ на пространстве многочленов вида (1.1) полиномиально и квазиоднородно, а отображение $\mathcal{LL} : \mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n} \to \mathcal{D}$ на пространстве Гурвица мероморфных функций на гладких кривых продолжается до непрерывного послойно квазиоднородного отображения $\mathcal{LL} : \overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \to \mathcal{D}$, которое является, тем самым, морфизмом конусов. По всей видимости, алгебраичность отображения ЛЛ носит чрезвычайно общий характер, однако у нас нет соответствующего точного утверждения.

2.2 Связь между классификацией и степенью отображения ЛЛ

Другое важное свойство отображения ЛЛ: оно является конечнократным накрытием над дополнением к дискриминанту в пространствеобразе (по-видимому, это тоже чрезвычайно общее свойство, которое распространяется и на пространства функций на многомерных многообразиях). Обозначим его кратность (степень накрытия) через $\deg \mathcal{LL}$. Из теоремы Римана непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1 *Пусть $\mathcal{H}$ — пространство модулей мероморфных функций с данным типом ветвления, и предположим, что отображение $\mathcal{LL} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}$ является конечнократным накрытием. Тогда число классов изоморфизма разветвленных накрытий сферы с указанным типом ветвления совпадает со степенью отображения ЛЛ. Если аналогичное утверждение верно для некоторого конечнократного накрытия $\widetilde{\mathcal{H}}$ над пространством модулей $\mathcal{H}$, то для подсчета числа классов изоморфизма достаточно поделить степень отображения $\mathcal{LL} : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{D}$ на степень накрытия $\widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$.*

Несмотря на свою тавтологичность, это утверждение является принципиально важным. Оно позволяет заменить подсчет числа классов изоморфизма вычислением степени отображения Ляшко–Лойенги. Для общих многочленов эта степень была вычислена Ляшко (см. [3]) и Лойенгой [58].

Теорема 2.2 *Отображение Ляшко–Лойенги $\mathcal{LL} : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ полиномиально, квазиоднородно и является конечнократным накрытием над дополнением к дискриминанту в пространстве $\mathcal{D}$. Кратность этого накрытия равна $(\mu+1)^{\mu-1}$.*

Из теоремы Ляшко–Лойенги немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.3 *Дополнение к дискриминанту в пространстве $\mathcal{P}$ является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,1)$, где группа π является подгруппой индекса $(\mu+1)^{\mu-1}$ группы кос B_μ на μ нитях.*

Напомним, что пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,1)$ называется связное топологическое пространство, все гомотопические группы которого, за исключением первой, тривиальны, а первая гомотопическая (т.е. фундаментальная) группа изоморфна π. Так, дополнение к дискриминанту в пространстве многочленов $\mathcal{D}$ является пространством Эйленберга–Маклейна $K(B_\mu,1)$, его фундаментальная группа является группой кос на μ нитях, а любое его связное накрытие также является пространством Эйленберга-Маклейна.

Приводимое здесь доказательство классификационной теоремы для многочленов с произвольным ветвлением основывается на следующем обобщении теоремы Ляшко–Лойенги.

Теорема 2.4 *Ограничение $\mathcal{LL}_{\mathbf{X}}$ отображения Ляшко–Лойенги на каждый страт $\Sigma_{\mathbf{X}} \subset \mathcal{P}$ является невырожденным конечнократным накрытием степени*

$$\deg\, \mathcal{LL}_{\mathbf{X}} = (n+1)^{c-1}\frac{\#\mathrm{Aut}(T(\mathbf{X}))}{\#\mathrm{Aut}(\mathbf{X})}\prod_{i=1}^{c}\frac{\#\mathrm{Aut}(T(X_i))}{\#\mathrm{Aut}(X_i)}.$$

Каждый страт $\Sigma_{\mathbf{X}}$ является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,1)$ для некоторой группы π.

Доказательство этой теоремы для примитивных стратов получается простым обобщением доказательства Ляшко и Лойенги для невырожденного случая. Причина этого в том, что замыкание всякого примитивного страта допускает параметризацию векторным пространством, и отображение ЛЛ можно снова рассматривать как полиномиальное конечное квазиоднородное отображение векторных пространств.

Для непримитивных стратов ситуация сложнее. Замыкания непримитивных стратов представляются в виде пересечения замыканий примитивных стратов. Основную трудность в распространении утверждения теоремы 2.4 на произвольные страты представляет нетрансверсальность пересечения этих замыканий. Ключевым моментом в ее преодолении служит «разрешение особенностей пересечения». А именно, можно построить такое разветвленное накрытие пространства многочленов и таким образом выбрать прообразы стратов дискриминанта в этом накрытии, что пересечение замыканий прообразов примитивных стратов становится трансверсальным, а замыкание прообраза произвольного страта представляется в виде пересечения замыканий прообразов примитивных стратов.

Указанное разветвленное накрытие строится путем перехода от пространства $\mathcal{P}$ коэффициентов многочленов (1.1) к пространству $\widehat{\mathcal{P}}$ критических точек таких многочленов.

Теорема 2.5 ([55]) *Для любого страта $\Sigma_{\mathbf{X}} \subset \mathcal{P}$ в пространстве многочленов можно таким образом выбрать его прообраз $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{X}} \subset \widehat{\mathcal{P}}$ в пространстве критических точек, что замыкание этого прообраза представляется в виде трансверсального пересечения замыканий соответствующих прообразов примитивных стратов.*

В п. 3.3 описан способ, которым нужно выбирать прообразы стратов.

Теорема 2.5 позволяет подсчитать число классов изоморфизма многочленов с произвольным паспортом. В ситуации общих мероморфных функций отображение ЛЛ действует из пространства $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ в пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$ и обобщение теоремы Ляшко–Лойенги имеет следующий вид.

Теорема 2.6 *Отображение Ляшко–Лойенги продолжается с пространства $\mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$ до непрерывного послойно квазиоднородного отображения конуса $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$.*

Дополнение к дискриминанту в пространстве $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,1)$, где группа π является подгруппой индекса $\deg \mathcal{LL}$ в группе кос на μ нитях B_μ.

Здесь $\mu = K + n + 2g - 2$ — число конечных критических точек у общей мероморфной функции с ветвлением $k_1,\dots,k_n$ на бесконечности.

2.3 О вычислении степени отображения ЛЛ

На пространстве многочленов $\mathcal{P}$ отображение ЛЛ является полиномиальным конечнократным квазиоднородным отображением и его степень вычисляется по квазиоднородной теореме Безу. Аналогичное рассуждение применимо и к примитивным стратам. Замыкания непримитивных стратов подобной параметризации, вообще говоря, не допускают. Однако их «разрешения» являются однородными аффинными подмногообразиями в комплексном векторном пространстве, и степень ограничения отображения ЛЛ на них можно вычислить, если известна степень самих этих подмногообразий. Для вычисления степени этих подмногообразий и используется их представление в виде трансверсального пересечения «разрешенных»примитивных стратов. Для подсчета же степени «разрешенных» примитивных стратов мы используем предыдущее рассуждение в обратном направлении: нам достаточно знать степень ограничения ЛЛ на такие страты.

Подсчет степени отображения ЛЛ на пространствах Гурвица основан на сходной идее. Для этого подсчета достаточно вычислить индекс самопересечения прообраза класса $c_1(\mathcal{O}(1))$, т.е. класса гиперплоскости, при отображении ЛЛ. Однако в этой ситуации индекс пересечения уже не определяется одним числом — степенью однородного аффинного подмногообразия в векторном пространстве, — а имеет более сложное описание. Он описывается в терминах (старших) классов Сегре расслоения конусов. Для вычисления соответствующих старших классов Сегре используется представление пространства Гурвица в виде крайнего члена некоторой короткой «точной последовательности» конусов, остальные члены которой допускают простое описание.

2.4 Трансверсальные и относительные трансверсальные кратности

Наряду с кратностями отображения ЛЛ на стратах дискриминанта геометрию дискриминанта отражают также трансверсальные кратности и относительные трансверсальные кратности этого отображения на стратах.

Пусть $f \in \Sigma_{\mathbf{X}}$ — произвольный элемент страта $\Sigma_{\mathbf{X}}$, $d(t) = \mathcal{LL}(f) \in \mathcal{D}$ — его образ при отображении ЛЛ. *Трансверсальной кратностью* отображения ЛЛ на страте $\Sigma_{\mathbf{X}}$ называется число близких к f прообразов близкого к $d(t)$ общего многочлена $\tilde{d}(t) \in \mathcal{D}$, при отображении ЛЛ.

Если $\Sigma_{\mathbf{X}_1}$, $\Sigma_{\mathbf{X}_2}$ — два страта, второй из которых лежит в замыкании первого, то можно определить *относительную трансверсальную кратность* отображения ЛЛ на страте $\Sigma_{\mathbf{X}_2}$ по отношению к страту $\Sigma_{\mathbf{X}_1}$. А именно, для многочлена $f \in \Sigma_{\mathbf{X}_2}$ рассмотрим общее возмущение $\tilde{d}(t)$ многочлена $d(t) = \mathcal{LL}(f)$, лежащее в образе страта $\Sigma_{\mathbf{X}_1}$. Число прообразов многочлена $\tilde{d}(t)$, лежащих в страте $\Sigma_{\mathbf{X}_1}$ вблизи многочлена f, и есть значение относительной трансверсальной кратности. Трансверсальную кратность можно понимать как относительную трансверсальную кратность по отношению к открытому страту.

Нетрудно подсчитать, например, что трансверсальная кратность страта Максвелла равна 2, а трансверсальная кратность каустики 3. Действительно, у малого возмущения образа общей точки страта Максвелла есть два прообраза, близких к исходной точке (два различных невырожденных критических значения, на которые распалось вырожденное критическое значения, можно произвольным образом соотносить с критическими точками). Аналогично, общая точка каустики допускает три различных возмущения с совпадающими невырожденными критическими значениями (в семействе $x^3 + \varepsilon x$ умножение параметра ε на кубический корень из единицы не меняет критических значений).

Трансверсальные кратности отображения ЛЛ тесно связаны с его кратностями. Так, для открытого страта кратность отображения ЛЛ на нем равна

$$(\mu+1)^{\mu-1} = 3(\mu+1)^{\mu-2} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\mu+1)^{\mu-2}(\mu-2).$$

Здесь в правой части равенства 3 — трансверсальная кратность отображения ЛЛ на каустике, $(\mu+1)^{\mu-2}$ — его кратность на каустике, 2 — его трансверсальная кратность на страте Максвелла, $\frac{1}{2}(\mu+1)^{\mu-2}(\mu-2)$ — его кратность на страте Максвелла. Аналогичные формулы, очевидно, справедливы и для произвольных стратов и относительных трансверсальных кратностей.

С алгебраической точки зрения трансверсальная кратность отображения ЛЛ на стратах коразмерности 1 проявляет себя следующим образом. Вычислим дискриминант образа $\mathcal{LL}(f)$ при отображении ЛЛ многочленов семейства (1.1) (рассматриваемого как семейство многочленов от переменной t). Этот дискриминант является многочленом от параметров $p_2, \dots, p_\mu$. Он обращается в нуль на дискриминанте семейства (1.1), т.е. на замыкании объединения страта Максвелла и каустики. Поскольку замыкания страта Максвелла и каустики неприводимы, полученный дискриминант раскладывается в произведение некоторой степени образующей идеала страта Максвелла на некоторую степень образующей идеала каустики. Соответствующие степени равны в точности двум и трем — трансверсальным кратностям отображения ЛЛ на стратах. Например, для многочленов четвертой степени ($\mu = 3$) дискриминант их образа при отображении ЛЛ имеет вид

$$p_3^2(8p_2^3 + 27p_3^2)^3;$$

здесь p_3 — образующая идеала страта Максвелла, а $8p_2^3 + 27p_3^2$ — образующая идеала каустики.

Трансверсальные кратности всех стратов подсчитаны Д. Звонкиным в [87] на основе теоремы 2.4.

Глава 3

Пространства многочленов на рациональной кривой

На протяжении всей главы натуральное число μ фиксировано.

3.1 Классификация многочленов общего положения

Пусть $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — многочлен степени $\mu + 1$. Напомним, что многочлен это такое голоморфное отображение, что у бесконечности имеется единственный прообраз (кратность которого, следовательно, равна $\mu+1$). В произвольной голоморфной координате x на дополнении к точке $f^{-1}(\infty)$ в $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ многочлен записывается в виде $f(x) = p_0x^{\mu+1} + p_1x^{\mu} + \cdots + p_{\mu+1}$. Аффинная замена координаты $x \mapsto ax + b$ позволяет переписать многочлен f в виде

$$f(x) = x^{\mu+1} + p_2x^{\mu-1} + \cdots + p_{\mu}. \tag{3.1}$$

Тем самым, всякий многочлен степени $\mu+1$ изоморфен некоторому многочлену вида (3.1). Это соответствие, однако, не взаимно однозначное: среди многочленов (3.1) встречаются попарно изоморфные. На пространстве $\mathcal{P}$ многочленов вида (3.1) действует группа $\mathbf{Z}/(\mu+1)\mathbf{Z}$ вычетов по модулю $\mu + 1$. Это действие задается линейной заменой $x \mapsto \zeta x$ координаты x, где $\zeta \in \mathbb{C}$ пробегает корни степени $\mu + 1$ из 1. Орбита действия группы $\mathbf{Z}/(\mu+1)\mathbf{Z}$, содержащая многочлен с коэффициентами $(p_2, p_3, \ldots, p_{\mu+1})$, содержит также многочлены с коэффициентами $(\zeta^{\mu-1}p_2, \zeta^{\mu-2}p_3, \ldots, p_{\mu+1})$. Все выражения (3.1), принадлежащие одной орбите этого действия, задают попарно изоморфные многочлены.

Если хотя бы один из коэффициентов p_i при ненулевой степени x отличен от нуля, то соответствующая орбита состоит из $\mu+1$ элемента. Каждый из многочленов $x^{\mu+1}+p_{\mu+1}$ образует свою собственную орбиту. Эти многочлены выделяются тем свойством, что у каждого из них есть два значения с единственным прообразом. Тем самым, «пространством модулей» многочленов степени $\mu+1$ нужно считать фактормногообразие пространства $\mathcal{P}$ по этому действию. Дополнение к пространству модулей многочленов с единственным прообразом у двух точек является гладким многообразием. Нам, однако, будет удобнее иметь дело с пространством $\mathcal{P}$, накрывающим пространство модулей, так как у него простая топология.

Начнем с доказательства теоремы Ляшко–Лойенги 2.2, утверждающей, что число классов изоморфизма общих многочленов степени $\mu+1$ равно $(\mu+1)^{\mu-2}$.

Рассмотрим комплексное векторное m-мерное пространство с фиксированными координатами $a_1,\dots,a_m$. Функция $p:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$ называется *квазиоднородной веса* $W\in\mathbf{N}$ относительно набора весов $w_i\in\mathbf{N}$, $i=1,\dots,m$, если для любого $\lambda\in\mathbb{C}$

$$f(\lambda^{w_1}a_1,\dots,\lambda^{w_m}a_m)=\lambda^W f(a_1,\dots,a_m).$$

Например, любой одночлен $a_1^{\alpha_1}\dots a_m^{\alpha_m}$ является квазиоднородной функцией веса $\alpha_1 w_1+\dots+\alpha_m w_m$ относительно заданного набора весов w_1, $\dots$, w_m. Сумма одночленов веса W представляет собой многочлен веса W. При перемножении квазиоднородных функций с одинаковыми весами в прообразе их веса в образе складываются.

Обращение к понятию квазиоднородной функции позволяет описать отображение ЛЛ на семействе многочленов (1.1) явной формулой. *Дискриминант многочлена* $f(x)\in\mathcal{P}$ (т.е. произведение попарных разностей его корней) представляет собой многочлен от его коэффициентов $p_2,\dots,p_{\mu+1}$. Введем параметр t и рассмотрим дискриминант многочлена $f(x)-t$ как многочлен от t, коэффициенты которого зависят от параметров $p_2,\dots,p_{\mu+1}$.

Лемма 3.1 *Отображение ЛЛ переводит многочлен $f(x)$ в дискриминант многочлена $f(x)-t$ (рассматриваемый как многочлен от t) с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

Пример 3.2 Многочлен четвертой степени $f(x)=x^4+p_2x^2+p_3x+p_4$

переводится отображением ЛЛ в многочлен

$$\begin{aligned}\frac{1}{256}\mathrm{discrim}_x(f(x)-t) &= \frac{1}{256}(256t^3+(128p_2^2-768p_4)t^2\\ &+ \quad (768p_4^2+16p_2^4+144p_2p_3^2-256p_2^2p_4)t\\ &+ \quad 4p_2^3p_3^2+27p_3^4-16p_2^4p_4+128p_2^2p_4^2-144p_2p_3^2p_4-256p_4^3),\end{aligned}$$

дискриминант по переменной x многочлена $f(x)-t$, умноженный на $\frac{1}{256}$. Заметим, что если переменным присвоить веса

$$w(p_i)=i, \quad i=2,3,4; \qquad w(t)=4,$$

то все мономы в правой части равенства имеют вес 12. Вычисления такого рода мгновенно проводятся на компьютере с помощью любой системы символьных вычислений.

Доказательство леммы. Значение $t=t_0$ является корнем дискриминанта многочлена $f-t$ тогда и только тогда, когда у многочлена $f(x)-t_0$ есть кратные корни, т.е. t_0 является критическим значением многочлена f. Общий многочлен семейства (1.1) имеет μ различных критических значений, поэтому степень по t дискриминанта многочлена $f(x)-t$ не меньше μ. Положим вес переменной x равным 1. Тогда, если положить вес переменной p_i равным i, то многочлен f станет квазиоднородным веса $\mu+1$. Для того, чтобы многочлен $f(x)-t$ также был квазиоднородным, следует положить вес переменной t равным $\mu+1$.

Вес дискриминанта равен $\mu(\mu+1)$, так как дискриминант представляет собой произведение $\mu(\mu+1)$ сомножителя веса 1. С другой стороны, вес одночлена t^μ равен $\mu(\mu+1)$, поэтому вес коэффициента при t^μ в дискриминанте равен нулю, т.е. этот коэффициент — постоянная. Лемма доказана. $\triangleleft$

Согласно лемме, отображение ЛЛ служит примером *полиномиального квазиоднородного отображения* (т.е. его координатные функции — квазиоднородные многочлены). Эквивалентное определение квазиоднородного отображения состоит в следующем. Рассмотрим голоморфное отображение $P:\mathbb{C}^{m_1}\to\mathbb{C}^{m_2}$ комплексных векторных пространств. Предположим, что на каждом из пространств задано линейное действие группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению. Отображение называется квазиоднородным, если эти действия согласованы с отображением. Согласно стандартному факту теории представлений (см., например, [81]) всякое конечномерное линейное представление группы $\mathbb{C}^*$ раскладывается в прямую сумму одномерных. На одномерном пространстве действие группы определяется целым числом w: элемент $\lambda \in \mathbb{C}^*$ действует умножением на λ^w. Тем самым, квазиоднородные веса соответствуют характерам представления группы $\mathbb{C}^*$. Если среди весов присутствуют одинаковые, то разложение пространства на одномерные неприводимые подпространства неоднозначно. Однако набор весов с кратностями однозначно определен представлением.

В случае отображения ЛЛ действие элемента $\lambda \in \mathbb{C}^*$ на $\mathcal{P}$ определено умножением многочлена $f \in \mathcal{P}$ на комплексное число $\lambda^{\mu+1} \in \mathbb{C}^*$. При таком действии все критические значения умножаются на $\lambda^{\mu+1}$, что определяет согласованное действие группы $\mathbb{C}^*$ на образе отображения ЛЛ. В координатах действие на $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\lambda : x^{\mu+1} + p_2 x^{\mu-1} + \dots + p_{\mu+1} &\mapsto \lambda^{\mu+1}(x^{\mu+1} + p_2 x^{\mu-1} + \dots + p_{\mu+1}) \\ &= (\lambda x)^{\mu+1} + \lambda^2 p_2 (\lambda x)^{\mu-1} + \dots + \lambda^{\mu+1} p_{\mu+1} \\ &= y^{\mu+1} + \lambda^2 p_2 y^{\mu-1} + \dots + \lambda^{\mu+1} p_{\mu+1},\end{aligned}$$

в новой переменной $y = \lambda x$. Другими словами, $p_i \mapsto \lambda^i p_i$, $i = 2, \dots, \mu+1$. Задаваемый этим действием выбор весов совпадает со сделанным нами ранее. Соответствующее действие группы $\mathbb{C}^*$ на пространстве $\mathcal{D}$ имеет вид $d_i \mapsto \lambda^{i(\mu+1)} d_i$, $i = 1, \dots, \mu$, в согласии с тем, что координата d_i является i-ой элементарной симметрической функцией от критических значений многочлена f.

Рассмотрим полиномиальное отображение $F : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ двух конечномерных комплексных векторных пространств одинаковой размерности. Отображение называется *конечным*, если у любой точки в образе есть лишь конечное число прообразов. Число прообразов общей точки образа называется *кратностью*, или *степенью* конечнократного отображения. Следующее утверждение обобщает теорему Безу.

Теорема 3.3 (см., например, [4]) *Квазиоднородное полиномиальное отображение $F : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ пространств одинаковой размерности конечно тогда и только тогда, когда прообраз $F^{-1}(0)$ начала координат состоит только из начала координат. В этом случае, если веса переменных в образе равны $W_1, \dots, W_m$, а в прообразе $w_1, \dots, w_m$, то кратность отображения F равна*

$$\frac{W_1 \dots W_m}{w_1 \dots w_m}.$$

Из леммы 3.1 вытекает, что отображение ЛЛ полиномиально и конечно. Последнее утверждение следует из того, что дискриминант многочлена $f(x) - t$ равен t^μ в том и только в том случае, если $f(x) \equiv x^{\mu+1}$.

Тем самым, кратность отображения ЛЛ на пространстве $\mathcal{P}$ определяется весами переменных, и она равна

$$\frac{w(d_1)\dots w(d_\mu)}{w(p_2)\dots w(p_{\mu+1})} = \frac{1(\mu+1)\dots\mu(\mu+1)}{2\dots(\mu+1)} = (\mu+1)^{\mu-1}.$$

Теорема Ляшко–Лойенги вытекает теперь из доказанного равенства и леммы 3.1.

3.2 Примитивные страты

Приведенное в разделе 3.1 доказательство теоремы Ляшко–Лойенги почти дословно переносится на примитивные страты. Перенос основывается на наблюдении, согласно которому замыкание каждого примитивного страта допускает полиномиальную параметризацию векторным пространством. Рассмотрим, например, страт Максвелла. Он соответствует случаю двух различных критических точек с общим критическим значением. Паспорт $\mathbf{X}$ страта Максвелла состоит из $\mu-1$ разбиения и определяется единственным вырожденным разбиением $X_1 = 1^{\mu-3}2^2$; остальные разбиения X_i, $i = 2,\dots,\mu-1$ невырожденные, $X_i = 1^{\mu-1}2^1$.

Общий многочлен в страте Максвелла имеет вид

$$f(x) = (x^2 + p_1'x + p_2')^2(x^{\mu-3} + p_1''x^{\mu-4} + \dots + p_{\mu-3}'') + p_{\mu+1}',$$

где $p_1''+2p_1' = 0$. Другими словами, мы параметризуем страт Максвелла гиперплоскостью $p_1''+2p_1' = 0$ в μ-мерном пространстве с координатами $p_1'',\dots,p_{\mu-3}'',p_1',p_2',p_{\mu+1}'$. Ограничение действия группы $\mathbb{C}^*$ на пространстве многочленов $\mathcal{P}$ на страт Максвелла задает следующие веса переменных:

$$w(p_i') = i,\quad i = 1,2;\qquad w(p_i'') = i,\quad i = 1,\dots,\mu-3;\qquad w(p_{\mu+1}') = \mu+1.$$

С другой стороны, $T(X_1) = 1^{\mu-2}2^1$, и общий многочлен в образе имеет вид

$$d(t) = (t-t_1)^2 d'(t),$$

где $t_1 = p_{\mu+1}'$ — кратное критическое значение и

$$d'(t) = t^{\mu-2} + d_1't^{\mu-3} + d_2't^{\mu-4} + \dots + d_{\mu-2}$$

есть многочлен степени $\mu - 2$. Другими словами, мы параметризовали дискриминант в образе (ласточкин хвост) $(\mu - 1)$-мерным пространством с координатами $t_1, d'_1, \ldots, d'_{\mu-2}$. Это представление диктует следующий выбор весов координат в образе: $w(t_1) = \mu+1$, $w(d'_i) = i(\mu+1)$, $i = 1, \ldots, \mu - 2$. Ограничение отображения ЛЛ на страт Максвелла можно записать теперь как полиномиальное отображение векторных $(\mu - 1)$-мерных пространств. Его конечнократность следует из конечнократности ЛЛ на объемлющем пространстве.

Поделив произведение весов координат в образе на произведение весов координат в прообразе, мы получаем кратность ограничения отображения ЛЛ на страт Максвелла:

$$\frac{(\mu+1)\cdot 1(\mu+1)\ldots(\mu-2)(\mu+1)}{1\cdot 2\cdot(\mu+1)\cdot 1\cdot\dots\cdot(\mu-3)} = \frac{1}{2}(\mu-2)(\mu+1)^{\mu-2}.$$

Предыдущее вычисление легко обобщается на произвольный примитивный страт. А именно, предположим, что разбиение, отвечающее первому критическому значению, имеет вид $X_1 = 1^{k_1} \ldots n^{k_n}$ и все остальные критические значения морсовские, $X_j = 1^{\mu-1}2^1$, $j = 2, \ldots, c$. Тогда $c = \mu + 1 - A(X_1)$. Общий многочлен с вырожденным критическим уровнем $p'_{\mu+1}$, принадлежащий страту Σ_{X_1}, можно представить в виде

$$f(x) = f_0(x) f_1^2(x) \ldots f_\mu^{\mu+1}(x) + p'_{\mu+1},$$

где $f_i(x) = x^{k_i} + p_{i,1}x^{k_i-1} + \cdots + p_{i,k_i}$ есть многочлен степени k_i, k_0 — число простых корней уравнения $f(x) = p'_{\mu+1}$, $k_0 + 2k_1 + \cdots + (\mu+1)k_\mu = \mu+1$ и $p_{0,1} + 2p_{1,1} + \cdots + (\mu+1)p_{\mu,1} = 0$. Другими словами, замыкание примитивного страта Σ_{X_1} параметризуется гиперплоскостью в пространстве коэффициентов $p_{i,j}, p'_{\mu+1}$.

Действие группы $\mathbb{C}^*$ задает значения весов $w(p_{i,j}) = j$, $w(p'_{\mu+1}) = \mu + 1$.

С другой стороны, $T(X_1) = 1^{A(X_1)}A(X_1)^1$, и общий многочлен в образе записывается в виде

$$d(t) = (t - t_1)^{A(X_1)} d'(t),$$

где $t_1 = p'_{\mu+1}$ — кратное критическое значение и d' — общий многочлен степени $\mu - A(X_1)$. Ограничение отображения ЛЛ на примитивный страт Σ_{X_1} опускается до полиномиального конечнократного отображения векторных пространств размерности $\mu - A(X_1)$. Кратность этого отображения равна отношению произведений весов,

$$\frac{(n+1)^c (n - A(X_1))!}{(n+1)k_0! \ldots k_\mu!} = (n+1)^{c-1} \frac{\#\mathrm{Aut}(T(X_1))}{\#\mathrm{Aut}(X_1)}.$$

Теорема 1.7 вытекает из последнего равенства в силу леммы 2.1. $\triangleleft$

Замечание 3.4 Примитивные страты — не единственные страты, замыкание которых допускает параметризацию векторным пространством. Рассмотрим, например, страты, в которых каждому критическому значению соответствует ровно одна критическая точка. Паспорт многочлена, принадлежащего такому страту, состоит из разбиений X_i вида $X_i = 1^{\mu+1-m_i}m_i^1$. Общий многочлен такого страта представляется в виде

$$f(x) = (\mu+1)\int_0^x f_1(\xi)f_2(\xi)^2\dots f_\mu(\xi)^\mu d\xi + p'_{\mu+1},$$

где степень многочлена f_j, $2 \le j \le \mu$, равна числу k_j появлений числа $j+1$ в наборе $m_1,\dots,m_c$:

$$f_j(x) = x^{k_j} + p_{k_j,1}x^{k_j-1} + \dots + p_{k_j,j},$$

и $p_{k_1,1} + 2p_{k_2,1} + \dots + \mu p_{k_\mu,1} = 0$. Переменные в параметризующем пространстве имеют веса $w(p_{k_j,i}) = i$, $w(p'_{\mu+1}) = \mu+1$. Веса коэффициентов многочлена в образе равны $j(\mu+1)$, j пробегает c последовательностей от 1 до k_i, и мы получаем следующее значение кратности ограничения отображения ЛЛ на такой страт:

$$\frac{k_1!\dots k_\mu!(\mu+1)^c}{k_1!\dots k_\mu!(\mu+1)} = (\mu+1)^{c-1}.$$

Отметим, что этот ответ согласуется с предсказаниями теоремы 1.8: в этом случае $\#\mathrm{Aut}(T(\mathbf{X})) = \#\mathrm{Aut}(\mathbf{X}) = k_1!\dots k_\mu!$, $\#\mathrm{Aut}(T(X_i)) = \#\mathrm{Aut}(X_i) = (\mu - A(X_i))!$ для любого вырожденного разбиения X_i.

Построенная параметризация была использована в [49] для доказательства следующего результата.

Теорема 3.5 *Страт с паспортом, состоящим из разбиений X_i вида $X_i = 1^{\mu+1-m_i}m_i^1$, связен.*

3.3 Вспомогательные отображения и вычисление кратностей

В этом разделе мы начинаем доказывать теорему 2.5, которая утверждает существование подходящего разрешения пространства многочленов, в котором пересечение примитивных стратов становится трансверсальным. Для доказательства мы заменяем отображение ЛЛ его аналогом, который сопоставляет (упорядоченному) набору критических точек многочлена (упорядоченный) набор его критических значений. Доказательство трансверсальности будет закончено в следующем разделе, где завершится и доказательство основной теоремы о классификации многочленов.

Рассмотрим в $\mathcal{D}$ подпространство $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, состоящее из многочленов с нулевой суммой корней,

$$\mathcal{D}_0 = \{t^\mu + d_2 t^{\mu-2} + \cdots + d_\mu\}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ прообраз в $\mathcal{P}$ подпространства $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{LL}^{-1}(\mathcal{D}_0)$, т.е. множество многочленов с нулевой суммой критических значений, и рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_0 & \xrightarrow{\mathcal{LL}} & \mathcal{D}_0 \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \tau \\ \widehat{\mathcal{P}}_0 & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{LL}}} & \widehat{\mathcal{D}}_0 \end{array} \tag{3.2}$$

Здесь через $\widehat{\mathcal{P}}_0$ обозначено пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$ — гиперплоскость $a_1 + \cdots + a_\mu = 0$ в μ-мерном пространстве упорядоченных наборов критических точек, а через $\widehat{\mathcal{D}}_0$ — гиперплоскость $t_1 + \cdots + t_\mu = 0$ в μ-мерном пространстве упорядоченных наборов критических значений. Соответственно, отображение α задается формулой

$$\begin{aligned} \alpha : (a_1, \ldots, a_\mu) \quad &\mapsto \quad \left(\int_0^x \rho - \frac{1}{\mu} \left(\int_0^{a_1} \rho + \cdots + \int_0^{a_\mu} \rho \right) \right) \\ &= \quad \left(\int_0^x \rho - \bar{t}(a_1, \ldots, a_\mu) \right), \end{aligned}$$

где $\rho = (\mu+1)(\xi - a_1) \ldots (\xi - a_\mu) d\xi = \Phi(\xi) d\xi$, а $\bar{t}$ — усредненная сумма критических значений многочлена $\int_0^x \rho$. Отображение τ есть не что иное, как отображение Виета

$$\tau : (t_1, \ldots, t_\mu) \mapsto (t - t_1) \ldots (t - t_\mu).$$

Отображение $\widehat{\mathcal{LL}}$ сопоставляет точке $a = (a_1, \ldots, a_\mu) \in \widehat{\mathcal{P}}_0$ точку $(t_1, \ldots, t_\mu) \in \widehat{\mathcal{D}}_0$, где $t_i = f(a_i)$ — значение многочлена $f = \alpha(a)$ в точке a_i. Полиномиальность отображений $\mathcal{LL} \circ \alpha$, τ и $\widehat{\mathcal{LL}}$ очевидна.

Лемма 3.6 *Оба отображения $\mathcal{LL} \circ \alpha$ и τ квазиоднородны и конечнократны. Отображение $\widehat{\mathcal{LL}}$ однородно покоординатной степени $\mu+1$ и конечнократно.*

Доказательство. Действие группы $\mathbb{C}^*$ на пространстве $\mathcal{P}$ умножением функции на $\lambda^{\mu+1}$ поднимается до действия

$$\lambda : (a_1, \ldots, a_\mu) \mapsto (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_\mu)$$

этой группы на $\widehat{\mathcal{P}}_0$, а на $\widehat{\mathcal{D}}_0$ группа $\mathbb{C}^*$ действует умножением всех критических значений на $\lambda^{\mu+1}$. Отсюда следует квазиоднородность всех отображений из утверждения леммы, а их конечнократность вытекает из того, что для каждого из них прообраз начала координат состоит только из начала координат. $\lhd$

Стратификация пространства $\mathcal{P}$, описанная в п. 1.2, инвариантна относительно действия группы $\mathbb{C}$ сдвигами свободного члена. Поэтому она определяет стратификацию как многообразия $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$, так и остальных пространств в вершинах квадрата (3.2). Для вычисления кратностей отображения ЛЛ на стратах дискриминанта нам достаточно вычислить кратности ограничений на соответствующие страты отображений $\alpha, \widehat{\mathcal{LL}}$ и τ.

Опишем индуцированные стратификации.

Страты пространства $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ нумеруются всевозможными разбиениями $T = 1^{m_1} \ldots \mu^{m_\mu}$ числа μ, $\mu = 1 \cdot m_1 + \cdots + \mu \cdot m_\mu$. Страт $\Delta_T \subset \mathcal{D}$ состоит из многочленов, имеющих m_1 корней кратности $1, \ldots, m_\mu$ корней кратности μ.

Зафиксируем для разбиения T числа μ разбиение множества индексов $\{1, \ldots, \mu\}$ на непересекающиеся подмножества, такое, что в нем ровно m_1 подмножеств из одного элемента, …, m_μ подмножеств из μ элементов. Сопоставим такому разбиению страт $\widehat{\Delta}_T \subset \widehat{\mathcal{D}}_0$ пространства $\widehat{\mathcal{D}}_0$, который состоит из всех точек $(t_1, \ldots, t_\mu) \in \mathcal{D}_0$, таких, что $t_i = t_j$ тогда и только тогда, когда индексы i и j принадлежат одному подмножеству разбиения. (Для упрощения обозначений страта мы опускаем указание на выбранное разбиение множества индексов.)

Аналогично, зафиксируем для паспорта $\mathbf{X} = \{X_1, \ldots, X_c\}$ разбиение $\mathbf{I} = \{I_1, \ldots, I_c\}$ множества индексов $\{1, \ldots, \mu\}$ на c наборов $I_1, \ldots, I_c$ попарно непересекающихся подмножеств, такое, что i-ый набор I_i этого разбиения содержит в точности k_{i1} подмножеств из одного элемента, …, $k_{i\mu}$ подмножеств из μ элементов, где $X_i = 1^{k_{i0}} 2^{k_{i1}} \ldots (\mu+1)^{k_{i\mu}}$. Страт $\widehat{\Sigma} \subset \widehat{\mathcal{P}}_0$ состоит из всех точек $a = (a_1, \ldots, a_\mu) \in \widehat{\mathcal{P}}_0$, таких, что

$a_j = a_l$ тогда и только тогда, когда индексы j и l принадлежат одному подмножеству разбиения, и значения многочлена $\alpha(a)$ в точках a_j, a_l совпадают в том и только в том случае, если индексы j и l принадлежат множествам одного набора разбиения.

По разбиению $\mathbf{I}$ множества индексов для паспорта $\mathbf{X}$ однозначно строится *согласованное* с ним разбиение множества индексов $T(\mathbf{I})$: каждое из множеств этого разбиения представляет собой объединение всех множеств индексов внутри каждого из наборов $I_1, \ldots, I_c$.

Ограничения отображений квадрата (3.2) на соответствующие страты образуют коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\mathbf{X}} & \xrightarrow{\mathcal{LL}} & \Delta_{T(\mathbf{X})} \\ \alpha\uparrow & & \uparrow\tau \\ \widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{LL}}} & \widehat{\Delta}_{T(\mathbf{I})} \end{array} \tag{3.3}$$

где страты $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}}$, $\widehat{\Delta}_{T(\mathbf{I})}$ построены по согласованным разбиениям множества индексов $\{1, \ldots, \mu\}$.

Степени всех отображений в этом квадрате постоянны и не зависят ни от выбора точки в образе, ни от выбора разбиения $\mathbf{I}$. Обозначим эти степени соответственно через $\deg_{\mathbf{X}}(\mathcal{LL})$, $\deg_{\mathbf{X}}(\alpha)$, $\deg_{\mathbf{X}}(\widehat{\mathcal{LL}})$ и $\deg_{T(\mathbf{X})}(\tau)$. В силу коммутативности квадрата (3.3) имеем

$$\deg_{\mathbf{X}}(\mathcal{LL}) = \frac{\deg_{\mathbf{X}}(\widehat{\mathcal{LL}}) \cdot \deg_{T(\mathbf{X})}(\tau)}{\deg_{\mathbf{X}}(\alpha)}, \tag{3.4}$$

и для доказательства теоремы 2.5 нам достаточно вычислить все кратности, входящие в правую часть формулы. Для двух из трех кратностей это вычисление совсем простое.

Лемма 3.7 *Пусть $T = 1^{m_1} \ldots \mu^{m_\mu}$. Тогда*

$$\deg_T(\tau) = m_1! \ldots m_\mu! = \#\mathrm{Aut}(T).$$

Действительно, возьмем (мульти)множество корней многочлена, лежащего в страте $\Delta_T \subset \mathcal{D}_0$. Если зафиксировать разбиение множества индексов $\{1, \ldots, \mu\}$, отвечающее разбиению T, то у нас останется $m_1!$ способов занумеровать корни кратности $1, \ldots, m_\mu!$ способов занумеровать корни кратности μ. $\lhd$

Лемма 3.8 *Справедливо равенство*

$$\deg_{\mathbf{X}}(\alpha) = \#\mathrm{Aut}(\mathbf{X}) \prod_{i=1}^{c} \frac{\#\mathrm{Aut}(X_i)}{k_{i0}!}.$$

Здесь k_{i0} — число элементов 1 в разбиении X_i, $X_i = 1^{k_{i0}} \dots (\mu+1)^{k_{i\mu}}$.

Эта лемма доказывается так же, как и предыдущая: у нас есть $\#\mathrm{Aut}(\mathbf{X})$ способов переставить наборы индексов, отвечающие разбиениям X_i, и $\#\mathrm{Aut}(X_i)/k_{i0}!$ способов переставить множества индексов внутри каждого набора. Простые прообразы данного критического значения многочлена не нумеруются, что и приводит к необходимости разделить на $k_{i0}!$. $\lhd$

Вычисление степени отображения $\widehat{\mathcal{LL}}$ требует доказательства трансверсальности пересечения примитивных стратов в $\widehat{\mathcal{P}}_0$, к чему мы и переходим.

3.4 Трансверсальность пересечения примитивных стратов в пространстве критических точек

Начнем с доказательства леммы, связывающей степень ограничения однородного отображения на подмногообразие со степенью этого многообразия. Пусть $F : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, $F = (F_1, \dots, F_m)$ — однородное отображение постоянной покоординатной степени W. Предположим также, что оно конечно.

Лемма 3.9 *Пусть $V \subset \mathbb{C}^m$ — однородное аффинное подмногообразие чистой размерности k в прообразе, причем образ $F(V)$ неприводим. Тогда*

$$W^k \deg\, V = \deg\, F(V) \cdot \deg_V(F). \tag{3.5}$$

Если при этом в общей точке многообразия V ограничение F_V отображения F на V невырождено, то у общей точки образа $F(V)$ ровно $\deg_V(F)$ геометрически различных прообразов.

Здесь через $\deg\, V$, $\deg\, F(V)$ обозначены степени соответствующих многообразий, а через $\deg_V(F)$ — степень ограничения отображения F на многообразие V.

Доказательство. Рассмотрим проективизацию $\widetilde{F} : \mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1}$ отображения F и соответствующие проективные многообразия $\widetilde{V} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1}$, $\widetilde{F}(\widetilde{V}) = \widetilde{F(V)} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1}$. Сначала мы хотим доказать, что

$$W^{k-1} \deg\, \widetilde{V} = \deg\, \widetilde{F}(\widetilde{V}) \cdot \deg_{\widetilde{V}}(\widetilde{F}). \tag{3.6}$$

Равенство (3.5) следует отсюда, так как $\deg V = \deg \widetilde{V}$, $\deg f(V) = \deg \widetilde{F}(\widetilde{V})$ по определению степени и $\deg_V(F) = W \deg_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$.

Пусть $\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-k}$ — общая $(m-k)$-мерная плоскость в пространстве-образе. Тогда, по определению, $\#(\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-k} \cap \widetilde{F}(\widetilde{V})) = \deg \widetilde{F}(\widetilde{V})$. Подсчитаем теперь двумя способами число прообразов $\widetilde{F}^{-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-k} \cap \widetilde{F}(\widetilde{V}))$, лежащих в $\widetilde{V}$.

Во-первых, это число равно $\deg \widetilde{F}(\widetilde{V}) \cdot \deg_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$, так как у каждой точки трансверсального пересечения $\deg_{\widetilde{V}}(\widetilde{F})$ прообразов в $\widetilde{V}$.

С другой стороны, прообраз $\widetilde{F}^{-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-k})$ $(m-k)$-мерной плоскости является подмногообразием степени W^{k-1} в прообразе. Действительно, такая плоскость задается $k-1$ линейными однородными уравнениями в координатах $y_1, \ldots, y_m$ в пространстве-образе, и после подстановки $y_i = F_i$ мы получаем $k-1$ уравнение степени W для $\widetilde{F}^{-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-k})$. Поэтому число точек пересечения равно

$$\deg \widetilde{F}^{-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-k}) \cdot \deg \widetilde{V} = W^{k-1} \deg \widetilde{V},$$

и равенство (3.6) доказано. Мы можем выбрать $(m-k)$-мерную плоскость в образе так, чтобы она не проходила через образы точек вырождения отображения $\widetilde{F}$, лежащих в $\widetilde{V}$. Все прообразы каждой точки пересечения такой плоскости с $\widetilde{F}(\widetilde{V})$ имеют кратность 1, поэтому их число равно степени отображения. $\lhd$

Пользуясь леммой 3.9, мы можем подсчитать, зная кратность ограничения отображения ЛЛ на примитивный страт в пространстве $\mathcal{P}_0$ (см. п. 3.2), степень примитивного страта в пространстве $\widehat{\mathcal{P}}_0$. Фиксируем разбиение I подмножества множества индексов, отвечающее вырожденному разбиению $X = X_1 = 1^{k_0} \ldots (\mu+1)^{k_\mu}$, и обозначим соответствующий примитивный страт через $\widehat{\Sigma}_I \subset \widehat{\mathcal{P}}_0$. Аналогичный смысл имеют обозначения $T(I)$ и $\deg_X$ (в качестве индекса указано разбиение, а не паспорт). Замыкание страта $\widehat{\Sigma}_I$ будем обозначать через $\mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_I)$. Степень этого замыкания зависит, очевидно, только от разбиения X, а не от выбора соответствующего ему разбиения I.

Лемма 3.10 *Справедливо равенство*

$$\deg \, \mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_I) = \frac{\#\mathrm{Aut}(T(X))}{k_0!}.$$

Доказательство. Коммутативность квадрата (3.3) для примитивного страта $\widehat{\Sigma}_I \subset \mathcal{P}_0$ дает

$$\begin{aligned}
\deg_X(\widehat{\mathcal{LL}}) &= \frac{\deg_X(\alpha)\deg_X(\mathcal{LL})}{\deg_{T(X)}(\tau)} && (3.7)\\
&= \frac{\#\mathrm{Aut}(T(X))\#\mathrm{Aut}(X)\cdot(\mu+1)^{c-1}\frac{\#\mathrm{Aut}(T(X))}{\#\mathrm{Aut}(X)}}{\#\mathrm{Aut}(T(X))} && (3.8)\\
&= (\mu+1)^{c-1}\frac{\#\mathrm{Aut}(X)}{k_0!}, && (3.9)
\end{aligned}$$

откуда в силу леммы 3.9,

$$\deg\ \mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_I) = \frac{\#\mathrm{Aut}(T(X))}{k_0!}.\triangleleft$$

Пусть теперь I — произвольный набор непересекающихся подмножеств множества индексов $\{1,\dots,\mu\}$. Сопоставим такому набору *стандартную плоскость* $\Pi_I \subset \widehat{\mathcal{P}}_0$, заданную набором уравнений $a_j = a_l$ для всех пар j, l, принадлежащих одному подмножеству набора I.

Теорема 3.11 *Ограничение отображения $\widehat{\mathcal{LL}}$ на плоскость Π_I невырождено в дополнении к пересечению этой плоскости другими стандартными плоскостями, не содержащими плоскости Π_I (т.е. на множестве точек, для которых $a_j \neq a_l$ для любой пары индексов j, l, не лежащих в одном подмножестве набора I).*

Доказательство. Обозначим через $b_0, b_1, \dots, b_m$ координаты критических точек, совпадающих на плоскости Π_I, и пусть β_i — число критических точек с координатой b_i; имеют место равенства $\beta_0+\dots+\beta_m = \mu$ и $\beta_0 b_0 + \dots + \beta_m b_m = 0$. Рассмотрим дифференциальную 1-форму

$$\rho_I = (\mu+1)(x-b_0)^{\beta_0}\dots(x-b_m)^{\beta_m}dx = \Phi_I(x)dx$$

на $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Ограничение отображения $\widehat{\mathcal{LL}}$ на плоскость Π_I покоординатно имеет вид

$$\widehat{\mathcal{LL}}_i : (b_0, b_1, \dots, b_m) \mapsto \int_0^{b_i} \rho_I.$$

Для $i = 0, 1, \dots, m$ зафиксируем на прямой полиномиальные 1-формы

$$\omega_i = -\beta_i \frac{\rho_I}{x-b_i}.$$

Классы когомологий $[\omega_i]$ этих форм в пространстве относительных когомологий $H^1(\mathbb{C}^1, \{b_0, \dots, b_m\})$ удовлетворяют линейному соотношению $[\omega_0] + \dots + [\omega_m] = 0$, так как 1-форма $d\Phi_I = \omega_0 + \dots + \omega_m$ задает нулевой элемент в классе относительных когомологий. Если все b_i попарно различны, то других соотношений между классами этих 1-форм нет. Действительно, если 1-форма $\omega = \lambda_0\omega_0 + \dots + \lambda_m\omega_m$ задает нулевой класс относительных когомологий, то многочлен $\int_{b_0}^x \omega$ имеет ту же степень и те же кратности нулей, что и многочлен $\Phi_I(x)$, коэффициент 1-формы ρ_I, а значит, пропорционален последнему. Следовательно, классы $[\omega_0], \dots, [\omega_m]$ порождают все m-мерное пространство относительных когомологий.

Рассмотрим матрицу Якоби $(\partial\widehat{\mathcal{LL}}_j/\partial b_i)$. Ее внедиагональные элементы имеют следующий вид:

$$\partial\widehat{\mathcal{LL}}_j/\partial b_i = \int_0^{b_j} \omega_i - \partial\bar{t}/\partial b_i.$$

Диагональные элементы отличаются от внедиагональных тем, что для их вычисления необходимо также вычислить слагаемое, являющееся результатом дифференцирования по верхнему пределу интегрирования. Однако это дифференцирование дает значение подинтегральной функции в точке b_i, которое равно нулю, поэтому диагональные элементы имеют тот же вид, что и внедиагональные. Если теперь в получившейся матрице Якоби вычесть из всех строчек строчку, отвечающую компоненте $\widehat{\mathcal{LL}}_0$, то мы получим $(m+1)\times(m+1)$-матрицу

$$\begin{pmatrix} \int_0^{b_0} \omega_0 - \partial\bar{t}/\partial b_0 & \dots & \int_0^{b_0} \omega_m - \partial\bar{t}/\partial b_m \\ \int_{b_0}^{b_1} \omega_0 & \dots & \int_{b_0}^{b_1} \omega_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{b_0}^{b_m} \omega_0 & \dots & \int_{b_0}^{b_m} \omega_m \end{pmatrix}.$$

В силу того, что классы 1-форм ω_j порождают все пространство относительных когомологий, ранг этой матрицы равен m в точках, где все b_i различны. Теорема доказана. $\triangleleft$

Зафиксируем теперь паспорт $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ и согласованное с ним разбиение $\mathbf{I} = \{I_1, \dots, I_c\}$ множества индексов. Назовем индекс i *существенным* (для разбиения $\mathbf{I}$), если число подмножеств в содержащем его наборе индексов $I_k \in \mathbf{I}$ больше единицы. Отвечающие этому индексу критическое значение и критическую точку также будем называть существенными. Из теоремы 3.11 вытекает следующее утверждение, завершающее доказательство теоремы 1.8.

Следствие 3.12 *Замыкание* $\mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}})$ *страта* $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}} \subset \widehat{\mathcal{D}}_0$ *является пересечением замыканий* $\mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_{I_i})$ *примитивных стратов* $\widehat{\Sigma}_{I_i}$*, причем пересечение трансверсально почти во всех точках многообразия* $\mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}})$*, т.е. всюду, за исключением, быть может, подмногообразия коразмерности* 1*, состоящего из точек, где существенная критическая точка сливается с другой критической точкой. В частности, замыкание* $\mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}})$ *является гладким всюду, за исключением указанного подмногообразия, и*

$$\deg\,\mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}}) = \prod_{i=1}^{c} \deg\,\mathrm{cl}(\widehat{\Sigma}_{I_i}) = \prod_{i=1}^{c} \frac{\#\mathrm{Aut}(T(X_i))}{k_{i0}!}.$$

Доказательство. Сопоставим разбиению $\mathbf{I}$ множества индексов на наборы подмножеств разбиение $I = I(\mathbf{I})$, $I = I_1 \cup \dots \cup I_k$, опустив промежуточный уровень иерархии разбиения; пусть, как и выше, символы b_i обозначают координаты совокупности попарно совпадающих на стандартной плоскости Π_I критических точек. Страт $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}}$ лежит в плоскости Π_I. Ограничение отображения $\widehat{\mathcal{LL}}$ на эту плоскость невырождено почти всюду, поэтому страт $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}}$, который локально является прообразом плоскости в $\mathcal{D}_0$, оказывается гладким в окрестности любой своей точки, где $b_i \neq b_j$. При слиянии двух несущественных критических точек гладкость замыкания страта не нарушается.

Трансверсальность пересечения примитивных стратов в точке общего положения также вытекает из предыдущей теоремы. Действительно, согласно приведенному рассуждению, каждый из примитивных стратов $\widehat{\Sigma}_{I_i}$ гладкий в той точке его пересечения с плоскостью Π_I, где его существенные критические точки не совпадают с другими критическими точками. Образы стратов $\widehat{\Sigma}_{I_i}$ при отображении $\widehat{\mathcal{LL}}$ являются трансверсально пересекающимися плоскостями, и в силу невырожденности отображения сами страты тоже пересекаются трансверсально.

Согласно комплексному варианту леммы Ролля, при слиянии двух критических точек с одинаковым критическим значением с ними сливается и (по крайней мере одна) критическая точка с другим критическим значением. Поэтому образ множества точек замыкания страта $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}}$, отвечающих слившимся критическим точкам, имеет коразмерность 1 в образе всего замыкания. В силу собственности отображения $\widehat{\mathcal{LL}}$, и само это множество имеет коразмерность 1 в замыкании страта.

Следствие 3.12, а значит, и теорема 1.8, доказаны. Теорема Тома 1.5 также вытекает отсюда: размерность примитивного страта $\widehat{\Sigma}_{X_i} \subset \widehat{\mathcal{P}}_0$ равна $\mu - A(X_i)$, и в силу трансверсальности их пересечение непусто в том и только в том случае, если сумма коразмерностей не превосходит μ.

Глава 4

Пространства Гурвица

Основная цель этой главы — описание пространства Гурвица и доказательство теоремы 2.6, выражающей число классов изоморфизма общих мероморфных функций с одной вырожденной точкой ветвления на кривых рода g через индексы пересечения некоторых классов на пространстве модулей кривых.

4.1 Переход к общему случаю. Примеры

4.1.1 Случай Арнольда: рациональные функции с двумя полюсами

В этом разделе мы проводим, следуя В. И. Арнольду [2], классификацию рациональных функций $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ с двумя полюсами. В принципе, общий подход теоремы 2.6 применим и в этом случае (также, как и в случае одного полюса на сфере), однако он требует использования формализма алгебраических стеков: модули рациональных кривых с одной и двумя отмеченными точками образуют стеки, а не пространства. В то же время, подход Арнольда прозрачен и не требует механизмов, отличных от обобщенной теоремы Безу, использованной при доказательстве теоремы Ляшко–Лойенги. Ниже мы используем примененную Арнольдом параметризацию в общем случае пространств Гурвица.

Фиксируем порядки полюсов k_1, k_2 у рациональной функции f с двумя полюсами и занумеруем эти полюса. Выберем координату x в прообразе таким образом, чтобы полюс порядка k_1 попал в точку ∞, полюс порядка k_2 — в точку 0, а старший коэффициент разложения функции в ∞ равнялся бы 1. Запишем функцию f в координате x в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{k_1} + a_1 x^{k_1-1} + \cdots + a_{k_1-1} x + c \\ &+ b_{k_2-1}\frac{u}{x} + \cdots + b_1\left(\frac{u}{x}\right)^{k_2-1} + \left(\frac{u}{x}\right)^{k_2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Выбор координаты x и параметра u неоднозначен: координата x определена с точностью до умножения на корень степени k_1 из 1, а параметр u определен с точностью до умножения на корень степени k_2 из 1. Тем самым, дополнение к гиперплоскости $u = 0$ в пространстве $\mathbb{C}^{k_1+k_2}$ с координатами $a_1, \ldots, a_{k_1-1}, b_1, \ldots, b_{k_2-1}, c, u$ можно рассматривать как $k_1 k_2 \#\mathrm{Aut}(k_1, k_2)$-кратное накрытие над пространством модулей рациональных функций с двумя полюсами порядков k_1, k_2. (Значение $\#\mathrm{Aut}(k_1, k_2)$ равно 2 или 1 в зависимости от того, равны или не равны между собой числа k_1, k_2. Появление этого коэффициента объясняется произволом в распределении двух полюсов между нулем и бесконечностью, если их порядки равны.)

По формуле Римана–Гурвица при $u \neq 0$ рациональная функция с двумя полюсами порядков k_1, k_2 имеет $\mu = k_1 + k_2$ критических точек (это очевидно вытекает и из представления (4.1): числитель дифференциала такой рациональной функции имеет степень $\mu = k_1 + k_2$). Отображение ЛЛ определено на дополнении к гиперплоскости $u = 0$ и действует в пространство $\mathcal{D}$ унимодальных многочленов степени μ от переменной t.

Теорема 4.1 ([2]) *Отображение ЛЛ является полиномиальным и продолжается, следовательно, до непрерывного отображения всего пространства $\overline{\mathcal{H}}_{0;k_1,k_2}$ рациональных функций вида (4.1). Это продолженное отображение квазиоднородно, конечнократно и является накрытием степени*

$$(k_1 + k_2 - 1)!\frac{k_1^{k_1}}{(k_1-1)!}\frac{k_2^{k_2}}{(k_2-1)!} \tag{4.2}$$

над дополнением к дискриминанту в образе. Дополнение к дискриминанту в прообразе является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$ для группы π, индекс которой в группе кос из μ нитей равен степени накрытия.

Следствие 4.2 ([39, 27, 2]) *Число классов изоморфизма рациональных функций с двумя полюсами порядков k_1, k_2 с заданными $\mu = k_1 + k_2$ различными точками ветвления равно*

$$\frac{(k_1 + k_2 - 1)!}{\#\mathrm{Aut}(k_1, k_2)}\frac{k_1^{k_1}}{k_1!}\frac{k_2^{k_2}}{k_2!}. \tag{4.3}$$

Действительно, согласно лемме 2.1, для нахождения числа классов изоморфизма достаточно поделить степень отображения ЛЛ на кратность, с которой пространство $\mathcal{P}$ накрывает пространство модулей.

Доказательство теоремы. Полиномиальность отображения ЛЛ доказывается с помощью утверждения, обобщающего лемму 3.1.

Лемма 4.3 *Отображение ЛЛ переводит рациональную функцию*

$$f(x) = p(x)/q(x)$$

($p(x)$ и $q(x)$ — многочлены и дробь неприводима) в многочлен от t, равный, с точностью до множителя, многочлену от t $\operatorname{discrim}(p(x) - tq(x))$.

Действительно, значение t является критическим значением функции f в том и только в том случае, если у многочлена $p(x) - tq(x)$ есть кратный корень.

Пример 4.4 Пусть $f(x) = x + c + bu/x + (u/x)^2 = p(x)/q(x)$. Дискриминант многочлена $p(x) - tq(x)$ равен

$$\begin{gathered}4u^2t^3 + (b^2 - 12c)u^2t^2 + (12c^2 - 2cb^2 - 18bu)u^2t \\ +(c^2b^2 + 18cbu - 4c^3 - 27u^2 - 4b^3u)u^2.\end{gathered}$$

Поделив на u^2, заключаем, что отображение ЛЛ переводит $f(x)$ в многочлен

$$4t^3 + (b^2 - 12c)t^2 + (12c^2 - 2cb^2 - 18bu)t + (c^2b^2 + 18cbu - 4c^3 - 27u^2 - 4b^3u),$$

умноженный на $\frac{1}{4}$.

У общей рациональной функции вида (4.1) имеется μ различных простых критических значений, поэтому дискриминант $\operatorname{discrim}(p(x) - tq(x))$ имеет степень μ по t и он равен

$$\tilde{d}_0t^\mu + \tilde{d}_1t^{\mu-1} + \dots + \tilde{d}_\mu,$$

где $\tilde{d}_l$ — многочлены от переменных a_i, b_j, c, u. При этом $\tilde{d}_0$ имеет вид монома $u^{k_2(k_2-1)}$ с некоторым постоянным множителем, так как при $u \neq 0$ число критических значений рациональной функции (с учетом кратности) постоянно и равно μ. Отсюда вытекает, что отображение

ЛЛ покоординатно имеет вид $d_i = \tilde{d}_i/\tilde{d}_0$, а значит оно рационально и может иметь полюса только на плоскости $u = 0$. Мы хотим доказать, что коэффициенты d_i — полиномы, и значит отображение ЛЛ полиномиально. Для этого достаточно показать, что критические значения семейства функций (4.1) остаются ограниченными при стремлении параметров к любой точке на гиперплоскости $u = 0$, или, что достаточно, при стремлении параметров к общей точке этой гиперплоскости.

Рассмотрим на плоскости с координатами x, y семейство гипербол $xy = u$. При фиксированном значении u функция (4.1) совпадает с ограничением на соответствующую гиперболу функции

$$F(x,y) = x^{k_1} + a_1x^{k_1-1} + \cdots + a_{k_1-1}x + c + b_{k_2-1}y + \cdots + b_1y^{k_2-1} + y^{k_2},$$

записанным в координате x. При $u \to 0$ гипербола вырождается в пару прямых $y = 0$, $x = 0$, а функция $F(x,y)$ превращается в пару многочленов степеней соответственно k_1 и k_2 на этих прямых. У этих многочленов есть $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) = k_1 + k_2 - 2$ критических значений. При стремлении u к нулю критические значения ограничения функции F на гиперболу стремятся к этим критическим значениям плюс, дополнительно, двукратно взятому значению $F(0,0) = c$ функции F в начале координат — единственной общей точке пары координатных прямых.

Действительно, рассмотрим прообраз маленького круга радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке c в сфере-образе относительно F. При $u = 0$ компонента связности такого прообраза, содержащая начало координат, представляет собой пару дисков — по одному диску на каждой из прямых — с общим центром. При фиксированном малом $u \neq 0$ эта компонента деформируется в малый цилиндр. Если ограничение функции F на прямые $y = 0$ и $x = 0$ не имеет критических точек в точке пересечения этих прямых, то степень ее ограничения на граничные окружности равна 1. То же самое справедливо и для ограничения близкой функции на граничные окружности продеформированного малого цилиндра. По формуле Римана–Гурвица, ограничение близкой функции на этот малый цилиндр имеет две критических точки. При стремлении u к 0 отвечающие им критические значения стремятся к значению $F(0,0)$. Если же у ограничения F на прямые $y = 0$ и $x = 0$ есть критические точки порядков соответственно m_1 и m_2 в начале координат, то то же рассуждение показывает, что $m_1 + m_2$ критические точки на продеформированном цилиндре сходятся к началу координат и, соответственно, $m_1 + m_2$ критических значения функции сходятся к $F(0,0)$, что и требовалось.

При умножении рациональной функции (4.1) на $\lambda^{k_1 k_2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, мы получаем функцию, биголоморфно эквивалентную функции

$$x^{k_1} + \lambda^{k_2} a_1 x^{k_1-1} + \dots + \lambda^{(k_1-1)k_2} a_{k_1-1} x + \lambda^{k_1 k_2} c$$
$$+\lambda^{k_1(k_2-1)} b_{k_2-1} \frac{\lambda^{k_1+k_2} u}{x} + \dots + \lambda^{k_1} b_1 \left(\frac{\lambda^{k_1+k_2} u}{x}\right)^{k_2-1} + \left(\frac{u}{x}\right)^{k_2}.$$

Поэтому веса переменных равны $w(x) = k_2$, $w(a_i) = ik_2$, $w(b_i) = ik_1$, $w(c) = k_1 k_2$, $w(u) = k_1 + k_2$. Веса переменных в образе, в свою очередь, равны $w(d_j) = jk_1k_2$, и кратность отображения ЛЛ в общей точке вычисляется по обобщенной теореме Безу. Она равна

$$\frac{(k_1+k_2)!(k_1k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1-1)!k_2^{k_1}(k_2-1)!k_1^{k_2-1}k_1k_2(k_1+k_2)} = (k_1+k_2-1)!\frac{k_1^{k_1}}{(k_1-1)!}\frac{k_2^{k_2}}{(k_2-1)!},$$

что и требовалось. $\triangleleft$

4.1.2 Рациональные функции с тремя полюсами

Случай рациональных функций с тремя полюсами на сфере представляет собой еще одну ситуацию, где для нахождения кратности отображения ЛЛ достаточно обобщенной теоремы Безу. Причина этого в том, что пространство модулей конфигураций из трех попарно различных точек на сфере состоит из одной точки.

Пусть f — рациональная функция с тремя полюсами порядков k_1, k_2, k_3 на сфере. Занумеруем полюса и выберем координату x в сфере-прообразе так, чтобы полюса имели координаты ∞, 0 и 1. Тогда f записывается в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= (u_1x)^{k_1} + a_1(u_1x)^{k_1-1} + \dots + a_{k_1-1}u_1x + d \\ &+ \left(\frac{u_2}{x}\right)^{k_2} + b_1\left(\frac{u_2}{x}\right)^{k_2-1} + \dots + b_{k_2-1}\frac{u_2}{x} \\ &+ \left(\frac{u_3}{x-1}\right)^{k_3} + c_1\left(\frac{u_3}{x-1}\right)^{k_3-1} + \dots + c_{k_3-1}\frac{u_3}{x-1}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Выбор значений параметров u_i однозначен с точностью до умножения на корень степени k_i из 1. Рациональные функции вида (4.4) образуют векторное пространство $\mathbb{C}^\mu$, где $\mu = k_1 + k_2 + k_3 + 1$, с координатами u_i, a_j, b_j, c_j, d. Таким образом, дополнение к набору гиперплоскостей $u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ в этом пространстве можно рассматривать как накрытие степени $k_1k_2k_3\#\mathrm{Aut}(k_1, k_2, k_3)$ над пространством модулей рациональных функций с тремя полюсами порядков k_1, k_2, k_3.

Действие группы $\mathbb{C}^*$ на пространстве функций (4.4) умножением на $\lambda^{k_1k_2k_3}$ задает следующие веса переменных: $w(a_i) = ik_2k_3$, $w(b_i) = ik_1k_3$, $w(c_i) = ik_1k_3$, $w(d) = k_1k_2k_3$, $w(u_1) = k_2k_3$, $w(u_2) = k_1k_3$, $w(u_3) = k_1k_2$.

Доказательство приводимых ниже утверждений повторяет практически дословно доказательство теоремы 4.1 и следствия 4.2.

Теорема 4.5 *Отображение ЛЛ является полиномиальным и продолжается, следовательно, до непрерывного отображения всего пространства рациональных функций вида* (4.4). *Это продолженное отображение квазиоднородно, конечнократно и является накрытием степени*

$$(k_1 + k_2 + k_3 + 1)! \frac{k_1^{k_1}}{(k_1 - 1)!} \frac{k_2^{k_2}}{(k_2 - 1)!} \frac{k_3^{k_3}}{(k_3 - 1)!} \tag{4.5}$$

над дополнением к дискриминанту в образе. Дополнение к дискриминанту в прообразе является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$ для группы π, индекс которой в группе кос из μ нитей равен степени накрытия.

Следствие 4.6 ([39, 27, 15, 16]) *Число классов изоморфизма рациональных функций с тремя полюсами порядков k_1, k_2, k_3 с заданными $\mu = k_1 + k_2 + k_3 + 1$ различными точками ветвления равно*

$$\frac{(k_1 + k_2 + k_3 + 1)!}{\#\mathrm{Aut}(k_1, k_2, k_3)} \frac{k_1^{k_1}}{k_1!} \frac{k_2^{k_2}}{k_2!} \frac{k_3^{k_3}}{k_3!}. \tag{4.6}$$

4.1.3 Простые квазиоднородные особенности серии D

Семейство многочленов вида (3.1) интерпретируется в теории особенностей как *стандартная версальная деформация особенности A_μ* (особенность A_μ задается многочленом $x^{\mu+1}$ от одной переменной). В работах Ляшко и Лойенги утверждения, аналогичные теореме 2.2, были доказаны также для стандартных версальных деформаций особенностей серий D и E. Стандартная версальная деформация особенности D_μ имеет вид

$$D_\mu(x, y) = x^{\mu-1} + xy^2 + a_2x^{\mu-2} + \cdots + a_{2(\mu-1)} + b_\mu y, \qquad \mu = 4, 5, \ldots.$$

Число критических точек общей функции такого вида равно индексу особенности, и все критические значения общей функции различны. Как и в одномерном случае, отображение ЛЛ сопоставляет такой функции многочлен, корнями которого являются ее критические значения.

Дискриминант в пространстве версальной деформации образован многочленами с кратными критическими значениями. Индексы параметров в формулах равны их весам. В этом разделе мы показываем, каким образом особенности серии D_μ связаны с пространством рациональных функций с двумя полюсами, и выводим соответствующие утверждения из теоремы 4.1.

Утверждение 4.7 *Имеется естественное двукратное накрывающее отображение дополнения к гиперплоскости $b_\mu = 0$ в пространстве стандартной версальной деформации особенности D_μ на дополнение к гиперплоскости $u = 0$ в пространстве рациональных функций с двумя полюсами порядков $\mu - 1$ и 1, переводящее отображение ЛЛ в отображение ЛЛ.*

Доказательство. Критические точки деформации D_μ лежат на кривой $\partial D_\mu/\partial y = 0$, т.е. на кривой $2xy + b_\mu = 0$. Выражая отсюда y, получаем $y = -b_\mu/2x$. Подставляя это значение в D_μ, получаем семейство рациональных функций с двумя полюсами на прямой

$$x^{\mu-1} + a_2 x^{\mu-2} + \cdots + a_{2(\mu-1)} - \frac{b_\mu^2}{4x}.$$

При заданных значениях параметра, таких, что $b_\mu \neq 0$, критические значения этой рациональной функции совпадают с критическими значениями многочлена D_μ, что и доказывает утверждение. $\triangleleft$

Следствие 4.8 ([2, 58]) *Дополнение к дискриминанту в пространстве стандартной версальной деформации особенности серии D_μ является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$, где π — подгруппа индекса $2(\mu-1)!(\mu-1)^{\mu-1}/(\mu-2)! = 2(\mu-1)^\mu$ в группе кос на μ нитях.*

4.2 Пространство модулей комплексных структур на кривых рода g с n отмеченными точками и компактификация Деліня–Мамфорда

Бóльшая часть рассматриваемых в настоящей главе расслоений и конусов задана над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ — пространством модулей стабильных кривых рода g с $n \geq 1$ отмеченными и занумерованными точками. При этом предполагается, что натуральные числа g и n удовлетворяют условию стабильности: если $g = 0$, то $n \geq 3$. Пространство модулей стабильных рациональных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ является неприводимым гладким проективным многообразием. При $g > 0$ пространство $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ наделено естественной структурой неприводимого компактного орбиобразия. С неформальной точки зрения это означает, что каждой точке пространства приписано действие конечной группы на векторном пространстве, такое, что у точки есть окрестность, гомеоморфная фактору открытого шара по заданному действию, причем на пересечении окрестностей эти действия и гомеоморфизмы естественным образом согласованы между собой. Формальное определение выглядит следующим образом.

Определение 4.9 Гладким d-мерным комплексным *орбиобразием* называется хаусдорфово топологическое пространство M вместе с атласом $\{U_a, V_a, G_a, \phi_a\}$, в котором

- множество $\{U_a\}$ является открытым покрытием пространства M, задающим в нем базу топологии;
- множество $\{V_a\}$ есть множество открытых подмножеств в $\mathbb{C}^d$;
- G_a является конечной группой диффеоморфизмов множества V_a;
- $\phi_a : V_a \to U_a$ — непрерывное отображение, слои которого — орбиты группы G_a.

При этом атлас должен удовлетворять условию согласованности: для любых вложенных открытых множеств $U_a \subset U_b$ существуют инъективный гомоморфизм $h_{ab} : G_a \to G_b$ и гладкое вложение $\phi_{ab} : V_a \to V_b$, такие, что

- для всех $g \in G_a$ и $x \in V_a$ выполняется равенство
$$\phi_{ab}(gx) = h_{ab}(g)\phi_{ab}(x);$$
- для всех $x \in V_a$ справедливо равенство $\phi_b(\phi_{ab})(x) = \phi_a(x)$.

Две пары (топологическое пространство, атлас) эквивалентны, если существует гомеоморфизм топологических пространств, в естественном смысле согласованный с действиями групп атласа на открытых областях в комплексных пространствах.

В пространствах модулей кривых у каждой точки имеется окрестность, изоморфная факторпространству открытого подмножества в комплексном векторном пространстве по действию группы автоморфизмов данной кривой.

Размерность пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ равна $n+3g-3$. Это результат известного вычисления Римана, которое основано на подсчете размерности пространства невырожденных накрытий сферы кривыми рода g. По формуле Римана–Гурвица у такого накрытия степени n имеется $2(n+g-2)$ простых точки ветвления. Это означает, что размерность пространства таких накрытий равна в точности $2(n+g-2)$. Набор полюсов на накрывающей кривой задается n параметрами. При этом по формуле Римана–Роха размерность пространства таких накрытий с фиксированными полюсами на фиксированной накрывающей кривой равна $n-g+1$. Разность числа $2(n+g-2)$ и числа $n+(n-g+1)=2n-g+1$ и дает размерность пространства модулей кривых.

Стабильная кривая $(C;x_1,\dots,x_n)$ рода g с n отмеченными точками $x_1,\dots,x_n$ это класс биголоморфной эквивалентности гладких или имеющих особенности не сложнее простых точек самопересечения связных компактных кривых арифметического рода g, на которых отмечено n попарно различных гладких точек, занумерованных от 1 до n, причем выполняется следующее *условие стабильности*:

на любой рациональной неприводимой компоненте кривой имеется не менее трех специальных (т.е. отмеченных или особых) точек.

Последнее условие эквивалентно тому, что группа автоморфизмов кривой конечна. Занумерованность отмеченных точек означает, что мы рассматриваем только такие автоморфизмы кривой, которые сохраняют каждую из отмеченных точек. Две локальные компоненты кривой, пересекающиеся в двойной точке, мы будем называть ее *ветвями*.

Классы эквивалентности гладких кривых образуют открытое плотное подпространство (подорбиобразие) $\mathcal{M}_{g;n}\subset\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ в пространстве модулей стабильных кривых. Дополнение $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}\setminus\mathcal{M}_{g;n}$ называется *границей* и обозначается через $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Свойства отдельных кривых хорошо изложены в [1, 35]. Описанию пространств модулей кривых посвящена книга [37], и мы будем опираться на сведения оттуда.

Позволяя себе некоторую вольность речи, мы будем отождествлять ниже стабильную комплексную кривую с ее классом биголоморфной эквивалентности.

Пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;1}$ и $\overline{\mathcal{M}}_{0;2}$ рациональных кривых с одной и двумя отмеченными точками также имеют смысл, однако в категории алгебраических стеков, а не в категории орбиобразий (см., например, [61]), и мы их рассматривать не будем.

Пример 4.10 Пространство $\mathcal{M}_{0;3} = \overline{\mathcal{M}}_{0;3}$ состоит из одной точки, так как любые две рациональные кривые с тремя отмеченными точками биголоморфно эквивалентны между собой.

Пространство $\mathcal{M}_{0;4}$ представляет собой комплексную проективную прямую $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ с тремя проколами. Действительно, для любых двух гладких рациональных кривых с четырьмя отмеченными точками существует биголоморфное отображение первой кривой на вторую, переводящее первые три отмеченные точки первой кривой в первые три отмеченные точки второй кривой. Этим условием биголоморфное отображение определено однозначно, поэтому точка в пространстве модулей, соответствующая данной кривой, однозначно определяется положением четвертой отмеченной точки относительно первых трех, причем эта четвертая точка не может совпадать ни с одной из первых трех. Двойное отношение координат четырех точек может служить координатой на пространстве модулей.

Пространство модулей стабильных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ изоморфно $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ и получается из $\mathcal{M}_{0;4}$ добавлением трех особых стабильных рациональных кривых. Каждая из этих рациональных кривых состоит из двух рациональных неприводимых компонент, пересекающихся по одной точке. Они различаются распределением отмеченных точек по рациональным компонентам, которое может иметь вид $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$.

Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;n+1}$ отождествляется с *универсальной кривой* $\overline{\mathcal{C}}_{0;n}$ над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$, т.е. с пространством расслоения над $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$, слоем которого над точкой является кривая, соответствующая этой точке. В этом расслоении есть n выделенных (структурных) сечений, отвечающих отмеченным точкам.

В частности, пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ представляет собой универсальную кривую над $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. На этом пространстве есть десять специальных проективных прямых: четыре структурных сечения универсальной кривой и шесть рациональных компонент особых слоев над граничными точками пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Эти десять прямых образуют границу $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$. Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ можно также представлять себе как результат раздутия четырех точек в общем положении на проективной плоскости $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. При этом шести прямым на особых слоях универсальной кривой соответствуют прообразы шести прямых, проходящих через пары точек на плоскости, а четырем сечениям — вклеенные проективные прямые. Десять граничных прямых соответствуют десяти способам распределения отмеченных точек по двум рациональным компонентам, на одной из которых три, а на другой две отмеченные точки. Десять точек их пересечения соответствуют десяти способам распределения отмеченных точек по трем рациональным компонентам, на одной из которых одна, а на двух других по две отмеченные точки.

Вообще, каждой стабильной рациональной кривой соответствует дерево ее компонент: вершины дерева отвечают неприводимым компонентам кривой, и две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие им компоненты пересекаются (с необходимостью, по одной точке). Отмеченные точки распределены по вершинам дерева, причем концевым вершинам отвечает не менее двух точек, а вершинам валентности два — не менее одной отмеченной точки.

Геометрии пространств модулей рациональных кривых с отмеченными точками посвящена монография [12].

Замечание 4.11 В работе [26] нами предложена другая компактификация пространства модулей рациональных кривых. Эта компактификация строится следующим образом. Свяжем с i-ой отмеченной точкой на рациональной кривой $C \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ отображение пространства модулей $\mathcal{M}_{0;n}$ в проективное пространство $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-3}$ размерности $n-3$. Для этого сопоставим точке $x_i \in C$ координату на $C \setminus \{x_i\}$, которая равна ∞ в точке x_i, и сумма значений которой в остальных отмеченных точках равна нулю. Такая координата единственна с точностью до умножения на константу. Набор значений координат остальных отмеченных точек (определенный с точностью до умножения на общую константу) задает точку в проективном пространстве $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-3}$ (проективизации плоскости точек, сумма координат которых равна нулю).

Набор построенных выше отображений для каждой отмеченной точки определяет, тем самым, отображение из $\mathcal{M}_{0;n}$ в прямое произведение n экземпляров пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-3}$. Нетрудно видеть, что это отображение является вложением. Замыкание образа этого отображения является компактификацией пространства $\mathcal{M}_{0;n}$. Несомненное достоинство такой компактификации — она задается явным набором простых уравнений в $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-3}\times\dots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-3}$. В [26] высказана гипотеза, что построенная компактификация совпадает с компактификацией Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Как показал Д. Панов, это, однако, неверно уже при $n = 8$.

4.3 Расслоения над пространствами модулей и их классы Черна

Над пространствами модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ имеется много естественных векторных расслоений. Нас будут интересовать в первую очередь линейные (т.е. одномерные) расслоения $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, n$, и расслоение Ходжа Λ. Слоем расслоения $\mathcal{L}_i$ над точкой $(C; x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_{g;n}$ является кокасательная прямая к кривой C в точке x_i. Слоем расслоения Λ является пространство голоморфных 1-форм на кривой C. На рациональной кривой нет голоморфных 1-форм, поэтому расслоение Ходжа над $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ имеет нулевой ранг. Ранг расслоения Ходжа над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ равен g.

Расслоение Ходжа «нечувствительно» к отмеченным точкам. Точнее говоря, оно является результатом поднятия расслоения Ходжа с пространства $\overline{\mathcal{M}}_g = \overline{\mathcal{M}}_{g;0}$ (при $g > 1$) или $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$ (при $g = 1$) относительно композиции «отображений последовательного забывания» последней отмеченной точки $\overline{\mathcal{M}}_{g;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g;n-1}$.

Замечание 4.12 Определение забывающего отображения требует некоторой осторожности. Дело в том, что при забывании последней отмеченной точки кривая может потерять стабильность: в ней может появиться рациональная неприводимая компонента с двумя специальными точками. Если, однако, эту компоненту стянуть в точку, то получится стабильная кривая. Доказательство корректности определенного таким образом забывающего отображения см. в [61].

Расслоения $\mathcal{L}_i$ продолжаются с гладких кривых на особые естественным образом. Продолжение расслоения Ходжа требует некоторых пояснений. Слоем расслоения Ходжа над стабильной кривой C служит пространство мероморфных 1-форм на C, которым разрешается иметь полюса только в двойных точках кривой. При этом порядки полюсов должны равняться единице, и сумма вычетов 1-формы по обоим листам в каждом полюсе должна равняться нулю. Такие 1-формы мы будем называть *обобщенными голоморфными 1-формами* на стабильной кривой.

У векторных расслоений над орбиобразиями имеются классы Черна. Теория таких классов, обобщающая теорию классов Черна расслоений над гладкими многообразиями, построена в [22]. У нее есть два варианта: операциональный, более тонкий, и когомологический, более грубый. Мы будем пользоваться в основном когомологическим вариантом.

Каждому векторному расслоению E ранга r над комплексным орбиобразием M можно сопоставить последовательность $c_0(E), \ldots, c_r(E)$

классов когомологий пространства M с рациональными коэффициентами, $c_j(M) \in H^{2j}(M)$, которые называются *классами Черна* расслоения E. Нам понадобится также *полный класс Черна* $c(E) = c_0(E) + \dots + c_r(E) \in H^*(M)$. Первый класс Черна линейного расслоения — это препятствие к существованию у него сечений, нигде не обращающихся в нуль. Для расслоения E ранга большего единицы его классы Черна определяются в терминах первого класса Черна расслоения $\mathcal{O}(1)$ над проективизацией PE расслоения E.

Нулевой класс Черна расслоений $\mathcal{L}_i$ и Λ над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ равен $1 \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$. Первые классы Черна расслоений $\mathcal{L}_i$ мы обозначим через $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$, $i = 1, \dots, n$, а классы Черна расслоения Λ — через $\lambda_j = c_j(\Lambda) \in H^{2j}(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$, $j = 1, \dots, r$.

Для классов когомологий определена операция умножения $H^*(M) \otimes H^*(M) \to H^*(M)$, уважающая размерность: умножение на класс j-ых когомологий поднимает размерность на j. Эта операция превращает пространство когомологий в коммутативное кольцо. Группа когомологий старшей размерности связного орбиобразия естественно изоморфна $\mathbf{Q}$. Тем самым, каждому классу ϕ когомологий старшей размерности сопоставляется рациональное число, которое мы называем интегралом этого класса по многообразию и обозначаем через $\int_M \phi$. Если ϕ — класс когомологий, размерность которого отлична от старшей, то мы считаем его интеграл по многообразию равным нулю. Интеграл от произведения когомологических классов называется также *индексом пересечения* этих классов.

Пример 4.13 (см. [84]) Полные классы Черна расслоений $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ над $\mathcal{M}_{0;3}$ равны 1, так как база этих расслоений состоит из одной точки.

Построим сечение расслоения $\mathcal{L}_1$ над $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Для этого рассмотрим универсальную кривую $\overline{\mathcal{C}}_{0;4} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ с четырьмя структурными сечениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Возьмем над каждой гладкой точкой базы мероморфную 1-форму на слое, определяемую условиями: ее единственными полюсами являются отмеченные точки x_3 и x_4, причем порядки полюсов равны 1, а вычеты равны соответственно 1 и -1. Такая форма единственна, и она отлична от нуля всюду на кривой. Это сечение расслоения мероморфных 1-форм следующим образом продолжается в точки границы базы. В той особой стабильной кривой, где точки x_1 и x_2 принадлежат одной неприводимой компоненте, а точки x_3 и x_4 — другой, соответствующая 1-форма зануляется на неприводимой компоненте с точками x_1, x_2. На остальных двух стабильных кривых эта 1-форма всюду отлична от нуля и имеет полюса первого порядка как в отмеченных точках x_3, x_4, так и в двойной точке кривой (в последнем случае — с вычетами -1 и 1 на соответствующих листах).

Построенному сечению расслоения мероморфных 1-форм отвечает сечение расслоения $\mathcal{L}_1$: класс ростка мероморфной формы в точке x_1 определяет кокасательный вектор в этой точке. Как мы видели, это сечение обращается в нуль в единственной точке базы — граничной точке, отвечающей особой стабильной кривой с точками x_1, x_2 на одной компоненте. Тем самым,

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;4}} \psi_1 = 1.$$

В силу симметрии, то же равенство справедливо и для первого класса Черна любого из расслоений $\mathcal{L}_i$.

Аналогичным образом можно показать, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1^2 = 1, \qquad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1\psi_2 = 2.$$

По соображениям размерности, индекс пересечения

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{m_1} \dots \psi_n^{m_n}$$

может быть отличен от нуля (и он действительно оказывается ненулевым) только, если $m_1 + \dots + m_n = \dim \overline{\mathcal{M}}_{g;n} = n + 3g - 3$. Эти индексы пересечения описывают одну из двумерных моделей квантовой гравитации, и им посвящена работа Виттена [84]. В силу симметрии такой индекс пересечения зависит только от набора показателей степени $m_1, \dots, m_n$, и Виттен вводит обозначение

$$\langle \tau_{m_1} \dots \tau_{m_n} \rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{m_1} \dots \psi_n^{m_n}.$$

В частности, проведенные выше вычисления дают

$$\langle \tau_0^3 \rangle = 1, \qquad \langle \tau_0^3 \tau_1 \rangle = 1, \qquad \langle \tau_0^3 \tau_1^2 \rangle = 2, \qquad \langle \tau_0^4 \tau_2 \rangle = 1.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в примере 4.13, приводят к рекуррентным соотношениям для этих индексов пересечения, называемым *уравнением струны*

$$\langle \tau_0 \prod_{i=1}^n \tau_{m_i} \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \tau_{m_j - 1} \prod_{i \neq j} \tau_{m_i} \rangle \tag{4.7}$$

и *дилатон-уравнением*

$$\langle\tau_1\prod_{i=1}^{n}\tau_{m_i}\rangle=(2g-2+n)\langle\prod_{i=1}^{n}\tau_{m_i}\rangle. \tag{4.8}$$

Эти уравнения позволяют вычислить многие, хотя и не все, индексы пересечения классов ψ_i. Так, все индексы пересечения в роде 0 вычисляются с помощью уравнения струны, а использование обоих уравнений позволяет вычислить все индексы пересечения в роде 1. В этой же работе Виттен высказал гипотезу о том, что производящая функция для индексов пересечения удовлетворяет уравнению Кортевега-де Фриза (гипотеза об эквивалентности двух моделей двумерной квантовой гравитации). Она дает рекуррентные формулы для вычисления любых индексов пересечения классов ψ_i.

Индексы пересечений классов Черна расслоения Ходжа с классами Черна ψ_i называются *интегралами Ходжа.* Их вычислению посвящены работы [18, 19].

4.4 Вычисления

В этом разделе мы приведем некоторые следствия из теоремы 1.12, в которой подсчет числа классов изоморфизма общих мероморфных функций с заданным типом ветвления над одной точкой сводится к вычислению индексов пересечения характеристических классов.

4.4.1 Случай рода 0

В качестве первого следствия мы выведем формулу Гурвица для чисел Гурвица с $g=0$.

Ранг расслоения Ходжа над многообразием $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ равен нулю, так как на рациональной кривой нет ненулевых голоморфных 1-форм. Поэтому подынтегральное выражение в равенстве (1.3) имеет вид

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;n}}\frac{1}{(1-k_1\psi_1)\dots(1-k_n\psi_n)}=\sum_{m_1+\dots+m_n=n-3}k_1^{m_1}\dots k_n^{m_n}\langle\tau_{m_1}\dots\tau_{m_n}\rangle, \tag{4.9}$$

и для его вычисления достаточно найти индексы пересечения

$$\langle\tau_{m_1}\dots\tau_{m_n}\rangle=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;n}}\psi_1^{m_1}\dots\psi_n^{m_n}.$$

Эти индексы отличны от нуля только если $m_1 + \dots + m_n = n - 3$, и уравнение струны (4.7) дает

$$\langle \tau_{m_1} \dots \tau_{m_n} \rangle = \binom{n-3}{m_1, \dots, m_n} = \frac{(n-3)!}{m_1! \dots m_n!}.$$

Значит в правой части равенства (4.9) стоит разложение бинома $(k_1 + \dots + k_n)^{n-3}$. Как уже упоминалось, такой ответ для числа классов изоморфизма рациональных накрытий был (без доказательства) приведен Гурвицем в [39] и переоткрыт в [28] с помощью чисто комбинаторных методов.

4.4.2 Случай рода 1

Для кривых положительного рода числитель подынтегрального выражения в (1.3) отличен от единицы. Он имеет вид $1 - \lambda_1 + \dots + (-1)^g \lambda_g$, где $\lambda_j = c_j(\Lambda) \in H^{2j}(\overline{\mathcal{M}}_{g;n})$ есть j-ый класс Черна расслоения Ходжа. Таким образом, вычисление интеграла сводится к вычислению индексов пересечения вида

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{m_1} \dots \psi_n^{m_n} \lambda_j,$$

где $k_1 + \dots + k_n + j = n + 3g - 3$. Слагаемые, отвечающие классу $\lambda_0 = 1$, имеют наивысшую однородную степень $n + 3g - 3$ по k_i. Их значения даются гипотезой Виттена. Из других результатов, касающихся вычисления этих интегралов, известно следующее утверждение.

Теорема 4.14 ([19]) *Справедливо равенство*

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{m_1} \dots \psi_n^{m_n} \lambda_g = \binom{2g+n-3}{m_1, \dots, m_n} b_g,$$

где b_g — постоянная, зависящая только от рода и равная поэтому

$$b_g = \begin{cases} 1, & g = 0; \\ \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{2g-2} \lambda_g, & g > 0. \end{cases}$$

Значение постоянной b_g можно вычислить, воспользовавшись результатом из [76], перечисляющим классы изоморфизма общих многочленов на кривых произвольного рода. (Напомним, что многочленом мы называем мероморфную функцию, имеющую значение с единственным прообразом.)

Теорема 4.15 ([76]) *Справедливо равенство*

$$h_{g;k} = (k+2g-1)!\frac{k^{k+2g-2}}{k!}B_{g;k},$$

где $B_{g;k}$ *— коэффициент в разложении*

$$\sum_{g=0}^{\infty} B_{g;k}x^{2g} = \left(\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^{k-1}.$$

Следствие 4.16 *Коэффициент* b_g *в теореме* 4.14 *имеет вид*

$$b_g = \frac{2^{2g-1}-1}{2^{2g-1}}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!},$$

где B_{2g} *— число Бернулли с номером* $2g$, *т.е. коэффициент в разложении*

$$\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{B_2}{2!}t^2 + \frac{B_4}{4!}t^4 + \dots.$$

Первые коэффициенты этого разложения равны $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$. Эти значения дают $b_1 = 1/24$, $b_2 = 7/5760$, $b_3 = 31/967680$.

Следствие 4.17 *Справедливо равенство*

$$\sum_{g=0}^{\infty}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;1}} \frac{1-\lambda_1+\dots+(-1)^g\lambda_g}{1-k\psi_1}x^{2g} = \left(\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^{k-1}.$$

Теорема 4.14 и знание коэффициента b_g позволяют вычислять все слагаемые младшей степени $n+2g-3$ по k_i в интеграле. При $g=1$ этих данных вкупе с начальными значениями

$$\langle\tau_1\rangle = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \lambda_1 = \frac{1}{24}$$

оказывается достаточно для вычисления значения интеграла[1].

Теорема 4.14 дает значение

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1;n}} \psi_1^{m_1}\dots\psi_n^{m_n}\lambda_1 = \frac{1}{24}\binom{n-1}{m_1,\dots,m_n},$$

[1]Вычисление этих начальных значений для пространства модулей эллиптических кривых проводится так же, как и для рациональных кривых в примере 4.4, однако с более тонким анализом симметрий, см. [84].

откуда

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1;n}} \frac{\lambda_1}{(1-k_1\psi_1)\dots(1-k_n\psi_n)} = \frac{1}{24}(k_1+\dots+k_n)^{n-1}.$$

Для вычисления интеграла

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1;n}} \frac{1}{(1-k_1\psi_1)\dots(1-k_n\psi_n)}$$

воспользуемся уравнением струны и дилатон-уравнением. Мы хотим доказать, что индекс пересечения $\langle\tau_{m_1}\dots\tau_{m_n}\rangle$ равен коэффициенту при мономе $k_1^{m_1}\dots k_n^{m_n}$ в выражении

$$\frac{1}{24}\left(K^n - \sum_{i=2}^{n}(i-2)!e_iK^{n-i}\right),$$

где e_i — i-ая элементарная симметрическая функция от переменных $k_1,\dots,k_n$, а $K = k_1+\dots+k_n = e_1$. Обозначим этот коэффициент через $\alpha_{m_1,\dots,m_n}$. Как нетрудно видеть, он равен

$$\alpha_{m_1,\dots,m_n} = \frac{1}{24M}\left(n! - \sum_{i=2}^{n}(i-2)!(n-i)!e_i(m_1,\dots,m_n)\right),$$

где $M = m_1!\dots m_n!$.

Предположим сначала, что все m_j отличны от нуля. В силу равенства $m_1+\dots+m_n = n$ это означает, что $m_1 = \dots = m_n = 1$. Применяя дилатон-уравнение, мы получаем

$$\langle\tau_1^m\rangle = (m-1)\langle\tau_1^{m-1}\rangle, \qquad m \geq 1,$$

откуда

$$\langle\tau_1^n\rangle = \frac{(n-1)!}{24}.$$

С другой стороны, соответствующий коэффициент в разложении имеет вид

$$\alpha_{1,\dots,1} = \frac{1}{24M}\left(n! - \sum_{i=2}^{n}(i-2)!(n-i)!\binom{n}{i}\right) = \frac{(n-1)!}{24}.$$

Предположим теперь, что хотя бы один из показателей m_j, скажем m_1, отличен от нуля. Положим $J = \{j : m_j \geq 1\}$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} e_i(m_2,\dots,m_j-1,\dots,m_n) &= e_i(m_2,\dots,m_j,\dots,m_n) \\ &\quad - e_{i-1}(m_2,\dots,0,\dots,m_n) \end{aligned}$$

при $j \in J$; кроме того

$$\sum_{j=2}^{n} m_j e_{i-1}(m_2, \ldots, 0, \ldots, m_n) = i e_i(m_2, \ldots, m_j, \ldots, m_n).$$

Отсюда с учетом равенств

$$e_i(m_2, \ldots, m_n) = e_i(0, m_2, \ldots, m_n) \text{ и } e_n(0, m_2, \ldots, m_n) = 0$$

получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} \alpha_{m_2, \ldots, m_j - 1, \ldots, m_n} = \frac{1}{24M} \sum_{j \in J} m_j ((n-1)! - \sum_{i=2}^{n-1} (i-2)!(n-1-i)! \times \\
(e_i(m_2, \ldots, m_j, \ldots, m_n) - e_{i-1}(m_2, \ldots, 0, \ldots, m_n))) \\
= \frac{1}{24M} \left(n! - \sum_{i=2}^{n-1} (i-2)!(n-i)! e_i(m_2, \ldots, m_j, \ldots, m_n) \right) \\
= \alpha_{0, m_2, \ldots, m_n}.
\end{aligned}$$

Тем самым, коэффициенты $\alpha_{m_1, \ldots, m_n}$ совпадают с коэффициентами $\langle \tau_{m_1} \ldots \tau_{m_n} \rangle$, если все m_i отличны от нуля, и удовлетворяют тому же уравнению струны, если хотя бы один из показателей m_i равен нулю. Поэтому они совпадают при произвольных значениях m_i.

4.5 Пространство Гурвица как конус над пространством модулей кривых

Наша главная цель в этом разделе — построить естественное пополнение $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\ldots,k_n}$ пространства Гурвица $\mathcal{H}_{g;k_1,\ldots,k_n}$. Одно из требований, предъявляемых к этому пополнению, состоит в возможности продолжить отображение ЛЛ на пространстве Гурвица до непрерывного отображения на пополненном пространстве. Пополнение, которое мы строим, имеет структуру конуса над компактификацией Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ пространства модулей кривых рода g с n отмеченными точками. Послойное действие группы $\mathbb{C}^*$ на конусе согласовано с отображением ЛЛ.

В работе [71] построено другое пополнение (и даже компактификация) пространства Гурвица. Оно имеет структуру вещественного орбиобразия, и отображение ЛЛ продолжается до непрерывного отображения компактифицированного пространства. Вопросы о продолжении на компактификацию комплексной структуры и об аналитичности отображения ЛЛ остаются открытыми.

4.5.1 Конусы и проективные конусы

Обозначим через $\mathcal{O}_X$ пучок регулярных функций над схемой (многообразием, орбиобразием, ...) X. Рассмотрим градуированный пучок $\mathbf{S}^\cdot = \mathbf{S}^0 \oplus \mathbf{S}^1 \oplus \mathbf{S}^2 \oplus \dots$ $\mathcal{O}_X$-алгебр над X. Мы предполагаем, что пучок $\mathbf{S}^\cdot$ локально конечно порожден.

Данному пучку $\mathbf{S}^\cdot$ сопоставляются две схемы над X (т.е. схемы вместе с отображением в X). Первая из них это *конус* $\mathcal{S} = \mathrm{Spec}(\mathbf{S}^\cdot)$. Градуировка пучка $\mathbf{S}^\cdot$ задает действие группы $\mathbb{C}^*$ на конусе $\mathcal{S}$. Факторизуя по этому действию дополнение к нулевому сечению конуса, мы получаем *проективизацию конуса*, которая обозначается через $P\mathcal{S}$. Точки проективизации соответствуют нетривиальным орбитам действия группы $\mathbb{C}^*$ на $\mathcal{S}$. На проективизации конуса имеется естественное линейное расслоение $\mathcal{O}(1)$, слоями которого являются пространства квазиоднородных рациональных функций веса 1 на слоях. *Морфизм конусов* это морфизм задающих их пучков градуированных алгебр, действующий в противоположном направлении.

Естественная структура конуса имеется на произвольном векторном расслоении E. Она задается структурным пучком $\mathrm{Sym}(E^\vee)$ симметрических функций на двойственном расслоении, на котором задана естественная градуировка степенями. *Прямая сумма* конусов $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ над схемой X, заданных пучками $\mathbf{S}_1^\cdot, \mathbf{S}_2^\cdot$, задается градуированным пучком $\mathbf{S}_1^\cdot \otimes \mathbf{S}_2^\cdot$.

4.5.2 Пространство обобщенных главных частей в точке

Зафиксируем положительное число k. Два ростка мероморфных функций в начале координат на прямой $f_1, f_2 : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \infty)$ имеют одинаковую главную часть, если у их разности $f_1 - f_2$ нет полюса в нуле. *Главная часть* ростка мероморфной функции это класс эквивалентности ростков относительно указанного отношения эквивалентности. Множество всех главных частей с полюсами порядка в точности k наделено естественной комплексной структурой. Однако на нем нет естественной структуры векторного пространства: сумма двух ростков с полюсами порядка k может иметь полюс меньшего порядка.

Обычно рассматривается пополнение пространства главных частей с полюсами порядка k до пространства главных частей с полюсами порядков *не выше* k. Это последнее пространство уже имеет структуру векторного пространства. Однако попытки воспользоваться подобным пополнением для решения задач классификации мероморфных функций не приводят к успеху. Причина неудачи в том, что при падении порядка полюса у мероморфной функции на кривой кратность задаваемого ею накрытия уменьшается, а значит, по формуле Римана–Гурвица, уменьшается и число ее критических значений. В результате отображение ЛЛ претерпевает разрыв на дополнении к пространству Гурвица в пополненном пространстве. Мы воспользуемся пополнением, которое применил Арнольд в случае двух полюсов на сфере (см. п. 4.1.1).

Пусть x — росток координаты в нуле $0 \in \mathbb{C}$. Главная часть порядка k в нуле может быть записана в виде

$$\left(\frac{u}{x}\right)^k + a_1\left(\frac{u}{x}\right)^{k-1} + \dots + a_{k-1}\frac{u}{x}, \qquad u \neq 0. \tag{4.10}$$

Такое представление не единственно: оно зависит от выбора параметра u, и этот выбор можно сделать k различными способами. Поэтому пространство выражений вида (4.10) является k-кратным накрытием над пространством главных частей. Группа монодромии этого накрытия есть циклическая группа $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$, и ее действие на пространстве выражений (4.10) задается формулой

$$(u, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}) \mapsto (\zeta u, \zeta a_1, \zeta^2 a_2, \dots, \zeta^{k-1} a_{k-1}), \tag{4.11}$$

где через ζ обозначен примитивный корень из единицы степени k, порождающий группу $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ как подгруппу корней из единицы степени k в группе ненулевых комплексных чисел по умножению.

Группа $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению действует на пространстве главных частей умножением на константу. Это действие поднимается (с точностью до описанного выше действия группы $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$) до действия группы $\mathbb{C}^*$ на пространстве выражений вида (4.10):

$$\begin{array}{rcl} \lambda & : & \left(\frac{u}{x}\right)^k + a_1\left(\frac{u}{x}\right)^{k-1} + \dots + a_{k-1}\frac{u}{x} \\ & \mapsto & \lambda\left(\left(\frac{u}{x}\right)^k + a_1\left(\frac{u}{x}\right)^{k-1} + \dots + a_{k-1}\frac{u}{x}\right) \\ & = & \left(\frac{\eta u}{x}\right)^k + \eta a_1\left(\frac{\eta u}{x}\right)^{k-1} + \dots + (\eta^{k-1}a_{k-1})\frac{\eta u}{x}, \end{array}$$

где $\eta = \lambda^{1/k}$. Поэтому оно индуцирует следующие веса параметров u, a_j:

$$\text{вес}(u) = \frac{1}{k}, \qquad \text{вес}(a_j) = \frac{j}{k}. \tag{4.12}$$

Рассмотрим алгебру многочленов от переменных u, a_j, инвариантных относительно действия (4.11) группы вычетов по модулю k. Всякий моном порождает одномерное инвариантное подпространство этого действия. Веса координат индуцируют градуировку на алгебре многочленов. Моном является инвариантным в том и только в том случае, если у него целый вес. Поэтому введенная на пространстве инвариантных многочленов градуировка целочисленная. Обозначим спектр этой алгебры через P^k и будем называть его *пространством обобщенных главных частей* порядка k.

Замечание 4.18 Пространство обобщенных главных частей порядка 1 является одномерным векторным пространством, естественно изоморфным касательной прямой в точке.

Лемма 4.19 1) *Градуированная алгебра* $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$*-инвариантных многочленов корректно определена, т.е. ее определение не зависит от выбора локальной координаты* x.

2) *Пространство главных частей порядка* k *естественным образом вкладывается в виде открытого плотного подмножества в* P^k.

3) *Дополнение* $A^{k-1} \subset P^k$ *к пространству главных частей в* P^k *наделено естественной структурой факторпространства комплексного векторного пространства* $\widetilde{A}^{k-1} \cong \mathbb{C}^{k-1}$ *по действию группы* $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

4) *Коэффициенты* $a_1, \dots, a_{k-1}$ *определяют линейные координаты на* $\widetilde{A}^{k-1}$. *Действие группы* $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ *в этих координатах диагонально.*

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает, что замена координаты $x = \alpha_1\tilde{x} + \alpha_2\tilde{x}^2 + \dots$, где $\alpha_1 \neq 0$, задает следующую замену переменных u, a_j:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{u} & = & \dfrac{u}{\alpha_1^k} \\ \tilde{a}_1 & = & a_1 + \gamma_{11}u \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ \tilde{a}_{k-1} & = & a_{k-1} + \gamma_{k-1,1}a_{k-2}u + \dots + \gamma_{k-1,k-1}u^{k-1} \end{array}$$

для некоторых постоянных γ_{jl}. Очевидно, что это действие сохраняет $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$-инвариантность и градуировку. Поэтому градуированная алгебра инвариантных многочленов корректно определена.

Главная часть задается элементом в P^k, значение u на котором не равно нулю; множество точек, в которых $u \neq 0$, открыто и плотно в P^k. Его дополнение $A^{k-1} \subset P^k$ — это спектр факторалгебры $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$-инвариантных многочленов по модулю идеала многочленов, делящихся на u.

Выражение (4.10) линейно по коэффициентам a_j. При $u = 0$ структура векторного пространства на множестве $\widetilde{A}^{k-1}$ этих коэффициентов задается очевидным образом:

$$c'(a'_1, \dots, a'_{k-1}) + c''(a''_1, \dots, a''_{k-1}) = (c'a'_1 + c''a''_1, \dots, c'a'_{k-1} + c''a''_{k-1}).$$

Независимость этой структуры от выбора координаты x проверяется непосредственно. Пространство A^{k-1} является фактормногообразием пространства $\widetilde{A}^{k-1}$ по модулю действия (4.11), ограниченного на $\widetilde{A}^{k-1}$.

Для доказательства того, что координаты a_j в A^{k-1} выбираются инвариантно, зафиксируем координату x и рассмотрим однопараметрическое семейство $\gamma : (\mathbb{C}^1, 0) \to (P^k, a)$ главных частей, проходящее через через точку $a \in A^{k-1}$, и такое что $\gamma(\tau) \notin A^{k-1}$ при $\tau \neq 0$. Такое семейство можно записать в виде

$$\left(\frac{u(\tau)}{x}\right)^k + a_1(\tau)\left(\frac{u(\tau)}{x}\right)^{k-1} + \dots + a_{k-1}(\tau)\frac{u(\tau)}{x}, \quad u(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to 0,$$

где коэффициенты $u(\tau)$, $a_j(\tau)$ выбираются однозначно с точностью до действия (4.11) группы $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$. Предельные значения $a_1(0), \dots, a_{k-1}(0)$, очевидно, не зависят ни от выбора координаты x, ни от выбора однопараметрического семейства, проходящего через точку a. $\triangleleft$

Обобщенной главной частью порядка k будем называть просто точку пространства P^k. *Старшим членом* обобщенной главной части назовем класс эквивалентности главных частей порядка k, таких что их разность имеет полюс порядка, меньшего, чем k. Элементы пространства A^{k-1} — это обобщенные главные части с нулевым старшим членом.

Старшие члены обобщенных главных частей порядка k находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками k-ой тензорной степени касательной прямой к $\mathbb{C}^1$ в нуле. Отождествление выглядит следующим образом. Обозначим через L кокасательную прямую к $\mathbb{C}^1$ в нуле. Представив точку $p \in P^k \setminus A^{k-1}$ в виде (4.10), мы можем сопоставить ей главную часть u/x с полюсом первого порядка в начале координат. Эта главная часть определена однозначно с точностью до действия (4.11) группы $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$. Она задает касательный вектор в нуле как линейное отображение

$$\omega \mapsto \mathrm{Res}_{x=0}\frac{u}{x}\omega,$$

где мы понимаем $\omega \in L$ как росток голоморфной 1-формы, представляющей кокасательный вектор. k-ая тензорная степень построенного касательного вектора лежит в $(L^\vee)^{\otimes k}$ и не зависит, очевидно, ни от выбора координаты x, ни от выбора параметра u. Мы обозначаем этот элемент через $\phi(p) \in (L^\vee)^{\otimes k}$. Отображение ϕ продолжается до непрерывного отображения всего пространства P^k, если положить его равным нулю на $A^{k-1} \subset P^k$.

Лемма 4.20 *Значение отображения ϕ на главной части определяется старшим членом этой главной части. Двойственное к нему отображение ϕ^* является морфизмом градуированных алгебр. Множество нулей отображения ϕ совпадает с A^{k-1}, а его трансверсальная кратность вдоль A^{k-1} равна k.*

Доказательство. Координата в $\mathbb{C}^1$ задает естественную координату в (ко)касательной прямой в нуле. При фиксированной координате x отображение ϕ сопоставляет главной части вида (4.10) значение u^k, т.е., значение старшего члена этой главной части. По определению пространства P^k, это корректно определенный многочлен веса 1 на P^k. Он обращается в нуль в точности на A^{k-1}. Для вычисления трансверсальной кратности отображения ϕ вдоль A^{k-1} подсчитаем число его прообразов, склеивающихся в общей точке $a = (a_1, \dots, a_{k-1}) \in A^{k-1}$ при стремлении их образа u^k к нулю. Это главные части с координатами $(u, a_1, \dots, a_{k-1})$, $(u, \zeta a_1, \dots, \zeta^{k-1} a_{k-1})$, $(u, \zeta^2 a_1, \dots, \zeta^{2(k-1)} a_{k-1})$, $\dots$, $(u, \zeta^{k-1} a_1, \dots, \zeta^{(k-1)(k-1)} a_{k-1})$. Для общей точки $a \in A^{k-1}$ все эти k точек различны, что и заканчивает доказательство. $\triangleleft$.

Замечание 4.21 Прообраз отличной от нуля точки при отображении $\phi : P^k \to (L^\vee)^{\otimes k}$, т.е. пространство главных частей с фиксированным старшим членом, наделен естественной структурой аффинного пространства. Действительно, для любой пары главных частей $f_1, f_2 \in P^k \setminus A^{k-1}$ с одинаковым старшим членом элемент $\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$ является главной частью с тем же старшим членом. Поэтому пространство главных частей порядка k имеет естественную структуру аффинного расслоения ранга $k-1$ над проколотой прямой $(L^\vee)^{\otimes k}$. Умножение на константу отождествляет между собой различные слои этого расслоения, задавая, тем самым, плоскую связность на нем.

Пространство A^{k-1} обобщенных главных частей с нулевым старшим членом представляет собой особый слой, естественно доклеивающий это расслоение над проколотой точкой. Отметим также, что указанная связность не продолжается в проколотую точку: она имеет в этой точке полюс первого порядка.

4.5.3 Конусы обобщенных главных частей

Обозначим через $\mathbf{P}_i$ пучок градуированных алгебр над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, стебель которого в точке $(C; x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ является алгеброй обобщенных главных частей порядка k_i в точке x_i. Обозначим через $\mathcal{P}_i = \mathrm{Spec}(\mathbf{P}_i)$ соответствующий конус над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Пучок $\mathbf{A}_i$ и соответствующий ему конус $\mathcal{A}_i = \mathrm{Spec}(\mathbf{A}_i)$ обобщенных главных частей вводятся аналогичным образом. Конус $\mathcal{A}_i$ очевидным образом является подконусом в $\mathcal{P}_i$.

Мы будем называть прямую сумму $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_n$ *конусом обобщенных главных частей* (порядков $k_1, \dots, k_n$) над $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. В конусе $\mathcal{P}$ содержится подконус $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$; пучки, определяющие эти конусы будут обозначаться через $\mathbf{P}$ и $\mathbf{A}$ соответственно. Аналогично, мы рассматриваем векторные расслоения $\widetilde{\mathcal{A}}_i$ и $\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{A}}_1 \oplus \dots \oplus \widetilde{\mathcal{A}}_n$ над $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

С каждым конусом $\mathcal{P}_i$ мы ассоциируем морфизм конусов $\varphi_i : \mathcal{P}_i \to (\mathcal{L}_i^\vee)^{\otimes k_i}$, который отображает главную часть порядка k_i в i-ой отмеченной точке в ее старший член, т.е. в k_i-ую степень некоторого касательного вектора в этой точке. Прямая сумма этих морфизмов определяет морфизм $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$, где $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1^\vee)^{\otimes k_1} \oplus \dots \oplus (\mathcal{L}_n^\vee)^{\otimes k_n}$.

Лемма 4.22 1) *Конус $\widetilde{\mathcal{A}}_i$ является факторконусом векторного расслоения $\mathcal{A}_i$ по модулю послойного действия группы $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$. Конус $\widetilde{\mathcal{A}}$ является факторконусом векторного расслоения $\mathcal{A}$ по модулю послойного действия группы $\mathbf{Z}/k_1\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}/k_n\mathbf{Z}$.*

2) *Пучки $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{A}$ являются постоянными пучками над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$.*

3) *Ядро морфизма $\varphi_i : \mathcal{P}_i \to \mathcal{L}_i^{\vee \otimes k_i}$ совпадает с конусом $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{P}_i$. Кратность морфизма φ_i вдоль $\mathcal{A}_i$ равна k_i. Ядро морфизма $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ совпадает с конусом $\mathcal{A}$. Кратность морфизма φ вдоль $\mathcal{A}$ равна $k_1 \dots k_n$.*

Доказательство. Единственное утверждение, действительно требующее доказательства, состоит в том, что пучки $\mathbf{A}_i$ постоянны. Оно вытекает из утверждения 4) леммы 4.19: считая функции a_j координатами вдоль слоя конуса $\mathcal{A}_i$ и полагая $a_j = 1$, $a_l = 0$ для $l \neq j$, мы получаем $k_i - 1$ сечение конуса $\mathcal{A}_i$. Эти сечения линейно независимы в каждой точке. Третье утверждение леммы следует теперь из леммы 4.20. $\lhd$

4.5.4 Расслоение Ходжа

Пусть $(p_1, \dots, p_n)$ — вектор главных частей порядков $k_1, \dots, k_n$ в отмеченных точках x_i стабильной кривой $(C; x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Каждая главная часть определяет линейный функционал

$$\omega \mapsto \mathrm{Res}_{x_i} p_i \omega$$

на пространстве обобщенных голоморфных 1-форм, задаваемый вычетом в отмеченной точке. Этот функционал корректно определен: обобщенная голоморфная 1-форма не может иметь полюса в отмеченной точке, поэтому функционал не зависит от выбора ростка, представляющего главную часть p_i. Мы можем распространить отображение вычета на произвольные обобщенные главные части, положив его равным нулю на слое конуса $\mathcal{A}_i$.

Следующее утверждение дает классическое решение проблемы Миттаг-Лефлера на кривых произвольного рода (см., например, [35]).

Теорема 4.23 *Вектор главных частей* $(p_1, \dots, p_n)$ *в отмеченных точках* $x_1, \dots, x_n$ *стабильной кривой* C *является вектором главных частей некоторой мероморфной функции на* C *с полюсами в этих точках в том и только в том случае, если*

$$\mathrm{Res}_{x_1} p_1 \omega + \dots + \mathrm{Res}_{x_n} p_n \omega = 0 \tag{4.13}$$

для любой обобщенной голоморфной 1*-формы* ω *на* C*. Любые две мероморфные функции с одинаковыми векторами главных частей отличаются на аддитивную постоянную.*

4.5.5 Вложение пространства Гурвица в конус главных частей

Рассмотрим послойное отображение $R : \mathcal{P} \to \Lambda^\vee_{g;n}$, переводящее набор $(p_1, \dots, p_n)$ главных частей в линейный функционал $\omega \mapsto \mathrm{Res}_{x_1} p_1 \omega + \dots + \mathrm{Res}_{x_n} p_n \omega$ на расслоении Ходжа. Обозначим через $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}$ подсхему в $\mathcal{P}$ нулей отображения R.

Вот другой способ описания подсхемы $\mathcal{Z}$. Рассмотрим мероморфные функции на стабильной кривой C с полюсами порядков $k_1, \dots, k_n$ в отмеченных точках. Сопоставив такой функции набор ее главных частей в отмеченных точках, мы получаем точку в конусе $\mathcal{P}$. Подсхема $\mathcal{Z}$ теперь определяется как замыкание образа этого отображения.

Определение 4.24 *Пополненным пространством Гурвица* $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ называется замыкание в $\mathcal{P}$ множества наборов главных частей, соответствующих мероморфным функциям на *гладких* кривых.

Множество точек замыкания, которым не соответствуют мероморфные функции на гладких кривых, называется *границей* пополненного пространства Гурвица и обозначается через $\partial\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} = \overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \setminus \mathcal{H}_{g;k_1,\dots,k_n}$.

Лемма 4.25 *Пополненное пространство Гурвица имеет естественную структуру конуса над* $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$.

Доказательство. Рассмотрим пучок идеалов, задающий пространство $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ как подсхему в $\mathcal{P}$. Над гладкой кривой такой идеал порождается левыми частями уравнений (4.13). Уравнения (квази)однородны веса 1, поэтому этот идеал $\mathbb{C}^*$-инвариантен. В силу замкнутости, определяющие идеалы над особыми кривыми также $\mathbb{C}^*$-инвариантны. Утверждение леммы следует теперь из того, что пучок градуированных алгебр, задающий $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ как конус над $\mathcal{M}_{g;n}$, совпадает с фактор-пучком пучка $\mathbf{P}$ по модулю указанного пучка идеалов. $\triangleleft$

Замечание 4.26 Если все k_i равны 1, т.е. ветвление над бесконечностью отсутствует, то конус $\mathcal{P}$ является векторным расслоением над $\mathcal{M}_{g;n}$. Если при этом $n \geq g \geq 2$, то $\overline{\mathcal{H}}_{g;1,\dots,1}$ — векторное подрасслоение в $\mathcal{P}$. Если же $n < g$, то слои конуса $\overline{\mathcal{H}}_{g;1,\dots,1}$ также являются векторными пространствами, однако их размерность зависит от точки базы.

Пример 4.27 Пополненное пространство Гурвица может отличаться от подмногообразия $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}$, задаваемого уравнениями (4.13). Другими словами, не всякая мероморфная функция на особой кривой с полюсами указанного порядка в отмеченных точках является предельной для некоторого семейства мероморфных функций на гладких кривых.

Это явление наблюдается уже для случая двух полюсов первого порядка на эллиптических кривых. Эллиптические кривые с двумя отмеченными точками допускают два типа вырождений. Вырожденная кривая первого типа состоит из гладкой эллиптической и гладкой рациональной компоненты, трансверсально пересекающихся по одной точке, причем из условия стабильности вытекает, что обе отмеченные точки лежат на рациональной компоненте. Вырожденная кривая второго типа представляет собой однокомпонентную эллиптическую кривую с одной двойной точкой.

Пространство пар (p_1, p_2) главных частей мероморфных функций первого порядка в отмеченных точках над гладкой кривой одномерно: единственная, с точностью до мультипликативной константы, голоморфная 1-форма на кривой накладывает линейное ограничение на эти главные части. То же верно и для особых кривых второго типа. На кривых же первого типа это ограничение отсутствует, так как на рациональной компоненте не существует ненулевых мероморфных 1-форм с единственным полюсом (не выше) первого порядка. Поэтому слой пучка $\mathcal{Z}$ над особыми кривыми первого типа двумерен. Однако не любую такую функцию можно получить как предельную точку семейства функций на гладких кривых. Тем самым, в данном случае конус $\mathcal{Z}$ является объединением двух неприводимых трехмерных компонент: пополненного пространства Гурвица и ограничения пучка $\mathcal{P}$ на подмногообразие особых кривых первого типа. Эти две компоненты имеют непустое пересечение.

4.6 Продолжение отображения Ляшко-Лойенги на пополненное пространство Гурвица

Напомним, что отображение ЛЛ определено на плотном подмножестве $\mathcal{H}_{n;k_1,\dots,k_n}$ в $\overline{\mathcal{H}}_{n;k_1,\dots,k_n}$ и отображает его в пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$ унимодальных многочленов от одной переменной с нулевой суммой корней

$$t^\mu + d_2 t^{\mu-2} + \dots + d_\mu. \tag{4.14}$$

В этом параграфе мы строим продолжение отображения ЛЛ на все пополненное пространство Гурвица $\overline{\mathcal{H}}_{n;k_1,\dots,k_n}$ и, более того, на все пространство $\mathcal{Z}$ нулей отображения $R : \mathcal{P} \to \Lambda$. Мы начнем с того, что отождествим пространство $\mathcal{Z}$ с пространством стабильных мероморфных функций на кривых рода g с n отмеченными точками и заданными порядками полюсов в этих точках.

4.6.1 Вырождение полюсов и стабильные отображения

Параметризация (4.10) пространства главных частей в точке предполагает, что при обращении параметра u в нуль полюс в этой точке исчезает полностью. С геометрической точки зрения, однако, более естественно считать, что при обращении u в нуль в точке рождается сфера (= рациональная кривая), пересекающая росток исходной кривой в этой точке. Вырожденная функция превращается при этом в многочлен на новорожденной сфере, принимающий некоторое конечное значение в точке пересечения.

Перейдем к более формальному описанию конструкции. *Полустабильные кривые* рода g с n отмеченными точками отличаются от стабильных тем, что им разрешается иметь на рациональных компонентах две специальные точки (на рациональных компонентах стабильных кривых таких точек не меньше трех). Группа автоморфизмов полустабильной кривой может быть недискретной: если такая кривая содержит рациональную компоненту с двумя специальными точками, то группа автоморфизмов этой компоненты непрерывна. Назовем *стабильной мероморфной функцией* [по Концевичу] мероморфную функцию на полустабильной кривой с полюсами порядков $k_1, \dots, k_n$ в отмеченных точках, не имеющую непрерывных автоморфизмов. Это требование означает, что на полустабильной кривой нет рациональной компоненты с двумя специальными точками, которые обе являются особыми точками кривой (а не отмеченными точками). Действительно, такая компонента с необходимостью стягивается мероморфной функцией в точку, так как на ней отсутствуют полюса, и поэтому группа автоморфизмов такой мероморфной функции имеет непрерывную компоненту связности. Подробное описание стеков стабильных отображений кривых см. в [6].

Каждой полустабильной кривой $\widetilde{C}$ можно естественным образом сопоставить стабильную кривую C. А именно, если кривая $\widetilde{C}$ стабильна, то мы сопоставляем ей ее саму. Если же она нестабильна, то на ней есть рациональные компоненты с двумя специальными точками. Выберем такую компоненту и поступим с ней следующим образом. Если обе специальные точки особые, то мы сотрем эту компоненту, а точки ее пересечения с оставшейся частью кривой сделаем общей особой точкой оставшейся части. Если одна из специальных точек особая, а другая — отмеченная, то мы сотрем эту рациональную компоненту, перенеся отмеченную точку в бывшую точку пересечения этой компоненты с оставшейся частью кривой. Стирая последовательно все рациональные компоненты с двумя специальными точками в произвольном порядке, мы в конце концов получим стабильную кривую C, у которой таких компонент нет. Полученная кривая, очевидно, не зависит от порядка стирания компонент.

Теорема 4.28 *Пространство нулей $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}$ отображения $R : \mathcal{P} \to \Lambda_{g;n}^{\vee}$ естественным образом отождествляется с пространством стабильных мероморфных функций на кривых рода g с n отмеченными полюсами порядков $k_1, \dots, k_n$, рассматриваемых с точностью до аддитивной постоянной.*

Доказательство. Построим отображение пространства $\mathcal{Z}$ в пространство стабильных мероморфных функций. Набору $(p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{Z}$ невырожденных главных частей порядков $k_1, \dots, k_n$ на стабильной кривой C сопоставим мероморфную функцию на этой кривой с такими главными частями (определенную, согласно теореме 4.14, однозначно с точностью до аддитивной постоянной). Если же одна или несколько главных частей p_i являются вырожденными, то поступим следующим образом. Добавим к стабильной кривой C по одной рациональной компоненте на каждую обобщенную главную часть с нулевым старшим членом. Новая компонента с номером i пересекает старую кривую в i-ой отмеченной точке; точка пересечения перестает быть отмеченной, и на рациональной компоненте появляется отмеченная точка x_i. В результате мы получим полустабильную кривую $\widetilde{C}$ вместе с естественным вложением $C \hookrightarrow \widetilde{C}$.

Определим теперь стабильную мероморфную функцию с заданными главными частями $p_1, \ldots, p_n$ на $\widetilde{C}$. На кривой $C \subset \widetilde{C}$ эта функция задается (с точностью до аддитивной постоянной) главными частями в полюсах. При этом функция не имеет полюсов в тех отмеченных точках, старший член главной части в которых равен нулю. Доопределим функцию на i-ой добавленной рациональной компоненте, положив ее равной, с точностью до аддитивной постоянной, многочлену

$$a(y) = y^{k_i} + a_1 y^{k_i - 1} + \cdots + a_{k_i - 1} y$$

в координате y, выбранной таким образом, что отмеченная точка имеет координату $y = \infty$, а особая точка координату $y = 0$. Это определение корректно, так как согласно лемме 4.20 коэффициенты a_i определены однозначно с точностью до действия (4.11) группы $\mathbf{Z}/k_i\mathbf{Z}$, т.е. с точностью до замены переменной $y \mapsto \zeta_i y$, а значит класс изоморфизма многочлена определен однозначно. Значение константы выбирается таким образом, чтобы функция была непрерывной на $\widetilde{C}$, т.е. константа равна значению функции на C в i-ой отмеченной точке.

Построенное отображение, очевидно, взаимно однозначно: по стабильной функции восстанавливается набор ее главных частей в отмеченных точках; при этом функции на рациональной компоненте с двумя специальными точками соответствует главная часть с нулевым старшим членом. $\lhd$

4.6.2 Продолжение отображения ЛЛ

Далее мы рассматриваем пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$ многочленов (4.14) как конус над точкой. Кольцо многочленов от переменных d_i градуировано выбором весов $w(d_i) = i$.

Теорема 4.29 *Отображение ЛЛ является конечнократным накрытием над пространством унимодальных многочленов степени μ с различными корнями, имеющих нулевую сумму корней. Оно однозначно продолжается до морфизма конусов*

$$\mathcal{LL} : \overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \to \mathbb{C}^{\mu-1}.$$

Доказательство. Утверждение о том, что отображение ЛЛ является накрытием над пространством многочленов с различными корнями, непосредственно вытекает из теоремы Римана.

Определим теперь отображение $\mathcal{LL}$ на пространстве $\mathcal{Z}$ и покажем, что определенное таким образом отображение непрерывно, согласовано с действиями группы $\mathbb{C}^*$ слева и справа и продолжает отображение $\mathcal{LL}$ на пространстве Гурвица.

Пусть $\tilde{f} : \widetilde{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — стабильная мероморфная функция и C — стабильная кривая, отвечающая полустабильной кривой $\widetilde{C}$. Функция $\tilde{f}$ может быть постоянной на некоторых неприводимых компонентах кривой C. Обозначим через C' объединение всех неприводимых компонент кривой C, на которых функция $\tilde{f}$ постоянна.

Определим множество критических значений функции $\tilde{f}$ как объединение следующих множеств:

1. множество критических значений функции $\tilde{f}$ на тех компонентах кривой $\widetilde{C}$, где она непостоянна;

2. множество значений функции $\tilde{f}$ в двойных точках кривой $\widetilde{C}$, каждое с кратностью 2;

3. множество значений функции $\tilde{f}$ на каждой неприводимой компоненте кривой $\widetilde{C}$ рода g', на которой функция постоянна, взятых с кратностью $2g' - 2$.

Очевидно, что для мероморфной функции на гладкой кривой определенное таким образом множество критических значений совпадает с обычным. Проверим теперь, что ограничение так определенного отображения ЛЛ на $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ непрерывно.

Взяв на кривой $\widetilde{C}$ двойную точку θ, рассмотрим прообраз $\tilde{f}^{-1}(S^1)$ малой окружности с центром в точке $\tilde{f}(\theta) \in \mathbb{C}^1$. Нас будет интересовать пересечение этого прообраза с малой окрестностью точки $\theta \in \widetilde{C}$. Если функция $\tilde{f}$ непостоянна на обеих ветвях кривой, пересекающихся в точке θ, то пересечение состоит из двух окружностей, по одной на каждой из ветвей. Если функция $\tilde{f}$ непостоянна лишь на одной из ветвей, то пересечение состоит из окружности, расположенной на этой ветви. Если, наконец, функция постоянна на обеих ветвях кривой в точке θ, то пересечение пусто; такую двойную точку кривой мы называем *внутренней* (для функции $\tilde{f}$).

Каждой из окружностей пересечения приписывается натуральное число, степень ее отображения на окружность S^1 функцией $\tilde{f}$. Эта степень равна увеличенному на 1 порядку критической точки θ ограничения функции $\tilde{f}$ на соответствующую ветвь.

Рассмотрим теперь однопараметрическую голоморфную деформацию $F : \mathcal{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ отображения $\tilde{f}$; здесь $\mathcal{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — голоморфное семейство помеченных кривых рода g, таких что $C_0 = \widetilde{C}$, кривая $\widetilde{C}_\tau$ гладкая при $\tau \neq 0$, а ограничение f_τ отображения F на кривую C_τ является мероморфной функцией с отмеченными полюсами. Мы не требуем, чтобы сумма критических значений функции f_τ равнялась нулю.

Рассмотрим для двойной точки $\theta \in \widetilde{C}$ прообраз $F^{-1}(S^1)$ малой окружности на $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ с центром в точке $\tilde{f}(\theta)$. Пересечение этого прообраза с кривой $\widetilde{C}$ содержит не менее двух окружностей описанного выше типа. (Эти окружности могут находиться далеко от точки θ — например, если θ — внутренняя двойная точка для функции $\tilde{f}$. Однако они обязательно находятся вблизи двойных точек, значение функции $\tilde{f}$ в которых совпадает с $\tilde{f}(\theta)$.) Рассмотрим компоненты связности прообраза, соответствующие указанным окружностям. При малых $\tau \neq 0$ пересечение такой компоненты связности с кривой C_τ тоже является окружностью, и степень ограничения отображения $\tilde{f}$ на эту окружность совпадает с числом, приписанным соответствующей окружности на $\widetilde{C}$.

Применив описанную выше процедуру ко всем значениям функции $\tilde{f}$ в двойных точках, мы получим на каждой кривой C_τ при малых τ конечный набор окружностей. Эти окружности разрезают кривую C_τ на куски трех различных типов:

1. куски, содержащие отмеченные точки. Эти куски находятся во взаимно однозначном соответствии с теми неприводимыми компонентами кривой $\widetilde{C}$, на которых функция $\tilde{f}$ непостоянна;

2. куски, биголоморфно эквивалентные кольцу. Эти куски находятся во взаимно однозначном соответствии с теми двойными точками кривой $\widetilde{C}$, в которых пересекаются две ветви непостоянства функции $\tilde{f}$;

3. куски положительного рода без отмеченных точек. Эти куски находятся во взаимно однозначном соответствии с компонентами связности кривой $C' \subset C \subset \widetilde{C}$ — области постоянства функции $\tilde{f}$.

Проследим теперь за поведением критических точек и критических значений функции f_τ на кусках каждого из трех типов. Индекс j будет пробегать множество всех кусков.

1) По формуле Римана–Гурвица число критических точек (с учетом кратностей) функции f_τ на куске первого типа равно $K_j + n_j + 2g_j - 2 - D_j + c_j$, где K_j — суммарная степень всех полюсов на куске, n_j — число отмеченных точек (полюсов), g_j — род соответствующей неприводимой компоненты кривой $\widetilde{C}$, D_j — суммарная степень ограничения отображения $\tilde{f}$ (или f_τ) на все граничные окружности куска, а c_j — число этих граничных окружностей. При стремлении τ к нулю критические точки функции f_τ на таком куске стремятся к критическим точкам функции $\tilde{f}$ на соответствующей неприводимой компоненте кривой $\widetilde{C}$ (за вычетом двойных точек), а соответствующие критические значения стремятся к критическим значениям функции $\tilde{f}$ на этой компоненте.

2) Кольцо без отмеченных точек переводится отображением f_τ в малый диск, ограниченный окружностью S^1. Степень такого отображения равна сумме степеней его ограничений на граничные окружности кольца. По формуле Римана–Гурвица число критических точек функции f_τ в кольце совпадает с ее степенью. При стремлении τ к нулю все критические точки стремятся к двойной точке, а критические значения — к значению функции $\tilde{f}$ в этой двойной точке.

3) Кусок третьего типа переводится отображением f_τ в диск. Степень этого отображения на куске равна D_j, сумме степеней его ограничений на граничные окружности. Число критических точек на таком куске равно $2g_j - 2 + D_j + c_j$, где g_j — (арифметический) род соответствующей компоненты кривой $C' \subset \widetilde{C}$, c_j — число граничных окружностей. Справедливо равенство $2g_j - 2 = 2\sum(g_{ji} - 2) + 2l$, где l — число внутренних двойных точек кривой C', а через g_{ji} обозначены рода неприводимых компонент этой кривой. При стремлении τ к нулю критические значения функции f_τ на таком куске стремятся к постоянному значению функции $\tilde{f}$ на предельной кривой.

Объединяя множества критических значений на кусках каждого типа, мы заключаем что они стремятся в точности к описанному выше множеству значений.

Теперь мы можем доопределить отображение ЛЛ на всей подсхеме $\mathcal{Z}$. Для этого достаточно подбирать аддитивные константы в стабильных функциях таким образом, чтобы сумма определенных выше критических значений функции равнялась нулю.

Лемма доказана. $\triangleleft$

4.7 Старшие классы Сегре

4.7.1 Классы Сегре расслоений и конусов

Наше изложение в этом разделе следует, с незначительными изменениями, подходу [22], главы 3, 4, 8, 19.

Пусть X — гладкое компактное алгебраическое многообразие или орбиобразие чистой размерности d. Рассмотрим конус $\mathcal{S}$ чистой размерности над X и обозначим через $\pi : P\mathcal{S} \to X$ проекцию (взвешенной) проективизации этого конуса на X.

Классом Сегре конуса $\mathcal{S}$ называется элемент в пространстве когомологий $H^*(X, \mathbf{Q})$ многообразия X с рациональными коэффициентами, определяемый следующим образом. Для всякого целого неотрицательного числа l определено значение $c_1(\mathcal{O}(1))^l \cap [P\mathcal{S}]$ l-ой итерации первого класса Черна канонического линейного расслоения над $P\mathcal{S}$ на фундаментальном цикле тотального пространства $P\mathcal{S}$. Здесь мы пользуемся операциональной интерпретацией первого класса Черна линейного расслоения (см. [22], глава 3). Это значение является элементом группы Чжоу $A_*P\mathcal{S}$ — группы циклов проективного конуса $P\mathcal{S}$ по модулю рациональной эквивалентности. Отображение $\pi_* : A_*P\mathcal{S} \to A_*X$ переводит построенный элемент в элемент группы Чжоу базы X. Изоморфизм двойственности $A_*X \cong A^{d-*}X$ переводит этот элемент в некоторый элемент кольца Чжоу A^*X. В свою очередь, на кольце Чжоу действует отображение класса $\mathrm{cl} : A^*X \to H^*X$ ([22], Следствие 19.2). Обозначим через $h : A_*P\mathcal{S} \to H^*X$ композицию всех указанных отображений. *Класс Сегре* $s(\mathcal{S})$ конуса $\mathcal{S}$ определяется равенством

$$s(\mathcal{S}) = h\left(\sum_{l\geq 0} c_1(\mathcal{O}(1))^l \cap [P\mathcal{S}]\right).$$

Его можно единственным образом представить в виде суммы однородных слагаемых:

$$s(\mathcal{S}) = s_0(\mathcal{S}) + \dots + s_d(\mathcal{S}), \qquad s_i(\mathcal{S}) \in H^{2i}X.$$

Класс $s_d(\mathcal{S})$ называется *старшим классом Сегре* конуса $\mathcal{S}$ и обозначается через $s_{top}(\mathcal{S})$; его *значение* $\int_X s_{top}(\mathcal{S})$ на X является рациональным числом. Приводимая ниже лемма 4.32 выражает кратность отображения ЛЛ на пространстве Гурвица в терминах старшего класса Сегре конуса $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$.

Для векторного расслоения E над многообразием X его класс Сегре является обратным к его классу Черна, $s(E) = c^{-1}(E)$; здесь оба характеристических класса понимаются либо в когомологическом, либо в операциональном смысле. Последнее равенство можно использовать как определение полного класса Черна расслоения. Степень старшего класса Сегре равна размерности многообразия, степень старшего класса Черна — рангу расслоения.

4.7.2 Классы Сегре конусов главных частей

Вычислим теперь классы Сегре вспомогательных конусов, которые нам понадобятся ниже.

Лемма 4.30 *Класс Сегре конуса $\mathcal{A}$ равен*

$$s(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \frac{k_i^{k_i-1}}{(k_i-1)!}.$$

Доказательство. Согласно лемме 4.22 пучок $\mathbf{A}_i$, который задает конус $\mathcal{A}_i$, постоянен; поэтому единственным нетривиальным классом Сегре этого конуса будет его нулевой класс $s_0(\mathcal{A}_i)$. Значение последнего можно найти локально в произвольном слое проективизированного конуса $P\mathcal{A}_i$ над точкой пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Такой слой представляет собой фактор взвешенного проективного пространства $P\widetilde{A}^{k_i-1}$ по модулю действия группы $\mathbf{Z}/k_i\mathbf{Z}$. Его нулевой класс Сегре равен произведению обратных весов координат, поделенному на порядок действующей группы, т.е. он равен

$$s_0(\mathcal{A}_i) = \frac{1}{k_i} \frac{k_i^{k_i-1}}{(k_i-1)!}.$$

Утверждение леммы доказывается точно так же. $\triangleleft$

Лемма 4.31 *Класс Сегре конуса $\mathcal{P}$ равен*

$$s(\mathcal{P}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{k_i!}{k_i^{k_i}} \frac{1}{1-k_i\psi_i},$$

где $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность морфизмов конусов

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

где морфизм $\mathcal{A} \to \mathcal{P}$ задается вложением, а морфизм $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$, сопоставляющий набору главных частей набор их старших членов, определен в разделе 4.5.

Обозначим через $\pi : P\mathcal{P} \to \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ проекцию на базу проективного конуса главных частей. Поднимая с помощью этой проекции расслоение $\mathcal{L}$ над $P\mathcal{P}$ и умножая его на каноническое расслоение, мы получаем расслоение $\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\mathcal{L}) \to P\mathcal{P}$ ранга n. Отображению φ можно следующим образом сопоставить сечение $\sigma_\varphi : P\mathcal{P} \to \mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\mathcal{L})$ этого расслоения. Положим значение сечения σ_φ в точке $\mathbb{C}^*p \in P\mathcal{P}$ равным $1_p \otimes \pi^*(\varphi(p))$; здесь через 1_p обозначен элемент слоя расслоения $\mathcal{O}(1)$ в точке $\mathbb{C}^*p \in P\mathcal{P}$, принимающий значение 1 на p. Очевидно, что значение σ_φ не зависит от выбора представителя p в орбите $\mathbb{C}^*p$.

Множество нулей $Z(\sigma_\varphi) \subset P\mathcal{P}$ сечения σ_φ совпадает с проективизацией множества нулей морфизма φ. Согласно лемме 4.22, это множество совпадает с подконусом $P\mathcal{A} \subset P\mathcal{P}$, взятым с кратностью $k_1 \dots k_n$. Его чистая коразмерность в $P\mathcal{P}$ равна n. Согласно предложению 14.1 из [22] отсюда вытекает, что это множество нулей представляет старший класс Черна расслоения $\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\mathcal{L}) \to P\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
[Z(\sigma_\varphi)] &= c_n(\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\mathcal{L})) \cap [P\mathcal{P}] \\
&= \sum_l c_{n-l}(\pi^*(\mathcal{L})) c_1(\mathcal{O}(1))^j \cap [P\mathcal{P}].
\end{aligned}$$

Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned}
k_1 \dots k_n s(\mathcal{A}) &= \sum_l c_1(\mathcal{O}(1))^l \cap [Z(\sigma_\varphi)] \\
&= \sum_{l,j} c_{n-j}(\pi^*(\mathcal{L})) c_1(\mathcal{O}(1))^{l+j} \cap [P\mathcal{P}] \\
&= c(\mathcal{L}) s(\mathcal{P}).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$s(\mathcal{P}) = k_1 \dots k_n \frac{s(\mathcal{A})}{c(\mathcal{L})},$$

откуда и вытекает требуемое утверждение. $\triangleleft$

4.7.3 Кратность отображения ЛЛ и классы Сегре

Кратность морфизма конусов тесно связана с действием такого морфизма на старших классах Сегре этих конусов.

Лемма 4.32 *Пусть $F : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ — конечнократный морфизм конусов над компактными орбиобразиями M_1, M_2, причем значение старшего класса Сегре $s_{top}(\mathcal{S}_2)$ на фундаментальном цикле отлично от нуля. Тогда кратность этого морфизма равна*

$$\frac{\int_{M_1} s(\mathcal{S}_1)}{\int_{M_2} s(\mathcal{S}_2)}.$$

Утверждение леммы вытекает непосредственно из функториальности полного класса Сегре.

Следствие 4.33 *Кратность отображения $\mathcal{LL} : \overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \to \mathbb{C}^{\mu-1}$ равна*

$$\mu! \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} s(\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}).$$

Действительно, отображение ЛЛ является конечнократным морфизмом конуса $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ в конус над точкой. Полный класс Сегре второго конуса равен обратному произведению весов переменных, т.е. равен $1/\mu!$, что и доказывает следствие.

Обозначим через $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}$ объединение всех неприводимых компонент конуса $\mathcal{Z}$, не содержащихся в $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$, а через Δ дискриминант в пространстве многочленов $\mathbb{C}^{\mu-1}$, состоящий из многочленов с кратными корнями. Тогда $\mathcal{Z} = \overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \cup \mathcal{Z}'$ и $\mathcal{LL}(\mathcal{Z}') \subset \Delta$, так как по крайней мере два критических значения мероморфной функции на особой кривой совпадают.

Лемма 4.34 *Справедливо равенство*

$$c_1(\mathcal{O}(1))^{\mu-2} \cap [P\mathcal{Z}'] = 0.$$

Доказательство. Прообраз $\mathcal{LL}^{-1}(0)$ нуля относительно отображения $\mathcal{LL}$ представляет собой нулевое сечение конуса $\mathcal{Z}$. Действительно, все критические значения мероморфной функции равны нулю в том и только в том случае, если все неприводимые компоненты кривой, на которых она непостоянна, рациональны, ограничение функции на такую компоненту имеет один полюс (т.е. является многочленом) и записывается в виде z^{k_i} в подходящей координате z на этой компоненте. Такая функция соответствует нулевому элементу слоя конуса главных частей. Поэтому корректно определено проективизированное отображение ЛЛ $P\mathcal{LL}$, отображающее $P\mathcal{Z}$ в $P\mathbb{C}^{\mu-1}$, причем $\mathcal{O}_{P\mathcal{Z}}(1) = P\mathcal{LL}^*\mathcal{O}_{P\mathbb{C}^{\mu-1}}(1)$. В частности, $\mathcal{O}_{P\mathcal{Z}'}(1) = (P\mathcal{LL}|_{P\mathcal{Z}'})^*\mathcal{O}_{P\Delta}(1)$. Тем самым, ограничение расслоения $\mathcal{O}(1)$ над $P\mathcal{Z}'$ индуцировано из линейного расслоения над многообразием размерности $\mu-3$, поэтому $(\mu-2)$-я степень его первого класса Черна равна нулю, что и доказывает утверждение леммы. $\triangleleft$

Лемма 4.35 *Справедливо равенство*

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} s(\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} c(\Lambda_{g;n}^\vee)s(\mathcal{P}).$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 4.31, мы можем связать с отображением $R : \mathcal{P} \to \Lambda_{g;n}^\vee$, задаваемым суммой вычетов в отмеченных точках, сечение

$$\sigma_R : P\mathcal{P} \to \mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\Lambda_{g;n}^\vee)$$

векторного расслоения $\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\Lambda_{g;n}^\vee)$ ранга g над проективным конусом $P\mathcal{P}$: σ_R сопоставляет точке пространства $P\mathcal{P}$ линейный функционал на слое расслоения $\pi^*\Lambda_{g;n}$, заданный вычетом с элементом слоя канонического расслоения $\mathcal{O}(1)$. Согласно теореме 4.23, множеством нулей сечения σ_R является проективизация $P\mathcal{Z}$ пространства $\mathcal{Z}$ мероморфных функций.

Напомним, что пополненное пространство Гурвица $\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \subset \mathcal{Z}$ является подконусом в конусе $\mathcal{P}$ главных частей.

Построим сначала $(\mu-2)$-цикл $D \subset P\mathcal{Z}$, $D \in A_{\mu-2}P\mathcal{Z}$, представляющий локализованный старший класс Черна расслоения $\mathcal{O}(1)\otimes\pi^*(\Lambda_{g;n}^\vee)$ над $P\mathcal{P}$, т.е. такой, что $[D] = c_g(\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\Lambda_{g;n}^\vee)) \cap [P\mathcal{P}]$.

Подобная конструкция является стандартной; она позволяет построить для произвольного векторного расслоения $E \to X$ над схемой X чистой размерности цикл, представляющий локализованный старший класс Черна этого расслоения, по произвольному его сечению $\eta : X \to E$ (см. [22], §14.1, 6.1). Обозначим через e ранг расслоения E, а через $Z(\eta)$ множество нулей сечения η, $Z(\eta) \subset X$. Нормальный конус N к $Z(\eta)$ в X следующим естественным образом вкладывается в тотальное пространство ограничения расслоения E на $Z(\eta)$. Касательное отображение $d\eta : T_zX \to T_{\eta(z)}E$ переводит касательный вектор $\xi \in T_zX$ к

X в точке $z \in Z(\eta)$ в касательный вектор $d\eta(\xi) \in T_{\eta(z)}E$; последний вектор можно считать элементом слоя E_z расслоения E в точке z, который естественным образом отождествляется с факторпространством $E_z = T_{\eta(z)}E/T_zX$. Размерность нормального конуса в X к любой неприводимой компоненте множества $Z(\eta)$ совпадает с размерностью самой схемы X, тем самым $[N]$ задает цикл коразмерности e в $A_*E|_{Z(\eta)}$. Согласно предложению 14.1 из [22], изоморфизм $\tau : A_*E \cong A_{*-e}X$ переводит $[N]$ в цикл коразмерности e в $A_{*-e}X$, который представляет локализованный старший класс Черна расслоения E над X.

В частности, каждая неприводимая компонента $Z(\eta)$ коразмерности e в X входит в класс $[D]$ с некоторой положительной кратностью, которая определяется поведением сечения η вдоль этой компоненты.

Применяя описанную выше конструкцию к векторному расслоению $\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\Lambda^\vee_{g;n})$ над $P\mathcal{P}$ и сечению σ_R, мы получаем цикл $[D] \in A_{\mu-2}P\mathcal{P}$, такой, что

$$\begin{aligned} [D] &= c_g(\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\Lambda^\vee_{g;n})) \cap [P\mathcal{P}] \\ &= \sum_i c_1(\mathcal{O}(1))^i c_{g-i}(\pi^*(\Lambda^\vee_{g;n})) \cap [P\mathcal{P}]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\pi_*\left(\sum_j c_1(\mathcal{O}(1))^j \cap [D]\right) \\ &= \pi_*\left(\sum_j c_1(\mathcal{O}(1))^j \sum_i c_1(\mathcal{O}(1))^i c_{g-i}(\pi^*(\Lambda^\vee_{g;n})) \cap [P\mathcal{P}]\right) \\ &= \pi_*\left(\sum_{i,j} c_1(\mathcal{O}(1))^{i+j} c_{g-i}(\pi^*(\Lambda^\vee_{g;n})) \cap [P\mathcal{P}]\right) \\ &= \pi_*\left(\sum_i c_i(\pi^*(\Lambda^\vee_{g;n})) \sum_{l=i+j} c_1(\mathcal{O}(1))^l \cap [P\mathcal{Z}]\right). \end{aligned}$$

Поэтому $s(D) = c(\Lambda^\vee_{g;n})s(\mathcal{P})$ и, в частности,

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} s(D) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} c(\Lambda^\vee_{g;n})s(\mathcal{P}).$$

Описанная выше конструкция позволяет построить представителя D класса $[D]$, который содержится в $P\mathcal{Z}$. Положим

$$[D_{\overline{\mathcal{H}}}] = [D \cap P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}] \text{ и } [D'] = [D \cap P\mathcal{Z}'];$$

тогда $[D] = [D_{\overline{\mathcal{H}}}] \cup [D']$. Докажем теперь, что подсхема $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n} \subset P\mathcal{P}$ представляет класс $[D_{\overline{\mathcal{H}}}]$. Как мы видели выше, это утверждение справедливо с точностью до множителя, так как коразмерность подсхемы $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ в $P\mathcal{P}$ равна g; мы хотим показать, что этот множитель в точности равен 1. Для этого осталось показать, что в общей точке схемы $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$ сечение σ_R трансверсально нулевому сечению.

Возьмем общую точку в $P\overline{\mathcal{H}}_{g;k_1,\dots,k_n}$. Такая точка представляет собой гладкую стабильную кривую $(C^0; x_1^0, \dots, x_n^0)$, на которой задан набор $(p_1^0, \dots, p_n^0)$ обобщенных главных частей в отмеченных точках, рассматриваемых с точностью до общего ненулевого множителя, удовлетворяющий следующим условиям:

1. старшие члены всех главных частей отличны от нуля;

2. для любой голоморфной 1-формы ω на C^0 главные части p_i^0 удовлетворяют уравнениям (4.13);

3. критические значения функции $f^0 : C^0 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ с данными главными частями попарно различны.

Выбранную точку будем обозначать для краткости просто через (C^0, f^0).

Касательное пространство к тотальному пространству расслоения $\mathcal{O}(1) \otimes \pi^*(\Lambda_{g;n}^\vee)$ над $P\mathcal{P}$ в точке (C^0, f^0) естественным образом раскладывается в прямую сумму горизонтального касательного пространства к базе и вертикального касательного пространства к слою расслоения. В свою очередь, вертикальное касательное пространство естественным образом отождествляется с пространством $\Lambda^\vee(C^0)$, состоящим из линейных функционалов на пространстве голоморфных 1-форм на C^0. Сечение σ_R трансверсально нулевому сечению в точке (C^0, f^0) в том и только в том случае, если проекция образа касательного отображения $d\sigma_R$ в этой точке на вертикальное касательное пространство является сюръекцией. Обозначим композицию касательного отображения с этой проекцией через $d\tilde{\sigma}_R : T_{(C^0,f^0)}P\mathcal{P} \to \Lambda^\vee(C^0)$. Мы хотим доказать, что ранг отображения $d\tilde{\sigma}_R$ равен g.

Для $g = 0$ это утверждение пусто; для $g = 1$ его справедливость очевидна: единственная с точностью до ненулевого постоянного множителя голоморфная 1-форма на кривой C_0 задает координату z в окрестности каждой точки кривой C^0, и для деформации линейного функционала на пространстве 1-форм достаточно возмутить коэффициент при $\frac{1}{z}$, скажем, в главной части p_1. Если же $g \geq 2$, то рассмотрим *каноническое отображение* $C^0 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{g-1}$, заданное, с точностью до действия группы $\mathrm{PGL}(g)$, выбором базиса $\omega_1, \dots, \omega_g$ в пространстве голоморфных 1-форм:

$$x \mapsto (\omega_1(x) : \dots : \omega_g(x)).$$

Если кривая C^0 не гиперэллиптическая, то каноническое отображение является вложением. Образ канонического отображения называется *канонической кривой.*

Сопоставим каждой из точек $x_1, \dots, x_n \in C^0$ ее образ при каноническом отображении. Как хорошо известно (см., например, [35], глава 2, раздел 3), общая каноническая кривая невырождена, т.е. она не содержится ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{C}\mathrm{P}^{g-1}$. Это означает, что на канонической кривой C, близкой к C^0, вблизи точки, скажем x_1, есть g независимых точек. Образы соответствующих g касательных векторов к пространству главных частей при отображении $d\tilde{\sigma}_R$ линейно независимы и, значит, ранг этого отображения равен g.

Леммы 4.32, 4.34, 4.35 и следствие 4.33 в совокупности доказывают основную теорему 1.12.

Глава 5

Применение глобальной теории особенностей в теории пересечения на пространствах Гурвица

Обозначим через $\mathcal{H}_{g;n}$ (соответственно, $\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$) пространство Гурвица, состоящее из мероморфных функций на кривых рода g, имеющих n простых отмеченных полюсов, с нулевой суммой критических значений (соответственно, пополнение этого пространства — пространство стабильных мероморфных функций, описанное в четвертой главе). Эта глава посвящена теории пересечения на пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ — проективизации пространства $\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ относительно действия группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел умножениями функции на константу.

Пространство $P\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ компактно. Оно стратифицировано в соответствии с особенностями функций — элементов этого пространства. Нас будут интересовать в первую очередь классы когомологий, представленные замыканиями стратов этой стратификации. Все когомологии мы будем рассматривать с рациональными коэффициентами и не будем указывать это кольцо коэффициентов в обозначениях. Мы начнем с описания когомологий пространств рациональных функций и с вывода некоторых соотношений на классы вторых когомологий в этих пространствах, а затем перейдем к общей картине.

5.1 Страты коразмерности 1 в пространстве рациональных функций

Четвертая глава дает следующее описание пространства $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ — пополненного пространства рациональных функций степени n с n отмеченными простыми полюсами, $n \geq 3$. Это пополненное пространство отождествляется в ней с тотальным пространством векторного расслоения $\mathcal{L}_1^\vee \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n^\vee$ над компактификацией Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ пространства модулей рациональных кривых с n отмеченными точками. Здесь $\mathcal{L}_i^\vee$ — линейное расслоение, слой которого над точкой пространства модулей совпадает с касательной прямой в i-ой отмеченной точке к кривой, отвечающей выбранной точке пространства модулей. Именно этим описанием мы и пользуемся ниже. Через $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ обозначим, как обычно, послойную проективизацию тотального пространства расслоения. Это компактное многообразие. Как не проективизированное, так и проективизированное пространства рациональных функций снабжены естественной проекцией на пространство модулей рациональных кривых, $\overline{\mathcal{H}}_{0;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n}$, $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n}$.

Рассмотрим в пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ следующие классы вторых когомологий:

- класс $\psi = c_1(\mathcal{O}(1))$ — первый класс Черна тавтологического линейного расслоения над $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, т.е. след действия группы $\mathbb{C}^*$;
- класс δ, представленный дивизором функций, определенных на особых кривых, т.е. граничный класс $\delta = P(\overline{\mathcal{H}}_{0;n} \setminus \mathcal{H}_{g;n})$;
- класс σ_{2^1}, *каустику*, представленный дивизором функций, имеющих слившиеся критические точки;
- класс σ_{1^2}, *страт Максвелла*, представленный замыканием подмногообразия функций, имеющих совпадающие критические значения в различных критических точках.

Теорема 5.1 *Введенные выше классы подчиняются следующим линейным соотношениям:*

$$\begin{aligned} \sigma_{2^1} &= 6(n-1)\psi - 3\delta \\ \sigma_{1^2} &= 2(n-1)(n-6)\psi + 4\delta. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Замечание 5.2 Равенства (5.1) выражают каустику и страт Максвелла в пространствах рациональных функций линейно через классы ψ и δ, причем коэффициенты разложения представляют собой многочлены от переменной n. В [56] нами высказана гипотеза, согласно которой всякий страт особенностей $\sigma_{\alpha_1,\dots,\alpha_c}$ в пространствах рациональных функций выражается полиномиально через классы ψ и δ, причем коэффициенты полиномов полиномиально зависят от n. На текущий момент эта гипотеза представляется маловероятной, хотя напрямую она и не опровергнута.

Пример 5.3 Проверим равенства (5.1) в случае $n = 3$. Поскольку пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;3}$ является точкой, пространство $\overline{\mathcal{H}}_{0;3}$ можно отождествить с пространством $\mathbb{C}^3$ рациональных функций вида

$$az - \frac{b}{z} - \frac{c}{z-1} + \mathrm{const}(a,b,c),$$

где константа $\mathrm{const}(a,b,c)$, зависящая лишь от параметров функции, подбирается таким образом, чтобы сумма критических значений функции равнялась нулю. Проективизация $P\overline{\mathcal{H}}_{0;3}$ представляет собой двумерную проективную плоскость с однородными координатами $(a : b : c)$.

Проективизированная каустика σ_{2^1} задается однородным уравнением

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ba^2 + 3bc^2 + 3ca^2 + 3cb^2 - 21abc = 0.$$

Она особа и имеет точку самопересечения, однородные координаты которой $(1 : 1 : 1)$. Страт Максвелла σ_{1^2} пуст. Граничный страт δ состоит из трех прямых $a = 0$, $b = 0$ и $c = 0$, а класс ψ представлен прямой. Вторые когомологии пространства $P\overline{\mathcal{H}}_{0;3} = \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ одномерны и порождены классом прямой, а коэффициенты пропорциональности для интересующих нас классов есть соответственно 3 для каустики, 0 для страта Максвелла, 3 для страта δ и 1 для класса ψ. Тем самым, недоказанные еще тождества (5.1) превращаются в верные равенства

$$\begin{aligned} 3 &= 6 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \\ 0 &= 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 3. \end{aligned}$$

Отметим, что каждая из граничных прямых касается каустики в точке перегиба (которая, тем самым, является единственной точкой пересечения этих двух кривых).

5.1.1 Когомологии пространства Гурвица рациональных функций

В этом разделе мы даем описание структуры кольца когомологий пространства стабильных рациональных функций. В дальнейшем мы воспользуемся лишь малой частью этого описания — набором образующих пространства вторых когомологий $H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$. Однако полное описание кольцевой структуры полезно с точки зрения ее сравнения с (гипотетической) структурой подкольца когомологий, порожденного стратами σ.

Кольцо когомологий $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$ можно описать явно, воспользовавшись описанием Киля кольца когомологий пространства модулей рациональных стабильных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ и реализацией пространства Гурвица в виде векторного расслоения над пространством модулей. Описание Киля состоит в следующем.

Обозначим через $D = A \sqcup B$ неупорядоченное разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ отмеченных точек на два непересекающихся подмножества A и B, каждое из которых содержит не меньше двух точек (разбиение $A \sqcup B$ совпадает с $B \sqcup A$).

Рассмотрим все стабильные рациональные кривые, состоящие из двух компонент, первая из которых содержит отмеченные точки из множества A, вторая — из множества B. Такие стабильные кривые образуют подмногообразие (комплексной) коразмерности 1 в $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Его замыкание является гладким компактным подмногообразием коразмерности 1, а значит, определяет по двойственности Пуанкаре класс вторых когомологий. Мы будем обозначать этот класс через $[D]$.

Между классами $[D]$, отвечающими различным разбиениям D, есть линейные зависимости. Скажем, при $n = 4$ все три класса, отвечающие разбиениям

$$\{1,2\} \sqcup \{3,4\}, \qquad \{1,3\} \sqcup \{2,4\}, \qquad \{1,4\} \sqcup \{2,3\},$$

представляют один и тот же класс когомологий, Пуанкаре двойственный точке. Более общим образом, зафиксируем четыре различных индекса $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ и обозначим через $[ij|kl]$ сумму всех элементов $[D] \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$, отвечающих разбиениям D, в которых индексы i, j лежат в одной части, а индексы k, l — в другой.

Наконец, назовем два разбиения D_1, D_2 *совместимыми*, если множество $\{1, \ldots, n\}$ можно разбить на три попарно непересекающихся подмножества A, B, C, такие, что

$$D_1 = (A \sqcup B) \sqcup C, \qquad D_2 = A \sqcup (B \sqcup C).$$

Теорема 5.4 ([43]) *Алгебра когомологий $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$ порождена классами вторых когомологий $[D]$, причем линейные соотношения*

$$[ij|kl] = [ik|jl] = [il|jk] \text{ при попарно различных } i,j,k,l \in \{1,\dots,n\},$$

и нелинейные соотношения

$$[D_1][D_2] = 0 \text{ для любых несовместимых } D_1, D_2$$

образуют полный набор соотношений в этой алгебре.

На практике эта теорема Киля приводит, однако, к весьма громоздким вычислениям. С ее помощью Концевич и Манин [52] дали описание линейных образующих и соотношений в $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$ для всех значений k в терминах модулярных графов рациональных кривых.

Для описания алгебры когомологий $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$ как алгебры над кольцом $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$ введем дополнительно классы когомологий $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$. Напомним, что через $\mathcal{L}_i$ обозначается линейное расслоение над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$, слой которого над точкой $(C; x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ совпадает с кокасательной прямой к C в отмеченной точке x_i.

Теорема 5.5 ([56]) *Алгебра когомологий пространства Гурвица рациональных функций имеет вид*

$$H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}) = H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})[\psi]/((\psi - \psi_1)\dots(\psi - \psi_n)H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})[\psi]),$$

где ψ — формальная переменная.

Утверждение теоремы немедленно вытекает из описания пространства Гурвица $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ как тотального пространства векторного расслоения $\mathcal{L}_1^\vee \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n^\vee$ над $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ и из следующего хорошо известного факта (см., например, [22]): для любого комплексного векторного расслоения E ранга n над компактным комплексным многообразием M имеет место равенство

$$H^*(PE) = H^*(M)[\Psi]/((\Psi^n + c_1(E)\Psi^{n-1} + \dots + c_n(E))H^*(M)[\Psi]),$$

т.е. алгебра когомологий проективизированного расслоения PE изоморфна алгебре многочленов от одной переменной Ψ с коэффициентами в $H^*(M)$ по модулю полинома Черна расслоения E. При этом дополнительную образующую Ψ можно отождествить с первым классом Черна тавтологического расслоения над PE.

Для вывода соотношений на когомологические классы нам понадобятся некоторые новые классы в $H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$ и их свойства, которые мы сейчас и опишем.

Пусть снова $D = A \sqcup B$ обозначает разбиение множества индексов $\{1,\dots,n\}$ на два непустых непересекающихся подмножества. Мы более не требуем, однако, чтобы каждое из подмножеств содержало по меньшей мере два элемента. Рассмотрим подмногообразие стабильных рациональных функций в $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, состоящее из функций, определенных на двухкомопнентной нодальной рациональной кривой, причем первая компонента содержит отмеченные точки из подмножества A, а вторая — из подмножества B. Замыкание этого подмногообразия является циклом, двойственный которому класс вторых когомологий мы будем обозначать через $[D] \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$. Если в каждом из подмножеств A и B по крайней мере два элемента, то соответствующий класс $[D]$ является поднятием аналогичного класса вторых когомологий в $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$.

Пусть $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$. Обозначим через $[i|jk] \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$ (соответственно, через $[i*|jk] \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0;n}))$ класс вторых когомологий, равный сумме всех классов $[D]$, отвечающих тем разбиениям, в которых i лежит в одном подмножестве, а j и k — в другом. (Звездочка в обозначении класса напоминает, что компонента, содержащая точку x_i, должна содержать по крайней мере еще одну отмеченную точку.)

Утверждение 5.6 *Для любых различных $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ справедливы равенства*

$$\psi_i = [i*|jk], \qquad \psi = [i|jk].$$

Доказательство. Для доказательства первого равенства построим следующее сечение расслоения $\mathcal{L}_i$ над $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Если кривая $(C;x_1,\dots,x_n)$ невырожденна, то возьмем в качестве значения сечения значение в x_i того единственного мероморфного дифференциала на кривой, который имеет полюса первого порядка в точках x_k, x_j и только в них, с вычетами, равными, соответственно, $+1$ и -1 (ср. пример 4.13). Нетрудно видеть, что это сечение продолжается до голоморфного сечения над всей базой $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Нули этого голоморфного сечения это в точности слагаемые класса $[i*|jk]$, причем оно пересекает нулевое сечение трансверсально, что и требуется.

Для доказательства второго равенства вспомним, что класс ψ это первый класс Черна тавтологического линейного расслоения на $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, причем $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ есть тотальное пространство векторного расслоения

$$\mathcal{L}_1^\vee \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n^\vee$$

над $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Обозначим через $\pi : \overline{\mathcal{H}}_{0;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ расслаивающую проекцию. Всякое сечение векторного расслоения $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}^{\vee}$, двойственного к $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, определяет сечение расслоения $\mathcal{O}(-1)$, двойственного к тавтологическому, над $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$. Действительно, всякий линейный функционал на слое определяет линейный функционал и на каждой прямой в этом слое. Возьмем в качестве сечения расслоения $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}^{\vee}$ прямую сумму построенного выше сечения расслоения $\mathcal{L}_i$ с нулевыми сечениями остальных расслоений $\mathcal{L}_j$, $j \neq i$. Соответствующее ему сечение расслоения $\mathcal{O}(-1)$ голоморфно, а класс его нулей представляет собой сумму классов $\pi^*(c_1(\mathcal{L}_i)) = \pi^*(\psi_i) = \pi^*([i * |jk])$ и класса, двойственного к проективизации подрасслоения

$$\mathcal{L}_1^{\vee} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{i-1}^{\vee} \oplus \mathcal{L}_{i+1}^{\vee} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n^{\vee}$$

в $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$. Последний в точности совпадает с классом $[D] \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$, отвечающим разбиению

$$D = \{i\} \sqcup \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\},$$

что и завершает доказательство предложения. $\triangleleft$

Введем теперь классы вторых когомологий $\delta_{p,q} \in H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$, $p+q = n$, равные сумме классов $[D] = [A \sqcup B]$ по всем разбиениям D, в которых часть A содержит p элементов (а значит, часть B содержит q элементов). Другими словами, $\delta_{p,q}$ представлен замыканием множества рациональных функций, определенных на 2-компонентных кривых с p полюсами на одной и q полюсами на другой компоненте. Отметим, что это множество инвариантно относительно действия симметрической группы S_n на $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ перенумерацией полюсов. Из теоремы 5.5 и утверждения 5.6 вытекает

Следствие 5.7 *При $n \geq 2$ классы $[D]$ порождают $H^2(P\overline{\mathcal{H}}_{g;n})$, а классы $\delta_{p,q}$ порождают S_n-симметричную часть этого пространства вторых когомологий. Кроме того классы $[D]$ порождают все пространство когомологий $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$ как алгебру.*

Ясно, что второе утверждение следствия вытекает из первого, а первое из последнего. Последнее утверждение очевидно в случае $n = 2$, поскольку $P\overline{\mathcal{H}}_{0;2} = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, а класс $[\{1\} \sqcup \{2\}]$ представлен точкой на этой проективной прямой. При $n \geq 3$ классы, отвечающие разбиениям D, в каждой из частей которых по крайней мере два элемента, порождают ту же подалгебру в $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$, что и классы, поднятые с $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Утверждение 5.6 означает, что класс ψ также выражается через классы вида

$[D]$ (с присоединением разбиений, содержащих одноэлементную часть). Теперь последнее утверждение следствия вытекает из теоремы 5.5. $\triangleleft$

5.1.2 Вывод соотношений

Для вывода основных соотношений мы получим предварительно целый ряд вспомогательных равенств на вспомогательные классы когомологий. Как уже упоминалось, на пространстве $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, а значит, и на алгебре когомологий пространства $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, симметрическая группа S_n действует перенумерацией полюсов. Страты стратификации, как и классы ψ и δ, инвариантны относительно этого действия. Поэтому эти когомологические классы принадлежат S_n-инвариантной части алгебры когомологий.

Утверждение 5.8 *Введенные классы удовлетворяют следующим линейным соотношениям:*

$$\psi = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{p+q=n} pq\delta_{p,q} = \frac{1}{(2n-2)(2n-3)}(3\sigma_{2^1} + 2\sigma_{1^2} + \delta).$$

Доказательство. Первое тождество получается суммированием тождества $\psi = [i|jk]$ по всем упорядоченным тройкам (i,j,k) попарно различных чисел от 1 до n. С одной стороны, такая сумма равна $n(n-1)(n-2)\psi$. С другой стороны, каждый класс $[D] = [A \sqcup B]$, где подмножество A состоит из p, а B — из q элементов, входит в

$$p\frac{q(q-1)}{2} + q\frac{p(p-1)}{2} = \frac{pq}{2}(p+q-2) = \frac{pq}{2}(n-2)$$

слагаемых $[i|jk]$. Тем самым

$$n(n-1)(n-2)\psi = \frac{n-2}{2} \sum_{p+q=n} pq\delta_{p,q},$$

и после деления обеих частей на $n(n-1)(n-2)$ мы получаем требуемое равенство.

Для доказательства второго тождества рассмотрим прообраз дискриминанта при отображении Ляшко–Лойенги пространства $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$. С гомологической точки зрения класс этого прообраза равен $\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\psi$, поскольку общая точка дискриминанта отвечает слиянию двух из $2n-2$ критических значений. С геометрической точки зрения этот прообраз представляет собой объединение стратов $\sigma_{2^1}, \sigma_{1^2}$ и δ, однако взятых с различными кратностями. Для подсчета этих кратностей требуется локальный анализ отображения Ляшко–Лойенги. Для каустики и страта Максвелла, мы уже провели этот анализ в третьей главе — с локальной точки зрения многочлены не отличаются от общих мероморфных функций. Кратность каустики равна $\frac{3}{2}$ (слияние трех прообразов отображения $x \mapsto x^3$ приводит к слиянию двух критических значений), а кратность страта Максвелла равна 1 (двум критическим точкам в прообразе соответствуют два критических значения в образе). В свою очередь, кратность граничного страта равна $\frac{1}{2}$, поскольку сливающиеся в общей точке такого страта два критических значения неразличимы. Тем самым,

$$\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\psi = \frac{3}{2}\sigma_{2^1} + \sigma_{1^2} + \frac{1}{2}\delta,$$

что и дает требуемое равенство. $\triangleleft$

Доказательство теоремы 5.1 Докажем теперь тождество

$$\sigma_{2^1} = 6(n-1)\psi - 3\delta,$$

из которого, вместе со вторым тождеством утверждения 5.8, вытекает и второе тождество (5.1). Воспользуемся тем, что все слагаемые в этом тождестве принадлежат S_n-симметричной части когомологий, а эта часть, согласно следствию 5.7, порождена классами $\delta_{p,q}$. Поэтому нам достаточно построить набор классов вторых гомологий пространства $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, индексы пересечений с которыми позволяют различить все линейные комбинации классов $\delta_{p,q}$. Затем останется проверить, что пересечения этих классов вторых гомологий с σ_{2^1} с одной стороны и с $6(n-1)\psi - 3\delta$ с другой стороны совпадают. В качестве необходимого набора пробных классов вторых гомологий мы возьмем несколько вложений проективной прямой $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ в $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$.

Для любой пары положительных целых чисел p, q, таких, что $p+q = n$, рассмотрим следующее вложение проективной прямой $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ в $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$. Пусть $[u:v]$ — проективные координаты в $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Рассмотрим семейство рациональных функций

$$f_{u,v}(z) = \frac{1}{uz-a_1} + \dots + \frac{1}{uz-a_p} + \frac{1}{vz-b_1} + \dots + \frac{1}{vz-b_q},$$

где a_i, b_j — общий набор комплексных чисел. Рациональная функция из такого семейства не принадлежит пространству $\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, если $u = 0$, или

$v = 0$, или $a_i/u = b_j/v$, поскольку в этом случае у нее меньше, чем n полюсов. Однако в силу компактности пространства $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ существует единственный способ продолжить это семейство до голоморфного отображения проективной прямой в $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$. Обозначим через $C_{p,q}$ класс вторых гомологий, заданный образом этого семейства.

Нижеследующая лемма полностью описывает индексы пересечения пробных кривых $C_{p,q}$ с классами $\delta_{p',q'}$ и каустикой σ_{2^1}. Для краткости мы пользуемся следующим соглашением: если в формулировке встречаются два индекса пересечения $C_{p,q} \cap \delta_{p',q'}$ и $C_{p,q} \cap \delta_{p'',q''}$, то в частном случае, когда $p' = p''$ и $q' = q''$ эти индексы складываются. Например, если мы пишем $C_{p,q} \cap \delta_{p,q} = C_{p,q} \cap \delta_{q,p} = 1$, то при $p = q$ это означает, что $C_{p,p} \cap \delta_{p,p} = 2$.

Лемма 5.9 *Индексы пересечения пробных кривых со стратами в каждой из граничных точек с координатами $u = 0$ или $v = 0$ имеют вид*

$$C_{p,q} \cap \delta_{p,q} = C_{p,q} \cap \delta_{q,p} = 1;$$

$$C_{p,q} \cap \delta_{p',q'} = 0 \qquad \text{для остальных пар } (p',q');$$

$$C_{p,q} \cap \sigma_{2^1} = 0.$$

В граничных точках с координатами $u/v = a_i/b_j$ индексы пересечения пробных кривых со стратами равны

$$C_{p,q} \cap \delta_{1,n-1} = C_{p,q} \cap \delta_{n-1,1} = n-2;$$

$$C_{p,q} \cap \delta_{2,n-2} = C_{p,q} \cap \delta_{n-2,2} = 1;$$

$$C_{p,q} \cap \delta_{p',q'} = 0 \qquad \text{для остальных пар } (p',q');$$

$$C_{p,q} \cap \sigma_{2^1} = 3(n-2).$$

Кроме того, имеется еще $6(pq-1)$ точек простого пересечения пробной кривой $C_{p,q}$ с каустикой σ_{2^1}, отвечающих рациональным функциям с двойной критической точкой, определенным на однокомпонентной рациональной кривой.

Предварим доказательство леммы выводом из нее нужного нам тождества. Для этого подсчитаем полные индексы пересечения:

$$C_{p,q} \cap \delta_{1,n-1} = C_{p,q} \cap \delta_{n-1,1} = pq(n-2);$$

$$C_{p,q} \cap \delta_{2,n-2} = C_{p,q} \cap \delta_{n-2,2} = pq;$$

$$C_{p,q} \cap \delta_{p,q} = C_{p,q} \cap \delta_{q,p} = 2;$$
$$C_{p,q} \cap \delta_{p',q'} = 0$$

для прочих пар (p', q'). Отсюда

$$C_{p,q} \cap \delta = pq(n-1) + 2, \qquad C_{p,q} \cap \psi = pq, \quad C_{p,q} \cap \sigma_{2^1} = 3pq(n-1) - 6,$$

что согласуется с нужным нам равенством $\sigma_{2^1} = 6(n-1)\psi - 3\delta$. (Индекс пересечения пробной кривой с классом ψ вычисляется с помощью первого тождества в утверждении 5.8.)

Для завершения вывода формулы достаточно заметить, что индексы пересечения пробных кривых $C_{p,q}$, $p+q = n$, при индексе p пробегающем от 1 до $[n/2]$, с классами $\delta_{p',q'}$ позволяют различить любую линейную комбинацию этих классов. Итак, нам осталось доказать лемму.

Доказательство леммы 5.9 Рассмотрим случай $u = 0$; случай $v = 0$ рассматривается аналогично. При $u = 0$ областью определения функции f является двухкомпонентная рациональная кривая, первая компонента которой содержит p полюсов, вторая — q полюсов. Такая стабильная функция принадлежит страту $\delta_{p,q} = \delta_{q,p}$ и не принадлежит остальным стратам $\delta_{p',q'}$. Легко проверить, что пересечение пробной кривой $C_{p,q}$ со стратом $\delta_{p,q}$ в такой точке простое за исключением случая, когда $p = q$ и оно двойное, что отражено в принятом нами соглашении.

При $u/v = a_i/b_j$ областью определения функции f является n-компонентная кривая, в которой к центральной рациональной компоненте, не содержащей полюсов, приклеено $n-2$ рациональных компонент, каждая из которых содержит по одному простому полюсу (мы будем называть такие компоненты *периферийными*), и еще одна рациональная компонента, содержащая два простых полюса. Для получения этой предельной стабильной функции достаточно умножить члены семейства $f_{u,v}(z)$ на величину $ub_j - va_i$, отчего соответствующая точка в проективизированном пространстве $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ не меняется, главные части функции в $n-2$ полюсах, отличных от a_i/u и b_j/v, стремятся к нулю при $(u:v) \to (a_i : b_j)$, сами эти два полюса стремятся друг к другу, а главные части в них — к нулю. Такая стабильная функция принадлежит $n-2$ различным неприводимым компонентам страта $\delta_{1,n-1} = \delta_{n-1,1}$, а также одной неприводимой компоненте страта $\delta_{2,n-2} = \delta_{n-2,2}$. Легко проверить, что пересечение с каждой неприводимой компонентой простое.

Найдем теперь индекс пересечения пробной кривой $C_{p,q}$ с каустикой σ_{2^1} в рассматриваемой точке $(u:v) = (a_i : b_j)$. Это труднее, потому что в такой точке каустика негладкая. Рассмотрим подмногообразие в $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, полученное варьированием точек прикрепления периферийных компонент к центральной компоненте. Замыкание этого подмногообразия изоморфно $\overline{\mathcal{M}}_{0;n-1}$ (точки прикрепления периферийных компонент не могут совпадать между собой и с точкой прикрепления компоненты с двумя полюсами). Согласно [88], теорема 3.9, у него есть окрестность, изоморфная окрестности подмногообразия $\overline{\mathcal{M}}_{0;n-1} \times \{0\}$ в $\overline{\mathcal{H}}_{0;n-1} \times \mathbb{C}^2$. Здесь $\overline{\mathcal{M}}_{0;n-1}$ реализовано как нулевое сечение расслоения, реализующего пополненное пространство Гурвица. Более того, пересечение каустики σ_{2^1} с этой окрестностью изоморфно прямому произведению каустики в $\overline{\mathcal{H}}_{0;n-1}$ на $\mathbb{C}^2$.

Мы утверждаем, что пересечение каустики в $\overline{\mathcal{H}}_{0;n-1}$ с общим слоем расслоения пространства $\overline{\mathcal{H}}_{0;n-1}$ над $\overline{\mathcal{M}}_{0;n-1}$ является в этом слое гиперповерхностью степени $3(n-3)$, а значит, и индекс пересечения кривой $C_{p,q}$ с каустикой σ_{2^1} имеет то же значение. Для подсчета степени гиперповерхности достаточно подсчитать степень многочлена

$$\frac{1}{c_1 \cdots c_{n-1}} \mathrm{discrim}_z \left(\mathrm{numer} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{c_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{z - z_{n-1}} \right) \right) \right)$$

от переменных $c_1, \ldots, c_{n-1}$; здесь через $\mathrm{numer}(\cdot)$ обозначен многочлен в числителе рациональной функции, а через $\mathrm{discrim}_z(\cdot)$ дискриминант многочлена от z. Действительно, выписанный многочлен есть не что иное как уравнение каустики в слое над фиксированными полюсами $z_1, \ldots, z_n$. Необходимость деления на произведение коэффициентов обусловлена тем, что, как легко проверить, гиперплоскости $c_i = 0$ являются простыми нулями дискриминанта, но не принадлежат каустике. По соображениям однородности степень выписанного многочлена действительно равна $3(n-3)$.

Для вычисления индекса пересечения пробной кривой $C_{p,q}$ с каустикой σ_{2^1} вне точек, где некоторые из полюсов сливаются, рассмотрим дискриминант производной функции f из пробной кривой,

$$\mathrm{discrim}_z \left(\mathrm{numer} \left(\frac{df_{u,v}(z)}{dz} \right) \right).$$

Этот дискриминант является однородным многочленом от u и v степени $2n(2n-3)$. Можно проверить, что этот многочлен имеет двойные нули в точках $u/v = a_i/b_j$, а также нуль кратности $4p^2 - 6p + 3$ в точке $u = 0$ и нуль кратности $4q^2 - 6q + 3$ в точке $v = 0$. Вычтя из степени суммарную кратность этих нулей, мы получим $6(pq-1)$ нулей вне точек $u = 0$, $v = 0$, $u/v = a_i/b_j$. $\lhd$

Формулы (5.1) вместе с утверждением 5.8 дают следующие выражения для каустики и страта Максвелла через граничные страты $\delta_{p,q}$.

Следствие 5.10 *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\sigma_{2^1} &= 3\sum_{p+q=n}\left(\frac{1}{n}pq-\frac{1}{2}\right)\delta_{p,q}\\ \sigma_{1^2} &= \sum_{p+q=n}\left(\frac{n-6}{n}pq+2\right)\delta_{p,q}.\end{aligned}$$

5.2 Общее понятие степени и сведения из глобальной теории особенностей

5.2.1 Степень

Теорема 1.17 сводит вычисление числа Гурвица к вычислению индекса пересечения страта с дополнительной степенью класса ψ. Такой класс ψ возникает на любом пространстве орбит действия группы $\mathbb{C}^*$; он ведет себя функториально при эквивариантных отображениях многообразий, наделенных действием этой группы. Именно поэтому индекс пересечения подмногообразия с дополнительной степенью этого класса естественно называть «степенью».

Пусть A — комплексное многообразие, и предположим, что мультипликативная группа $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел действует на нем без неподвижных точек. Пусть B — многообразие орбит действия группы $\mathbb{C}^*$ на A и предположим, что B компактно. Обозначим через $\Psi = c_1(O(1)) \in H^2(B)$ тавтологический класс этого действия. Для произвольного класса $\beta \in H^*(B)$ назовем его *степенью* $\deg\beta$ результат спаривания

$$\deg\beta = \int_B \frac{\beta}{1-\Psi} = \int_B \beta(1+\Psi+\Psi^2+\Psi^3+\dots).$$

Другими словами, степень однородного класса β это индекс его пересечения с классом Ψ, взятым в степени, равной коразмерности класса β.

Пример 5.11 Взвешенное проективное пространство $\mathbb{C}\mathrm{P}_{w_0,\dots,w_n}$ определяется как факторпространство дополнения к началу координат в векторном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$, на котором группа $\mathbb{C}^*$ действует следующим образом:

$$\lambda : (x_0,\dots,x_n) \mapsto (\lambda^{w_0}x_0,\dots,\lambda^{w_n}x_n), \quad \lambda\in\mathbb{C}^*.$$

Целые показатели w_i называются *весами* действия. Всякое непрерывное линейное представление группы $\mathbb{C}^*$ представляется в таком виде. Степень взвешенного проективного пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}_{w_0,\ldots,w_n}$ с весами $w_0,\ldots,w_n$ равна $(\prod w_i)^{-1}$.

Из определений немедленно вытекает функториальность степени:

Утверждение 5.12 *Пусть группа $\mathbb{C}^*$ действует на комплексных многообразиях A_1, A_2 одинаковой размерности без неподвижных точек, причем соответствующие пространства орбит B_1, B_2 компактны. Тогда степень эквивариантного отображения $f : A_1 \to A_2$ не зависит от f и определяется из равенства* $\deg B_1 = \deg f \cdot \deg B_2$.

Теорема 1.17 немедленно вытекает из этого предложения, если его применить к отображению $L_{g;n} : \overline{\mathcal{H}}_{g;n} \to \mathbb{C}^{2g+2n-3}$, переводящему мероморфную функцию в неупорядоченный набор ее критических значений (напомним, что согласно нашей договоренности сумма критических значений равна нулю).

5.2.2 Особенности, относительные классы Черна и универсальные многочлены

Равенства (1.4) получены в разделе 5.1.2 путем подсчета индексов пересечений классов $\sigma_{2^1}, \sigma_{1^2}$ с базисным наборов классов дополнительной размерности (т.е. комплексной размерности один — кривых). Однако при росте коразмерности стратов этот способ становится чересчур трудоемким: как выбор базисного набора классов дополнительной размерности, так и подсчет индекса пересечения с таким классом — трудные задачи, подходы к эффективному решению которых отсутствуют. Далее мы предлагаем новый подход к поиску соотношений между классами когомологий. Этот подход основан на теории Тома универсальных многочленов особенностей [79], которая распространена на случай мультиособенностей в [47, 46, 45, 44]. Объясним кратко суть этой теории.

Пусть $F : M \to N$ — общее голоморфное отображение компактных комплексных многообразий. Мы предполагаем для определенности, что размерность многообразий одинакова: хотя теория работает и для произвольных размерностей, мы будем применять ее лишь в случае совпадающих размерностей. *Полным классом Черна* отображения F

называется отношение

$$\begin{aligned} c(F) &= \frac{c(F^*TN)}{c(TM)} = 1 + (c_1(F^*(TN)) - c_1(TM)) \\ &+ (c_2(F^*TN) - c_1(F^*TN)c_1(TM) - c_2(TM) + c_1^2(TM)) + \ldots, \end{aligned}$$

$c(F) \in H^*(M)$; здесь функция $c(\cdot)$, аргументом которой является векторное расслоение, обозначает, как обычно, полный класс Черна этого расслоения. Однородные компоненты полного класса Черна называются *классами Черна* отображения F и обозначаются $c_i(F) \in H^{2i}(M)$:

$$\begin{aligned} c_1(F) &= c_1(F^*TN) - c_1(TM) \\ c_2(F) &= c_2(F^*TN) - c_1(F^*TN)c_1(TM) - c_2(TM) + c_1^2(TM) \end{aligned}$$

и так далее. Отображение F имеет в данной точке особенность, если его дифференциал dF вырожден в этой точке. Особенности классифицируются по типам. Замыкание множества точек, в которых F имеет особенность данного типа, определяет, по двойственности Пуанкаре, класс когомологий в $H^*(M)$. Теория Тома утверждает, что этот класс выражается в виде многочлена от классов Черна отображения F, причем коэффициенты многочлена зависят лишь от типа особенности, а не от многообразий M и N или отображения F.

Как понятие общего отображения, так и понятие типа особенности требуют уточнения, за которым мы отсылаем читателя, например, к [47]. Приведем лишь простейший пример — особенность A_1: отображение имеет в данной точке особенность A_1, если ранг его дифференциала в этой точке меньше максимального на единицу, причем ограничение отображения на ядро дифференциала невырождено. Для общего отображения множество точек, в которых оно имеет особенность A_1, является подмногообразием комплексной коразмерности 1. Класс когомологий его замыкания попросту совпадает с $c_1(F) = c_1(F^*TN) - c_1(TM)$, что легко увидеть, рассматривая поднятие на M ненулевой дифференциальной формы старшей степени на N. Уже в простейших случаях полученное выражение для класса A_1 приводит к нетривиальным результатам. Предположим, например, что размерность обоих многообразий равна 1, т.е. мы имеем дело с разветвленным накрытием степени, скажем n, одной комплексной кривой другой комплексной кривой. Тогда мы получаем формулу Римана–Гурвица для числа точек ветвления общего разветвленного накрытия:

$$c_1(F) = n(2 - 2g_N) - (2 - 2g_M) = 2(n-1) - 2(ng_N - g_M),$$

где g_M и g_N — соответственно род накрывающей и род накрываемой кривой.

Аналогичное утверждение для *мультиособенностей* говорит, что замыкание в N множества точек, в прообразах которых F имеет особенности предписанных типов, выражается в виде универсального многочлена от прямых образов $F_*((c_1(F))^{k_1}(c_2(F))^{k_2}\dots)\in H^*(N)$ мономов от классов Черна отображения F. Мы также распространяем этот подход на случай *мультимультиособенностей*, т.е. подмногообразий в пространствах модулей функций, состоящих из функций с предписанным набором мультиособенностей.

Методы теории универсальных многочленов мы применяем к универсальному отображению над пространством Гурвица, которое мы сейчас определим. Обозначим через $\overline{\mathcal{U}}_{g;n}$ *универсальную кривую* над пространством $\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$, т.е. комплексное орбиобразие вместе с отображением $\overline{\mathcal{U}}_{g;n}\to\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$, слой которого над точкой $f\in\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ является кривой определения функции f (точнее говоря, фактором этой кривой по модулю действия группы автоморфизмов отображения f). Еще одно многообразие представляет собой просто прямое произведение $\mathbb{C}\mathrm{P}^1\times\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$, в первом сомножителе которого зафиксирована координата. *Универсальное отображение* над пространством Гурвица переводит точку универсальной кривой $\overline{\mathcal{U}}_{g;n}$ в значение соответствующей функции в этой точке. Оно расслоено над пространством Гурвица.

Замечание 5.13 Как хорошо известно, универсальная кривая над пространством модулей стабильных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ совпадает с пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n+1}$ стабильных кривых с $n+1$ отмеченными точками. Действительно, точку слоя универсальной кривой можно считать $(n+1)$-ой отмеченной точкой вдоль слоя. Для пространств Гурвица имеется похожая конструкция. А именно, пространство Гурвица $\overline{\mathcal{H}}_{g;n+1}$ можно отождествить с тотальным пространством относительного касательного расслоения к универсальной кривой $\overline{\mathcal{U}}_{g;n}$: точка слоя служит $(n+1)$-ым отмеченным полюсом, а касательный вектор к слою в этой точке задает главную часть функции в ней.

Группа $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению действует на каждом из трех пространств $\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$, $\overline{\mathcal{U}}_{g;n}$ и $\mathbb{C}\mathrm{P}^1\times\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ умножением функции на константу. На $\overline{\mathcal{U}}_{g;n}$ это действие послойно тривиально а на слое $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ прямого произведения группа $\mathbb{C}^*$ действует умножением на константу (это действие корректно определено благодаря тому, что мы зафиксировали координату в слое). Универсальное отображение эквивариантно относительно описанных действий, а страты в пространстве

Гурвица инвариантны относительно такого действия. Ограничивая и универсальную кривую, и прямое произведение на дополнение к множеству неподвижных точек действия на $\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ и факторизуя полученные пространства по действию группы, мы приходим к треугольнику пространств и отображений, который и будет служить основным объектом нашего исследования. Заметим, что поскольку действие группы $\mathbb{C}^*$ на слоях прямого произведения $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times \overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ нетривиально, фактор по нему не совпадает с прямым произведением $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times P\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$; напротив, он изоморфен проективизации векторного расслоения $\mathbb{C} \oplus \mathcal{O}(1)$ ранга два над $P\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$.

Введем упрощенное обозначение $B_{g;n}$ для проективизированного пространства Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$, $X_{g;n}$ для фактора универсальной кривой (который, в свою очередь, является универсальной кривой над проективизированным пространством Гурвица), $Y_{g;n}$ для фактора прямого произведения, $p_{g;n}$ (соответственно, $q_{g;n}$) для проекции пространства $X_{g;n}$ (соответственно, $Y_{g;n}$) на $B_{g;n}$, и $f_{g;n}$ для факторизованного универсального отображения, $f_{g;n} : X_{g;n} \to Y_{g;n}$. Другими словами, мы рассматриваем коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} X_{g;n} \arrow[rr, "f_{g;n}"] \arrow[dr, "p_{g;n}"'] & & Y_{g;n} \arrow[dl, "q_{g;n}"] \\ & B_{g;n} & \end{tikzcd} \qquad (5.2)$$

Сначала мы хотим показать, что относительные классы Черна универсального отображения можно выразить через небольшое число «основных» классов из $H^*(X_{g;n})$, а затем описать страты в пространстве $B_{g;n}$ в терминах прямых образов многочленов от этих основных классов. Это возможно, поскольку число типов особенностей отображения $f_{g;n}$ невелико, а сами типы не зависят от g и n, что и приводит к универсальным формулам.

Отметим, что поскольку пространство Гурвица $B_{g;n}$ является пространством модулей стабильных мероморфных функций степени n на кривых рода g, а $X_{g;n}$ — универсальная кривая над $B_{g;n}$, всякое семейство стабильных мероморфных функций степени n на кривых рода g индуцировано из проекции $p_{g;n} : X_{g;n} \to B_{g;n}$. В частности, линейные соотношения на классы когомологий, справедливые в $X_{g;n}$ и $B_{g;n}$, сохраняются в произвольном семействе.

5.3 Особенности расслоенных отображений с одномерными слоями

Относительные классы Черна универсального отображения $f_{g;n}$ тесно связаны с его особенностями. Поскольку отображение $f_{g;n}$ расслоено над базой $B_{g;n}$, причем слои одномерны, эти особенности оказываются не очень сложными. Классификация простых изолированных особенностей расслоенных отображений с одномерными слоями [24] включает особенности типов A_k и $I_{k,l}$. Такие особенности у отображения $f_{g;n}$ встречаются. Однако помимо изолированных особенностей у него бывают (за исключением простейших случаев $g = 0$, $n = 2$ или $n = 3$) также и неизолированные. Последние возникают в том случае, если в слое, на котором функция определена, есть неприводимая компонента, ограничение функции на которую постоянно. Отметим, что такая функция не обязательно нестабильна: если род неприводимой компоненты не меньше единицы или она рациональна, но на ней есть не менее трех узлов, то постоянство функции на такой компоненте не противоречит ее стабильности. Разумеется, полное изучение пространств Гурвица при нашем подходе требует анализа и неизолированных особенностей, которого мы не приводим, а значит нам удается получить лишь частичные результаты.

5.3.1 Локальные особенности

Рассмотрим коммутативную треугольную диаграмму пространств и голоморфных отображений вида

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{m+1} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \arrow[dl, "q"] \\ & \mathbb{C}^m & \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

где q — проекция прямого произведения на второй сомножитель. Мы предполагаем, что слои отображения p одномерные (хотя и необязательно гладкие). Ограничивая f на слои отображения p, мы получаем семейство функций на (некомпактных) кривых. Естественная «правая» эквивалентность таких диаграмм допускает произвольные замены координат в базе $\mathbb{C}^m$, а также послойные замены координат в пространстве $\mathbb{C}^{m+1}$, расслоенные над выбранной заменой координат в базе. Мы расширяем эту группу эквивалентностей, позволяя умножать функцию на константу, голоморфно зависящую от точки базы. Такое расширение, не влияя на классификацию особенностей, приводит к более богатой теории характеристических классов.

Отображение q является заданной проекцией, а p представляет собой композицию отображений f и q, поэтому особенности диаграммы полностью определяются особенностями отображения f. Точка $x \in \mathbb{C}^{m+1}$ является *локальной особенностью* отображения f, если ранг его дифференциала в точке x меньше, чем $m+1$. Сделаем следующие два предположения:

- у отображения f встречаются только общие особенности, т.е. дополнение к множеству таких особенностей в пространстве струй диаграмм является замкнутым нигде не плотным подмножеством;
- у проекции $p : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^m$ нет особенностей сложнее морсовской складки $(x, y) \mapsto xy$.

Для интересующего нас универсального отображения второе предположение выполняется, а первое нет: ограничение функции на слой может оказаться константой на некоторой неприводимой компоненте слоя. В результате получаемые нами формулы для универсального отображения оказываются верными «с точностью до некоторых классов с носителями на подмногообразии неизолированных особенностей». В случае рациональных функций коразмерность подмногообразия неизолированных особенностей равна 3, что позволяет нам получить точные формулы для стратов вплоть до коразмерности 2.

При сделанных выше предположениях у отображения f могут быть особенности следующих типов:

- особенности типа A_k, $k = 1, 2, \ldots$, которые реализуются в тех гладких точках слоев отображения p, где ограничение отображения f на слой приводится к виду $x \mapsto x^{k+1}$ в подходящей локальной координате x вдоль слоя;
- особенности типа $I_{k,l}$, $k \geq l \geq 1$, которые реализуются в тех особых точках слоев отображения p, где ограничение функции f на плоскость с локальными координатами x, y, в которых p имеет вид $(x, y) \mapsto xy$, выглядит как $f : (x, y) \mapsto (x^k + y^l, xy)$.

В таких точках можно выбрать координаты на базе $\mathbb{C}^m$, в которых f представляется в виде прямой суммы тождественного отображения и миниверсальных разверток, которые для случаев A_k и $I_{k,l}$ выглядят следующим образом:

- A_k: $(x, b_2, \dots, b_k) \mapsto (x^{k+1} + b_2 x^{k-1} + \dots + b_k x, b_2, \dots, b_k)$
- $I_{k,l}$: $(x, y, a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{l-1}) \mapsto (x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + y^l + b_1 y^{l-1} + \dots + b_{l-1}y, xy, a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{l-1})$.

Мы интерпретируем эти развертки как глобально заданные полиномиальные отображения комплексных векторных пространств одинаковой размерности. В случае A_k (соответственно, $I_{k,l}$) такая развертка представляет собой универсальное отображение универсальной кривой над пространством модулей рациональных функций с одним полюсом порядка $k+1$ (соответственно, двух полюсов порядков k и l), см. [53]. Точнее говоря, речь идет не о пространстве модулей, а о некотором конечнократном накрытии над этим пространством, кратность которого равна $k+1$ в случае A_k и kl в случае $I_{k,l}$. Поэтому в выбранных выше координатах умножение функции на константу задает умножение рациональной функции типа A_k (соответственно, $I_{k,l}$) на элемент $\lambda^{k+1} \in \mathbb{C}^*$ (соответственно, λ^{kl}), что, после замены $x \mapsto \lambda x$, определяет на развертках действие группы $\mathbb{C}^*$ по формулам

- для особенности A_k:

$$\lambda: \ (x, b_2, \dots, b_k) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 b_2, \dots, \lambda^k b_k), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*;$$

- для особенности $I_{k,l}$:

$$\begin{aligned}\lambda: &(x, y, a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{l-1}) \\ &\mapsto (\lambda^l x, \lambda^k y, \lambda^l a_1, \dots, \lambda^{l(k-1)} a_{k-1}, \lambda^k b_1, \dots, \lambda^{k(l-1)} b_{l-1}), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.\end{aligned}$$

5.3.2 Характеристические классы особенностей

Предположим, что диаграмма (5.3) имеет в начале координат особенность типа A_k. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $k = m+1$, а f — просто выписанная выше миниверсальная развертка особенности A_k. Пространство $\mathbb{C}^k$ в левом верхнем углу диаграммы содержит подмногообразия, отвечающие всем особенностям A_i при $i \le k$. Эти подмногообразия инвариантны относительно действия группы $\mathbb{C}^*$, поэтому особенности A_i отвечает подмногообразие $[A_i]$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k)} = \mathbb{C}\mathrm{P}_{1,2,\dots,k}$, полученном факторизацией проколотого пространства $\mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ по описанному выше действию группы $\mathbb{C}^*$, а значит и класс когомологий $[A_i] \in H^{2i}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k)})$. Обозначим через $\Sigma \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k)})$ характеристический класс особенности A_1, т.е. первый класс Черна отображения f, а через $\Psi \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k)})$ характеристический класс действия группы $\mathbb{C}^*$.

Теорема 5.14 *Характеристические классы особенностей $[A_i]$ в развертках особенностей A_k даются формулой*

$$[A_i] = P_i(\Sigma, \Psi) = \Sigma(2\Sigma - \Psi)(3\Sigma - 2\Psi)\dots(i\Sigma - (i-1)\Psi).$$

В частности, выражения для этих классов через Ψ, Σ не зависят от порядка k деформируемой особенности A_k.

Доказательство. Обозначим через $t \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k)})$ такой класс когомологий, что $\Psi = (k+1)t$. Тогда t служит образующей кольца когомологий $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k)})$. В силу квазиоднородности $\Sigma = kt$. Выражение для класса $[A_i]$ через t и k должно иметь вид

$$[A_i] = c_i \cdot (k)_i t^i$$

для некоторой константы c_i. Здесь символом Похгаммера $(k)_i$ обозначен многочлен от k степени i равный

$$(k)_i = k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1).$$

Действительно, из теоремы Тома и доказываемого ниже следствия 5.22 теоремы 5.21 вытекает, что класс $[A_i]$ допускает некоторое универсальное представление в виде однородного многочлена от Ψ и Σ. Подставляя в этот однородный многочлен выражения для Ψ и Σ через t и k, мы заключаем, что класс $[A_i]$ пропорционален t^i, причем коэффициент пропорциональности является многочленом от k степени i, который обращается в нуль при всех $k < i$. Для случая $i = k$ мы имеем $[A_i] = i!t^i$, что дает $c_i = 1$. Теперь выражение для $A[i]$ через Ψ и Σ получается в результате подстановки $t = \Psi - \Sigma$, $k = \Sigma/(\Psi - \Sigma)$. Теорема доказана. $\triangleleft$

Миниверсальная развертка особенности $I_{k,l}$ содержит как страты, отвечающие особенностям типов A_i при $i < k + l$, так и страты, отвечающие особенностям типов $I_{i,j}$ при $i \le k$ и $j \le l$. Эти страты также инвариантны относительно действия группы $\mathbb{C}^*$. Факторизуя по этому действию, мы получаем взвешенное проективное пространство $\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k,l)} = \mathbb{C}\mathrm{P}_{l,l,2l,\dots,(k-1)l,k,k,2k,\dots,(l-1)k}$, и все классы когомологий, которые мы рассматриваем ниже, лежат в когомологиях этого пространства.

Особенности типов $I_{i,j}$ лежат в подмногообразии Δ особых точек слоев проекции p. В выбранных выше координатах это подмногообразие задается уравнением $x = y = 0$. Добавим к классам $\Psi, \Sigma \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k,l)})$ класс $\Delta \in H^4(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k,l)})$. Рассмотрим также нормальное расслоение к Δ

и обозначим через N его первый класс Черна. Сам класс Δ можно интерпретировать как второй класс Черна этого нормального расслоения, причем с обоими классами можно обращаться как с (коммутирующими) операторами, действующими на Δ. С еще менее формальной точки зрения мы можем считать класс N элементом вторых когомологий, $N \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k,l)})$ (смысл которому придается только при его пересечении с Δ). Нас интересуют выражения для особенностей типов A_i в развертках особенностей типов $I_{k,l}$ в терминах классов Σ, Ψ, Δ, N.

Теорема 5.15 *Существуют такие выражения для классов $[A_i]$ в развертках особенностей $I_{k,l}$ в виде квазиоднородных многочленов степени i от переменных Σ, Ψ, Δ, N, что*

- *эти многочлены универсальны, т.е. они зависят от i, но не от k и l;*
- *многочлен, соответствующий классу $[A_i]$, представляется в виде суммы двух многочленов, первый из которых совпадает с определенным выше многочленом $P_i(\Sigma, \Psi)$, а носитель второго сосредоточен на страте Δ двойных точек;*
- *всякий многочлен с носителем на Δ можно представить в виде многочлена от Δ, N и Ψ.*

Первые утверждения вытекают из теоремы Тома и следствия 5.22 теоремы 5.21, а последнее является следствием очевидного соотношения $\Sigma\Delta = \Psi\Delta$.

Обозначим многочлен, отвечающий классу $[A_i]$, через R_i. Он имеет вид $R_i = P_i + Q_{i-2}\Delta$, где многочлен P_i нам уже известен, а $Q_{i-2} = Q_{i-2}(\Delta, N, \Psi)$ представляет собой взвешенно однородный многочлен степени $i-2$. Для этих многочленов нам не удалось найти явной формулы, однако их можно вычислить, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов. Покажем, как работает этот метод при малых i.

Аналогично рассмотренной выше ситуации, всякий элемент кольца когомологий $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^{(k,l)})$ представляется в виде многочлена от $t = \frac{\Psi}{kl}$. Зная веса квазиоднородности, мы заключаем, в частности, что

$$\Psi = \Sigma = klt, \qquad N = (k+l)t, \qquad \Delta = klt^2.$$

Найдем, воспользовавшись этими представлениями, коэффициенты многочленов Q_0 and Q_1. Мы знаем, что $Q_0 = a$ для некоторой постоянной a и что страт A_2 в развертке особенности $I_{1,1}$ пуст. Для случая

$k = l = 1$ имеем $\Psi = \Sigma = t$, $\Delta = t^2$, откуда

$$R_2 = \Sigma(2\Sigma - \Psi) + a\Delta = t^2 + at^2 = 0.$$

Поэтому $a = -1$, т.е.,

$$R_2 = \Sigma(2\Sigma - \Psi) - \Delta.$$

Аналогично $Q_1 = aN + b\Psi$ для некоторых постоянных a и b. Воспользовавшись тем, что страт A_3 пуст в развертках каждой из особенностей $I_{1,1}$ и $I_{2,1}$, мы получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 + 2a + b = 0 \\ 8 + 6a + 4b = 0 \end{cases}$$

(воспользовавшись однородностью, мы поделили оба уравнения на t^3), откуда $a = 2$, $b = -5$, т.е.

$$Q_1 = 2N - 5\Psi.$$

Аналогичные вычисления дают

$$\begin{aligned} Q_2 &= -(6N^2 - 15N\Psi + 15\Psi^2 - 8\Delta) \\ Q_3 &= 24N^3 - 62N^2\Psi + 63N\Psi^2 - 35\Psi^3 - 60N\Delta + 84\Psi\Delta \\ Q_4 &= -(120N^4 - 322N^3\Psi + 343N^2\Psi^2 - 196N\Psi^3 + 70\Psi^4 \\ &\qquad - 432N^2\Delta + 812N\Psi\Delta - 469\Psi^2\Delta + 180\Delta^2). \end{aligned}$$

Отметим, что число неопределенных коэффициентов в разложении особенности A_i равно $[i^2/4]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа, что в точности совпадает с числом особенностей типа $I_{k,l}$, миниверсальные развертки которых не содержат страта A_i по соображениям размерности.

5.3.3 Остаточные многочлены для мультиособенностей

Зафиксируем разбиение $\alpha = 1^{m_1}2^{m_2}\dots$ (в котором лишь конечное число показателей отлично от нуля). Рассмотрим множество точек y в пространстве $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ в правом верхнем углу коммутативного треугольника (5.3), обладающих следующими свойствами:

- слой $p^{-1}(q(y))$ проекции p неособ;

- ограничение отображения f на этот слой имеет среди прообразов точки y в точности m_1 экземпляров особенности A_1, в точности m_2 экземпляров особенности A_2 и так далее. (Помимо особенностей предписанных типов у точки y могут быть и неособые прообразы, количество которых определяется степенью отображения f.)

Обозначим класс замыкания этого множества, умноженный на порядок $m_1!m_2!\dots$ группы автоморфизмов разбиения α, через

$$A_\alpha(f) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m(f) = A_{1^{m_1}2^{m_2}\dots}(f).$$

(Умножение на порядок группы автоморфизмов позволяет избавиться от дробей в последующих явных вычислениях классов.)

Если бы прямые образы f_*R_k подмногообразий $R_k = A_k$ пересекались трансверсально, то классы $A_{1^{m_1}2^{m_2}\dots}(f)$ описывались бы коэффициентами при $\frac{t_1^{m_1}}{m_1!}\frac{t_2^{m_2}}{m_2!}\dots$ в экспоненте производящей функции $f_*(R_1t_1 + R_2t_2 + \dots)$. (Появление факториалов $m_i!$ в знаменателях отражает возможность перенумеровывать прообразы с одинаковыми типами особенностей.) Нетрансверсальность пересечения приводит к необходимости введения поправок — остаточных многочленов [44].

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{A}(f) = \sum_\alpha [A_{1^{m_1}2^{m_2}\dots}(f)]\frac{t_1^{m_1}}{m_1!}\frac{t_2^{m_2}}{m_2!}\dots,$$

где суммирование идет по всем разбиениям $\alpha = 1^{m_1}2^{m_2}\dots$, включая пустое разбиение, а квадратными скобками обозначены классы когомологий, двойственные по Пуанкаре соответствующим многообразиям. Введем также экспоненциальную производящую функцию от бесконечного набора переменных $t_1, t_2, \dots$ с формальными коэффициентами R_α, где α пробегает множество всех непустых разбиений:

$$\mathcal{R}(t_1, t_2, t_3, \dots) = \sum_\alpha R_{1^{m_1}2^{m_2}}\frac{t_1^{m_1}}{m_1!}\frac{t_2^{m_2}}{m_2!}\dots.$$

Утверждение 5.16 *Существуют взвешенно однородные многочлены R_α от классов Σ, Ψ, Δ, N, такие, что после их подстановки в качестве коэффициентов в производящие ряды $\mathcal{R}$ классы когомологий стратов $A_{1^{m_1}2^{m_2}\dots}(f)$ равны коэффициентам при мономах $\frac{t_1^{m_1}}{m_1!}\frac{t_2^{m_2}}{m_2!}\dots$ в экспоненте $\exp(f_*\mathcal{R})$:*

$$\mathcal{A}(f) = \exp(f_*\mathcal{R}(t_1, t_2, \dots)).$$

Здесь символом f_* обозначен *гомоморфизм Гизина*, т.е. гомоморфизм прямого образа в когомологиях факторпространств по действию группы $\mathbb{C}^*$. Это отображение является гомоморфизмом лишь аддитивной, не мультипликативной структуры. Введенные таким образом многочлены R_α называются *остаточными многочленами для мультиособенностей.* Разумеется, нет ничего удивительного в том, что многочлены R_{k^1} совпадают с многочленами R_k из предыдущего раздела (действительно, у соответствующих точек есть лишь один особый прообраз).

Доказательство. Наиболее существенной частью предложения является утверждение о том, что поправка $f_*(R_{1^{m_1}2^{m_2}\dots})$ в выражении для класса $[A_\alpha]$ линейна по прямым образам гомоморфизма Гизина. Основное наблюдение, позволяющее доказать это утверждение, состоит в том, что универсальное выражение для классов мультиособенностей справедливо и в том случае, когда кривые области определения мероморфных функций несвязны.

Применим это наблюдение к семейству отображений кривых общего вида

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & B & \end{array} \tag{5.4}$$

Рассмотрим отображение $f^{(d)} : X^{(d)} \to Y$, где через $X^{(d)}$ обозначено расслоенное над базой B пространство, представляющее собой несвязное объединение d копий пространства X, $X^{(d)} = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_d$, $X_i = X$, а $f^{(d)}$ — отображение, ограничение которого на i-ую копию X_i совпадает с f. Точнее говоря, мы берем в качестве ограничения отображения $f^{(d)}$ на X_i несколько возмущенную копию отображения f, что необходимо для приведения отображения $f^{(d)}$ в общее положение.

Поскольку выражение для классов мультиособенностей универсально, его можно применять к каждому из построенных отображений $f^{(d)}$. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{A}(f^{(d)}) = (\mathcal{A}(f))^d.$$

Действительно, всякое разбиение α, соответствующее мультиособенности отображения $f^{(d)}$, расщепляется на d подразбиений, каждое из которых соответствует мультиособенности одной из компонент отображения $f^{(d)}$. Комбинаторные коэффициенты этих разбиений как раз и соответствуют возведению в степень d. Мы заключаем, что

$$\log \mathcal{A}(f^{(d)}) = d \log \mathcal{A}(f).$$

С другой стороны, прямой образ всякого монома от основных классов относительно отображения $f^{(d)}$ равен, очевидно, d-кратному прямому образу этого монома относительно f. Следовательно, всякий коэффициент в производящей функции $\log\mathcal{A}(f)$ не содержит никаких произведений образов основных классов (такие произведения дали бы вклад, степень которого по d больше 1), а значит, линеен. Предложение доказано. $\triangleleft$

Для вычисления остаточных многочленов мы должны знать действие гомоморфизма f_* на интересующих нас когомологических классах. Образом отображения f также является взвешенное проективное пространство, и его кольцо когомологий порождено классом гиперплоскости, который мы также обозначаем через t. Поэтому f_* имеет вид $f_*: t^i \mapsto ct^i$ для некоторой постоянной c. Эта постоянная не может быть ни чем иным, как постоянной f_*1, т.е. степенью отображения f. Если отображение f — миниверсальная развертка особенности типа A_k, то его степень равна $k+1$.

Начнем с вычисления многочленов R_α для стандартных разверток особенностей типа A_k (т.е. в присутствии лишь особенностей типа A). Эти многочлены зависят лишь от классов Σ и Ψ. Их можно вычислить следующим образом.

После подстановки $\Sigma = kt$, $\Psi = (k+1)t$ в производящую функцию $\mathcal{R}$ мы должны получить

$$\exp((k+1)\mathcal{R}(t_1,\dots)) = 1 + (k+1)_2\frac{t_1}{1!}t + \left((k+1)_3\frac{t_2}{1!} + (k+1)_4\frac{t_1^2}{2!}\right)t^2 + \left((k+1)_4\frac{t_3}{1!} + (k+1)_5\frac{t_1}{1!}\frac{t_2}{1!} + (k+1)_6\frac{t_1^3}{3!}\right)t^3 + \dots \qquad (5.5)$$

Действительно, коэффициент при мономе $\frac{t_1^{i_1}}{i_1!}\frac{t_2^{i_2}}{i_2!}\dots$ в экспоненте должен иметь вид $t^{i_1+2i_2+3i_3+\cdots}$ с коэффициентом, который представляет собой многочлен от k, обращающийся в нуль при всех k вплоть до коразмерности соответствующего страта, $k = -1, 0, 1, \dots, 2i_1 + 3i_2 + \cdots - 2$.

Отметим, что правую часть равенства (5.5) удобно переписать в виде[1]

$$\exp((k+1)\mathcal{R}(t_1,\dots)) = e^{\tau_1\tau+\tau_2\tau^2+\tau_3\tau^3+\cdots}s^{k+1}|_{s=1}.$$

[1] Мы обязаны этим замечанием Д. Загиру.

Здесь s — дополнительная переменная, коммутирующая со всеми t_i и t, и мы используем обозначение

$$\tau = t\frac{d}{ds}, \qquad \tau_i = t_i\frac{d}{ds}.$$

Теперь остаточные многочлены R_α несложно подсчитать, взяв логарифм правой части равенства (5.5), поделив его на $(k+1)$ и выполнив подстановку $t = \Psi - \Sigma$, $k = \Sigma/(\Psi - \Sigma)$. Для маленьких коразмерностей это вычисление дает

$$\begin{array}{rcl}
R_{1^2} & = & -2\Sigma(3\Sigma - \Psi) \\
R_{1^1 2^1} & = & -6\Sigma(2\Sigma - \Psi)^2 \\
R_{1^3} & = & 8\Sigma(15\Sigma^2 - 13\Sigma\Psi + 3\Psi^2) \\
R_{1^1 3^1} & = & -4\Sigma(5\Sigma - 3\Psi)(3\Sigma - 2\Psi)(2\Sigma - \Psi) \\
R_{2^2} & = & -3\Sigma(2\Sigma - \Psi)(20\Sigma^2 - 25\Sigma\Psi + 8\Psi^2) \\
R_{1^2 2^1} & = & 24\Sigma(2\Sigma - \Psi)(15\Sigma^2 - 17\Sigma\Psi + 5\Psi^2) \\
R_{1^4} & = & -48\Sigma(105\Sigma^3 - 160\Sigma^2\Psi + 84\Sigma\Psi^2 - 15\Psi^3).
\end{array}$$

Δ-часть остаточных многочленов в развертках особенностей $I_{k,l}$ можно вычислить рекуррентно, воспользовавшись, как и выше, методом неопределенных коэффициентов.

Вычислим, например, многочлен R_{1^2}. В силу взвешенной однородности он имеет вид

$$R_{1^2} = 2\Sigma\Psi - 6\Sigma^2 + a\Delta$$

для некоторой постоянной a (свободная от Δ часть нам уже известна), а страт A_{1^2} представляется как неизвестный коэффициент при $t_1^2/2!$ в $\exp(f_*\mathcal{R})$:

$$\begin{array}{rcl}
[A_{1^2}] & = & (f_*R_{1^1})^2 + f_*R_{1^2} \\
& = & (f_*\Sigma)^2 + f_*(2\Sigma\Psi - 6\Sigma^2 + a\Delta).
\end{array}$$

Степень развертки особенности $I_{k,l}$ равна $k+l$. Подставляя выражения для классов Ψ, Δ, Σ через класс t в развертке особенности $I_{1,1}$ и пользуясь тем, что класс A_{1^2} в этой развертке пуст, мы получаем линейное уравнение

$$2^2 + 4 - 12 + 2a = 0$$

откуда $a = 2$, т.е.

$$R_{1^2} = 2(\Sigma\Psi - 3\Sigma^2 + \Delta).$$

Аналогичные вычисления для остаточных многочленов в более высоких коразмерностях приводят к следующим ответам:

$$
\begin{aligned}
R_{1^1 2^1} &= -6\Sigma(2\Sigma-\Psi)^2+6\Delta(3\Psi-N_1)\\
R_{1^3} &= 8\Sigma(15\Sigma^2-13\Sigma\Psi+3\Psi^2)-8\Delta(10\Psi-3N)\\
R_{1^1 3^1} &= -4\Sigma(5\Sigma-3\Psi)(3\Sigma-2\Psi)(2\Sigma-\Psi)\\
&\quad +4\Delta(20\Psi^2-17N\Psi+6N^2-8\Delta)\\
R_{2^2} &= -3\Sigma(2\Sigma-\Psi)(20\Sigma^2-25\Sigma\Psi+8\Psi^2)\\
&\quad +3\Delta(25\Psi^2-21N\Psi+8N^2-12\Delta)\\
R_{1^2 2^1} &= 24\Sigma(2\Sigma-\Psi)(15\Sigma^2-17\Sigma\Psi+5\Psi^2)\\
&\quad -24\Delta(20\Psi^2-15N\Psi+5N^2-7\Delta)\\
R_{1^4} &= -48\Sigma(105\Sigma^3-160\Sigma^2\Psi+84\Sigma\Psi^2-15\Psi^3)\\
&\quad +48\Delta(70\Psi^2-48N\Psi+15N^2-21\Delta).
\end{aligned}
$$

5.3.4 Остаточные многочлены для мультимультиособенностей

Теперь нас интересуют многообразия в нижнем углу треугольника (5.3), состоящие из тех точек b, для которых ограничение отображения f на слой $p^{-1}(b)$ имеет несколько вырожденных мультиособенностей с предписанными приведенными разбиениями $\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}$ (а также необходимое дополнительное число невырожденных особенностей). Показатели здесь указывают кратности соответствующих разбиений. Обозначим через $A_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}(f)\subset\mathbb{C}^m$ замыкание множества таких точек, умноженное, аналогично случаю мультиособенностей, на произведение порядков групп автоморфизмов разбиений α_i и на порядок группы автоморфизмов набора разбиений α_i.

Наши вычисления показывают, что справедливо следующее утверждение, которому мы не нашли еще, однако, формального доказательства.

Гипотеза 5.17 *При выполнении условий, справедливых в начале этого раздела, всякий класс мультимультиособенностей задается универсальной полиномиальной комбинацией образов основных классов под действием гомоморфизма Гизина* p_*.

Как и для случая мультиособенностей, только лишь из существования универсальных многочленов вытекает, что они должны иметь довольно специальный вид и выражаться через остаточные многочлены от основных классов.

Рассмотрим бесконечный набор переменных $s_{1^2}, s_{2^1}, s_{1^2,1^2}, s_{1^2,2^1}, \ldots$, проиндексированный наборами разбиений α (упорядоченных, скажем, лексикографически). Определим на множестве этих переменных умножение, положив произведение двух переменных s равным сумме таких же переменных с индексами, пробегающими все наборы разбиений, получающиеся объединением некоторых попарно различных разбиений из индекса второй переменной с некоторыми попарно различными разбиениями из индекса первой переменной. Так, например, мы полагаем

$$s_{\alpha,\beta}s_{\gamma,\delta} = s_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} + s_{\alpha\gamma,\beta,\delta} + s_{\alpha,\beta\gamma,\delta} + s_{\alpha\delta,\beta,\gamma} + s_{\alpha,\beta\delta,\gamma} + s_{\alpha\gamma,\beta\delta} + s_{\alpha\delta,\beta\gamma}.$$

В частности, всякий многочлен от переменных $s_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}$ равен некоторому линейному многочлену.

Введем *производящую функцию для мультимультиособенностей* с помощью равенства

$$\mathfrak{A}(s_{1^2}, s_{2^1}, \ldots) = \sum \frac{[A_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}]}{\prod \mathrm{Aut}(\alpha_i)} \frac{s_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}}{m_1! \ldots m_c!}.$$

Рассмотрим также экспоненциальную производящую функцию с формальными коэффициентами $T_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}$, проиндексированными мультиразбиениями:

$$\mathfrak{R}(s_{1^2}, s_{2^1}, \ldots) = \sum \frac{T_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}}{\prod \mathrm{Aut}(\alpha_i)} \frac{s_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}}{m_1! \ldots m_c!}.$$

Утверждение 5.18 *При условии справедливости гипотезы 5.17 если в качестве T_α взять многочлены, представляющие классы A_α, то существуют взвешенно однородные многочлены $R_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}$, при $c \geq 2$, от классов Σ, Ψ, Δ, N, такие, что после подстановки их прямых образов $f_* R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_c}$ в качестве коэффициентов $T_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}$ в выписанную выше производящую функцию классы когомологий стратов $A_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}$ совпадают с коэффициентами при $\frac{s_{\alpha_1^{m_1},\ldots,\alpha_c^{m_c}}}{m_1! \ldots m_c!}$ в экспоненте $\exp(q_*\mathfrak{R})$, где экспонента берется относительно описанного выше умножения переменных s.*

Это предложение доказывается точно так же, как предложение 5.16, путем рассмотрения отображения $f^{(d)}$.

Как и выше, многочлены $R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_c}$ можно найти индуктивно с помощью метода неопределенных коэффициентов. В вычислениях используется то, что ограничение проекции p на Σ — собственное отображение, а носители всех интересующих нас когомологических классов сосредоточены на Σ и, следовательно, гомоморфизм p_*, выраженный через базисный класс t, сводится к умножению на степень ограничения $p|_\Sigma$. Последняя степень совпадает с числом критических точек функции f на общем слое и равна $k+1$ для особенности A_k и $k+l$ для особенности $I_{k,l}$. Вот первые нетривиальные результаты вычислений:

$$\begin{aligned} R_{2^1,2^1} &= -2\Sigma(2\Sigma-\Psi)(5\Sigma-3\Psi)+\Delta(14\Psi-5N)\\ R_{2^1,1^2} &= 6\Sigma(2\Sigma-\Psi)(5\Sigma-2\Psi)-6\Delta(7\Psi-2N)\\ R_{1^2,1^2} &= -6\Sigma(30\Sigma^2-21\Psi\Sigma+4\Psi^2)+2\Delta(57\Psi-14N). \end{aligned}$$

5.4 Относительные классы Черна универсального отображения

В этом разделе мы показываем, что относительные классы Черна универсального расслоения действительно принадлежат подкольцу, порожденному основными классами в $H^*(X_{g,n})$. Отсюда вытекает, что классы $[A_k]$, а также остаточные многочлены для мультиособенностей и мультимультиособенностей также принадлежат этому кольцу. Основным инструментом в вычислении относительных классов Черна отображения $f_{g,n}$ служит теорема Гротендика–Римана–Роха. Из нее же вытекают и нетривиальные соотношения на прямые образы Гизина многочленов от основных классов. Напомним сначала эту теорему в той конкретной ситуации, в которой мы будем ее использовать. Наше изложение следует [22, 67].

5.4.1 Теорема Гротендика–Римана–Роха

Теорема Гротендика–Римана–Роха (ниже просто ГРР) сравнивает характер Черна когерентного пучка над многообразием M с характером Черна образа этого пучка при отображении $P : M \to A$. Мы будем предполагать, что оба многообразия M и A компактные и гладкие.

В одной из своих форм (по-видимому, наиболее полезной) формула ГРР выглядит так:

$$\mathrm{ch}(P_!\beta) = P_*(\mathrm{ch}(\beta)\mathrm{td}(P)^{-1}). \tag{5.6}$$

Здесь β — некоторый когерентный пучок на M, ch обозначает характер Черна, а td — класс Тодда морфизма P.

Дадим определения понятиям, участвующим в формуле ГРР.

Характер Черна

Характер Черна пучка сечений векторного расслоения, или просто характер Черна векторного расслоения, определяется как сумма экспонент его *корней Черна*, т.е. формальных корней его многочлена Черна:

$$\mathrm{ch}(E) = \exp(e_1) + \cdots + \exp(e_r),$$

где через r обозначен ранг векторного расслоения E. В частности, для линейного расслоения E имеем $\mathrm{ch}(E) = \exp(c_1(E))$.

Будучи симметрической функцией от корней Черна, характер Черна расслоения выражается через его характеристические классы:

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(E) \;\; = \;\; & r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) \\ & + \frac{1}{24}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4) + \\ & \frac{1}{120}(c_1^5 - 5c_1^3c_2 + 5c_1c_2^2 + 5c_1^2c_3 - 5c_2c_3 - 5c_1c_4 + 5c_5) + \ldots,\end{aligned}$$

где через c_i обозначена i-ая элементарная симметрическая функция от корней Черна.

В силу свойств корней Черна для точной последовательности векторных расслоений

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

справедлива *формула Уитни*

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(E') + \mathrm{ch}(E'').$$

Формула Уитни позволяет распространить понятие характера Черна на произвольные когерентные пучки. *Когерентный пучок* на M это либо пучок сечений некоторого векторного расслоения, либо, более общим образом, пучок, который можно вставить последним нетривиальным членом в точную последовательность пучков, все элементы которой кроме последнего — пучки сечений векторных расслоений (такая точная последовательность называется *резольвентой* для данного пучка). Характер Черна когерентного пучка определяется как альтернированная сумма характеров Черна остальных членов точной последовательности.

Резольвента для структурного пучка подмногообразия $\Sigma \subset M$ коразмерности 1 в M, заданного вложением $i : \Sigma \hookrightarrow M$, выглядит следующим образом:

$$0 \longrightarrow N_\Sigma^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_\Sigma) \longrightarrow 0,$$

где N_Σ — линейное расслоение над M, такое, что Σ совпадает с множеством нулей его сечения. В трубчатой окрестности подмногообразия Σ расслоение N_Σ попросту совпадает с естественным продолжением нормального расслоения к Σ в M. Формула Уитни дает

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(i_*(\mathcal{O}_\Sigma)) &= \mathrm{ch}(\mathcal{O}_M) - \mathrm{ch}(N_\Sigma^\vee) = 1 - \exp(-\Sigma) \\
&= \frac{(1-\exp(-\Sigma))}{\Sigma}\Sigma = \left(\frac{\Sigma}{1-\exp(-\Sigma)}\right)^{-1}\Sigma,
\end{aligned}$$

причем оператор пересечения с первым классом Черна нормального расслоения можно заменить на Σ, поскольку, согласно предположению, Σ совпадает с множеством нулей голоморфного сечения нормального расслоения.

Для подмногообразия Z коразмерности 2 резольвента оказывается более сложной. А именно, она имеет вид

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 N_Z^\vee \longrightarrow N_Z^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_Z) \longrightarrow 0, \tag{5.7}$$

где Λ^2 обозначает кососимметрический квадрат векторного расслоения. Эта последовательность, называемая *резольвентой Кошуля*, выписана в предположении, что Z является множеством нулей глобально определенного сечения некоторого векторного расслоения N_Z над M. Мы увидим, что окончательное выражение для $\mathrm{ch}(i_*(\mathcal{O}_Z))$ определяется ограничением расслоения N_Z на Z, которое совпадает с нормальным расслоением к Z. Более того, можно показать (см. [22]), что полученное выражение справедливо и в отсутствие предположения о том, что нормальное расслоение к Z продолжается на все многообразие M. Формула Уитни дает

$$\mathrm{ch}(i_*\mathcal{O}_Z) = \mathrm{ch}(\Lambda^2 N_Z^\vee) + \mathrm{ch}(\mathcal{O}_M) - \mathrm{ch}(N_Z^\vee).$$

Ранг виртуального векторного расслоения $N_Z^\vee$ равен двум, а его полный класс Черна равен $c(N_Z^\vee) = 1 - N_1 + N_2$, где $N_i = c_i(N_Z)$, $i = 1, 2$. Поэтому его характер Черна имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(N_Z^\vee) &= 2 - N_1 + \frac{1}{2}(N_1^2 - 2N_2) + \frac{1}{6}(3N_1N_2 - N_1^3) \\
&\quad + \frac{1}{24}(N_1^4 - 4N_1^2N_2 + 2N_2^2) - \frac{1}{120}(N_1^5 - 5N_1^3N_2 + 5N_1N_2^2) + \dots
\end{aligned}$$

Векторное расслоение $\Lambda^2 N_Z^\vee$ линейно и

$$c(\Lambda^2 N_Z^\vee) = 1 - N_1,$$

откуда
$$\mathrm{ch}(\Lambda^2 N_Z^\vee) = \exp(-N_1).$$

Сводя эти результаты воедино, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(i_*\mathcal{O}_Z) &= N_2 - \frac{1}{2}N_1N_2 + \frac{1}{12}(N_1^2N_2 - N_2^2) - \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}N_1 + \frac{1}{12}(N_1^2 - N_2) - \frac{1}{24}(N_1^3 - N_1N_2)\dots\right)Z,\end{aligned}$$

поскольку и Z, и N_2 отождествляются с классом нулевого сечения нормального расслоения N_Z.

Класс Тодда

Начнем с определения класса Тодда векторного расслоения, а затем определим класс Тодда отображения. *Класс Тодда* векторного расслоения E над M это еще одна симметрическая функция его корней Черна,

$$\begin{aligned}\mathrm{td}(E) &= \frac{e_1}{1-\exp(-e_1)}\cdots\frac{e_r}{1-\exp(-e_r)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 \\ &\quad + \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4) + \dots\end{aligned}$$

Для выписанной выше точной последовательности векторных расслоений имеем
$$\mathrm{td}(E) = \mathrm{td}(E')\mathrm{td}(E'').$$

Для полного класса Черна векторного расслоения E ранга r выполняется равенство

$$\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\mathrm{ch}(\Lambda^i E^\vee) = c_r(E)\mathrm{td}(E)^{-1}.$$

Класс Тодда многообразия M это класс Тодда его касательного расслоения TM. *Класс Тодда* собственного отображения $F : M \to N$ это класс Тодда разности $F^*TN - TM$, т.е.

$$\mathrm{td}(F) = \mathrm{td}(F^*TN - TM) = \frac{\mathrm{td}\ F^*TN}{\mathrm{td}\ TM}.$$

Прямой образ когерентного пучка

Высший прямой образ $P_!(E)$ когерентного пучка E на M относительно отображения $P : M \to A$ — наиболее сложный объект среди определенных в настоящем разделе. Методы его вычисления зависят от соотношения размерностей многообразий A и M. В частности, если размерности этих многообразий совпадают, то образ $P_!(E)$ совпадает с прямым образом $P_*(E)$. Напомним, что, по определению, *прямым образом* P_*E пучка E над M относительно отображения $P : M \to A$ называется пучок, группа сечений которого над достаточно малым открытым множеством $U \subset A$ совпадает с ограничением пучка E на $P^{-1}(U)$. Если $\dim M = \dim A+1$ (именно в этой ситуации мы и собираемся применять теорему ГРР), то

$$P_!(E) = R^0(P_*(E)) - R^1(P_*(E)),$$

где $R^0(P_*(E)) = P_*(E)$ — прямой образ пучка E, а $R^1(P_*(E))$ — первый высший гротендиковский прямой образ, который можно вычислить с помощью двойственности Серра:

$$R^1(P_*(E)) = (R^0(P_*(E^\vee \otimes \omega)))^\vee = (P_*(E^\vee \otimes \omega))^\vee;$$

здесь ω — относительный дуализирующий пучок.

5.4.2 Относительные классы Черна универсального расслоения

Вернемся теперь к коммутативному треугольнику (5.2) пространств и отображений. С этого момента мы будем пользоваться упрощенными обозначениями, опуская индексы $g; n$: $X_{g;n}$ будет обозначаться через X, $f_{g;n}$ будет обозначаться через f, и так далее. Введем в пространстве X, универсальной кривой над проективизированным пространством Гурвица, следующие классы когомологий, которые мы будем называть *основными*. Обозначим через ω относительный дуализирующий пучок отображения $p : X \to B$, т.е. единственное голоморфное линейное расслоение над X, слой которого над гладкой точкой слоя отображения p совпадает с кокасательной прямой к этому слою. Первый класс Черна $c_1(\omega)$ является элементом группы вторых когомологий $H^2(X)$. Пусть Π — дивизор полюсов универсального отображения f, т.е. множество точек в X, в которых ограничение этого отображения на слой имеет полюс. Напомним, что поскольку каждое из пространств X, Y и B является пространством орбит действия группы $\mathbb{C}^*$, на каждом из них выделен класс когомологий $c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2$, который мы обозначаем соответственно через Ψ_X, Ψ_Y и ψ. Введем также обозначение $\Sigma = c_1(\omega) + \Psi_X + 2\Pi$ для первого относительного класса Черна отображения f.

Помимо подмногообразий и классов коразмерности один нам также понадобится класс $\Delta \subset X$, представленный множеством особых точек слоев отображения p. Ранг нормального расслоения к Δ в X равен двум. Локально это нормальное расслоение допускает естественное расщепление в прямую сумму двух линейных расслоений.

Действительно, каждая точка в Δ является точкой трансверсального пересечения двух ветвей кривой-слоя в этой точке, и касательные прямые к этим ветвям и задают расщепление нормального расслоения. (В случае рациональных кривых, $g = 0$, это расщепление продолжается до глобального, поскольку двойная точка разбивает рациональную кривую на две компоненты связности, однако мы не будем ниже этим пользоваться.) Обозначим через N первый класс Черна нормального расслоения к $\Delta \subset X$. Этот класс Черна можно считать оператором, который можно применять к Δ. Его степени N^i являются операторами того же вида. Второй класс Черна нормального расслоения можно отождествить с самим классом Δ.

Лемма 5.19 *Основные классы удовлетворяют следующим соотношениям (в когомологиях $H^*(X)$):*

$$\Pi^2 = -\Psi_X \Pi, \quad \Sigma \Pi = 0, \quad \Pi \Delta = 0, \quad \Sigma \Delta = \Psi_X \Delta.$$

Доказательство. Равенство $\Pi \Delta = 0$ вытекает из того, что полюса любой функции в пространстве Гурвица являются гладкими точками кривой, а значит подмногообразия Δ и Π не пересекаются. Аналогично равенство $\Sigma \Pi = 0$ служит алгебраическим выражением того факта, что все полюса у функции простые и ветвления над бесконечностью не происходит.

Дуализирующий пучок ω почти тривиален над Δ (его поднятие на двулистное накрытие над Δ тривиально), а в точках гиперповерхности Π он изоморфен конормальному линейному расслоению к ней. Отсюда вытекают равенства $c_1(\omega)\Delta = 0$ и $\Pi^2 = -c_1(\omega)\Pi$. Подставляя $c_1(\omega) = \Sigma - \Psi_X - 2\Pi$, мы получаем соответственно

$$0 = (\Sigma - \Psi_X - 2\Pi)\Delta = \Sigma \Delta - \Psi_X \Delta$$

и

$$\Pi^2 = -(\Sigma - \Psi_X - 2\Pi)\Pi = \Psi_X \Pi + 2\Pi^2,$$

что доказывает равенства $\Sigma\,\Delta = \Psi_X\,\Delta$ и $\Pi^2 = -\Psi_X\,\Pi$. Отметим, что последнее из них можно вывести и путем поднятия на X равенства $\Pi_Y^2 = -\Psi_Y\,\Pi_Y$, имеющего место на Y, см. следующий раздел. $\triangleleft$

Следствие 5.20 *Всякий многочлен от основных классов можно представить в виде*

$$P_1(\Psi_X)\,\Pi + P_2(\Psi_X, \Sigma) + P_3(\Psi_X, N, \Delta)\,\Delta,$$

где P_1, P_2, P_3 — некоторые многочлены.

Основная цель настоящего раздела состоит в доказательстве следующего утверждения, из которого мы затем выведем некоторые соотношения на прямые образы основных классов.

Теорема 5.21 *Полный относительный класс Черна отображения f равен*

$$c(f) \quad = \quad (1+\Psi_X)\left(\frac{1}{1-\Sigma+\Psi_X} - \frac{\Delta}{1+N+\Delta}\right). \tag{5.8}$$

В качестве немедленного следствия мы получаем

Следствие 5.22 *Если при ограничении на слои отображения p отображение f имеет особенности только типа A_k или $I_{k,l}$, то остаточные многочлены $R_{\alpha_1,\dots,\alpha_c}$ для мультимультиособенностей принадлежат подкольцу в $H^*(X)$, порожденному основными классами Σ, Ψ_X, Δ, N.*

Поскольку p является композицией отображений f и q, $p = f \circ q$, полный относительный класс Черна отображения f является результатом деления полного относительного класса Черна отображения p и поднятия полного относительного класса Черна отображения q

$$c(f) = \frac{c(p)}{f^* c(q)}.$$

Поэтому для его подсчета достаточно вычислить классы $c(p)$, $c(q)$, а также поднятие последнего класса на X. Именно этим мы сейчас и займемся.

Класс $c(q)$ и его поднятие $f^*c(q)$

Тотальное пространство Y расслоения q является проективизацией векторного расслоения $E = \mathbb{C} \oplus \mathcal{O}(1)$ ранга два над B. Обозначим через $\mathcal{T}$ тавтологическое линейное расслоение над Y и положим $\Pi_Y = c_1(\mathcal{T}^\vee) = -c_1(\mathcal{T})$. Этот класс удовлетворяет соотношению $c_2(q^*(E)/\mathcal{T}) = 0$, т.е.

$$\Pi_Y^2 + \Pi_Y\,\Psi_Y = 0, \tag{5.9}$$

где $\Psi_Y = q^*(\psi) = c_1(\mathcal{O}(1))$ — характеристический класс действия группы $\mathbb{C}^*$. Полученное соотношение описывает кольцо когомологий пространства Y как алгебру над $H^*(B)$, причем действие кольца $H^*(B)$ задается отображением q^*.

Прямые $\mathbb{C} \oplus \{0\}$ и $\{0\} \oplus \mathcal{O}(1)$ в слоях расслоения E соответствуют точкам «нуль» и «бесконечность» в слоях проекции q. Эти точки образуют гиперповерхности с двойственными классами Пуанкаре

$$c_1(\mathrm{Hom}(\mathcal{T}, \mathcal{O}(1))) = \Pi_Y + \Psi_Y \text{ и } c_1(\mathrm{Hom}(\mathcal{T}, \mathbb{C})) = \Pi_Y$$

соответственно. Таким образом, Π_Y можно интерпретировать как класс двойственный к «множеству бесконечностей» в Y, а равенство (5.9) выражает тот факт, что множество нулей и множество бесконечностей не пересекаются.

Полный класс Черна проекции q обратен к полному классу Черна относительного касательного расслоения $\ker(q_*)$. Это расслоение дается изоморфизмом $\ker(q_*) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{T}, q^*(E)/\mathcal{T})$. Поэтому

$$c(q) = \frac{1}{c(\mathrm{Hom}(\mathcal{T}, q^*(E)/\mathcal{T}))} = \frac{1}{1 + \Psi_Y + 2\Pi_Y}.$$

Применяя f^*, получаем $f^*(\Psi_Y) = \Psi_X$ и $f^*(\Pi_Y) = \Pi$, откуда, наконец,

$$f^*(c(q)) = \frac{1}{1 + \Psi_X + 2\Pi}.$$

Полный класс Черна отображения p

Вычисление полного класса Черна отображения p несколько сложнее. Его можно подсчитать, воспользовавшись точной последовательностью

$$0 \longrightarrow p^*T^\vee B \xrightarrow{p^\vee} T^\vee X \longrightarrow \omega \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0, \tag{5.10}$$

где, напомним, ω обозначает относительный дуализирующий пучок отображения p. Подмногообразие $\Delta \subset X$ это в точности множество тех точек, где коранг отображения p^* равен не единице, а двум. Структурный пучок $\mathcal{O}_\Delta$ подмногообразия Δ измеряет разность между относительным дуализирующим пучком ω и пучком относительных дифференциалов.

Применяя к выписанной выше точной последовательности формулу Уитни, мы получаем

$$c(p^\vee) = 1 - c_1(p) + c_2(p) - \cdots = c(p^*T^\vee B - T^\vee X) = \frac{c(\mathcal{O}_\Delta)}{c(\omega)} = \frac{c(\mathcal{O}_\Delta)}{1 + c_1(\omega)}.$$

Для вычисления класса Черна $c(\mathcal{O}_\Delta)$ воспользуемся проективной резольвентой Кошуля (5.7). Еще одно применение формулы Уитни дает

$$c(\mathcal{O}_\Delta) = \frac{1-N}{1-N+\Delta} = 1 - \frac{\Delta}{1-N+\Delta}.$$

Эту формулу можно вывести и применив формулу ГРР к вложению $\Delta \hookrightarrow X$. Подставляя ее в выражение для $c(p^\vee)$, получаем

$$c(p) = \frac{1}{1 - c_1(\omega)} \left(1 - \frac{\Delta}{1+N+\Delta}\right).$$

Теперь мы можем подсчитать полный класс Черна отображения f. Применение соотношений из леммы 5.19 дает

$$\begin{aligned}
c(f) &= \frac{c(p)}{f^*(c(q))} = \frac{1+\Psi_X+2\Pi}{1-c_1(\omega)}\left(1 - \frac{\Delta}{1+N+\Delta}\right) \\
&= \frac{1+\Psi_X+2\Pi}{1-\Sigma+\Psi_X+2\Pi} - \frac{1+\Psi_X}{1+N+\Delta}\,\Delta \\
&= \left(\frac{1+\Psi_X}{1-\Sigma+\Psi_X} - \frac{1+\Psi_X}{1+N+\Delta}\,\Delta\right) \\
&\quad + \left(\frac{1+\Psi_X+2\Pi}{1-\Sigma+\Psi_X+2\Pi} - \frac{1+\Psi_X}{1-\Sigma+\Psi_X}\right)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое совпадает с правой частью равенства (5.8); после приведения к общему знаменателю второго слагаемого его числитель оказывается равным

$$(1+\Psi_X+2\Pi)(1-\Sigma+\Psi_X) - (1+\Psi_X)(1-\Sigma+\Psi_X+2\Pi) = -2\Pi\,\Sigma = 0.$$

Теорема 5.21 доказана. $\triangleleft$

5.4.3 Гомоморфизмы прямого образа

Для того, чтобы иметь возможность применять универсальные формулы к классам мультимультиособенностей, нам необходимо описание гомоморфизмов прямого образа f_*, p_*, q_*. Следующая теорема утверждает, что гомоморфизм p_* определяет остальные гомоморфизмы.

Теорема 5.23 *Для любого набора классов когомологий $h_1, \ldots, h_s$ на X, удовлетворяющих условию $h_i\,\Pi = 0$, $i = 1, \ldots, s$, справедливо равенство*

$$q_*(f_*(h_1)\ldots f_*(h_s)) = \psi^{s-1} p_*(h_1)\ldots p_*(h_s).$$

Геометрически условие $h_i\Pi = 0$ означает, что класс h_i можно представить циклом, не пересекающимся с дивизором полюсов Π. Для остаточных многочленов мультимультиособенностей оно выполняется.

Доказательство. Поскольку q — проективизация векторного расслоения, прямой образ $f_*(h)$ произвольного класса $h \in H^*(X)$ можно представить в виде

$$f_*(h) = q^*(a) + q^*(b)\,\Pi_Y$$

для некоторых классов a и b на B. Класс b можно вычислить, применяя q_* к обеим частям этого равенства. Из равенства $q_*\Pi_Y = 1$ и формулы проекции мы заключаем, что

$$b = q_*(f_*(h)) = p_*(h).$$

Класс a вычисляется аналогичным образом. А именно, умножая обе части выписанного выше уравнения на $\Pi_Y + \Psi_Y$, получаем

$$f_*((\Psi_X+\Pi)\,h) = q^*(a)\,(\Psi_Y+\Pi_Y)+q^*(b)\,(\Psi_Y+\Pi_Y)\,\Pi_Y = q^*(\psi\, a)+q^*(a)\,\Pi_Y,$$

и, применяя q_*, находим $a = p_*((\Psi_X+\Pi)\,h)$. Если класс h удовлетворяет предположению теоремы $h\,\Pi = 0$, то ответ упрощается:

$$f_*(h) = q^*(p_*(h))\,(\Psi_Y + \Pi_Y).$$

Поэтому в предположениях теоремы справедливо

$$f_*(h_1)\ldots f_*(h_s) = (\Psi_Y+\Pi_Y)^s \prod_{i=1}^{s} q^*(p_*(h_i)) = (\Psi_Y^s + \Psi_Y^{s-1}\Pi_Y) \prod_{i=1}^{s} q^*(p_*(h_i)).$$

Применяя q_*, мы с помощью формулы проекции получаем требуемое равенство.

Таким образом, для завершения вычисления классов когомологий стратов в пространстве Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ мы должны уметь вычислять прямой образ $p_*(R)$ всякого остаточного многочлена, представленного в виде

$$R = P_1(\Psi_X, \Sigma) + P_2(\Psi_X, N, \Delta)\,\Delta.$$

Положим

$$\xi_k = p_*(\Sigma^{k+1}), \qquad \delta_{k,\ell} = p_*(N^k \Delta^{\ell+1})$$

(классы $\delta_{k,\ell}$ не следует путать с классами $\delta_{p,q}$, обсуждавшимися в первом разделе настоящей главы). Между классами ξ_k и $\delta_{k,\ell}$ нет никаких универсальных соотношений, справедливых при всех значениях g и n. Разумеется, для любых конкретных g и n размерность пространства когомологий $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{g;n})$ конечна, поэтому для фиксированных g и n такие соотношения существуют. Некоторые из них обсуждаются в следующем разделе.

5.4.4 Соотношения на классы когомологий в B

Применим формулу ГРР к проекции $p : X \to B$ и к относительному дуализирующему пучку ω. Будем действовать аналогично [67], где то же самое реализовано для проекции универсальной кривой на пространство модулей кривых. Имеем

$$\mathrm{ch}(p_!\omega) = p_*(\mathrm{ch}(\omega) \cdot \mathrm{td}(p)^{-1}).$$

Пучок в левой части $p_!\omega = R^0 p_*\omega - R^1 p_*\omega$ выражается через расслоение Ходжа $\Lambda = \Lambda_{g,n}$ над $B = P\overline{\mathcal{H}}_{g;n}$ (напомним, что слой расслоения Ходжа над точкой $(C; f)$ это пространство голоморфных 1-форм на C; тем самым, ранг этого расслоения равен g): $R^0 p_*\omega = p_*\omega = \Lambda$ и, по двойственности Серра, $R^1 p_*\omega = p_*\mathbb{C} = \mathbb{C}$. Классы в правой части формулы были вычислены в предыдущих разделах: воспользовавшись тем, что $c_1(\omega)\Delta = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\omega)\mathrm{td}^{-1}(p) = \mathrm{ch}(\omega)\mathrm{td}(\omega^\vee - \mathcal{O}_\Delta^\vee) &= e^{c_1(\omega)}\frac{-c_1(\omega)}{1 - e^{c_1(\omega)}}\mathrm{td}(-\mathcal{O}_\Delta^\vee)\\ &= \frac{c_1(\omega)}{1 - e^{-c_1(\omega)}} + \mathrm{td}(-\mathcal{O}_\Delta^\vee),\end{aligned}$$

где класс Тодда (виртуального) пучка $-\mathcal{O}_\Delta^\vee$ определяется его классом Черна

$$c(-\mathcal{O}_\Delta^\vee) = \frac{1 + N + \Delta}{1 + N} = 1 + \frac{\Delta}{1 + N}.$$

Подставляя результат в формулу ГРР, получаем

$$
\begin{aligned}
&(g-1)+\mathrm{ch}_1(\Lambda)+\mathrm{ch}_2(\Lambda)+\mathrm{ch}_3(\Lambda)+\mathrm{ch}_4(\Lambda)+\mathrm{ch}_5(\Lambda)+\dots\\
&\qquad=\frac{1}{2}p_*(c_1(\omega))+\frac{1}{12}p_*(c_1^2(\omega)+\Delta)-\frac{1}{720}p_*(c_1^4(\omega)+(N^2-3\Delta)\Delta)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{30240}p_*(c_1^6(\omega)+(N^4-5N^2\Delta+5\Delta^2)\Delta)+\dots.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Это соотношение показывает, что однородные компоненты характера Черна (а значит и классы Черна) расслоения Ходжа выражаются через прямые образы основных классов.

Отметим, что в правой части равенства (5.11) отсутствуют члены положительных четных степеней. Отсюда вытекает, что четная часть характера $\mathrm{ch}(\Lambda)$ тривиальна, т.е. $c(\Lambda+\Lambda^\vee)=1$. В случае $g=0$ само расслоение Ходжа тривиально, а значит и левая часть равенства (5.11) обращается в нуль при положительных степенях. Отсюда вытекают нетривиальные тождества для прямых образов основных классов:

$$
p_*(c_1^2(\omega)+\Delta)=0,\quad p_*(c_1^4(\omega)+(N^2-3\Delta)\Delta)=0,\quad \dots.
$$

5.5 Применение универсальных многочленов к изучению стратификации пространств Гурвица

Знание остаточных многочленов для особенностей, мультиособенностей, и мультимультиособенностей позволяет подсчитать когомологические классы стратов в пространствах Гурвица. Полные такие формулы должны учитывать и вклад неизолированных особенностей, который мы пока не смогли подсчитать. Именно поэтому мы приводим универсальные выражения для стратов только в случае рациональных функций и только для малых коразмерностей.

5.5.1 Универсальные выражения для стратов

Ниже приведены выражения для стратов коразмерности один и два по модулю классов с носителями на стратах неизолированных особенностей в терминах прямых образов основных классов, полученные на основе вычисленных остаточных классов. Мы используем обозначения

$$
\xi_k=p_*(\Sigma^{k+1}),\quad \xi_0=2n-2+2g,\quad \delta_{k,l}=p_*(N^k\Delta^{l+1}).
$$

Итак, справедливы формулы

$$\begin{aligned}
\sigma_{2^1} &= -\psi\,\xi_0 + 2\,\xi_1 - \delta_{0,0}\\
\sigma_{1^2} &= \frac{1}{2}\,\psi\,\xi_0\,(\xi_0+2) - 3\,\xi_1 + \delta_{0,0}\\
\sigma_{3^1} &= 2\,\xi_0\,\psi^2 - 7\,\xi_1\,\psi - 5\,\delta_{0,0}\,\psi + 6\,\xi_2 + 2\,\delta_{1,0}\\
\sigma_{1^12^1} &= -\,\xi_0\,(\xi_0+6)\,\psi^2 + 2\,(\xi_0+12)\,\xi_1\,\psi + (18-\xi_0)\,\delta_{0,0}\,\psi - 24\,\xi_2 - 6\,\delta_{1,0}\\
\sigma_{1^3} &= \frac{1}{6}\,\xi_0\,(\xi_0^2 + 6\,\xi_0 + 24)\,\psi^2\\
&\quad - \frac{1}{3}\,(9\,\xi_0 + 52)\,\xi_1\,\psi + \frac{1}{3}\,(3\,\xi_0 - 40)\,\delta_{0,0}\,\psi + 20\,\xi_2 + 4\,\delta_{1,0}\\
\sigma_{2^1,2^1} &= \frac{1}{2}\,(\xi_0-6)\,\xi_0\,\psi^2 - (2\,\xi_0\ - 11)\,\xi_1\,\psi + \frac{1}{2}\,\delta_{0,0}^2 + 2\,\xi_1^2 - 10\,\xi_2\\
&\quad + (\xi_0+7)\,\delta_{0,0}\,\psi - 2\,\xi_1\,\delta_{0,0} - \frac{5}{2}\,\delta_{1,0}\\
\sigma_{2^1,1^2} &= -\frac{1}{2}\,\xi_0\,(\xi_0^2 - 2\,\xi_0 - 12)\,\psi^2 + (\xi_0^2 +\ \xi_0 - 27)\,\xi_1\,\psi - \delta_{0,0}^2 - 6\,\xi_1^2 + 30\,\xi_2\\
&\quad - \frac{1}{2}\,(\xi_0^2 + 42)\delta_{0,0}\,\psi + 5\,\xi_1\,\delta_{0,0} + 6\,\delta_{1,0}\\
\sigma_{1^2,1^2} &= \frac{1}{8}\,(\xi_0-4)\,\xi_0\,(\xi_0^2 + 4\,\xi_0 + 6)\,\psi^2 - \frac{3}{4}\,(2\,\xi_0^2 - 4\,\xi_0 - 21)\,\xi_1\,\psi + \frac{1}{2}\,\delta_{0,0}^2\\
&\quad + \frac{9}{2}\,\xi_1^2 - \frac{45}{2}\,\xi_2 + \frac{1}{4}\,(2\,\xi_0^2 - 4\,\xi_0 + 57)\,\delta_{0,0}\,\psi - 3\,\xi_1\,\delta_{0,0} - \frac{7}{2}\,\delta_{1,0}.
\end{aligned}$$

Приведем теперь выражения для тех же самых стратов в случае $g = 0$, упрощенные с учетом тождеств

$$\xi_0 = 2n-2, \quad \xi_1 = 4\,(n-1)\,\psi - \delta_{0,0}$$

раздела 5.4.4. Отметим, что в случае $g = 0$ коразмерность множества неизолированных особенностей в B равна 3, поэтому они не дают вклада в выписанные выражения.

$$\begin{aligned}
\sigma_{2^1} &= 6\,(n-1)\,\psi - 3\,\delta_{0,0}\\
\sigma_{1^2} &= 2\,(n-6)\,(n-1)\,\psi + 4\,\delta_{0,0}\\
\sigma_{3^1} &= -24\,(n-1)\,\psi^2 + 2\,\delta_{0,0}\,\psi + 6\,\xi_2 + 2\,\delta_{1,0}\\
\sigma_{1^12^1} &= 12\,(n-1)\,(n+6)\,\psi^2 - 6\,n\,\delta_{0,0}\,\psi - 24\,\xi_2 - 6\,\delta_{1,0}\\
\sigma_{1^3} &= \frac{4}{3}\,(n-1)\,(n^2 - 17\,n - 30)\,\psi^2 + 4\,(2\,n-1)\,\delta_{0,0}\,\psi + 20\,\xi_2 + 4\,\delta_{1,0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{2^1,2^1} &= 2\,(n-1)\,(9\,n+10)\,\psi^2 - 2\,(9\,n-7)\,\delta_{0,0}\,\psi + \frac{9}{2}\,\delta_{0,0}^2 - 10\,\xi_2 - \frac{5}{2}\,\delta_{1,0} \\
\sigma_{2^1,1^2} &= 12\,(n-9)\,(n-1)\,n\,\psi^2 - 6\,(n^2-13\,n+11)\,\delta_{0,0}\,\psi - 12\,\delta_{0,0}^2 \\
&\quad + 30\,\xi_2 + 6\,\delta_{1,0} \\
\sigma_{1^2,1^2} &= (n-1)\,(2\,n^3-30\,n^2+145\,n-60)\,\psi^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\,(16\,n^2-144\,n+125)\,\delta_{0,0}\,\psi + 8\,\delta_{0,0}^2 - \frac{45}{2}\,\xi_2 - \frac{7}{2}\,\delta_{1,0}.
\end{aligned}
$$

5.5.2 Степени стратов рода 0

В случае $g = 0$ компактифицированное пространство Гурвица $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$ расслоено над компактифицированным пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ рациональных кривых с отмеченными точками. Слоем этого расслоения служит проективное пространство PE, где $E = L_1^\vee \oplus \dots \oplus L_n^\vee$ — сумма Уитни касательных прямых к кривой в ее отмеченных точках. Отсюда вытекает, что когомологии пространства $P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}$, рассматриваемые как алгебра над $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$, порождены классом $\psi = c_1(\mathcal{O}(1))$, подчиняющимся соотношению

$$\psi^n + c_1(E)\,\psi^{n-1} + \dots + c_n(E) = 0$$

(теорема 5.5). В частности, всякий класс α в $H^{2d}(P\overline{\mathcal{H}}_{0;n})$ можно представить в виде

$$\alpha = \pi^*(\eta_d) + \pi^*(\eta_{d-1})\psi + \pi^*(\eta_{d-2})\psi^2 + \dots,$$

где $\pi : P\overline{\mathcal{H}}_{0;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ — естественная проекция, а классы η_i лежат в когомологиях пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Из хорошо известного соотношения $\pi_*\psi^s = c_{s-n+1}(-E)$ (см., например, [22]) вытекает, что степень любого класса, представленного в таком виде, можно вычислить, воспользовавшись соотношением

$$\deg\,\alpha = \int\limits_{P\overline{\mathcal{H}}_{0;n}} \frac{\pi^*(\eta_d) + \pi^*(\eta_{d-1})\psi + \dots}{1-\psi} = \int\limits_{\overline{\mathcal{M}}_{0;n}} \frac{\eta_d + \eta_{d-1} + \eta_{d-2} + \dots}{c(E)}.$$

Таким образом, вычисление степени сводится к вычислению некоторых интегралов по пространствам модулей рациональных кривых с отмеченными точками, значения которых хорошо известны, см., например, [16] или [53]. Ниже мы приводим результаты вычислений степеней прямых образов основных классов вплоть до коразмерности два:

$$\begin{aligned}
\deg(1) &= n^{n-3}\\
\deg(\delta_{0,0}) &= \frac{1}{2}\,(n-1)\,(n+6)\,n^{n-4}\\
\deg(\xi_2) &= \frac{1}{3}\,(n-1)\,(17\,n^2-28\,n+12)\,n^{n-5}\\
\deg(\delta_{1,0}) &= -\frac{1}{6}\,(n-1)\,(n^2+10\,n-120)\,n^{n-5}\\
\deg(\delta_{0,0}^2) &= \frac{1}{12}\,(n-1)\,(3\,n^3+31\,n^2+82\,n-120)\,n^{n-5}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в вычисленные разложения стратов, мы получаем следующие формулы для их степеней:

$$\begin{aligned}
\deg(\sigma_{2^1}) &= \frac{9}{2}\,(n-2)\,(n-1)\,n^{n-4}\\
\deg(\sigma_{1^2}) &= 2\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n^{n-4}\\
\deg(\sigma_{3^1}) &= \frac{32}{3}\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n^{n-5}\\
\deg(\sigma_{1^1 2^1}) &= 9\,(n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n^{n-5}\\
\deg(\sigma_{1^3}) &= \frac{4}{3}\,(n-5)\,(n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n^{n-5}\\
\deg(\sigma_{2^1,2^1}) &= \frac{3}{8}\,(n-2)\,(n-1)\,(27\,n^2-137\,n+180)\,n^{n-5}\\
\deg(\sigma_{2^1,1^2}) &= 3\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,(3\,n^2-15\,n+20)\,n^{n-5}\\
\deg(\sigma_{1^2,1^2}) &= (n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,(2\,n^3-16\,n^2+43\,n-40)\,n^{n-5}.
\end{aligned}$$

Теорема 1.17 дает теперь такие формулы для чисел Гурвица:

$$\begin{aligned}
h_{2^1} &= \frac{9}{2}\,\frac{(2\,n-4)!}{(n-3)!}\,n^{n-5}\\
h_{1^2} &= 2\,\frac{(2\,n-4)!}{(n-4)!}\,n^{n-5}\\
h_{3^1} &= \frac{32}{3}\,\frac{(2\,n-5)!}{(n-4)!}\,n^{n-6}\\
h_{1^1 2^1} &= 9\,\frac{(2\,n-5)!}{(n-5)!}\,n^{n-6}\\
h_{1^3} &= \frac{4}{3}\,\frac{(2\,n-5)!}{(n-6)!}\,n^{n-6}
\end{aligned}$$

$$h_{2^1,2^1} = \frac{3}{4}\,(27\,n^2 - 137\,n + 180)\,\frac{(2\,n-6)!}{(n-3)!}\,n^{n-6}$$
$$h_{2^1,1^2} = 3\,(3\,n^2 - 15\,n + 20)\,\frac{(2\,n-6)!}{(n-4)!}\,n^{n-6}$$
$$h_{1^2,1^2} = 2\,(2\,n^3 - 16\,n^2 + 43\,n - 40)\,\frac{(2\,n-6)!}{(n-4)!}\,n^{n-6}$$

из которых относящиеся к одному вырожденному ветвлению известны из формулы Гурвица.

Другой подход к вычислению степеней стратов состоит в непосредственном применении формулы Гурвица (или, для произвольного рода, формулы из [16], которая, однако, менее явная) для чисел Гурвица мультиособенностей. Теорема 1.17 позволяет нам определить степень каждого страта вида σ_α. В рациональном случае $g = 0$, зная эти разложения стратов по прямым образам основных, мы можем вычислить степени по крайней мере некоторых из этих прямых образов. В нашем случае легко вычисляются степени $\deg(1)$, $\deg(\delta_{0,0})$, $\deg(\delta_{1,0})$, $\deg(\xi_2)$. Отметим, однако, что знание этих степеней недостаточно для подсчета степеней стратов мультимультиособенностей: в их разложение входит класс $\delta_{0,0}^2$. Его степень можно подсчитать, например, воспользовавшись степенью страта $\sigma_{2^1,2^1}$, которая известна из работы Звонкина [88].

5.5.3 О неизолированных особенностях

Хотя мы не имеем еще полной картины происходящего при включении в рассмотрение неизолированных особенностей, следует все-таки сказать несколько слов о них. Рассмотрим первый нетривиальный вклад неизолированных особенностей в случае рациональных функций, т.е. случай классов коразмерности 3. Обозначим через $\sigma^{\exp}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}$ ожидаемые разложения для соответствующих классов, полученные по универсальным формулам в предположении отсутствия особенностей типов, отличных от A_k и $I_{k,l}$. Они отличаются от правильных разложений классов $\sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}$ членами с носителями на множестве $I_\infty \subset B$ функций с неизолированными особенностями. Поскольку поправочные члены имеют ту же размерность что и подмногообразие I_∞, они должны быть пропорциональны фундаментальному классу этого подмногообразия с некоторым постоянным коэффициентом пропорциональности. Естественно предполагать, что этот коэффициент универсален, т.е. он не зависит ни от n, ни от выбора неприводимой компоненты подмногообразия I_∞. Численным подтверждением сделанного предположения служит то «неожиданное» наблюдение, что степень разности

$$\deg(\sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots} - \sigma^{\exp}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots})$$

пропорциональна степени страта I_∞,

$$\deg(I_\infty) = \frac{1}{8}(n-1)(n^3+11n^2+34n-120)n^{n-6},$$

с целым коэффициентом. Степени стратов $\sigma^{\exp}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}$ вычисляются методами, описанными выше, а истинную степень страта $\sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}$ можно вывести из формулы Гурвица. В следующей таблице приведены гипотетические вклады неизолированных особенностей в некоторые страты коразмерности 3:

$$\begin{aligned}
\sigma_{4^1} &= \sigma^{\exp}_{4^1} + 5\,I_\infty\\
\sigma_{1^1 3^1} &= \sigma^{\exp}_{1^1 3^1} - 16\,I_\infty\\
\sigma_{2^2} &= \sigma^{\exp}_{2^2} - 9\,I_\infty\\
\sigma_{1^2 2^1} &= \sigma^{\exp}_{1^2 2^1} + 36\,I_\infty\\
\sigma_{1^4} &= \sigma^{\exp}_{1^4} - 16\,I_\infty.
\end{aligned}$$

Литература

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves*, Springer (1984)

[2] В. И. Арнольд, *Топологическая классификация тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с равным числом вершин и ребер*, Функц. анал. прил., **30**, No. 1, 1–17 (1996)

[3] В. И. Арнольд, *Критические точки функций и классификация каустик*, УМН, **29**, No. 3, 243–244 (1974)

[4] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1, М., Наука (1982)

[5] C. Baines, *The multiplicity of the Lyashko–Looijenga mapping on the discriminant strata of even and odd polynomials*, in: Geometry and topology of caustics, Banach Center publ., **50**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 19–40 (1999)

[6] K. Behrend, Yu. Manin, *Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants*, Duke Math. J., **85**, no. 1, 1–60 (1996)

[7] I. Berstein, A. L. Edmonds, *On the classification of generic branched coverings of surfaces*, Illinois J. Math., **28**, No. 1, 64–82 (1984)

[8] D. Bouya, A. K. Zvonkin, *Topological classification of complex polynomials: New experimental results*, `http://dept-info.labri.u-bordeaux.fr/~zvonkin`

[9] A. Clebsch, *Zur Theorie der Riemann'schen Flächen*, Math. Ann., **6**, 216–230 (1873)

[10] M. Crescimanno, W. Taylor, *Large N phases of chiral* QCD_2, Nuclear Phys. B, **437**, no. 1, 3–24 (1995)

[11] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., No. 36, (1969) 75–109.

[12] I. Dolgachev, D. Ortland, *Point sets in projective spaces and theta functions*, Asterisque,no. 165, Soc. Math. France, Paris (1988)

[13] B. A. Dubrovin, *Geometry of 2D Topological Field Theories*, in: Lecture Notes in Math., **1620**, Springer, Berlin, 120–348 (1996)

[14] A. L. Edmmonds, L. S. Kulkarni, R. E. Strong, *Realizability of branched covers of surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **282**, 773–790 (1984)

[15] T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, *On Hurwitz numbers and Hodge integrals*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328**, 1175–1180 (1999)

[16] T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves*, Invent. math. **146**, 297–327 (2001)

[17] M. El Marraki, N. Hanusse, J. Zipperer, A. Zvonkin, *Cacti, braids and complex polynomials* Séminaire Lotharingien de Combinatoire, **vol 37** (1997) `http://cartan.u-strasbg.fr/~slc`

[18] C. Faber, R. Pandharipande, *Hodge integrlas and Gromov–Witten theory*, Invent. Math., **139**, 173-199 (2000), math.AG/9810173

[19] C. Faber, R. Pandharipande, *Hodge integrals, partition matrices, and the λ_g-conjecture*, Ann. of Math. (2), **157**, no. 1, 97–124 (2003)

[20] C. Fantechi, R. Pandharipande, *Stable maps and branch divisors*, Compositio Math., **130**, no. 3, 345–364 (2002), math.AG/9905104

[21] M. Fried, R. Biggers, *Moduli spaces of covers and the Hurwitz monodromy group*, J. Reine Angew. Math., **335**, 87–121 (1982)

[22] W. Fulton, *Intersection Theory*, 2nd edition, Springer (1998) [Русский перевод первого издания: В. Фултон, *Теория пересечений*, М., Мир (1997)]

[23] M. Giusti, *Classification des singularités isolées simples d'intersections complètes*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **40**, Part 1, 457–494 (1983)

[24] В. В. Горюнов, *Особенности проектирований полных пересечений*, в: Современные проблемы математики, **22**, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, М., 167–206 (1983)

[25] V. Goryunov, *Functions on space curves*, J. London Math. Soc. (2), **61**, 807–822 (2000)

[26] V. Goryunov, S. K. Lando, *On enumeration of meromorphic functions on the line*, in: The Arnoldfest, Fields Inst. Commun., **vol. 24**, AMS, Providence, RI, 209–222 (1999)

[27] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *Transitive factorisation into transpositions, and holomorphic mappings on the sphere*, Proc. AMS, **vol. 125**, No. 1, 51–60 (1997)

[28] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group*, Europ. J. Combinatorics, **vol. 13** 357–365 (1992)

[29] I. P. Goulden, D. M. Jackson, *A proof of a conjecture for the number of ramified coverings of the sphere by the torus*, J. Combin. Theory Ser. A, **88** 246–258 (1999)

[30] I. P. Goulden, D. M. Jackson, A. Vainshtein, *The number of ramified coverings of the sphere by the torus and surfaces of higher genera*, Annals of Combin., **4**, 27–46 (2000)

[31] I. P. Goulden, D. M. Jackson, R. Vakil, *The Gromov–Witten potential of a point, Hurwitz numbers, and Hodge integrals*, Proc. London Math. Soc. (3), **83**, 563–581 (2001)

[32] A. Goupil, G. Schaeffer, *Factoring n-cycles and counting maps of given genus*, Europ. J. Combinat., **19**, No. 7, 819–834 (1998)

[33] T. Graber, R. Pandharipande, *Localization of virtual classes*, Invent. Math., **135**, 487–518 (1999)

[34] T. Graber, R. Vakil, *Hodge integrals and Hurwitz numbers via virtual localization*, Compositio Math., **135**, no. 1, 25–36 (2003), math.AG/0003028

[35] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, М., Мир (1982)

[36] D. Gross, W. Taylor, *Two-dimensional QCD is a string theory*, Nuclear Phys B., **400**, 181–210 (1993)

[37] Дж. Харрис, Я. Моррисон, *Модули кривых*, М., Мир, Научный мир (2004)

[38] J. Harris, D. Mumford, *On the Codaira dimension of the moduli space of curves*, Invent. Math., **67**, 23–88 (1982)

[39] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann., **39**, 1–61 (1891)

[40] A. Hurwitz, *Über die Anzahl der Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann., **55**, 53–66 (1902)

[41] D. M. Jackson, *Some combinatorial problems associated with products of conjugacy classes of the symmetric group*, J. Combinatorial Theory, **49**, 363–369 (1988)

[42] D. M. Jackson, *Counting cycles in permutations by group characters, with an application to a topological problem*, Trans. Amer. Math. Soc., **299**, 785–801 (1987)

[43] S. Keel, *Intersection theory of moduli space of stable n-pointed curves of genus zero*, Transaction of the American Mathematical Society, vol. **330** (1992), no 2, 545–574.

[44] М. Э. Казарян, *Мультиособенности, кобордизмы и перечислительная геометрия*, УМН, **58**, вып. 4, 665–724 (2003)

[45] M. E. Kazaryan, *Morin maps and their characteristic classes*, preprint (2002)

[46] M. E. Kazaryan, *Classifying spaces of singularities and Thom polynomials*, in: New developments in singularity theory, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **21**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 117–134 (2001)

[47] М. Э. Казарян, *Относительная теория Морса одномерных слоений и циклические гомологии*, Функ. Анал. и Прилож., **31** вып. 1, 20–31 (1997)

[48] М. Э. Казарян, С. К. Ландо, *К теории пересечений на пространствах Гурвица*, Изв. РАН, сер. матем., no. 5, 82–113 (2004)

[49] A. G. Khovansky, S. Zdravkovska, *Branched covers of S^2 and braid groups*, J. of Knot Theory and its Ramifications, **5**, No. 1, 55–75 (1996)

[50] M. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys., **147**, 1–23 (1992)

[51] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus action*, in "The Moduli Space of Curves", R. Dijkgraaf a.o. eds., Birkhäuser, 335–368 (1995)

[52] M. Kontsevich, Yu. I. Manin, *Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys, **164** 525–562 (1994)

[53] С. К. Ландо, *Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых*, УМН, **57**, вып. 3, 463–533 (2002)

[54] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and Their Applications*, with an Appendix by D. Zagier, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **141**, xv+455, Springer, Berlin (2004)

[55] С. К. Ландо, Д. Звонкин, *О кратностях отображения Ляшко–Лойенги на стратах дискриминанта*, Функц. анал. прил., No. 3, 178–188 (1999)

[56] S. K. Lando, D. Zvonkine, *Counting ramified coverings and intersection theory on spaces of rational functions I*, math.AG/0303218, 26 pp. (2003)

[57] A.-M. Li, G. Zhao, Q. Zheng, *The number of ramified coverings of a Riemann surface by Riemann surface*, Comm. Math. Phys., **213**, 685–696 (2000)

[58] E. Looijenga, *The complement of the bifurcation variety of a simple singularity*, Inv. Math., **vol. 23**, 105–116 (1974)

[59] J. Lüroth, *Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'sche Fläche*, Math. Ann., **4**, 181–184 (1871)

[60] O. V. Lyashko, *Geometry of bifurcation diagrams*, J. Soviet Math., **27**, 2736–2759 (1984)

[61] Yu. I. Manin, *Frobenius manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces*, AMS Colloquium Publications, vol. **47**, AMS, Providence, RI (1999) [Русский перевод: Ю. И. Манин *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*, М., Факториал Пресс (2002)]

[62] Yu. Manin, P. Zograf, *Invertible cohomological field theories and Weil-Petersson volumes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **50**, no. 2, 519-535 (2000)

[63] А. Д. Медных, *Определение числа неособых накрытий компактной римановой поверхности*, ДАН, **239**, No. 2, 269–271 (1978)

[64] А. Д. Медных, *Неэквивалентные накрытия римановых поверхностей с заданным типом ветвления*, Сиб. матем. журн., **25**, 120–142 (1984)

[65] A. D. Mednykh, *Branched coverings of Riemann surfaces whose branch orders coincide with the multiplicity*, Comm. in Algebra, **18**, 1517–1533 (1990)

[66] А. Мигдал, ЖЭТФ, **69**, 810 (1975)

[67] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry on the moduli spaces of curves*, in: Progress in Math., **36**, Birkhüaser, Boston MA, 271–328 (1983)

[68] Y. Mycielski, *Polynomials with preassigned values at their branching points*, Amer. Math. Monthly, Vol. **77**, 853–855 (1970)

[69] S. M. Natanzon, *Topology of 2-dimensional Coverings and Meromorphic Functions on Real and Complex Algebraic Curves*, Selecta Mathematica *formerly* Sovietica, Vol. **12**, No 3, 251–291 (1993)

[70] S. M. Natanzon, *Spaces of meromorphic functions on Riemann surfaces*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol. **180**, 175–180 (1997)

[71] S. M. Natanzon, V. Turaev, *A compactification of the Hurwitz space*, Topology, 889–914 (1999)

[72] A. Okounkov, *Toda equations for Hurwitz numbers*, Math. Res. Lett., **7**, no. 4, 447–453 (2000)

[73] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Gromov–Witten theory, Hurwitz numbers, and Matrix models, I*, math.AG/0101147

[74] А. Н. Протопопов, *Гомеоморфизмы разветвленных накрытий двумерной сферы*, ДАН, **290**, No. 4, 792–795 (1986)

[75] G. B. Shabat, A. K. Zvonkin, *Plane trees and algebraic numbers*, AMS, Contemporary Mathematics, **178**, 233–275 (1994)

[76] B. Shapiro, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Ramified coverings of* S^2 *with one degenerate branching point and enumeration of edge-oriented graphs*, AMS Transl. **180**, 219–227 (1997)

[77] V. Strehl, *Minimal transitive products of transpositions - the reconstruction of a proof by A. Hurwitz*, Sem. Lothar. Combinat. **36**, Art. S37c, pp. 12 (1996)

[78] R. Thom, *L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynôme*, Topology, **3**, 297–307 (1965)

[79] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variété différentiables*, Comment. Math. Helv., **28**, 17–86 (1954). [Русский перевод: Р. Том, *Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий*, в: Расслоенные пространства и их приложения, М., ИЛ, 293–351 (1958)]

[80] R. Vakil, *Genus* 0 *and* 1 *Hurwitz numbers: recursions, formulas, and graphic-theoretic interpretations*, Trans. Amer. Nath. Soc., **353**, 4025–4038 (2001)

[81] Э. Б. Винберг, *Линейные представления групп*, М., Наука (1985)

[82] B. Wajnrib, *Orbits of Hurwitz action for coverings of the sphere with two special fibers*, Indag. Mathem., N.S., **7** (4), 549–558 (1996)

[83] H. Weyl, *Über das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl Riemannischer Flächen von gegeneber Verzweigungsart*, Commentarii Mathematici Helvetici, **3**, 103–113 (1931)

[84] E. Witten, *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, Surveys in Diff. Geom. **1**, 243–310 (1991)

[85] С. Здравковска, *Топологическая классификация полиномиальных отображений*, УМН, **25**, No. 4 179–180 (1970)

[86] D. Zvonkine, *Multiplicities of the Lyashko–Looijenga map on its strata*, C. R. Acad. Sci, **t. 324**, série I, p. 1349–1353 (1997)

[87] D. Zvonkine, *Transversal multiplicities of the Lyashko–Looijenga map*, C. R. Acad. Sci, **t. 325**, série I, 589–594 (1997)

[88] D. Zvonkine, *Counting ramified coverings and intersection theory on Hurwitz spaces II* (*Local structures of Hurwitz spaces and combinatorial results*), preprint, math.AG/0304251 39 pp. (2003)

[89] D. Zvonkine, *An algebra of power series arising in the intersection theory on moduli spaces of curves and in the enumeration of ramified coverings of the sphere*, mathAG/04 (2004)

[90] D. Zvonkine, *Énumération des revêtements ramifiés des surfaces de Riemann*, Thése, Université Paris-Sud Orsay (2003)