ОСОБЕННОСТИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК ТРЁХМЕРНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ *

И. А. Богаевский

Аннотация

В статье изучаются с точностью до диффеоморфизмов особенности выпуклых оболочек общих компактных гладких гиперповерхностей без края, лежащих в четырёхмерном аффинном пространстве. Оказывается, что в отдельных точках границы выпуклой оболочки могут возникать лишь две новые (по сравнению со случаем предыдущей размерности) особенности, не устранимые малым шевелением исходной гиперповерхности. Одна из этих особенностей не содержит функциональных модулей, но имеет по крайней мере девять числовых. Для другой особенности найдена нормальная форма, вообще не содержащая модулей.

Введение

Выпуклая оболочка компактного подмножества аффинного пространства – это пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств. Граница выпуклой оболочки компактной гладкой гиперповерхности без края может иметь особенности. Например, особенности границы выпуклой оболочки общей замкнутой кривой на плоскости исчерпываются разрывами второй производной (см. рис. 1).

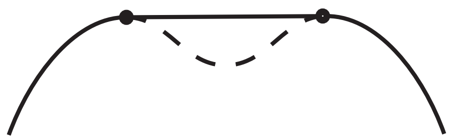

Рис. 1. Особенности выпуклой оболочки общей кривой на плоскости

В настоящей работе изучаются с точностью до диффеоморфизмов особенности выпуклых оболочек общих компактных гладких (класса C^∞) гиперповерхностей без края, вложенных в четырёхмерное аффинное пространство. Оказывается, что в отдельных точках границы выпуклой оболочки могут возникать лишь две новые (по сравнению со случаем предыдущей размерности) особенности. Одна из этих особенностей не содержит функциональных модулей, но имеет по крайней мере девять числовых. Для другой особенности найдена нормальная форма, вообще не содержащая модулей.

Особенностью выпуклой оболочки мы называем её росток в особой точке границы. Как обычно, *общие* гиперповерхности – это вложения, образующие открытое всюду плотное множество в снабжённом C^∞-топологией пространстве всех рассматриваемых вложений. Иначе говоря, мы интересуемся лишь теми особенностями выпуклой оболочки, которые не устранимы малым шевелением исходной гиперповерхности.

Касательная гиперплоскость, от которой гиперповерхность лежит по одну сторону, называется *опорной*. Опорная гиперплоскость называется *неособой*, если она имеет с гиперповерхностью только одну общую точку – точку невырожденного касания. Все остальные опорные

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01104).

гиперплоскости называются *особыми*. Например, особые опорные гиперплоскости к общей кривой на плоскости исчерпываются прямыми двойного невырожденного касания. Особенности выпуклой оболочки компактной гиперповерхности без края могут возникать только на её особых опорных гиперплоскостях.

Трёхмерное пространство. Выпуклая оболочка общей компактной поверхности без края в трёхмерном пространстве может иметь особенности лишь двух видов – простейшие и угловые в нашей терминологии. Нормальная форма угловой особенности содержит числовой *модуль* (непрерывный инвариант) относительно диффеоморфизмов. Эти особенности, показанные на рис. 2, были найдены в работе [1], на результатах которой мы сейчас остановимся более подробно.

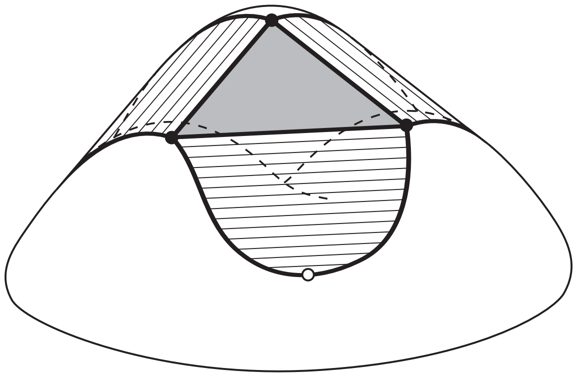

Рис. 2. Особенности выпуклой оболочки общей поверхности

Типичная особая опорная гиперплоскость к общей поверхности в трёхмерном пространстве имеет две (и только две) точки невырожденного касания с поверхностью ($2A_1$-*плоскость*). Отдельные же особые опорные гиперплоскости могут иметь либо три точки невырожденного касания с поверхностью, которые не лежат на одной прямой, либо одну точку вырожденного касания A_3. Такие гиперплоскости мы называем $3A_1$- и A_3-*плоскостями* соответственно.

Отрезок, соединяющий точки касания поверхности и её опорной $2A_1$-плоскости, называется *опорным*. Он целиком лежит на границе выпуклой оболочки исходной поверхности. Во внутренних точках опорного отрезка граница выпуклой оболочки является гладкой, а в окрестностях его концов – диффеоморфна цилиндру над кривой с особенностью, изображенной на рис. 1. Такие особенности выпуклой оболочки мы называем *простейшими* и обозначаем через $\mathcal{R}_1$.

Треугольник с вершинами в точках касания поверхности и её опорной $3A_1$-плоскости называется *опорным*. В его окрестности граница выпуклой оболочки состоит из самого опорного треугольника, к сторонам которого примыкают три гладкие полуповерхности, сотканные из опорных отрезков, а к вершинам – три куска исходной поверхности. Выпуклая оболочка имеет простейшие особенности во внутренних точках сторон опорного треугольника, а в окрестности каждой его вершины она диффеоморфна подграфику квадрата расстояния до угла величины β, где $0 < \beta < \pi$ – единственный модуль в нормальной форме, зависящий не только от угла при вершине опорного треугольника, но и от самой поверхности. Такие особенности выпуклой оболочки мы называем *угловыми*. Заметим, что здесь вместо подграфика квадрата расстояния можно рассматривать и его надграфик – они диффеоморфны при замене β на $\pi - \beta$.

Наконец, в любой *опорной A_3-точке* (точке касания с опорной A_3-плоскостью) выпуклая оболочка общей поверхности вновь имеет простейшую особенность. А именно, в окрестности такой точки граница выпуклой оболочки состоит из куска исходной поверхности и примыкающей к нему гладкой полуповерхности, сотканной из вырождающихся в точку опорных отрезков.

Четырёхмерное пространство. Особенности выпуклой оболочки общей гиперповерхности, лежащей в четырёхмерном пространстве, исследовались в работах [2] и [3]. В первой из них получены нормальные формы особенностей выпуклых оболочек в случае, когда опорная гиперплоскость касается исходной гиперповерхности одним из тех способов, которые были описаны выше для трёхмерного пространства. Таким образом, простейшие и угловые особенности выпуклых оболочек возникают и в четырёхмерном пространстве.

Во внутренних точках опорных отрезков $2A_1$-плоскостей граница выпуклой оболочки является гладкой, а в их концах имеет простейшие особенности. Сами же опорные отрезки целиком лежат на границе выпуклой оболочки исходной гиперповерхности.

Во внутренних точках опорных треугольников $3A_1$-плоскостей граница выпуклой оболочки является гладкой, а во внутренних точках их сторон имеет простейшие особенности. Сами опорные треугольники целиком лежат на границе выпуклой оболочки исходной гиперповерхности. В окрестности же каждой из их вершин наша выпуклая оболочка диффеоморфна криволинейному цилиндру над рассмотренной ранее угловой особенностью с $\beta(z) = \beta_0 + z$, $\beta(z) = \beta_0 + z^2$ или $\beta(z) = \beta_0 - z^2$, где $0 < \beta_0 < \pi$ – единственный модуль в каждой из трёх указанных нормальных форм, а z – координата вдоль образующей цилиндра. Такие особенности выпуклой оболочки мы тоже называем *угловыми*, а обозначаем через $\mathcal{R}_2^0$, $\mathcal{R}_2^+$ и $\mathcal{R}_2^-$ соответственно.

Наконец, в опорных A_3-точках выпуклая оболочка общей гиперповерхности вновь имеет простейшие особенности.

Однако, у трёхмерной гиперповерхности среди её опорных гиперплоскостей могут встречаться новые для нас $4A_1$- и A_1A_3-*плоскости*, которые нельзя устранить её малым шевелением. Первая из этих плоскостей имеет четыре не лежащие в одной плоскости точки невырожденного касания с исходной гиперповерхностью, а вторая – одну точку невырожденного касания и одну точку касания A_3.

Тетраэдр с вершинами в точках касания гиперповерхности и её опорной $4A_1$-плоскости называется *опорным*. В его окрестности граница выпуклой оболочки состоит из самого опорного тетраэдра, к граням которого примыкают четыре гладких страта, сотканных из опорных треугольников, к ребрам – шесть гладких стратов, сотканных из опорных отрезков, а к вершинам – четыре куска исходной гиперповерхности. Таким образом, в рассматриваемом случае особые точки границы выпуклой оболочки делят её на 15 $(1 + 4 + 6 + 4)$ стратов так, как показано на рис. 3 слева.

Чтобы представлять себе выпуклую оболочку в четырёхмерном пространстве, удобно аффинно проектировать её на опорную гиперплоскость к исходной гиперповерхности. Тогда граница выпуклой оболочки локально является графиком непрерывно дифференцируемой функции (см., например, [1]), типичные особенности которой – разрывы второй производной. В окрестности опорного тетраэдра общей трёхмерной гиперповерхности точки этих разрывов образуют 28 гладких стратов, которые и изображены на рис. 3 слева.

Согласно [2], во внутренних точках граней опорного тетраэдра выпуклая оболочка общей трёхмерной гиперповерхности имеет простейшие особенности, а во внутренних точках его ребер – угловые. В настоящей работе доказано, что в вершинах опорных тетраэдров росток выпуклой оболочки не содержит функциональных модулей относительно диффеоморфизмов. Эту особенность мы обозначаем через $\mathcal{R}_3$. Нормальную форму для неё найти не удаётся, так же как и точное количество числовых модулей. Известно только, что оно заведомо не меньше девяти, но, по всей видимости, намного больше.

Кроме того, мы изучаем особенности выпуклой оболочки в единственном оставшемся неисследованным случае, когда общая гиперповерхность имеет опорную A_1A_3-плоскость. Отрезок, соединяющий их точки касания, мы называем *опорным* A_1A_3-*отрезком*. Он целиком принадлежит выпуклой оболочке исходной гиперповерхности. Согласно нашим результатам, выпуклая оболочка общей трёхмерной гиперповерхности во внутренних точках её опорного A_1A_3-отрезка имеет простейшие особенности, а в конце A_3 – угловую особенность $\mathcal{R}_2^0$. В конце же A_1 опорного A_1A_3-отрезка у выпуклой оболочки возникает ещё одна новая особенность, которую мы обозначаем через $\mathcal{V}_3$. Эта особенность не содержит модулей и диффеоморфна своей нормальной

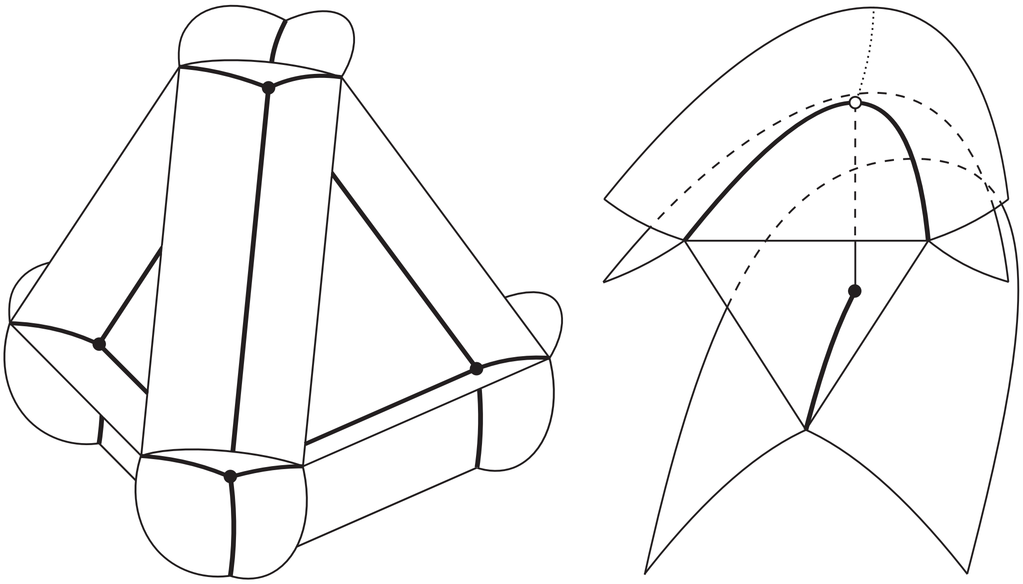

Рис. 3. Особенности выпуклой оболочки общей трёхмерной гиперповерхности в окрестности опорного тетраэдра и в окрестности опорного A_1A_3-отрезка

форме – подграфику квадрата расстояния до той компоненты дополнения к ласточкину хвосту, которая состоит из многочленов, не имеющих вещественных корней.

В окрестности опорного A_1A_3-отрезка граница выпуклой оболочки общей гиперповерхности разбивается своими особыми точками на пять стратов, четыре из которых продолжаются до гладких, а пятый является негладким – явление, которое ранее не встречалось. Проекция особых точек границы выпуклой оболочки на опорную A_1A_3-плоскость изображена на рис. 3 справа. Она состоит из трёх гладких полуповерхностей, оборванного ласточкина хвоста и половины зонтика Уитни. Сам опорный A_1A_3-отрезок лежит на зонтике Уитни, а из его конца A_3 выходит гладкая кривая, состоящая из опорных A_3-точек и выделенная на рис. 3 точками. Заметим, что нормализующие диффеоморфизмы, вообще говоря, не сохраняют ни опорный A_1A_3-отрезок, ни кривую опорных A_3-точек.

Внутри оборванного ласточкина хвоста граница выпуклой оболочки представляет собой исходную гиперповерхность. Внутри зонтика Уитни лежит гладкий страт, сотканный из опорных треугольников, которые вырождаются в опорный A_1A_3-отрезок. Страт, граничащий с этими двумя, является негладким и соткан из опорных отрезков. К нему прилегает ещё один кусок исходной гиперповерхности, ограниченный двумя полуповерхностями. Оставшийся гладкий страт тоже ограничен двумя полуповерхностями и соткан из опорных отрезков, вырождающихся в опорные A_3-точки.

В [3] объединение оборванного ласточкина хвоста и половины зонтика Уитни, линии самопересечений которых совпадают, а касательные конусы трансверсальны, названо *парусником.* Там же установлено, что проекция особых точек границы выпуклой оболочки на опорную A_1A_3-плоскость к общей гиперповерхности в окрестности точки касания A_1 является парусником, а все парусники локально диффеоморфны друг другу. Согласно нашим результатам, в этом случае сама выпуклая оболочка приводится к указанной выше локальной нормальной форме, которая тоже не содержит модулей.

В [4] была высказана гипотеза, что особенности выпуклой оболочки общей компактной гиперповерхности без края, лежащей в четырёхмерном аффинном пространстве, функциональных модулей не имеют. Таким образом, в настоящей работе эта гипотеза доказана.

Итак, в окрестности типичной точки границы выпуклая оболочка общей трёхмерной компактной гиперповерхности без края диффеоморфна замкнутому полупространству. Точки границы, в которых выпуклая оболочка имеет простейшие особенности $\mathcal{R}_1$, образуют гладкую двумерную поверхность. Наконец, угловые особенности $\mathcal{R}_2^0$ возникают вдоль гладких кривых, а особенности $\mathcal{R}_2^+$, $\mathcal{R}_2^-$, $\mathcal{R}_3$ и $\mathcal{V}_3$ – в отдельных точках границы выпуклой оболочки.

Особенности $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2^0$, $\mathcal{R}_2^\pm$ и $\mathcal{V}_3$ допускают следующие единообразные представления. А именно, простейшая особенность $\mathcal{R}_1$ диффеоморфна подграфику квадрата расстояния до трёхмерного полупространства, угловая особенность $\mathcal{R}_2^0$ или $\mathcal{R}_2^\pm$ – подграфику квадрата расстояния до двугранного угла переменной величины $\beta(z)$, где $\beta(z) = \beta_0 + z$ или $\beta(z) = \beta_0 \pm z^2$ соответственно, а особенность $\mathcal{V}_3$ – подграфику квадрата расстояния до одной из компонент дополнения к ласточкину хвосту. Для особенности $\mathcal{R}_3$ аналогичного представления, по всей видимости, нет.

Высшие размерности. Согласно [5], начиная с пятимерного пространства выпуклая оболочка может иметь функциональные модули, не устранимые малым шевелением исходной компактной гиперповерхности без края. Например, они возникают как соотношения между несколькими числовыми модулями (которые уже имеются в четырёхмерном пространстве) вдоль линий, образованных вершинами опорных тетраэдров.

Терминология. Термин «гладкий» всегда означает «бесконечно гладкий». Термин «общий» употребляется для гладких отображений и означает, что данное утверждение справедливо лишь для некоторого открытого всюду плотного множества в снабжённом C^∞-топологией пространстве всех рассматриваемых отображений. Термин «типичный» употребляется для точек на многообразиях и означает, что данное утверждение справедливо лишь для некоторого открытого всюду плотного множества точек.

Расположение материала. В разд. 1 мы даём необходимые определения и строго формулируем результаты (теоремы 0 и 1), изложенные в настоящем введении. В разд. 2 доказательство этих результатов разбивается на три шага – теоремы 2, 3 и 4, которые доказаны в разд. 3.

Теорема 2 из разд. 2 утверждает, что граница выпуклой оболочки общей компактной трёхмерной гиперповерхности без края является фронтом лежандрова многообразия, которое может иметь лишь следующие стандартные особенности: $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$, $\widetilde{R_3}$ и $\widetilde{V_3}$. Модулей эти особенности не имеют, а их нормальные формы относительно контактоморфизмов найдены в разд. 2. Особенности $\widetilde{R_1}$ возникают на гладких двумерных поверхностях, особенности $\widetilde{R_2}$ – вдоль гладких кривых, а особенности $\widetilde{R_3}$ и $\widetilde{V_3}$ – в отдельных точках лежандрова многообразия.

В теореме 3 из разд. 2 приведена классификация ростков общего лежандрова расслоения в точках нашего лежандрова многообразия с точностью до контактоморфизмов, сохраняющих уже найденные его локальные нормальные формы $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$, $\widetilde{R_3}$ и $\widetilde{V_3}$. При этом мы рассматриваем лишь те расслоения, под действием которых фронт нашего лежандрова многообразия является непрерывно дифференцируемым многообразием. (Этим свойством обладает граница выпуклой оболочки любой компактной гиперповерхности без края.) При доказательстве теоремы 3 мы используем технику, развитую в [6].

Наконец, в теореме 4 из разд. 2 вычисляются фронты лежандровых отображений из теоремы 3. Они и являются искомыми нормальными формами особенностей выпуклых оболочек. Так особенности $\widetilde{R_1}$ лежандрова многообразия проектируются в простейшие особенности выпуклой оболочки, особенности $\widetilde{R_2}$ – в угловые, особенности $\widetilde{R_3}$ – в особенности $\mathcal{R}_3$, а особенности $\widetilde{V_3}$ – в особенности $\mathcal{V}_3$.

Благодарности. Автор благодарен В. Д. Седых за постановку задачи и внимание к работе, а В. В. Горюнову и Ю. Г. Прохорову – за многочисленные полезные обсуждения.

1. Классификация особенностей выпуклых оболочек

Выпуклые оболочки и опорные симплексы

Определение. *Выпуклая оболочка* компактного подмножества аффинного пространства – это пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств.

Определение. *Опорной гиперплоскостью* к подмножеству аффинного пространства называется всякая гиперплоскость, от которой данное подмножество лежит по одну сторону, и с которой оно имеет хотя бы одну общую точку.

Если наше подмножество – гладкое многообразие, то среди его опорных гиперплоскостей выделяются так называемые $A_{l_1}\dots A_{l_m}$-плоскости.

Определение. Опорная гиперплоскость к гладкому многообразию называется $A_{l_1}\dots A_{l_m}$-*плоскостью* (l_1, …, l_m – положительные нечётные числа), если:

1) она имеет с данным многообразием m точек касания A_{l_1}, …, A_{l_m} соответственно;

2) эти точки касания являются вершинами $(m-1)$-мерного симплекса, который называется *опорным симплексом* $A_{l_1}\dots A_{l_m}$*-плоскости* или *опорным* $A_{l_1}\dots A_{l_m}$*-симплексом.*

Опорная A_1-плоскость называется *неособой.* Остальные опорные гиперплоскости называются *особыми.*

Замечание. Если $l_1=\ldots=l_m=1$, то вместо $A_1\dots A_1$ мы пишем mA_1.

Замечание. Гладкое k-мерное многообразие имеет с гиперповерхностью точку касания A_l (l – натуральное), если сужение на него какого-нибудь локального уравнения данной гиперповерхности в подходящих локальных координатах имеет вид $\pm\xi_1^{l+1}\pm\xi_2^2\pm\ldots\pm\xi_k^2$.

Согласно [1], если $k=1$ или $n\leqslant 7$, то граница выпуклой оболочки общего компактного k-мерного многообразия без края в n-мерном аффинном пространстве состоит из опорных $A_{l_1}\dots A_{l_m}$-симплексов, где $l_1+\ldots+l_m\leqslant n$. В частности, в рассматриваемом случае $n=4$ она состоит из опорных A_1-точек, опорных $2A_1$-отрезков, опорных $3A_1$-треугольников, опорных $4A_1$-тетраэдров, опорных A_3-точек и опорных A_1A_3-отрезков.

Иерархия особенностей выпуклых оболочек

Простейшая особенность $\mathcal{R}_1$. Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность* $\mathcal{R}_1$, если он диффеоморфен ростку в нуле множества

$$\mathcal{R}_1=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\ :\ \min_{p\geqslant 0}\left(\frac{p^2}{2}+px+t\right)\leqslant 0\right\}.$$

Замечание. Множество $\mathcal{R}_1$ – это подграфик функции от x, y и z, равной половине квадрата стандартного расстояния на прямой от точки x до луча $x\geqslant 0$.

Угловые особенности $\mathcal{R}_2^0$ и $\mathcal{R}_2^\pm$. Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность* $\mathcal{R}_2^0$, $\mathcal{R}_2^+$ или $\mathcal{R}_2^-$, если он диффеоморфен ростку в нуле множества $\mathcal{R}_2(\alpha)$, где $\alpha(z)=a+z$, $a+z^2$ или $a-z^2$ соответственно, $|a|<1$, а

$$\mathcal{R}_2(\alpha)=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\ :\ \min_{p,q\geqslant 0}\left(\frac{p^2+q^2}{2}+\alpha(z)pq+px+qy+t\right)\leqslant 0\right\}.$$

Замечание. Множество $\mathcal{R}_2(\alpha)$ – это подграфик функции от x, y и z, равной половине квадрата расстояния от точки (x,y) до координатного угла $\{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ на плоскости с евклидовой метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 - 2\alpha(z)dxdy + dy^2}{1-\alpha^2(z)},$$

для величины которого справедлива формула $\beta(z) = \pi - \arccos\alpha(z)$.

Особенность $\mathcal{R}_3$. Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность* $\mathcal{R}_3$, если он диффеоморфен ростку в нуле множества

$$\mathcal{R}_3(F) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ : \ \min_{p,q,r \geqslant 0} F(p,q,r;x,y,z,t) \leqslant 0\right\},$$

где F – многочлен, разложение которого на квазиоднородные составляющие при $\deg p = \deg q = \deg r = 1$, $\deg x = \deg y = \deg z = 1$ и $\deg t = 2$ имеет вид $F = F_2 + F_3 + \ldots$, причём

$$F_2(p,q,r;x,y,z,t) = \frac{p^2+q^2+r^2}{2} + apq + bpr + cqr + px + qy + rz + t,$$

а числа a, b и c таковы, что квадратичная форма $(p^2+q^2+r^2)/2 + apq + bpr + cqr$ положительно определена.

Например, множество $\mathcal{R}_3(F_2)$ – это подграфик половины квадрата расстояния от точки (x,y,z) до координатного угла $\{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$ в пространстве с евклидовой метрикой, заданной матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{Vmatrix}^{-1}.$$

Замечание. Числа a, b и c являются описанными в [4] модулями особенности $\mathcal{R}_3$ выпуклой оболочки относительно диффеоморфизмов, а из теорем 3 и 4 следует, что ещё шесть модулей находятся среди коэффициентов квазиоднородной составляющей F_3 многочлена F.

Особенность $\mathcal{V}_3$. Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность* $\mathcal{V}_3$, если он диффеоморфен ростку в нуле подграфика $\mathcal{V}_3$ половины квадрата стандартного расстояния от точки (x,y,z) до тела

$$V_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \forall\, \tau \in \mathbb{R} \quad \tau^4 + x\tau^2 + y\tau + x^2/4 + z \geqslant 0\right\},$$

ограниченного оборванным ласточкиным хвостом и состоящего из неотрицательных приведённых многочленов четвёртой степени.

Примыкания особенностей. Особенности выпуклых оболочек следующим образом примыкают друг к другу:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathcal{R}_2^{\pm} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \mathcal{R}_0 & \leftarrow & \mathcal{R}_1 & \leftarrow & \mathcal{R}_2^0 & \leftarrow & \mathcal{R}_3 \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & \mathcal{V}_3 & & \end{array},$$

где через $\mathcal{R}_0$ обозначен росток замкнутого полупространства в точке его границы.

Формулировки результатов

Следующая теорема доказана в [2].

Теорема 0. *Выпуклая оболочка общей компактной гиперповерхности без края, лежащей в четырёхмерном аффинном пространстве, имеет особенности*

$\mathcal{R}_0$ *в опорных* A_1*-точках и во внутренних точках опорных симплексов* $2A_1$-, $3A_1$- *и* $4A_1$*-плоскостей;*

$\mathcal{R}_1$ *в концах опорных* $2A_1$*-отрезков, во внутренних точках сторон опорных* $3A_1$*-треугольников и во внутренних точках граней опорных* $4A_1$*-тетраэдров;*

$\mathcal{R}_2^0$ *в типичных вершинах опорных* $3A_1$*-треугольников и в типичных внутренних точках ребер опорных* $4A_1$*-тетраэдров;*

$\mathcal{R}_2^\pm$ *в оставшемся конечном числе вершин опорных* $3A_1$*-треугольников и в оставшемся конечном числе внутренних точек ребер опорных* $4A_1$*-тетраэдров.*

Основная теорема 1 настоящей работы завершает эту классификацию.

Теорема 1. *Выпуклая оболочка общей компактной гиперповерхности без края, лежащей в четырёхмерном аффинном пространстве, имеет особенности*

$\mathcal{R}_3$ *в вершинах опорных* $4A_1$*-тетраэдров;*

$\mathcal{R}_1$ *во внутренних точках опорных* A_1A_3*-отрезков;*

$\mathcal{R}_2^0$ *в точках касания* A_3 *опорных* A_1A_3*-плоскостей;*

$\mathcal{V}_3$ *в точках касания* A_1 *опорных* A_1A_3*-плоскостей;*

причём квазистепень многочлена F *из определения особенности* $\mathcal{R}_3$ *ограничена числом* $d \geqslant 3$*, не зависящим от гиперповерхности.*

Теоремы 0 и 1 следуют из теорем 2, 3 и 4, сформулированных в разд. 2 и доказанных в разд. 3 настоящей работы.

2. Приведение к нормальным формам

Особенности лежандровых многообразий

Пусть B – гладкое многообразие, а $\xi \in B$ – любая его точка. Напомним, что *коориентированным контактным элементом* к B называется всякое замкнутое линейное полупространство в касательном пространстве $T_\xi B$. Точка ξ называется *точкой приложения* контактного элемента.

Хорошо известно, что в пространстве ST^*B всех коориентированных контактных элементов к B имеется естественная *контактная структура* (поле гиперплоскостей, удовлетворяющее условию максимальной неинтегрируемости): контактный элемент разрешается двигать так, чтобы его граница содержала вектор скорости его точки приложения. Касательные к этому полю многообразия максимально возможной размерности (равной $\dim B - 1$) называются *лежандровыми.*

Гиперплоскости контактной структуры в пространстве ST^*B естественным образом *коориентированы* наружу: контактный элемент сдвигается в положительном направлении, если он не содержит вектор скорости своей точки приложения.

В дальнейшем нам будет удобно реализовать аффинное пространство как открытую полусферу в евклидовом пространстве на единицу большей размерности и работать со всей сферой, которая имеет естественную проективную структуру: подпространства, проходящие через её центр высекают на ней плоскости различных размерностей. Каждая из гиперплоскостей делит нашу сферу на два полупространства, и приведённые выше определения выпуклой оболочки и опорной гиперплоскости дословно переносятся на её подмножества.

Коориентированные контактные элементы к аффинному пространству или сфере естественно отождествляются с парами, каждая из которых состоит из замкнутого полупространства и лежащей на его границе точки приложения. Два коориентированных контактных элемента называются *дополнительными* друг к другу, если они состоят из различных замкнутых полупространств, имеющих общую границу, и одной и той же точки приложения.

Определение. Коориентированный контактный элемент называется *опорным* к подмножеству C аффинного пространства или сферы, если он состоит из содержащего C замкнутого полупространства и лежащей на его границе точки из C. Коориентированный контактный элемент, дополнительный к опорному, называется *антиопорным.* Все опорные к C элементы образуют множество $C^{\perp}$, а антиопорные – множество $C^{\top}$.

Определение. Коориентированный контактный элемент называется *инфинитезимально опорным* к подмножеству C гладкого многообразия, если он приложен в одной из точек $\xi \in C$ и содержит конус, касательный к C в точке ξ. Коориентированный контактный элемент, дополнительный к инфинитезимально опорному, называется *инфинитезимально антиопорным.* Все инфинитезимально антиопорные к C элементы образуют множество $\widetilde{C}$.

Замечание. Множества элементов, инфинитезимально опорных и антиопорных к подмножеству многообразия, функториальны относительно его диффеоморфизмов. (Что, вообще говоря, неверно для множеств опорных и антиопорных элементов.)

Замечание. Пусть $\xi \in C \subset B$ – некоторая точка подмножества C гладкого многообразия B. Введем на B какую-нибудь риманову метрику и выпустим из точки ξ кривую, обладающую следующим свойством: расстояние от точки на ней до подмножества C есть бесконечно малая порядка выше первого при стремлении рассматриваемой точки к началу кривой. Конус, лежащий в касательном пространстве $T_\xi B$ и состоящий из лучей, касательных ко всем таким кривым, называется *касательным* к подмножеству C в точке ξ.

Обозначим через R_0 гиперплоскость $s = 0$ в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ с координатами (u, v, w, s) и рассмотрим на ней следующие подмножества:

1) саму гиперплоскость R_0;

2) полупространство $R_1 = \{(u, v, w) \in R_0 \,:\, u \geqslant 0\}$;

3) двугранный угол $R_2 = \{(u, v, w) \in R_0 \,:\, u \geqslant 0,\ v \geqslant 0\}$;

4) октант $R_3 = \{(u, v, w) \in R_0 \,:\, u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ w \geqslant 0\}$;

5) тело $V_3 = \{(u, v, w) \in R_0 \;:\; \forall\ \tau \in \mathbb{R} \quad \tau^4 + u\tau^2 + v\tau + u^2/4 + w \geqslant 0\}$, ограниченное оборванным ласточкиным хвостом и состоящее из неотрицательных приведённых многочленов четвёртой степени.

Введем на $ST^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ локальные координаты $(p, q, r; u, v, w, s)$, в которых коориентированный контактный элемент, приложенный в точке $(u, v, w, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, записывается в виде $pdu + qdv + rdw + ds \leqslant 0$, и обозначим через $E_0 \subset ST^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ пространство всех элементов такого вида. Пусть $\widetilde{R_0}$, $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$, $\widetilde{R_3}$ и $\widetilde{V_3} \subset E_0$ – лежандровы многообразия, состоящие из коориентированных контактных элементов, инфинитезимально антиопорных к подмножествам R_0, R_1, R_2, R_3 и $V_3 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ соответственно. Многообразие $\widetilde{R_0}$ гладкое, а $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$, $\widetilde{R_3}$ и $\widetilde{V_3}$ имеют особенности, например, в нуле.

Определение. Мы говорим, что трёхмерное лежандрово многообразие имеет в некоторой своей точке особенность $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$, $\widetilde{R_3}$ или $\widetilde{V_3}$, если его росток в этой точке с точностью до локального диффеоморфизма, уважающего контактные структуры и их коориентации, является ростком в нуле лежандрова многообразия $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$, $\widetilde{R_3}$ или $\widetilde{V_3} \subset E_0$ соответственно.

Эти особенности лежандровых многообразий следующим образом примыкают друг к другу:

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{R_0} & \leftarrow & \widetilde{R_1} & \leftarrow & \widetilde{R_2} & \leftarrow & \widetilde{R_3} \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & \widetilde{V_3} & & \end{array},$$

где индексы равны коразмерностям стратов лежандрова многообразия, состоящих из тех точек, в которых оно имеет указанные особенности.

Теорема 2. *Пусть $M \subset S^4$ – гладкая компактная гиперповерхность без края, $[M] \subset S^4$ – её выпуклая оболочка, $[M]^\perp \subset ST^*S^4$ – множество всех опорных к $[M]$ коориентированных контактных элементов, а $\pi : ST^*S^4 \to S^4$ – естественное проектирование.*

Тогда $[M]^\perp$ – лежандрово многообразие с особенностями, однозначно проектирующееся на свой фронт $\pi([M]^\perp)$ – границу выпуклой оболочки исходной гиперповерхности M. В случае общей гиперповерхности M лежандрово многообразие $[M]^\perp$ может иметь лишь определённые выше особенности $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$, $\widetilde{R_3}$ и $\widetilde{V_3}$. При этом:

1) лежандрово многообразие $[M]^\perp$ является гладким над опорными A_1-точками и над внутренними точками опорных симплексов $2A_1$-, $3A_1$- и $4A_1$-плоскостей гиперповерхности M;

2) особенности $\widetilde{R_1}$ возникают над концами опорных $2A_1$-отрезков, над внутренними точками сторон опорных $3A_1$-треугольников, над внутренними точками граней опорных $4A_1$-тетраэдров и над внутренними точками опорных A_1A_3-отрезков гиперповерхности M;

3) особенности $\widetilde{R_2}$ возникают над вершинами опорных $3A_1$-треугольников, над внутренними точками ребер опорных $4A_1$-тетраэдров и над точками касания A_3 опорных A_1A_3-плоскостей гиперповерхности M;

4) особенности $\widetilde{R_3}$ возникают над вершинами опорных $4A_1$-тетраэдров гиперповерхности M;

5) особенности $\widetilde{V_3}$ возникают над точками касания A_1 опорных A_1A_3-плоскостей гиперповерхности M.

Нормальные формы лежандровых расслоений

Лежандровым отображением мы называем диаграмму $L^{n-1} \hookrightarrow E^{2n-1} \to B^n$, состоящую из вложения лежандрова многообразия L^{n-1} в пространство E^{2n-1}, снабжённое коориентированной контактной структурой, и лежандрова расслоения $E^{2n-1} \to B^n$. (*Лежандровым* называется гладкое расслоение, слои которого – лежандровы многообразия.) *Эквивалентностью* лежандровых отображений называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} L & \hookrightarrow & E & \to & B \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ L' & \hookrightarrow & E' & \to & B' \end{array},$$

в которой средняя вертикальная стрелка – диффеоморфизм, переводящий коориентированные контактные структуры друг в друга.

Лежандровы расслоения удобно локально задавать с помощью определяемых ниже производящих семейств.

Вновь рассмотрим пространство E_0 коориентированных контактных элементов вида $\varkappa d\lambda + ds \leqslant 0$, приложенных в точках $(\lambda, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, где $\varkappa = (p, q, r)$, $\lambda = (u, v, w)$. Коориентированная контактная структура на E_0 задаётся полем нулевых подпространств формы $\varkappa d\lambda + ds$, коориентированных в направлениях, на которых она принимает положительные значения.

Пусть $F : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ – росток семейства гладких функций от аргумента $\varkappa$, которые гладко зависят от параметров $\mu = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и $t \in \mathbb{R}$. Пусть ещё $F_\varkappa(0) = 0$ и F

удовлетворяет условию невырожденности в нуле:

$$\det \left\| \begin{matrix} F_{\varkappa\mu} & F_{\varkappa t} \\ F_{\mu} & F_t \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Тогда F называется *производящим семейством* для ростка

$$\pi : (E_0, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0), \quad \pi(\varkappa, \lambda, s) = (\mu, t)$$

лежандрова расслоения, слои которого записываются в виде

$$\pi^{-1}(\mu, t) = \{(\varkappa, \lambda, s) \in E_0 : \lambda = F_{\varkappa}(\varkappa, \mu, t), s = F(\varkappa, \mu, t) - \varkappa\lambda\},$$

а оно само корректно определено в окрестности нуля в силу условия невырожденности F.

Таким образом, $\varkappa$ – это локальные координаты в слое ростка π, (μ, t) – на его базе, а форма, задающая коориентированную контактную структуру на E_0, приобретает в этих координатах вид $F_\mu d\mu + F_t dt$.

Например, естественное лежандрово расслоение $(\varkappa, \lambda, s) \mapsto (\lambda, s)$ задаётся производящим семейством $\varkappa\mu + t = px + qy + rz + t$.

Теорема 3. *Пусть $L \subset ST^*S^4$ – лежандрово многообразие с особенностями $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$, $\widetilde{R}_3$ или $\widetilde{V}_3$, а $\pi : ST^*S^4 \to S^4$ – общее лежандрово расслоение. Если ещё $\pi(L)$ – непрерывно дифференцируемое многообразие, то росток лежандрова отображения $L \hookrightarrow ST^*S^4 \xrightarrow{\pi} S^4$*

1) в каждой гладкой точке многообразия L эквивалентен ростку $(\widetilde{R}_0, 0) \hookrightarrow (E_0, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)$ лежандрова отображения такого, что его вторая стрелка задаётся производящим семейством

$$px + qy + rz + t;$$

2) в каждой особой точке $\widetilde{R}_1$ многообразия L эквивалентен ростку $(\widetilde{R}_1, 0) \hookrightarrow (E_0, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)$ лежандрова отображения такого, что его вторая стрелка задаётся производящим семейством

$$\frac{p^2}{2} + px + qy + rz + t;$$

3) в каждой особой точке $\widetilde{R}_2$ многообразия L эквивалентен ростку $(\widetilde{R}_2, 0) \hookrightarrow (E_0, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)$ лежандрова отображения такого, что его вторая стрелка задаётся одним из производящих семейств следующего вида

$$\frac{p^2 + q^2}{2} + \alpha(z)pq + px + qy + rz + t,$$

где $\alpha(z) = a + z$ для типичной особой точки $\widetilde{R}_2$, $\alpha(z) = a \pm z^2$ для оставшегося конечного числа особых точек $\widetilde{R}_2$, а $|a| < 1$ – непрерывный инвариант;

4) в каждой особой точке $\widetilde{R}_3$ многообразия L эквивалентен ростку $(\widetilde{R}_3, 0) \hookrightarrow (E_0, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)$ лежандрова отображения такого, что его вторая стрелка задаётся производящим семейством – многочленом $F(p, q, r; x, y, z, t)$, разложение которого на квазиоднородные составляющие при $\deg p = \deg q = \deg r = 1$, $\deg x = \deg y = \deg z = 1$ и $\deg t = 2$ имеет вид $F = F_2 + \ldots + F_d$, где

$$F_2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{2} + apq + bpr + cqr + px + qy + rz + t,$$

a, b и c – непрерывные инварианты, квадратичная форма $(p^2+q^2+r^2)/2+apq+bpr+cqr$ положительно определена, среди коэффициентов F_3 имеется ещё шесть непрерывных инвариантов, а число $d \geqslant 3$ не зависит ни от L, ни от π;

5) в каждой особой точке $\widetilde{V_3}$ многообразия L эквивалентен ростку $(\widetilde{V_3}, 0) \hookrightarrow (E_0, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)$ лежандрова отображения такого, что его вторая стрелка задаётся производящим семейством

$$\frac{p^2 + q^2 + r^2}{2} + px + qy + rz + t.$$

Замечание. В случае 5) производящее семейство можно привести к ещё более простому виду

$$\frac{q^2 + r^2}{2} + px + qy + rz + t.$$

Нормальные формы фронтов

Фронтом лежандрова отображения $L^{n-1} \hookrightarrow E^{2n-1} \to B^n$ называется образ лежандрова многообразия L^{n-1} под действием лежандрова расслоения $E^{2n-1} \to B^n$. Коориентация контактной структуры на E индуцирует коориентацию фронта – гиперповерхности (вообще говоря, с особенностями) в базе B^n.

Теорема 4. *Коориентированные фронты ростков лежандровых отображений из пунктов 1)–5) теоремы 3 совпадают с ростками в нуле коориентированных в направлении оси t границ множеств $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2(\alpha)$, $\mathcal{R}_3(F)$ и $\mathcal{V}_3$.*

3. Доказательства

Двойственность

Все замкнутые полупространства сферы S^n образуют *двойственную* сферу $\widehat{S^n}$. Точки самой сферы S^n канонически отождествляются с замыканиями открытых полупространств в двойственной сфере $\widehat{S^n}$, образованных теми элементами, которые не содержат данную точку сферы S^n как её замкнутые полупространства. Иначе говоря, сама сфера S^n является двойственной к сфере $\widehat{S^n}$. Кроме того, канонически отождествляются между собой и пространства коориентированных контактных элементов к двойственным сферам S^n и $\widehat{S^n}$. Естественные коориентированные контактные структуры при таком отождествлении совпадают, поэтому в дальнейшем мы эти пространства не различаем и обозначаем их одинаково: $E^{2n-1} = ST^*S^n \cong ST^*\widehat{S^n}$.

Лемма 1. *Пусть $M \subset S^n$ – компактное подмножество, $[M] \subset S^n$ – его выпуклая оболочка, а $[M]^\perp \subset E^{2n-1}$ – множество всех коориентированных контактных элементов, опорных к $[M]$. Обозначим через $M^* \subset \widehat{S^n}$ множество всех замкнутых полупространств, содержащих M, а через $\widetilde{M^*} \subset E^{2n-1}$ – множество всех коориентированных контактных элементов, инфинитезимально антиопорных к M^*. Тогда $[M]^\perp = \widetilde{M^*}$.*

Доказательство. Обозначим через $M^{*\top} \subset E^{2n-1}$ – множество всех коориентированных контактных элементов, антиопорных к M^*. Тогда $[M]^\perp = M^{*\top}$. Докажем теперь, что $M^{*\top} = \widetilde{M^*}$.

Включение $M^{*\top} \subset \widetilde{M^*}$ очевидно. Пусть $\mathbf{l} \notin M^{*\top}$, а ξ – точка приложения элемента $\mathbf{l}$. Если $\xi \notin M^*$, то $\mathbf{l} \notin \widetilde{M^*}$. Если же $\xi \in M^*$, то во внутренности элемента $\mathbf{l}$ найдется точка $\eta \in M^*$. Но отрезок, соединяющий точки ξ и η, целиком лежит в M^* и, следовательно, в конусе, касательном к M^* в точке ξ. И снова $\mathbf{l} \notin \widetilde{M^*}$, что доказывает включение $M^{*\top} \supset \widetilde{M^*}$. □

Лежандровы многообразия $\widetilde{R_0}$, $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$, $\widetilde{R_3}$ и $\widetilde{V_3}$ в координатах

В координатах $(p, q, r; u, v, w, s)$ на E_0 нормальные формы особенностей лежандровых многообразий имеют вид:

$$\widetilde{R_0} = \{p = q = r = s = 0\},$$

$$\widetilde{R_1} = \{pu = q = r = s = 0, p \geqslant 0, u \geqslant 0\},$$

$$\widetilde{R_2} = \{pu = qv = r = s = 0, p \geqslant 0, u \geqslant 0, q \geqslant 0, v \geqslant 0\},$$

$$\widetilde{R_3} = \{pu = qv = rw = s = 0, p \geqslant 0, u \geqslant 0, q \geqslant 0, v \geqslant 0, r \geqslant 0, w \geqslant 0\}.$$

Лежандрово многообразие $\widetilde{V_3}$ состоит из следующих трёх стратов (τ – вещественный параметр):

$$\{p = q = r = 0, u \geqslant -2\tau^2, v = -4\tau^3 - 2u\tau, w \geqslant 3\tau^4 + u\tau^2 - u^2/4, s = 0\},$$

$$\{p = r\tau^2 + ru/2, q = r\tau, r \geqslant 0, u \geqslant -2\tau^2, v = -4\tau^3 - 2u\tau, w = 3\tau^4 + u\tau^2 - u^2/4, s = 0\},$$

$$\{p = 0, |q| \leqslant r|\tau|, r \geqslant 0, u = -2\tau^2, v = 0, w = 0, s = 0\},$$

первый и третий из которых продолжаются до гладких многообразий, а второй – до неприводимого алгебраического. В неявном виде это алгебраическое многообразие задаётся как множество нулей следующих многочленов: $32u^3v^2 + 64u^2w^2 + 144uv^2w - 27v^4 + 256w^3$, $2pu + 3qv + 4rw$, $3pv + 4qw - 2ruv$, $16pw - 8quv - 8ruw - 3rv^2$, $p^2 + qrv + r^2w$, $4pq + r^2v$, $2pr - 2q^2 - r^2u$, $prv - 4q^2v - 4qrw$, $p^2r - 4pq^2 + r^3w$ и s.

Доказательство теоремы 2

Теорема 2 частично доказана в [2]. Остаётся только исследовать особенности лежандрова многообразия $[M]^\perp$, возникающие над вершинами опорных $4A_1$-тетраэдров и над опорными A_1A_3-отрезками гиперповерхности M.

Случай $4A_1$**.** Пусть $O \subset S^4$ – замкнутое полупространство, содержащее общую гиперповерхность $M \subset S^4$ и ограниченное опорной к ней $4A_1$-плоскостью, а A_1 – любая из точек касания этой плоскости с M.

Согласно лемме 1, $[M]^\perp = \widetilde{M^*}$. Выберем гладкие локальные координаты (u, v, w, s) на $\widehat{S^4}$ с началом в O так, чтобы множество M^* локально выделялось неравенствами $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$, а приложенный в O коориентированный контактный элемент $ds \leqslant 0$ представлял собой пару (O, A_1). Чтобы исследовать особенность лежандрова многообразия $\widetilde{M^*}$ над точкой A_1, рассмотрим коориентированные контактные элементы из $\widetilde{M^*}$ вида $pdu + qdv + rdw + ds \leqslant 0$. Многообразие всех таких элементов представляет собой лежандрово многообразие $\widetilde{R_3}$.

Случай A_1A_3**.** Пусть $O \subset S^4$ – замкнутое полупространство, содержащее общую гиперповерхность $M \subset S^4$ и ограниченное опорной к ней A_1A_3-плоскостью, а A_1 и A_3 – точки касания этой плоскости с M (типов A_1 и A_3 соответственно).

Согласно лемме 1, $[M]^\perp = \widetilde{M^*}$. Выберем гладкие локальные координаты (u, v, w, s) на $\widehat{S^4}$ с началом в O так, чтобы множество M^* локально выделялось условием $(u, v, w) \in V_3$ и неравенством $s \geqslant 0$. Тогда приложенный в O коориентированный контактный элемент $ds \leqslant 0$ представляет собой пару (O, A_1), элемент $dw \leqslant 0$ – пару (O, A_3), а элементы вида $dw + r'ds \leqslant 0$, где $r' \geqslant 0$, состоят из полупространства O и внутренних точек опорного A_1A_3-отрезка гиперповерхности M.

Чтобы исследовать особенность лежандрова многообразия $\widetilde{M^*}$ над точкой A_1, рассмотрим коориентированные контактные элементы из $\widetilde{M^*}$ вида $pdu + qdv + rdw + ds \leqslant 0$. Многообразие всех таких элементов представляет собой лежандрово многообразие $\widetilde{V_3}$.

Чтобы исследовать особенности лежандрова многообразия $\widetilde{M^*}$ над точкой A_3 и над внутренними точками опорного A_1A_3-отрезка, рассмотрим лежандрово многообразие $\widetilde{M_0^*}$ коориентированных контактных элементов из $\widetilde{M^*}$ вида $p'du+q'dv+dw+r'ds\leqslant 0$. Все такие элементы являются инфинитезимально антиопорными к множеству $\partial V_3\times\mathbb{R}^+$, где ∂V_3 – граница тела V_3 (оборванный ласточкин хвост), а $\mathbb{R}^+$ – вещественная полупрямая $s\geqslant 0$. Множество $\partial V_3\times\mathbb{R}^+$ записывается в виде $u\geqslant -2\tau^2$, $v=-4\tau^3-2u\tau$, $w=3\tau^4+u\tau^2-u^2/4$, $s\geqslant 0$, где τ – вещественный параметр, а лежандрово многообразие $\widetilde{M_0^*}$ состоит из четырёх стратов:

1) $p'\geqslant 0$, $u-2p'+2{q'}^2=0$, $s\geqslant 0$, $r'=0$, $v+4p'q'=0$, $w+{p'}^2-4p'{q'}^2=0$;
2) $p'\geqslant 0$, $u-2p'+2{q'}^2=0$, $s=0$, $r'\geqslant 0$, $v+4p'q'=0$, $w+{p'}^2-4p'{q'}^2=0$;
3) $p'=0$, $u+2{q'}^2\leqslant 0$, $s\geqslant 0$, $r'=0$, $v=0$, $w=0$;
4) $p'=0$, $u+2{q'}^2\leqslant 0$, $s=0$, $r'\geqslant 0$, $v=0$, $w=0$.

После замены $p'=U$, $q'=W$, $r'=Q$, $u=-P+2U-2W^2$, $v=-R-4UW$, $w=S+PU+RW-U^2+4UW^2$ коориентированные контактные элементы записываются в виде $PdU+QdV+RdW+dS\leqslant 0$, а лежандрово многообразие $\widetilde{M_0^*}$ совпадает с $\widetilde{R_2}$, состоящим из следующих стратов:

1) $U\geqslant 0$, $P=0$, $V\geqslant 0$, $Q=0$, $R=0$, $S=0$;
2) $U\geqslant 0$, $P=0$, $V=0$, $Q\geqslant 0$, $R=0$, $S=0$;
3) $U=0$, $P\geqslant 0$, $V\geqslant 0$, $Q=0$, $R=0$, $S=0$;
4) $U=0$, $P\geqslant 0$, $V=0$, $Q\geqslant 0$, $R=0$, $S=0$.

Контактные векторные поля

Векторное поле, сохраняющее контактную структуру на многообразии, называется *контактным.* Если контактная структура задана как поле нулевых подпространств некоторой 1-формы, то любое контактное векторное поле однозначно восстанавливается по своей *производящей функции* – результату его подстановки в 1-форму.

Например, на пространстве E_0 с контактной структурой, заданной формой $\varkappa d\lambda+ds$, контактное векторное поле с производящей функцией $K(\varkappa,\lambda,s)$ имеет вид

$$\dot\varkappa=\varkappa K_s-K_\lambda,\quad \dot\lambda=K_\varkappa,\quad \dot s=K-\varkappa K_\varkappa. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь лежандрово расслоение $(\varkappa,\lambda,s)\mapsto(\mu,t)$ на пространстве E_0, локально заданное производящим семейством $F(\varkappa,\mu,t)$. Обозначим через $K(F)$ производную производящего семейства этого расслоения при действии на него контактного векторного поля с производящей функцией K.

Лемма 2. $K(F)=-K(\varkappa,F_\varkappa,F-\varkappa F_\varkappa)$.

Доказательство. Явное вычисление действия векторного поля (1) на слои $\lambda=F_\varkappa$, $s=F-\varkappa F_\varkappa$. □

Замечание. Ассоциативная алгебра производящих функций снабжена естественной структурой алгебры Ли. А именно, скобка производящих функций равна производящей функции коммутатора соответствующих контактных векторных полей: $\{K,L\}=\varkappa K_sL_\varkappa-K_\lambda L_\varkappa+K_\varkappa L_\lambda+KL_s-\varkappa K_\varkappa L_s-K_sL$.

Доказательство теоремы 3

В настоящей работе эта теорема доказана только для новых особенностей $\widetilde{R_3}$ и $\widetilde{V_3}$. Остальные случаи 1)–3) фактически разобраны в статье [2].

Случай $\widetilde{R_3}$. В окрестности любой своей особой точки $\widetilde{R_3}$ лежандрово многообразие L состоит из восьми стратов, каждый из которых продолжается до гладкого многообразия. Поскольку π общее, его сужение на любой из этих стратов – отображение полного ранга.

Итак, в особой точке $\widetilde{R_3}$ лежандрова многообразия L росток $\pi : (\varkappa, \lambda, s) \mapsto (\mu, t)$, где $\varkappa = (p, q, r)$, $\lambda = (u, v, w)$ и $\mu = (x, y, z)$, задаётся производящим семейством $F(\varkappa, \mu, t)$. Это следует из условия полноты ранга сужения π на страт $p = q = r = s = 0$. Из условий полноты ранга сужения π на остальные семь стратов $\widetilde{R_3}$ вытекает, что все диагональные миноры матрицы $\|F_{\varkappa\varkappa}\|$ отличны от нуля в рассматриваемой особой точке $\widetilde{R_3}$.

На самом деле, матрица $\|F_{\varkappa\varkappa}\|$ положительно определена в нуле. Действительно, $F_{pp} > 0$, иначе на $\widetilde{R_3}$ складывается его часть $q = r = s = 0$, состоящая из двух стратов. Значит, и $F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 > 0$, иначе складывается пара стратов $u = r = s = 0$. Наконец, $\det \|F_{\varkappa\varkappa}\| > 0$, иначе складывается пара стратов $u = v = s = 0$.

Рассмотрим в F члены первой и второй степени по $\varkappa$, μ и t. Приведем их к виду F_2, действуя производящими функциями pu, qv и rw, сохраняющими $\widetilde{R_3}$, а также подходящим образом выбирая координаты (μ, t). Зафиксируем теперь указанные в формулировке теоремы степени квазиоднородности.

Пусть $\mathcal{I}(\widetilde{R_3})$ – алгебра Ли ростков в нуле производящих функций контактных векторных полей на E_0, сохраняющих нуль и лежандрово многообразие $\widetilde{R_3}$, а $\mathcal{D}_{\mu,t}$ – алгебра Ли ростков в нуле векторных полей на базе лежандрова расслоения π, сохраняющих нуль. Рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{G} = \mathcal{I}(\widetilde{R_3}) \oplus \mathcal{D}_{\mu,t}$ группы эквивалентности ростков лежандровых отображений вида $(\widetilde{R_3}, 0) \hookrightarrow (E_0, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)$. На производящих семействах таких ростков первое слагаемое алгебры Ли $\mathcal{G}$ действует по формуле леммы 2, а второе – дифференцированиями. В результате этого действия алгебры Ли $\mathcal{G}$ получаются касательные векторы к пространству производящих семейств – элементы идеала

$$\mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t} = \{f \in \mathcal{E}_{\varkappa,\mu,t} : f|_{\varkappa,\mu,t=0} = f_\varkappa|_{\varkappa,\mu,t=0} = 0\},$$

лежащего в ассоциативной алгебре $\mathcal{E}_{\varkappa,\mu,t}$ ростков в нуле гладких функций от $(\varkappa, \mu, t)$.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{S}(F_2) = \{g \in \mathcal{G} : gF_2 = 0\}$ – стационарная подалгебра элемента F_2. Тогда существует число N, обладающее свойством: если коэффициенты a, b, c и кубический квазиоднородный многочлен F_3 являются типичными, то $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t}/(\mathcal{G}F_2 + \mathcal{S}(F_2)F_3) \leqslant N$.*

Число N из леммы 3 оценивает сверху коразмерность орбиты ростка π в пространстве струй лежандровых отображений относительно хорошей геометрической группы ([9], гл. 3, § 2) лежандровой эквивалентности, сохраняющей вложение $\widetilde{R_3} \hookrightarrow E_0$. По общей теореме о конечной определённости ([9], гл. 3, § 2) производящее семейство ростка π может быть сделано многочленом квазистепени d, зависящей только от N.

Количества модулей среди коэффициентов многочленов F_2 и F_3 равны соответственно числам $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}_2/\mathcal{G}_0F_2 = 3$ и $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}_3/(\mathcal{G}_1F_2 + \mathcal{S}_0(F_2)F_3) = 6$, поскольку $\mathcal{S}_i(F_2) = 0$ при $i < 0$. Здесь $\mathfrak{p}_i$, $\mathcal{G}_i$ и $\mathcal{S}_i(F_2)$ – квазиоднородные компоненты соответствующих алгебр квазистепени i. (См. по этому поводу, например, § 14 в [7].)

Таким образом, теорема 3 в рассматриваемом случае следует из леммы 3, которая доказывается в оставшейся части настоящего пункта.

Доказательство леммы 3. Пусть $\mathcal{E}_{\mu,t}$ – ассоциативная алгебра ростков в нуле гладких функций от (μ, t), $\mathfrak{m}_{\mu,t} \subset \mathcal{E}_{\mu,t}$ – максимальный идеал в ней, а

$$\mathfrak{M} = \mathcal{E}_{\varkappa,\mu,t}\langle p\partial_p F_2, q\partial_q F_2, r\partial_r F_2, F_2\rangle + \mathfrak{m}_{\mu,t}\langle p, q, r, 1\rangle + \mathcal{E}_{\mu,t}\langle F_3\rangle \subset \mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t}$$

– подмодуль над $\mathcal{E}_{\mu,t}$ (∂ – символ частного дифференцирования по указанной переменной). Докажем, что $\mathcal{G}F_2 + \mathcal{S}(F_2)F_3 \supset \mathfrak{M}$.

В самом деле, алгебра Ли $\mathcal{I}(\widetilde{R_3})$ содержит ростки pu, qv, rw и s, которые порождают идеал в ассоциативной алгебре ростков производящих функций, целиком лежащий в $\mathcal{I}(\widetilde{R_3})$. Действуя этим идеалом на F_2, получаем первое слагаемое $\mathfrak{M}$. Алгебра Ли $\mathcal{D}_{\mu,t} = \mathfrak{m}_{\mu,t}\langle \partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\rangle$, применённая к F_2, даёт второе слагаемое $\mathfrak{M}$. Наконец, $\mathcal{S}(F_2)$ – модуль над $\mathcal{E}_{\mu,t}$, а $F_3 \in \mathcal{S}(F_2)F_3$, поскольку $gF_2 = 0$ и $gF_3 = F_3$ в силу леммы 2, где $g = (pu + qv + rw + 2s, x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + 2t\partial_t) \in \mathcal{I}(\widetilde{R_3}) \oplus \mathcal{D}_{\mu,t}$.

Теперь достаточно показать, что $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t}/\mathfrak{M} \leqslant N < \infty$ при типичных a, b, c и F_3.

Рассмотрим $\mathcal{E}_{\mu,t}$-подмодуль $\mathfrak{M}' = \mathcal{E}_{\varkappa,\mu,t}\langle p\partial_p F_2, q\partial_q F_2, r\partial_r F_2\rangle + \mathfrak{m}_{\mu,t}\langle p,q,r,1\rangle \subset \mathfrak{M}$. Если $1-a^2 \neq 0$, $1-b^2 \neq 0$, $1-c^2 \neq 0$ и $\Delta \neq 0$, где $\Delta = 1 + 2abc - a^2 - b^2 - c^2$, то $\mathcal{E}_{\mu,t}$-модуль $\mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t}/\mathfrak{M}'$ порождается классами смежности $[pqr]$, $[pq]$, $[pr]$ и $[qr]$, поскольку $\mathcal{E}_{\mu,t}$-модуль $\mathcal{E}_{\varkappa,\mu,t}/\mathcal{E}_{\varkappa,\mu,t}\langle p\partial_p F_2, q\partial_q F_2, r\partial_r F_2\rangle$ порождается мономами pqr, pq, pr, qr, p, q, r и 1. Последнее утверждение вытекает из того факта, что при указанных неравенствах эти мономы порождают линейное пространство $\mathcal{E}_\varkappa/(p^2+apq+bpr, apq+q^2+cqr, bpr+cqr+r^2)$, в силу подготовительной теоремы Вейерштрасса–Мальгранжа (см., например, стр. 61 и 101 в [7]), применённой к отображению $(\varkappa,\mu,t) \mapsto (\mu,t)$.

В частности, следующие равенства справедливы в $\mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t}/\mathfrak{M}'$:

$$[p^2] = [-apq - bpr], \quad [q^2] = [-apq - cqr], \quad [r^2] = [-bpr - cqr],$$

$$[p^3] = [-ap^2q - bp^2r - xp^2], \quad [q^3] = [-apq^2 - cq^2r - yq^2], \quad [r^3] = [-bpr^2 - cqr^2 - zr^2],$$

$$[p^2q] = (1-a^2)^{-1}[(ac-b)pqr + (ay-x)pq], \quad [pq^2] = (1-a^2)^{-1}[(ab-c)pqr + (ax-y)pq],$$

$$[p^2r] = (1-b^2)^{-1}[(bc-a)pqr + (bz-x)pr], \quad [pr^2] = (1-b^2)^{-1}[(ab-c)pqr + (bx-z)pr],$$

$$[q^2r] = (1-c^2)^{-1}[(bc-a)pqr + (cz-y)qr], \quad [qr^2] = (1-c^2)^{-1}[(ac-b)pqr + (cy-z)qr],$$

$$[p^2qr] = \Delta^{-1}[(-x + c^2x - bcy + ay - acz + bz)pqr],$$

$$[pq^2r] = \Delta^{-1}[(-bcx + ax - y + b^2y - abz + cz)pqr],$$

$$[pqr^2] = \Delta^{-1}[(-acx + bx - aby + cy - z + a^2z)pqr].$$

В самом деле, выражения для $[p^2]$, $[q^2]$ и $[r^2]$ получаются из равенств $[p\partial_p F_2] = [q\partial_q F_2] = [r\partial_r F_2] = 0$, для $[p^3]$, $[q^3]$ и $[r^3]$ – из $[p^2\partial_p F_2] = [q^2\partial_q F_2] = [r^2\partial_r F_2] = 0$, для $[p^2q]$ и $[pq^2]$ – из $[pq\partial_p F_2] = [pq\partial_q F_2] = 0$, для $[p^2r]$ и $[pr^2]$ – из $[pr\partial_p F_2] = [pr\partial_r F_2] = 0$, для $[q^2r]$ и $[qr^2]$ – из $[qr\partial_q F_2] = [qr\partial_r F_2] = 0$, и, наконец, для $[p^2qr]$, $[pq^2r]$ и $[pqr^2]$ – из $[pqr\partial_p F_2] = [pqr\partial_q F_2] = [pqr\partial_r F_2] = 0$.

Рассмотрим в $\mathcal{E}_{\mu,t}\langle pqr, pq, pr, qr\rangle$ $\mathcal{E}_{\mu,t}$-подмодуль $\mathfrak{N}$, порожденный элементами f_2^p, f_2^q, f_2^r, f_2^{pq}, f_2^{pr}, f_2^{qr}, f_2^{pqr} и $f_3 \in \mathcal{E}_{\mu,t}\langle pqr, pq, pr, qr\rangle$, определяемыми из следующих условий в $\mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t}/\mathfrak{M}'$: $[2pF_2] = [f_2^p]$, $[2qF_2] = [f_2^q]$, $[2rF_2] = [f_2^r]$, $[2pqF_2] = [f_2^{pq}]$, $[2prF_2] = [f_2^{pr}]$, $[2qrF_2] = [f_2^{qr}]$, $[2pqrF_2] = [f_2^{pqr}]$ и $[F_3] = [f_3]$. Из выражений предыдущего абзаца заключаем, что координаты этих образующих модуля $\mathfrak{N}$ в базисе $\langle pqr, pq, pr, qr\rangle$ рационально зависят от чисел a, b, c и коэффициентов многочлена F_3. Например, при $a = b = c = 0$ имеем $f_2^p = ypq + zpr$, $f_2^q = xpq + zqr$, $f_2^r = xpr + yqr$, $f_2^{pq} = zpqr + (2t - x^2 - y^2)pq$, $f_2^{pr} = ypqr + (2t - x^2 - z^2)pr$, $f_2^{qr} = xpqr + (2t - y^2 - z^2)qr$, $f_2^{pqr} = (2t - x^2 - y^2 - z^2)pqr$.

Пусть $a = b = c = 0$ и $F_3 = zpq + 2ypr + 3xqr$. Положим $N = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\mu,t}\langle pqr, pq, pr, qr\rangle/\mathfrak{N}$. Тогда $N < \infty$. В самом деле, рассмотрим матрицу

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} 0 & y & z & 0 \\ 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & x & y \\ z & 2t - x^2 - y^2 & 0 & 0 \\ y & 0 & 2t - x^2 - z^2 & 0 \\ x & 0 & 0 & 2t - y^2 - z^2 \\ 2t - x^2 - y^2 - z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 2y & 3x \end{matrix} \right\|,$$

состоящую из координат образующих модуля $\mathfrak{N}$ в базисе $\langle pqr, pq, pr, qr\rangle$. Непосредственно проверяется, что условие $\operatorname{rank} \Omega < 4$ влечёт равенства $x = y = z = t = 0$ в $\mathbb{C}^4$. Поэтому

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\mu,t}/(M_1, \ldots, M_{70}) < \infty$, где $(M_1, \ldots, M_{70})$ – идеал, порождённый всеми 4×4-минорами матрицы Ω. Поскольку все элементы вида $M_i pqr$, $M_i pq$, $M_i pr$ или $M_i qr$, где $i = 1, \ldots, 70$, лежат в $\mathfrak{N}$, получаем требуемую конечномерность.

Пусть теперь a, b, c и F_3 являются типичными. Оказывается, что тогда справедливо неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\mu,t}\langle pqr, pq, pr, qr\rangle/\mathfrak{N} \leqslant N$. Действительно, множество коэффициентов, для которых оно выполняется, не пусто в силу определения N и открыто по Зарисскому (см. [8], пример 12.7.2).

Но $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t}/\mathfrak{M} \leqslant \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\mu,t}\langle pqr, pq, pr, qr\rangle/\mathfrak{N}$, поскольку естественный гомоморфизм $\mathcal{E}_{\mu,t}\langle pqr, pq, pr, qr\rangle \to \mathfrak{p}_{\varkappa,\mu,t}/\mathfrak{M}$ сюръективен при типичных a, b, c и F_3, а его ядро содержит $\mathfrak{N}$. $\square$

Случай $\widetilde{V_3}$. В окрестности любой своей особой точки $\widetilde{V_3}$ лежандрово многообразие L состоит из трёх стратов, два из которых продолжаются до гладких многообразий, а касательный конус к третьему состоит из двух лежандровых плоскостей, имеющих уравнения $p = q = r = s = 0$ и $p = q = w = s = 0$. (Эти уравнения получаются из квадратичных частей $2pu + 3qv + 4rw$, $3pv + 4qw$, $16pw$, p^2, $4pq$ и $2pr - 2q^2$ многочленов, обращающихся в нуль на рассматриваемом страте и полный вид которых был приведен на стр. 13.) Поскольку π общее, его сужение на любой из гладких стратов – отображение полного ранга. Кроме того, дифференциал π не обращается в нуль на касательном конусе к негладкому страту.

Итак, в особой точке $\widetilde{V_3}$ лежандрова многообразия L росток $\pi : (\varkappa, \lambda, s) \mapsto (\mu, t)$, где $\varkappa = (p, q, r)$, $\lambda = (u, v, w)$ и $\mu = (x, y, z)$, задаётся производящим семейством $F(\varkappa, \mu, t)$. Это следует из условия полноты ранга сужения π на страт $p = q = r = s = 0$. Из условий полноты ранга сужения π на страт $p = v = w = s = 0$ вытекает, что $F_{qq}F_{rr} - F_{qr}^2 \neq 0$ в нуле. Наконец, лежандрова плоскость $p = q = w = s = 0$ из касательного конуса к негладкому страту даёт неравенство $F_{rr} \neq 0$.

Лемма 4. *Пусть росток лежандрова расслоения $\pi : (\varkappa, \lambda, s) \mapsto (\mu, t)$, где $\varkappa = (p, q, r)$, $\lambda = (u, v, w)$ и $\mu = (x, y, z)$, задаётся производящим семейством $F(\varkappa, \mu, t)$, удовлетворяющим в нуле следующим условиям: $F_{qq}F_{rr} - F_{qr}^2 \neq 0$ и $F_{rr} \neq 0$, а $\pi' : (E_0, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)$ – росток лежандрова расслоения, достаточно близкий к π. Тогда имеет место следующая эквивалентность ростков лежандровых отображений*

$$\begin{array}{ccccc}
(\widetilde{V_3}, 0) & \hookrightarrow & (E_0, 0) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0) \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
(\widetilde{V_3}, 0) & \hookrightarrow & (E_0, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)
\end{array},$$

вертикальные стрелки которой близки к тождественным отображениям.

Условие невырожденности делит пространство производящих семейств на две связные компоненты, переходящие друг в друга при замене t на $-t$. Каждая из них делится ещё на четыре компоненты условиями $F_{qq}F_{rr} - F_{qr}^2 \neq 0$ и $F_{rr} \neq 0$. По лемме 4 ростки лежандровых отображений, определённые производящими семействами из одной и той же компоненты, эквивалентны. Значит, каждый из них можно задать производящим семейством вида $(p^2 \pm q^2 \pm r^2)/2 + px + qy + rz + t$. (Или даже $(\pm q^2 \pm r^2)/2 + px + qy + rz + t$ – см. замечание к теореме 3.) Остаётся проверить, что хотя бы при одном минусе образ L под действием π не является непрерывно дифференцируемым многообразием.

Таким образом, теорема 3 в рассматриваемом случае следует из леммы 4, которая доказывается в оставшейся части настоящего пункта.

Доказательство леммы 4. Многообразие $\widetilde{V_3}$ можно заменить на его продолжение до неприводимого алгебраического лежандрова многообразия $\overline{V_3}$, которое состоит из следующих трёх стратов: $\{p = q = r = s = 0\}$, $\{p = r\tau^2 + ru/2, q = r\tau, v = -4\tau^3 - 2u\tau, w = 3\tau^4 + u\tau^2 - u^2/4, s = 0\}$ (τ – параметр) и $\{p = v = w = s = 0\}$. Действительно, любой достаточно близкий к тождественному диффеоморфизм, сохраняющий $\overline{V_3}$, сохраняет и $\widetilde{V_3}$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{E}_\varkappa$ ростков в нуле гладких функций на слое $\pi^{-1}(0)$ и алгебру $\mathcal{Q}$ ростков в нуле гладких функций на пересечении $\overline{V_3} \cap \pi^{-1}(0)$. Имеется естественный гомоморфизм ограничения $i : \mathcal{E}_\varkappa \to \mathcal{Q}$. Покажем, что $\mathfrak{m}_\varkappa^2 \subset \ker i$, где $\mathfrak{m}_\varkappa \subset \mathcal{E}_\varkappa$ – максимальный идеал. В самом деле, $\pi^{-1}(0) = \{(\varkappa, \lambda, s) \in E_0 : \lambda = f_\varkappa(\varkappa), s = f(\varkappa) - \varkappa f_\varkappa(\varkappa)\}$, где $f(\varkappa) = F(\varkappa, 0, 0)$, а функции $2pu+3qv+4rw$, $3pv+4qw-2ruv$, $16pw-8quv-8ruw-3rv^2$, $p^2+qrv+r^2w$, $4pq+r^2v$ и $-2s$ обращаются в нуль на $\overline{V_3}$. Поэтому ростки $2pf_p+3qf_q+4rf_r$, $3pf_q+4qf_r-2rf_pf_q$, $16pf_r-8qf_pf_q-8rf_pf_r-3rf_q^2$, $p^2+qrf_q+r^2f_r$, $4pq+r^2f_q$ и $2pf_p+2qf_q+2rf_r-2f$ лежат в ядре i. Все они лежат в $\mathfrak{m}_\varkappa^2$, а их разложения с точностью до $\mathfrak{m}_\varkappa^3$ в базисе $\langle p^2, pq, pr, q^2, qr, r^2\rangle$ образуют матрицу

$$\left\| \begin{matrix} * & * & * & 3f_{qq}(0) & 7f_{qr}(0) & 4f_{rr}(0) \\ * & * & * & 4f_{qr}(0) & 4f_{rr}(0) & 0 \\ * & * & 16f_{rr}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & f_{qq}(0) & 2f_{qr}(0) & f_{rr}(0) \end{matrix} \right\|,$$

которая не вырождена по условию леммы. Следовательно, наши ростки порождают $\mathfrak{m}_\varkappa^2/\mathfrak{m}_\varkappa^3$ как линейное пространство над $\mathbb{R}$. По лемме Накаямы получаем, что они же порождают $\mathfrak{m}_\varkappa^2$ как $\mathcal{E}_\varkappa$-модуль. Поэтому $\mathfrak{m}_\varkappa^2 \subset \ker i$.

Итак, росток $(\overline{V_3}, 0) \hookrightarrow (E_0, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0)$ лежандрова отображения версален в смысле определения на стр. 67 в [6], поскольку $\mathfrak{m}_\varkappa^2 \subset \ker i$. По теореме $3'$ из [6] он устойчив относительно возмущений π. Остаётся заметить, что точка приложения ростка нашего лежандрова отображения сохраняется при его эквивалентности. $\square$

Доказательство теоремы 4

По определению, если росток лежандрова расслоения задаётся производящим семейством $F(p, q, r; u, v, w, s)$, то его слои записываются в виде $u = F_p$, $v = F_q$, $w = F_r$, $s = F - pF_p - qF_q - rF_r$, а коориентированная контактная структура задаётся формой $F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_t dt$.

Случай 1) многообразия $\widetilde{R_0}$ тривиально проявляется явно.

В случаях 2)–4), подставляя вышеуказанные формулы для слоёв в явные координатные выражения для многообразий $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$ и $\widetilde{R_3}$, получаем требуемые условия равенства нулю минимума F.

В случае 5) формулы для слоёв приобретают вид $u = p + x$, $v = q + y$, $w = r + z$, $s = -(p^2 + q^2 + r^2)/2 + t$, откуда для самого лежандрова расслоения имеем $(p, q, r; u, v, w, s) \mapsto (u - p, v - q, w - r, s + (p^2 + q^2 + r^2)/2)$. Если $(p, q, r; u, v, w, s) \in \widetilde{V_3}$, то $s = 0$. Если ещё и $(p, q, r) = 0$, то $(u, v, w) \in V_3$. Если же $(p, q, r) \neq 0$, то коориентированный контактный элемент $pdu + qdv + rdw \leqslant 0$, приложенный в точке (u, v, w), инфинитезимально антиопорен к $V_3 \subset \mathbb{R}^3$. Иначе говоря, $(u, v, w) \in \partial V_3$, а вектор $(-p, -q, -r)$ перпендикулярен к границе ∂V_3 тела V_3 и направлен наружу.

Литература

[1] *Закалюкин В. М.* Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 3. С. 76–77.

[2] *Седых В. Д.* Стабилизация особенностей выпуклых оболочек // Мат. сб. 1988. Т. 135 (177), № 4. С. 514–519.

[3] *Седых В. Д.* Склейка ласточкиного хвоста и зонтика Уитни в четырёхмерной управляемой системе // Труды ГАНГ им. И. М. Губкина. М.: Нефть и газ, 1997. С. 58–68.

[4] *Седых В. Д.* Особенности выпуклых оболочек // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 3. С. 158–175.

[5] *Седых В. Д.* Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерностей 1 и 2 // Мат. сб. 1982. Т. 119 (161), № 2 (10). С. 233–247.

[6] *Гивенталь А. Б.* Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 33. С. 55–112.

[7] *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. I. М.: Наука, 1982.

[8] *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

[9] *Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В. Ляшко О. В.* Особенности. I. Локальная и глобальная теория // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 6.