

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 515.164.15+514.755.24

Седых Вячеслав Дмитриевич

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ КОРАНГА 1
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В КОНТАКТНОЙ ГЕОМЕТРИИ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

Специальность
01.01.04 – геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2005

Оглавление

Введение	6
1 Топология мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения в пространство нестрого бóльшей размерности	29
1 Устойчивые гладкие отображения коранга ≤ 1	30
1.1 Основные определения и обозначения	30
1.2 Некоторые сведения из теории стратификаций	34
1.3 Примыкание мультиособенностей отображения	35
2 A_μ -преобразование устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1	39
2.1 Определение и основные свойства	39
2.2 Вспомогательные утверждения	44
2.3 Доказательство теорем 2.1.1, 2.1.2 и 2.1.7	46
3 Разрешение мультиособенностей устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1	49
3.1 Основная конструкция	49
3.2 Вычисление относительных индексов мультиособенностей	52
4 Каноническая стратификация характеристического многообразия	56
4.1 Особенности типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$	56
4.2 Особенности канонической стратификации	61
4.3 Вспомогательные утверждения	62
4.4 Доказательство теоремы 4.2.2	64
5 Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1	75
5.1 Основная формула	75
5.2 Вычисление линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образа отображения в пространство бóльшей размерности	77

5.3	Вычисление линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображения многообразий одинаковой размерности	80
5.4	Некоторые соотношения по модулю 2 между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображения многообразий одинаковой размерности	83
5.5	Полнота систем соотношений (1.10) и (1.19)	87
2	Топология особенностей коранга 1 устойчивого волнового фронта	96
1	Лежандровы отображения, фронты и их особенности	97
1.1	Основные примеры лежандровых отображений	97
1.2	Классификация особенностей лежандровых отображений	99
1.3	Устойчивые лежандровы отображения коранга ≤ 1 и их фронты	102
1.4	Примыкания особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1	104
2	Разрешение особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1	107
2.1	A_μ -преобразование фронта	107
2.2	Основная конструкция	110
2.3	Вычисление относительных индексов особенностей фронта	116
2.4	Особенности канонической стратификации характеристического многообразия особенностей фронта	116
3	Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1	120
3.1	Вычисление соотношений между эйлеровыми характеристиками	120
3.2	Полнота системы соотношений (2.9)	124
4	Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на крае связной компоненты дополнения к устойчивому фронту коранга ≤ 1	127
4.1	Правильные связные компоненты дополнения к фронту	127
4.2	Вычисление соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей	129
4.3	Полнота систем соотношений (2.19) и (2.23)	137

4.4	Специальные фронты в \mathbb{R}^n	140
4.5	Доказательство теоремы 4.3.7	144
4.6	Вспомогательные утверждения	146
4.7	Доказательство теоремы 4.2.4	147
3	Приложения к некоторым задачам	
	анализа и геометрии	150
1	Топология особенностей множества	
	Максвелла семейства гладких функций	151
1.1	Множество Максвелла глобальных минимумов	151
1.2	Случай некомпактного многообразия параметров	156
1.3	Множество Максвелла глобальных максимумов	159
2	Топология особенностей множества	
	опорных гиперплоскостей гладкого	
	подмногообразия в аффинном пространстве	159
2.1	Особые опорные гиперплоскости	159
2.2	Слабо выпуклые подмногообразия в \mathbb{R}^n	163
3	Топология особенностей множества опорных	
	гиперсфер гладкого подмногообразия	
	в евклидовом пространстве	166
3.1	Особые опорные гиперсферы	166
3.2	Доказательство теорем 3.1.5 и 3.1.9	169
3.3	Топология множеств симметрий, конфликтных множеств	
	и множеств средних точек гладких подмногообразий в \mathbb{R}^k	171
4	Контактная геометрия	
	пространственных кривых	175
1	Многомерное обобщение теоремы Фридмана	
	о тройных касательных плоскостях кривой в \mathbb{R}^3	176
1.1	Точки уплощения пространственной кривой	176
1.2	Фронт касательных гиперплоскостей кривой	177
1.3	О четности числа n -касательных гиперплоскостей	
	замкнутой кривой в $\mathbb{R}P^n$	179
2	Теорема о четырех точках уплощения	
	слабо выпуклой кривой в \mathbb{R}^3	182
2.1	Формулировка результата	182
2.2	Вспомогательные утверждения	185
2.3	Доказательство теоремы 2.1.9	188

2.4	Дискретный вариант теоремы о четырех точках уплощения	191
3	Решение задачи Арнольда о допустимых гомотопиях кривой $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos 3t$	193
3.1	Допустимые (по Арнольду) гомотопии кривых в $\mathbb{R}P^3$	193
3.2	Замкнутые двойные линии фронта	195
3.3	Диаграмма главных уплощений кривой	197
3.4	Доказательство теорем 3.2.3 и 3.3.5	198
3.5	Доказательство теоремы 3.2.5	199
3.6	Доказательство предложений 3.2.8 и 3.3.7	203
4	Обобщение классической формулы Бозе на кривые в многомерных пространствах	208
4.1	Особые опорные гиперсферы выпуклой кривой в \mathbb{R}^{2m}	208
4.2	Кривые выпуклые по Барнеру в $\mathbb{R}P^n$	209
4.3	Особые опорные гиперплоскости кривой выпуклой по Барнеру в \mathbb{R}^{2m+1}	211
4.4	Доказательство теоремы 4.3.1	211
4.5	Вспомогательные утверждения	212
4.6	Доказательство предложения 4.4.1	214
4.7	Доказательство предложения 4.4.2	215
4.8	Доказательство теоремы 4.1.1	216
5	Таблицы соотношений между эйлеровыми характеристиками	221
1	Таблица	222
2	Таблица	223
3	Таблица	224
4	Таблица	225
5	Таблица	226
6	Таблица	228
7	Таблица	231
8	Таблица	233
9	Таблица	234
10	Таблица	236
11	Таблица	237
12	Таблица	240
13	Таблица	242
	Список литературы	243

Введение

Опорными окружностями замкнутой кривой на евклидовой плоскости называются касательные окружности, от которых кривая лежит с одной стороны. Суммарная кратность касания опорной окружности с кривой общего положения не превосходит трех. При этом может быть лишь конечное число опорных окружностей, которые касаются кривой в трех различных точках или являются ее окружностями кривизны (последние касаются кривой ровно в одной точке с кратностью три).

Рассмотрим внешне-опорные окружности кривой, т.е. опорные окружности, от которых кривая лежит с внешней стороны по отношению к центру окружности. Через T обозначим число внешне-опорных окружностей, касающихся данной кривой в трех точках, а через C – число ее внешне-опорных окружностей кривизны. Тогда

$$C - T = 2 \tag{0.1}$$

для любой замкнутой выпуклой кривой общего положения на плоскости. Аналогичное соотношение справедливо и для соответствующих чисел внутренне-опорных окружностей.

Эти замечательные формулы обнаружил Бозе [62] в 1932 году, получив, тем самым, простое доказательство классической теоремы Махопадхайя [84] о четырех вершинах. Согласно этой знаменитой теореме, любая замкнутая вложенная кривая на евклидовой плоскости имеет не менее четырех геометрически различных вершин (экстремумов кривизны). Для выпуклых кривых общего положения это мгновенно следует из формул Бозе.

Действительно, если окружность кривизны кривой в данной точке t является опорной, то t – критическая точка функции кривизны этой кривой. Поскольку все критические точки функции кривизны кривой общего положения невырождены, то t – вершина рассматриваемой кривой. Остается заметить, что никакая окружность не может быть одновременно внешне-опорной и внутренне-опорной окружностью кривой общего положения (кривая общего положения не является окружностью).

Формула (0.1) послужила отправной точкой исследований, результатам которых посвящена данная диссертация. Основной нашей целью было нахождение соотно-

шений между дифференциально-геометрическими характеристиками расположения гладких подмногообразий в пространствах с дополнительной структурой (в частности, получение многомерных обобщений формул Бозе). Основным результатом явились не только многочисленные таблицы найденных нами новых соотношений, но и те методы, которые позволяют эффективно их вычислять в некоторых задачах анализа, геометрии и топологии.

Рассматриваемые проблемы относятся к глобальной теории особенностей (см. главу 4 в обзоре [8]). Возьмем, например, замкнутую кривую общего положения в евклидовом пространстве \mathbb{R}^k . Внешне-опорная гиперсфера кривой называется особой, если либо кривая касается этой гиперсферы в одной точке с кратностью, большей 1, либо она касается гиперсферы в нескольких разных точках. Центры особых внешне-опорных гиперсфер кривой образуют особую гиперповерхность в \mathbb{R}^k . Особенности этой гиперповерхности хорошо известны (см., например, [9]). Наша задача состояла в том, чтобы изучить условия сосуществования этих особенностей.

В случае выпуклой кривой на плоскости это сделать нетрудно. Указанная гиперповерхность представляет собой конечный граф, локальная степень вершин которого равна либо 1 (такие вершины являются центрами внешне-опорных окружностей кривизны кривой), либо 3 (центры внешне-опорных окружностей, касающихся кривой в трех точках). Формула Бозе следует из того, что этот граф односвязен, а его ребра удовлетворяют известному соотношению инцидентности: удвоенное число ребер графа равно сумме локальных степеней всех его вершин (это верно для любого конечного графа при условии, что вклад в локальную степень вершины каждого ребра, являющегося петлей, инцидентной этой вершине, равен двум; см. [34]).

В случае выпуклых кривых в пространствах большего числа измерений особенностей больше и ситуация значительно сложнее. Во-первых, необходимо найти топологические условия на гиперповерхность центров внешне-опорных гиперсфер кривой, которые следуют из условия выпуклости (напомним, что кривая в \mathbb{R}^k выпукла, если она пересекает любую гиперплоскость не более, чем в k точках с учетом кратностей; такая кривая может быть замкнутой только при четном k). Во-вторых, необходимо вычислить линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей у любой гиперповерхности с аналогичными особенностями (такие соотношения обобщают соотношение инцидентности в графах).

Обе эти задачи удалось решить. Более того, что касается второй из них, то мы предлагаем метод, который позволяет эффективно вычислять линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивого гладкого отображения гладкого замкнутого многообразия в пространство той же или большей размерности при условии, что это отображение имеет только особенности коранга 1. Необходимость изучения глобального поведения особенностей таких

отображений возникает во многих областях современной математики и, в частности, в контактной геометрии пространственных кривых. Вычисление соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей позволило нам получить важные результаты в ряде хорошо известных задач.

Для примера мы приведем обобщение формулы Бозе для замкнутых выпуклых кривых общего положения в \mathbb{R}^{10} . А именно, пусть $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$ – число внешне-опорных гиперсфер, которые касаются данной кривой в $k_1 + \dots + k_p$ попарно различных точках, среди которых $k_i, i = 1, \dots, p$ точек с кратностью касания μ_i , где $\mu_1 > \dots > \mu_p$ и $k_1\mu_1 + \dots + k_p\mu_p = 11$. Тогда

$$42\chi_{(11)}^{(1)} - 14\chi_{(9,1)}^{(1,2)} - 5\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} + 5\chi_{(7,1)}^{(1,4)} - 4\chi_{(5,1)}^{(2,1)} - 2\chi_{(5,3)}^{(1,2)} + 2\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} \\ - 2\chi_{(5,1)}^{(1,6)} + \chi_{(3,1)}^{(3,2)} - \chi_{(3,1)}^{(2,5)} + \chi_{(3,1)}^{(1,8)} - \chi_{(1)}^{(11)} = 252.$$

С точностью до знака каждый коэффициент в левой части этого соотношения является произведением нескольких членов из последовательности Каталана 1,1,2,5,14,42. Правая часть соотношения равна $(10/2 + 1) \cdot 42$. Аналогичное соотношение справедливо и для внутренне-опорных гиперсфер кривой.

Эти формулы, как и многие другие результаты диссертации, получены при помощи оригинального разрешения устойчивых мультиособенностей коранга 1, возникающих в соответствующих задачах. Наш метод разрешения является обобщением известного в алгебраической геометрии принципа итерации Клеймана [75], который обычно используется в комплексных задачах при исследовании циклов кратных точек общих голоморфных отображений коранга 1 (см. [64],[68],[69],[76],[80] и др.).

В отличие от принципа итерации, мы рассматриваем циклы произвольных устойчивых мультиособенностей коранга 1, причем используем более тонкую процедуру при построении разрешающего многообразия. Это позволяет получить значительно большую информацию о топологии рассматриваемых особенностей, что и приводит к новым результатам в различных приложениях. Мы изучаем здесь только *вещественные задачи*. В комплексном случае использование обобщенного принципа итерации также привело к некоторым новым результатам в глобальной теории особенностей коранга 1 (см. [29],[30]).

Подробное описание полученных нами результатов приведено ниже. Мы предвараем его кратким содержанием диссертации, описанием структуры текста и важнейшими терминологическими соглашениями.

Краткое содержание и структура диссертации. Диссертация состоит из пяти глав. В первых двух главах описывается конструкция разрешения мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения в пространство той же или большей размерности, а также особенностей коранга 1 фронта устойчивого лежандрова

отображения. Вычисляются линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий этих (мульти)особенностей. Третья и четвертая главы посвящены различным приложениям результатов глав 1 и 2 в теории особенностей множеств Максвелла глобальных минимумов семейств гладких функций, множеств симметрий гладких подмногообразий в \mathbb{R}^k , конфликтных множеств, множеств средних осей, а также в контактной геометрии пространственных кривых. В заключительной пятой главе мы собрали вместе таблицы линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий (мульти)особенностей коранга 1 в пространствах небольшой размерности.

Каждая из первых четырех глав состоит из параграфов, разбитых на разделы. Параграфы нумеруются заново в каждой главе, разделы нумеруются заново в каждом параграфе. Номер раздела b в параграфе a имеет вид $a.b$.

Все определения, теоремы, следствия, предложения, леммы, замечания и примеры пронумерованы единым перечнем заново в каждом разделе. Номер имеет вид $a.b.c$, где a – номер параграфа, b – номер раздела, а c – номер элемента перечня. При ссылках на элемент перечня из другой главы указывается, дополнительно, номер этой главы (например, теорема 4.2.5 из главы 1).

Рисунки, а также выключные формулы нумеруются заново в каждой главе. Нумерации формул и рисунков отдельные. Номер имеет вид (a, b) , где a – номер главы (для введения $a = 0$), а b – номер рисунка (или формулы). Нумерация таблиц является единой для всего текста.

Важнейшие терминологические соглашения. Если не оговорено противное, то слова “гладкий” и “дифференцируемый” везде далее означают “ C^∞ -дифференцируемый”, рассматриваемые многообразия вещественны и не имеют края. Гладкое компактное многообразие без края называется замкнутым. Эйлеровой характеристикой $\chi(\Sigma)$ топологического пространства Σ мы называем альтернированную сумму чисел Бетти групп гомологий с компактными носителями. Накрытием называется любое локально тривиальное расслоение с конечным слоем.

Все встречающиеся в дальнейшем пространства гладких отображений снабжены C^∞ -топологией Уитни (тонкой в случае некомпактного прообраза). Многие утверждения мы формулируем для отображений (в частности, для подмногообразий) общего положения. Это означает, что для каждого утверждения существует открытое всюду плотное подмножество в соответствующем пространстве, для всех отображений из которого справедливо указанное утверждение.

Пусть \mathbb{A} – свободная абелева полугруппа по сложению со счетной системой образующих. Выберем подмножество $B \subseteq \mathbb{A}$ и рассмотрим вещественное векторное пространство E_B финитных функций $B \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е. равных нулю всюду, кроме конечного числа точек). Зафиксируем непустое подмножество $\Omega \subset E_B$ и возьмем произвольную

ненулевую линейную функцию $\alpha : E_B \rightarrow \mathbb{R}$. Если α принимает одинаковое значение $\beta \in \mathbb{R}$ во всех точках из Ω , то мы будем говорить, что имеется универсальное линейное соотношение $\alpha(\chi) = \beta$ между значениями функций $\chi \in \Omega$. Система универсальных линейных соотношений называется полной, если она определяет минимальное аффинное подпространство в E_B , содержащее Ω .

В дальнейшем мы изучаем подмножества Ω в пространствах вида E_B , построенные по некоторым классам гладких отображений следующим способом: отображению f сопоставляется функция $\chi_f \in E_B$, значение $\chi_f(\mathcal{A})$ которой на элементе $\mathcal{A} \in B$ равно эйлеровой характеристике $\chi(\mathcal{A}_f)$ некоторого гладкого многообразия \mathcal{A}_f , естественным образом определяемого по f и \mathcal{A} .

Подробное описание полученных результатов. В *первой главе* мы изучаем топологию мультиособенностей устойчивого гладкого отображения гладкого многообразия в пространство большей или той же размерности в предположении, что это отображение имеет лишь особенности коранга 1.

Пусть M и V – произвольные гладкие многообразия положительных размерностей m и n , соответственно, где $l = n - m \geq 0$. Рассмотрим гладкое собственное отображение $f : M \rightarrow V$. Его ростки в особых точках классифицируются относительно гладких замен локальных координат на многообразиях M и V . Классы эквивалентности ростков называются особенностями. Отображение f называется отображением коранга ≤ 1 , если размерность ядра его производной нигде не превосходит 1. Отображения общего положения многообразия M в многообразии V при $m < 4 + 2l$ являются отображениями коранга ≤ 1 .

Предположим, что f – устойчивое отображение коранга ≤ 1 . Тогда локальные алгебры ростков этого отображения изоморфны \mathbb{R} -алгебрам срезанных многочленов от одной переменной степени не выше μ , где μ – целое неотрицательное число, $\mu \leq m/(l+1)$. В подходящих гладких локальных координатах на многообразиях M и V все ростки отображения f с локальной алгеброй, изоморфной алгебре $\mathbb{R}[[t]]/(t^{\mu+1})$, задаются одной и той же формулой Морена [83] (см. также [5]). Соответствующая особенность называется особенностью типа A_μ (объясняется это тем, что если $l = 0$ и локальная алгебра отображения f в точке x изоморфна алгебре $\mathbb{R}[[t]]/(t^{n+1})$, то множество критических значений ростка (f, x) диффеоморфно ростку в нуле замыкания множества неособых точек вещественной части многообразия нерегулярных орбит действия группы Вейля A_n на комплексификации евклидова пространства \mathbb{R}^n).

Мультиособенностью отображения f в точке $y \in V$ называется неупорядоченный набор особенностей f в попарно различных точках $x \in M$ из полного прообраза $f^{-1}(y)$. Мультиособенности устойчивого отображения f коранга ≤ 1 классифицируются по элементам $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ свободной абелевой полугруппы \mathbb{A} по сложению, образующими которой служат символы $A_0, A_1, \dots, A_\mu, \dots$ (в частности,

f имеет мультиособенность типа $0 \in \mathbb{A}$ в любой точке $y \in V \setminus f(M)$. Множество \mathcal{A}_f точек $y \in V$, в которых f имеет мультиособенность типа \mathcal{A} , является гладким подмногообразием коразмерности

$$\text{codim}_l \mathcal{A} = (l+1) \sum_{i=1}^p \mu_i + pl \leq n$$

в V . Оно называется многообразием мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f .

Образ $f(M)$ отображения f является особым подмножеством коразмерности l в V . Его ростком в точке $y \in V$ называется объединение образов ростков (f, x) в точках $x \in f^{-1}(y)$. Если $l > 0$, то особенности образа устойчивого отображения f коранга ≤ 1 также классифицируются по элементам полугруппы \mathbb{A} . А именно, множество $f(M)$ имеет особенность типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ в точке $y \in V$, если мультиособенность отображения f в точке y имеет тип \mathcal{A} . Две особенности образа устойчивого отображения f коранга ≤ 1 в пространстве бóльшей размерности диффеоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип. Многообразие \mathcal{A}_f в этом случае называется многообразием особенностей типа \mathcal{A} образа отображения f .

ПРИМЕР. Устойчивая поверхность (т.е. образ устойчивого гладкого собственного отображения двумерного многообразия) в трехмерном пространстве состоит из неособых точек типа A_0 (образующих гладкие куски), а также может иметь точки типов $2A_0$ (образующих кривые) и $3A_0$ (изолированные точки) трансверсального пересечения двух и трех гладких ветвей, и отдельные точки с особенностью типа A_1 , называемой зонтиком Уитни (см. рис. 0.1 на стр. 12). Устойчивая гиперповерхность в четырехмерном пространстве может иметь лишь особенности типов $pA_0, p \leq 4$ (трансверсальное пересечение p гладких ветвей), A_1 (цилиндр над зонтиком Уитни) и $A_1 + A_0$ (трансверсальное пересечение цилиндра зонтиков Уитни с гладкой гиперповерхностью).

В параграфе 2 мы определяем конструкцию, которая каждому устойчивому отображению f коранга ≤ 1 сопоставляет новое отображение того же типа с той же коразмерностью образа, но с более простыми особенностями. Эта конструкция задается типом A_μ особенностей отображения f и называется A_μ -преобразованием.

Пусть Φ_{A_μ} – замыкание множества точек $x \in M$, в которых f имеет особенность типа A_μ . Это – гладкое подмногообразие коразмерности $\mu(l+1)$ в M . Чтобы определить A_μ -преобразование $[A_\mu](f)$ отображения f , необходимо взять замыкание Φ_{A_μ, A_0} подмножества в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$, образованного парами (x, ξ) точек $x \in \Phi_{A_\mu} \setminus \Phi_{A_\mu+1}, \xi \in \Phi_{A_0} \setminus \Phi_{A_1}, \xi \neq x$ таких, что $f(x) = f(\xi)$. Это замыкание является гладким подмногообразием в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ (теорема 2.1.1). По определению, $[A_\mu](f)$ – композиция гладких отображений $\Phi_{A_\mu, A_0} \rightarrow \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0} \rightarrow \Phi_{A_\mu}$, первым из которых является естественное

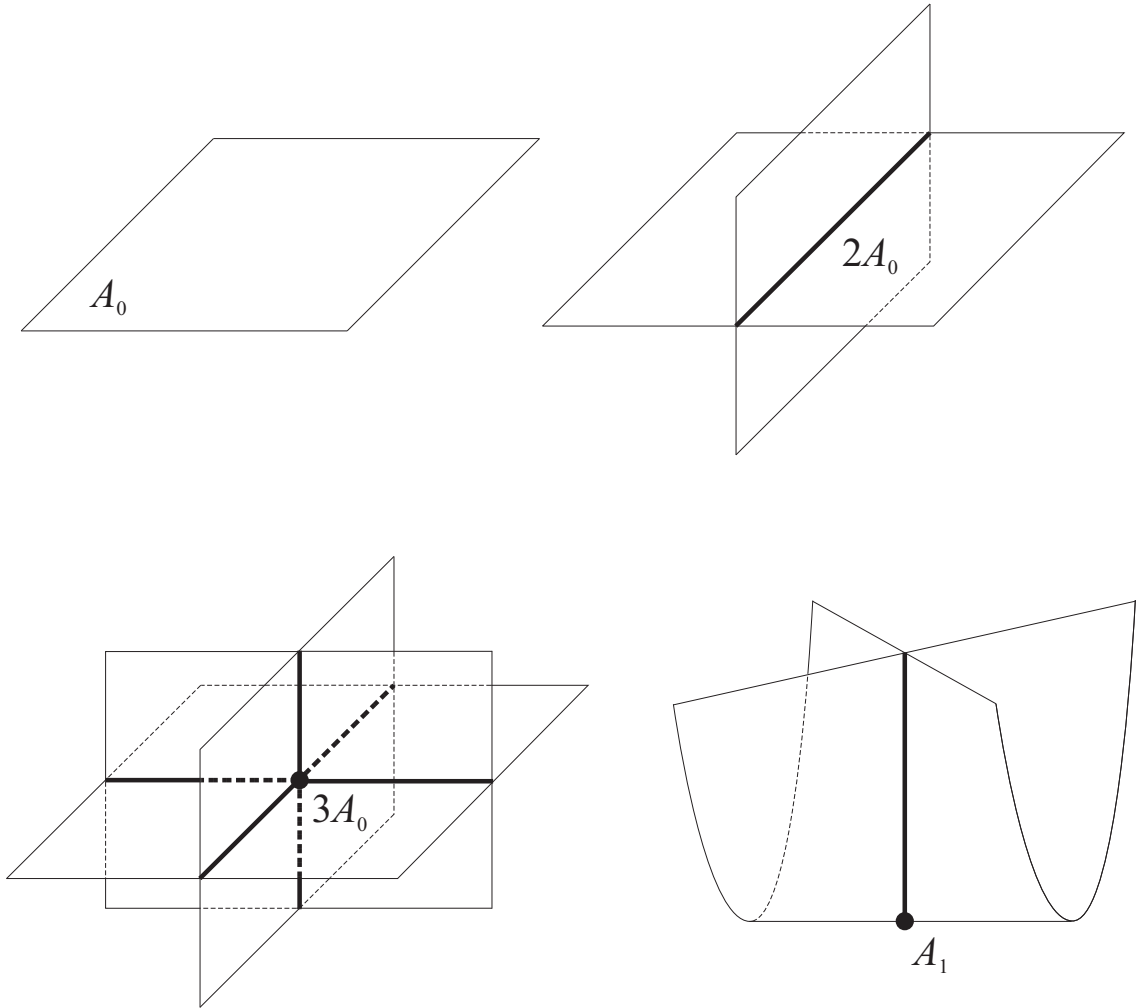


Рис. 0.1: Особенности устойчивых поверхностей в трехмерном пространстве.

вложение, а второе представляет собой проекцию прямого произведения на первый сомножитель.

Отображение $[A_\mu](f)$ является устойчивым гладким собственным отображением коранга ≤ 1 (теорема 2.1.2). Его свойства описаны в теореме 2.1.7. Оказывается, что особенности отображения $[A_\mu](f)$ связаны с краевыми особенностями серии B , которые изучались Арнольдом в [3]. Например, если $l = 0$ и образ отображения f имеет особенность типа $A_\nu, \nu > \mu$, в некоторой точке $y \in V$, то росток в точке $f^{-1}(y)$ пары в Φ_{A_μ} , образованной подмногообразием $\Phi_{A_{\mu+1}}$ и множеством критических значений отображения $[A_\mu](f)$, диффеоморфен ростку в нуле прямого произведения пространства $\mathbb{R}^{n-\nu}$ и пары, состоящей из неприводимых компонент замыкания множества неособых точек вещественной части многообразия нерегулярных орбит действия группы Вейля $B_{\nu-\mu}$ на комплексификации евклидова пространства $\mathbb{R}^{\nu-\mu}$.

В параграфе 3 определяется основная конструкция – разрешение мультиособен-

ностей устойчивого отображения f коранга ≤ 1 . Разрешение мультиособенностей типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ отображения f строится при помощи итерации A_μ -преобразований, где $\mu = \mu_1, \dots, \mu_p$. Такая итерация сопоставляет элементу \mathcal{A} гладкое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ (пространство, в котором лежит образ последнего A_μ -преобразования) и гладкое собственное отображение $\varphi_{\mathcal{A}} : \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$ такие, что:

1) образом отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ является замыкание в V объединения многообразий $(\mathcal{A} + kA_0)_f$ по всем целым $k \geq 0$ (если $l > 0$, то это – замыкание многообразия \mathcal{A}_f);

2) если мультиособенность типа $X \in \mathbb{A}$ отображения f примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A} + kA_0$, то $\varphi_{\mathcal{A}}$ – конечное накрытие над многообразием X_f ;

3) кратность этого накрытия зависит только от \mathcal{A} и X (т.е. не зависит ни от отображения f , ни от многообразий M и V); она называется индексом мультиособенности типа X относительно мультиособенности типа \mathcal{A} и обозначается $I_{\mathcal{A}}(X)$.

Пары $(\Phi_{\mathcal{A}}, \varphi_{\mathcal{A}})$, полученные при разных упорядочениях набора μ_1, \dots, μ_p естественно диффеоморфны (теорема 3.1.4). В теореме 3.2.1 мы приводим рекуррентную формулу, которая позволяет быстро вычислять индексы $I_{\mathcal{A}}(X)$.

ПРИМЕР. Рассмотрим устойчивую компактную поверхность в трехмерном пространстве. Многообразие Φ_{2A_0} представляет собой одномерное многообразие, каждая связная компонента которого диффеоморфна окружности. Образом этого многообразия при отображении φ_{2A_0} является множество всех особых точек поверхности. Полный прообраз относительно отображения φ_{2A_0} любой особой точки типа зонтика Уитни состоит из одной точки. Полный прообраз любой точки двойного (тройного) самопересечения поверхности состоит ровно из двух (шести, соответственно) точек.

В параграфе 4 изучается каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ на связные компоненты многообразий $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(X_f)$ по всем типам $X \in \mathbb{A}$ мультиособенностей отображения f . Эта стратификация является C^∞ -стратификацией Уитни (теорема 4.2.5). Ее особенности описаны в теореме 4.2.2 с точностью до диффеоморфизмов многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$. Эти особенности устойчивы (относительно малых деформаций исходного отображения f) и просты (не имеют модулей). Росток остова коразмерности 1 канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ в любой точке состоит из нескольких гладких неприводимых компонент (коразмерностей 1 и $l + 1$) и нескольких компонент, каждая из которых является ростком образа (при $l > 0$) или множества критических значений (при $l = 0$) устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1 .

Параграф 5 посвящен первым приложениям. Как известно, наличие (мульти) особенностей того или иного типа у отображения общего положения ограничивается различными условиями топологического характера. Для их нахождения используются различные методы и объекты: многочлены Тома, классы кобордизмов и пр. (см. [8], [29], [30], [99], [100]). В диссертации используется указанное выше разрешение для получения новых условий сосуществования (другой природы) устойчивых мультио-

особенностей коранга 1. Мы вычисляем универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивых гладких отображений коранга ≤ 1 замкнутых многообразий в многообразия нестрого бóльшей размерности. Для каждой из четырех комбинаций четностей размерности многообразия-образа и коразмерности образа отображения в этом многообразии найдена полная система таких соотношений (теоремы 5.2.1, 5.3.1, 5.5.1 – 5.5.3).

А именно, пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , многообразие M замкнуто и $l = n - m \geq 0$. Тогда эйлерова характеристика $\chi_f(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}_f)$ любого нечетномерного многообразия \mathcal{A}_f мультиособенностей типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ отображения f является линейной комбинацией (с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_f(X)$ четномерных многообразий X_f , образованных мультиособенностями типов $X \in \mathbb{A}$ таких, что $\text{codim}_l X \in [\text{codim}_l \mathcal{A} + 1, n]$. Каждый коэффициент этой комбинации зависит только от типов \mathcal{A}, X соответствующих мультиособенностей и от четности числа l . Мы приводим комбинаторные формулы, которые позволяют быстро вычислять эти коэффициенты на компьютере для любых наперед заданных \mathcal{A} и X .

Например, для особенностей типа $2A_0$ образа отображения f многообразия M четной размерности в пространство V нечетной размерности $n \leq 5l + 2$,

$$2\chi_{(0)}^{(2)} = \chi_{(1)}^{(1)} + 6\chi_{(0)}^{(3)} - 2\chi_{(2)}^{(1,2)} - 5\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - 40\chi_{(0)}^{(5)} \\ + 5\chi_{(3)}^{(1)} + 24\chi_{(2,0)}^{(1,2)} + 12\chi_{(1,0)}^{(2,1)} + 92\chi_{(1,0)}^{(1,4)} + 672\chi_{(0)}^{(7)}.$$

Здесь $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$ обозначает эйлерову характеристику $\chi_f(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})$ многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$. Указанная формула является многомерным обобщением соотношения инцидентности $2\chi_{(0)}^{(2)} = \chi_{(1)}^{(1)} + 6\chi_{(0)}^{(3)}$ в графе, образованном изолированными особенностями и особенностями, встречающимися на односвязных кривых, у устойчивой компактной поверхности в трехмерном пространстве ($\chi_{(0)}^{(2)}$ – число односвязных компонент множества точек пересечения двух гладких ветвей поверхности; $\chi_{(0)}^{(3)}$ – число точек тройного самопересечения; $\chi_{(1)}^{(1)}$ – число зонтиков Уитни). Система, состоящая из этого (единственного) равенства является полной системой универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей таких двумерных поверхностей. Действительно, для любых $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ таких, что $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_4^2 \neq 0$, существует устойчивая компактная поверхность в \mathbb{R}^3 , для которой $\lambda_1 \chi_{(0)}^{(1)} + \lambda_2 \chi_{(1)}^{(1)} + \lambda_3 \chi_{(0)}^{(3)} + \lambda_4 \neq 0$, где $\chi_{(0)}^{(1)}$ – эйлерова характеристика многообразия ее неособых точек.

Другие универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивых отображений коранга ≤ 1 в пространства не слишком больших размерностей приведены в таблицах 1 – 6. Следует отметить, что сам факт существования подобных соотношений (причем, даже в случае

произвольной стратификации Уитни гладкого замкнутого многообразия) можно в принципе извлечь из некоторых работ по топологии стратифицированных множеств (например, из [85] или [81]). Тем не менее этот факт нигде не формулировался, а указанные соотношения никогда не вычислялись, кроме некоторых частных случаев (сводящихся к соотношениям инцидентности в графах). Мы же предъявляем простой комбинаторный алгоритм для вычисления полной системы универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивых отображений коранга ≤ 1 замкнутых m -мерных многообразий в пространстве размерности n при любых фиксированных n и $l = n - m \geq 0$.

Этот алгоритм основан на том, что для любого устойчивого отображения $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 замкнутого многообразия M и для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ многообразиие $\Phi_{\mathcal{A}}$ замкнуто, а его эйлерова характеристика $\chi(\Phi_{\mathcal{A}})$ вычисляется по формуле

$$(-1)^{\text{codim}_l \mathcal{A}} \chi(\Phi_{\mathcal{A}}) = \sum_{X \in \mathbb{A}} (-1)^{\text{codim}_l X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi_f(X),$$

где сумма берется по типам X всех мультиособенностей отображения f , примыкающих к мультиособенностям типов $\mathcal{A} + k\mathcal{A}_0$, $k \geq 0$. Если размерность многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ нечетная, то $\chi(\Phi_{\mathcal{A}}) = 0$, что дает систему линейных уравнений на эйлеровы характеристики многообразий мультиособенностей отображения f . Искомые выражения для эйлеровых характеристик $\chi_f(\mathcal{A})$ нечетномерных многообразий \mathcal{A}_f являются решениями этой системы уравнений. Полнота полученной системы соотношений между эйлеровыми характеристиками доказывается отдельно путем построения достаточного количества примеров отображений рассматриваемого типа.

Заметим, что найденные нами соотношения позволяют представить эйлерову характеристику $\chi(f(M))$ образа отображения f в виде суммы эйлеровой характеристики $\chi(M)$ многообразия M и линейной комбинации эйлеровых характеристик четномерных многообразий мультиособенностей этого отображения. Каждый коэффициент этой комбинации зависит только от типа соответствующей мультиособенности. Например, при нечетном l и нечетном $n \leq 5l + 2$,

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) &= \chi(M) + \frac{1}{2} [\chi(\binom{1}{1}) + 2\chi(\binom{3}{0})] - \chi(\binom{1,2}{1,0}) - 9\chi(\binom{5}{0}) \\ &\quad + \frac{1}{4} [5\chi(\binom{1}{3}) + 20\chi(\binom{1,2}{2,0}) + 10\chi(\binom{2,1}{1,0}) + 80\chi(\binom{1,4}{1,0}) + 620\chi(\binom{7}{0})]. \end{aligned}$$

Это – многомерное обобщение известной формулы Изумии-Марара [73]

$$\chi(f(M)) = \chi(M) + \frac{1}{2}\chi(\binom{1}{1}) + \chi(\binom{3}{0})$$

для устойчивой компактной поверхности в трехмерном пространстве.

По всей видимости результаты, аналогичные изложенным выше, справедливы и для устойчивых отображений коранга ≤ 1 в пространство меньшей размерности.

Однако соответствующая теория еще не создана. Здесь пока получены лишь первые весьма предварительные результаты (см. [89]).

Во *второй главе* мы изучаем топологию особенностей фронта устойчивого лежандрова отображения коранга ≤ 1 .

Параграф 1 содержит все необходимые определения и факты теории особенностей лежандровых отображений. Напомним, что контактной структурой на нечетномерном гладком многообразии называется максимально неинтегрируемое поле контактных элементов (гиперплоскостей в его касательных пространствах). Многообразие, снабженное контактной структурой, называется контактным. Подмногообразия контактного многообразия, являющиеся интегральными многообразиями контактной структуры и имеющие наивысшую размерность (равную $n - 1$, если размерность объемлющего контактного многообразия равна $2n - 1$) называются лежандровыми.

Гладкое расслоение называется лежандровым, если пространство этого расслоения является контактным многообразием, а все слои лежандровы. Примером лежандрова расслоения может служить проецивизированное кокасательное расслоение $PT^*V \rightarrow V$ гладкого многообразия V . Проектирование лежандрова подмногообразия пространства лежандрова расслоения в базу этого расслоения называется лежандровым отображением. В этой работе мы рассматриваем только собственные лежандровы отображения. Образ лежандрова отображения называется фронтом.

Рассмотрим произвольное лежандрово расслоение с n -мерной базой V и зафиксируем в его пространстве лежандрово подмногообразие L (размерности $n - 1$). Лежандрово отображение $f : L \rightarrow V$ называется лежандровым отображением коранга ≤ 1 , если размерность ядра его производной нигде не превосходит 1. Фронт $\mathcal{F} = f(L)$ лежандрово устойчивого лежандрова отображения коранга ≤ 1 называется устойчивым фронтом коранга ≤ 1 . Важным примером подобного фронта является множество критических значений устойчивого гладкого собственного отображения коранга ≤ 1 многообразий одинаковой размерности. Вообще любой устойчивый фронт коранга ≤ 1 в V является проекцией некоторого лежандрова подмногообразия в пространстве расслоения $PT^*V \rightarrow V$ в базу этого расслоения.

Особенности устойчивого фронта коранга ≤ 1 (а также соответствующие мультиособенности самого лежандрова отображения) классифицируются по элементам свободной абелевой полугруппы $\mathbb{A}_+ \subset \mathbb{A}$ по сложению, образующими которой служат символы $A_1, A_2, \dots, A_\mu, \dots$. А именно, устойчивый фронт \mathcal{F} коранга ≤ 1 в многообразии V имеет особенность типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ в данной точке $y \in V$, если его росток (\mathcal{F}, y) в этой точке диффеоморфен ростку множества критических значений устойчивого гладкого собственного отображения коранга ≤ 1 гладких многообразий размерности n , имеющего в соответствующей точке многообразия-образа мультиособенность типа \mathcal{A} . Множество $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ точек $y \in V$, в которых фронт \mathcal{F} имеет

особенность типа \mathcal{A} , является гладким подмногообразием коразмерности

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p$$

в V . Оно называется многообразием особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} .

ПРИМЕР. Устойчивый фронт в трехмерном пространстве может иметь особенности только следующих типов: A_1 (неособая точка), $2A_1$ (трансверсальное пересечение двух гладких ветвей фронта), A_2 (ребро возврата), $3A_1$ (трансверсальное пересечение трех гладких ветвей), $A_2 + A_1$ (трансверсальное пересечение ребра возврата с гладкой ветвью фронта) и A_3 (ласточкин хвост). Ростки соответствующих гиперповерхностей изображены на рис. 0.2 (стр. 18).

В параграфе 2 мы описываем конструкцию разрешения особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1 . В основе этой конструкции лежит преобразование, которое сопоставляет данному устойчивому фронту коранга ≤ 1 новый устойчивый фронт коранга ≤ 1 в пространстве меньшей размерности. Как и в случае произвольных устойчивых отображений коранга ≤ 1 , это преобразование определяется классом особенностей типа A_μ ($\mu \geq 1$) и также называется A_μ -преобразованием.

Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения $f : L \rightarrow V$ коранга ≤ 1 . Рассмотрим замыкание Φ_{A_μ} множества точек $x \in L$, в которых f имеет особенность типа A_μ . Это – гладкое подмногообразие коразмерности $\mu - 1$ в L . Замыкание $[A_\mu](\mathcal{F})$ в многообразии Φ_{A_μ} множества точек x таких, что фронт \mathcal{F} имеет особенность типа $A_\mu + A_1$ в точке $f(x)$, является устойчивым фронтом коранга ≤ 1 (теорема 2.1.3). Этот фронт мы и называем A_μ -преобразованием фронта \mathcal{F} .

Разрешение особенностей типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ фронта \mathcal{F} строится при помощи итерации A_μ -преобразований, где $\mu = \mu_1, \dots, \mu_p$. Такая итерация сопоставляет элементу \mathcal{A} гладкое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ (пространство, в котором лежит фронт, полученный в результате последнего A_μ -преобразования) и гладкое собственное отображение $\varphi_{\mathcal{A}} : \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$ такие, что:

- 1) образом отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ является замыкание в V многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$;
- 2) если особенность типа $X \in \mathbb{A}_+$ фронта \mathcal{F} примыкает к особенности типа \mathcal{A} , то $\varphi_{\mathcal{A}}$ – конечное накрытие над многообразием $X_{\mathcal{F}}$;
- 3) кратность этого накрытия зависит только от \mathcal{A} и X (т.е. не зависит ни от фронта \mathcal{F} , ни от объемлющего многообразия V).

Пары $(\Phi_{\mathcal{A}}, \varphi_{\mathcal{A}})$, полученные при разных упорядочениях набора μ_1, \dots, μ_p естественно диффеоморфны (теорема 2.2.5). Кратность отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ над многообразием $X_{\mathcal{F}}$ равна $I_{\mathcal{A}}(X)$ для любого $X \in \mathbb{A}_+$ (раздел 2.3).

ПРИМЕР. Рассмотрим устойчивый компактный фронт в трехмерном пространстве. Многообразие Φ_{2A_1} представляет собой одномерное многообразие, каждая связная компонента которого диффеоморфна окружности. Образом этого многообразия

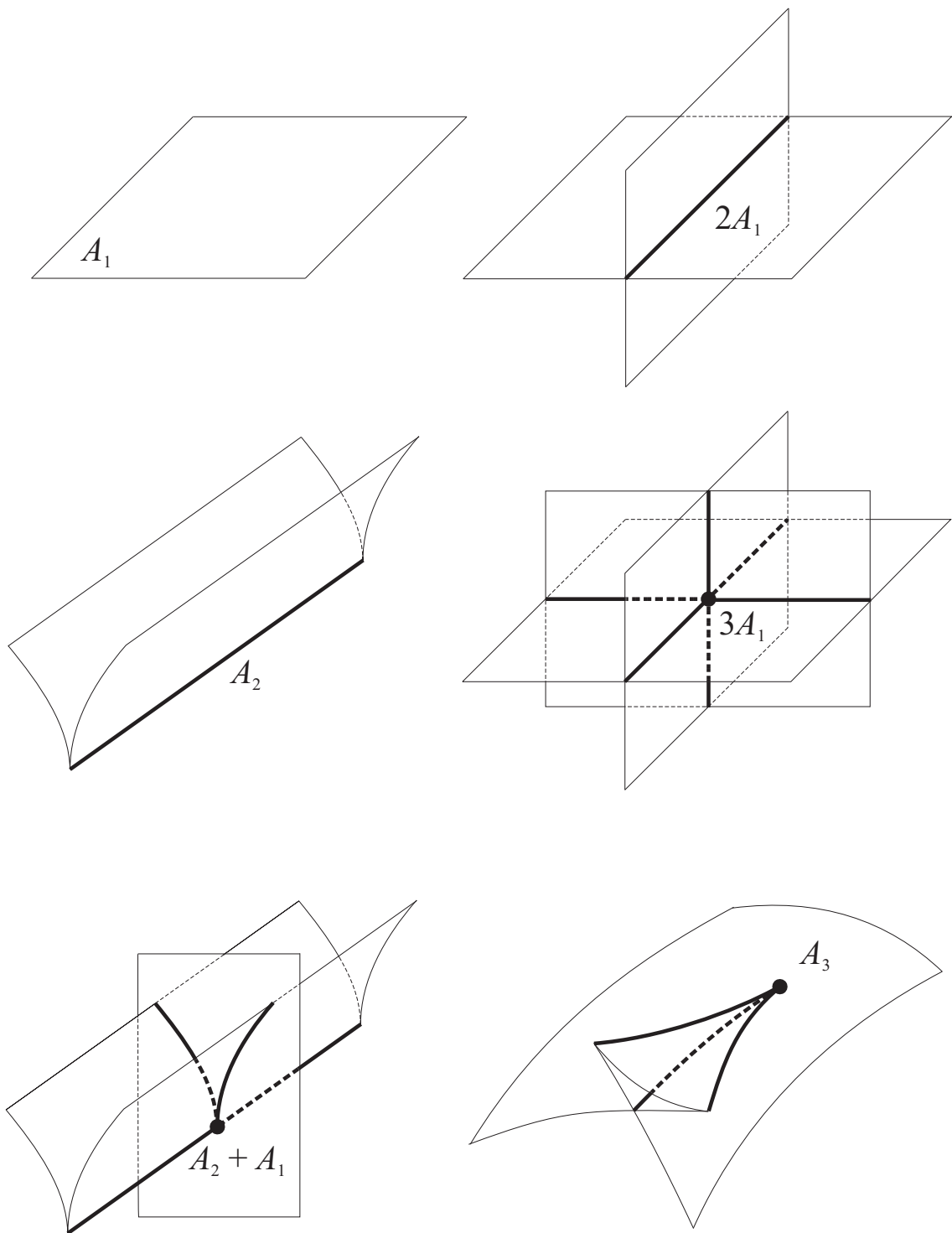


Рис. 0.2: Особенности устойчивых фронтов в трехмерном пространстве.

при отображении φ_{2A_1} является замыкание множества точек трансверсального пересечения двух гладких ветвей фронта. Полный прообраз относительно отображения φ_{2A_1} любой особой точки типа ласточкин хвост состоит из одной точки. Полный прообраз точки трансверсального пересечения ребра возврата с гладкой ветвью фронта состоит из двух точек. Полный прообраз точки трансверсального пересечения двух (трех) гладких ветвей фронта состоит ровно из двух (шести, соответственно) точек.

Многообразие Φ_{A_2} также представляет собой одномерное многообразие, каждая связная компонента которого диффеоморфна окружности. Образ этого многообразия при отображении φ_{A_2} получается замыканием ребер возврата фронта. Полный прообраз относительно отображения φ_{A_2} любой особой точки типа ласточкин хвост, ребро возврата или точки трансверсального пересечения ребра возврата с гладкой ветвью фронта состоит из одной точки.

Отметим, что все локальные свойства рассматриваемого нами разрешения особенностей фронтов следуют из локальных свойств разрешения мультиособенностей устойчивого гладкого собственного отображения коранга ≤ 1 многообразий одинаковой размерности (предложение 2.2.3). Используя это наблюдение, а также соответствующие результаты главы 1, мы формулируем свойства A_μ -преобразования фронтов (теорема 2.1.8) и описываем особенности канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ на связные компоненты многообразий $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(X_{\mathcal{F}})$ по всем типам X особенностей фронта \mathcal{F} (раздел 2.4).

Например, пусть ξ – точка остова $St_1(\Phi_{\mathcal{A}})$ коразмерности 1 канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$. Предположим, что фронт \mathcal{F} имеет особенность типа A_ν в точке $y = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi)$. Тогда $\kappa = \nu - \text{codim } \mathcal{A} \geq \max\{1, p - 1\}$ и на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ существуют гладкие локальные координаты $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-\text{codim } \mathcal{A}})$ с началом в точке ξ такие, что росток $(St_1(\Phi_{\mathcal{A}}), \xi)$ является ростком в нуле объединения следующих гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{R}^{n-\text{codim } \mathcal{A}} = \{\lambda\}$:

1) фронта, образованного точками, для которых функция

$$S(t, \lambda_p, \dots, \lambda_\kappa) = t^{\kappa-p+1} + \sum_{i=p}^{\kappa} \lambda_i t^{i-p}$$

как многочлен от t имеет кратный вещественный корень;

2) p гладких гиперповерхностей

$$S|_{t=-(\lambda_i+\dots+\lambda_{p-1})} = 0, \quad i = 1, \dots, p-1; \quad S|_{t=0} = 0;$$

3) $p(p-1)/2$ гиперплоскостей

$$\lambda_i + \dots + \lambda_{j-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq p.$$

Все эти результаты мы используем в параграфе 3. Здесь вычисляются универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий

особенностей компактных устойчивых фронтов коранга ≤ 1 . Отдельно для случаев нечетной и четной размерности пространства, объемлющего фронт, найдена полная система таких универсальных соотношений (теоремы 3.1.4, 3.2.1 и 3.2.2). Алгоритм вычислений аналогичен описанному выше в случае произвольных устойчивых гладких отображений коранга ≤ 1 . Результаты также аналогичны.

А именно, пусть \mathcal{F} – устойчивый компактный фронт коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Тогда эйлерова характеристика $\chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$ любого нечетномерного многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ фронта \mathcal{F} является линейной комбинацией (с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_{\mathcal{F}}(X)$ четномерных многообразий $X_{\mathcal{F}}$, образованных особенностями типов $X \in \mathbb{A}_+$ таких, что $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$. Каждый коэффициент этой комбинации зависит только от типов \mathcal{A} и X соответствующих особенностей. Имеются комбинаторные формулы, которые позволяют быстро вычислять эти коэффициенты на компьютере для любых наперед заданных \mathcal{A} и X .

Например, для особенностей коразмерности 2 (всего два типа, $2A_1$ и A_2) фронта \mathcal{F} в пространстве V нечетной размерности $n \leq 5$ имеем:

$$\begin{aligned} 2\chi(\binom{2}{1}) &= 6\chi(\binom{3}{1}) + 2\chi(\binom{1,1}{2,1}) + \chi(\binom{1}{3}) \\ &\quad - 40\chi(\binom{5}{1}) - 18\chi(\binom{1,3}{2,1}) - 8\chi(\binom{2,1}{2,1}) - 11\chi(\binom{1,2}{3,1}) - 5\chi(\binom{1,1}{3,2}) - 7\chi(\binom{1,1}{4,1}) - 4\chi(\binom{1}{5}), \\ 2\chi(\binom{1}{2}) &= 2\chi(\binom{1,1}{2,1}) + 2\chi(\binom{1}{3}) - 4\chi(\binom{1,3}{2,1}) - 4\chi(\binom{2,1}{2,1}) - 4\chi(\binom{1,2}{3,1}) - 3\chi(\binom{1,1}{3,2}) - 4\chi(\binom{1,1}{4,1}) - 4\chi(\binom{1}{5}). \end{aligned}$$

Здесь $\chi(\binom{k_1, \dots, k_p}{\mu_1, \dots, \mu_p})$ обозначает эйлерову характеристику $\chi_{\mathcal{F}}(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})$ многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_{\mathcal{F}}$. Указанные формулы являются многомерным обобщением соотношений инцидентности $2\chi(\binom{2}{1}) = 6\chi(\binom{3}{1}) + 2\chi(\binom{1,1}{2,1}) + \chi(\binom{1}{3})$, $2\chi(\binom{1}{2}) = 2\chi(\binom{1,1}{2,1}) + 2\chi(\binom{1}{3})$ в двух графах, образованных изолированными особенностями и односвязными кривыми, состоящими из особенностей типов $2A_1$ и A_2 , соответственно, у устойчивого компактного фронта в трехмерном пространстве ($\chi(\binom{2}{1})$ – число односвязных компонент множества точек пересечения двух гладких ветвей фронта; $\chi(\binom{3}{1})$ – число точек тройного самопересечения; $\chi(\binom{1}{2})$ – число односвязных компонент множества, полученного из ребер возврата выбрасыванием точек пересечения с гладкими ветвями фронта; $\chi(\binom{1,1}{2,1})$ – число точек пересечения ребер возврата с гладкими ветвями фронта; $\chi(\binom{1}{3})$ – число ласточкиных хвостов). Другие универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей устойчивых фронтов коранга ≤ 1 в пространствах не слишком больших размерностей приведены в таблицах 7 и 8.

Отметим, что эти соотношения позволяют представить эйлерову характеристику $\chi(\mathcal{F})$ фронта \mathcal{F} в виде суммы эйлеровой характеристики $\chi(L)$ многообразия L , фронтом которого является \mathcal{F} , и линейной комбинации эйлеровых характеристик четномерных многообразий особых точек этого фронта. Каждый коэффициент этой

комбинации зависит только от типа соответствующей особенности. Например, при нечетном $n \leq 5$

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}) &= \chi(L) + \frac{1}{2}[\chi(\binom{1}{3}) + 2\chi(\binom{3}{1})] \\ &\quad - \frac{1}{2}[\chi(\binom{1}{5}) + 3\chi(\binom{1,1}{4,1}) + \chi(\binom{1,1}{3,2}) + 4\chi(\binom{1,2}{3,1}) + 2\chi(\binom{2,1}{2,1}) + 6\chi(\binom{1,3}{2,1}) + 18\chi(\binom{5}{1})].\end{aligned}$$

Это – многомерное обобщение известной формулы Изумии-Марара [72]

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(L) + \frac{1}{2}\chi(\binom{1}{3}) + \chi(\binom{3}{1})$$

для устойчивого компактного фронта в трехмерном пространстве.

В параграфе 4 изучается топология особенностей на крае правильной связной компоненты дополнения к устойчивому фронту \mathcal{F} коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Связная компонента U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ называется правильной, если ее замыкание \bar{U} является C^0 -подмногообразием с краем $\Gamma = \bar{U} \setminus U$ в V . Мы рассматриваем правильные связные компоненты нескольких типов, в основном, – эллиптические и гиперболические. Правильная компонента U называется эллиптической, если фронт \mathcal{F} имеет на ее крае Γ только особенности типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ с нечетными кратностями μ_1, \dots, μ_p . Определение гиперболичности см. в разделе 4.1.

Ростки краев двух эллиптических (или двух гиперболических) связных компонент дополнения к \mathcal{F} диффеоморфны тогда и только тогда, когда диффеоморфны ростки самого фронта \mathcal{F} в соответствующих точках. Край Γ эллиптической (или гиперболической) связной компоненты U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ имеет особенность типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$ в данной точке $y \in \Gamma$, если фронт \mathcal{F} имеет в y особенность типа \mathcal{A} .

В диссертации вычисляются универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на компактных краях эллиптических и гиперболических связных компонент дополнений к устойчивым фронтам коранга ≤ 1 . Отдельно для случаев нечетной и четной размерности пространства, объемлющего фронт, и для каждого типа связных компонент дополнения к фронту (эллиптическая, гиперболическая) получена полная система таких универсальных соотношений (теоремы 4.2.10, 4.2.13, 4.3.1, 4.3.2 и 4.3.3).

А именно, как и для особенностей всего фронта \mathcal{F} , эйлерова характеристика $\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}_\Gamma)$ любого нечетномерного многообразия $\mathcal{A}_\Gamma = \mathcal{A}_\mathcal{F} \cap \Gamma$ особенностей типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$ края Γ является линейной комбинацией (с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_\Gamma(X)$ четномерных многообразий X_Γ , образованных особенностями типов $X \in \mathbb{A}_+$ таких, что $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$. Каждый коэффициент этой комбинации зависит только от типов \mathcal{A}, X соответствующих особенностей и типа компоненты (эллиптическая, гиперболическая). Имеются комбинаторные формулы, позволяющие вычислять эти коэффициенты для любых наперед заданных \mathcal{A} и X .

Например, для особенностей типа $2A_1$ края Γ эллиптической связной компоненты дополнения к фронту \mathcal{F} в пространстве V нечетной размерности $n \leq 5$

$$2\chi(\binom{2}{1}) = 3\chi(\binom{3}{1}) + \chi(\binom{3}{3}) - 5\chi(\binom{5}{1}) - \chi(\binom{1,2}{3,1}) - \chi(\binom{1}{5}).$$

Здесь $\chi(\binom{k_1, \dots, k_p}{\mu_1, \dots, \mu_p})$ обозначает эйлерову характеристику $\chi_\Gamma(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})$ многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_\Gamma$. Другие универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на краях эллиптических (а также гиперболических) связных компонент дополнений к устойчивым фронтам коранга ≤ 1 в пространствах небольших размерностей приведены в таблицах 9 – 12.

Используя указанные универсальные соотношения можно при нечетном n представить эйлерову характеристику края Γ эллиптической (или гиперболической) связной компоненты дополнения к фронту \mathcal{F} в виде линейной комбинации эйлеровых характеристик четномерных многообразий особенностей этого края. Каждый коэффициент этой комбинации зависит только от типа соответствующей особенности. В частности, если $n \leq 5$, то

$$\chi(\Gamma) = \chi(\binom{1}{1}) + \frac{1}{2} [\chi(\binom{3}{3}) - \chi(\binom{3}{1})] + \frac{1}{2} [\chi(\binom{1}{5}) + 2\chi(\binom{5}{1})]$$

для края Γ эллиптической компоненты. Последний факт совершенно неожиданно привел к следующему результату.

Пусть $\mathbb{A}_{odd} \subset \mathbb{A}_+$ – свободная абелева полугруппа по сложению, образующими которой служат символы $A_1, A_3, \dots, A_{2k+1}, \dots$. Каждому элементу $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{odd}$ сопоставим степень

$$\deg \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$$

и вес

$$w(\mathcal{A}) = (-1)^{[p/2]} w(A_{\mu_1}) \dots w(A_{\mu_p}),$$

где $[x]$ – целая часть числа x , а

$$w(A_{2k+1}) = \frac{1}{2k+1} \binom{2k+1}{k}$$

(что является k -м числом Каталана, $k \geq 0$).

Рассмотрим теперь эллиптическую связную компоненту дополнения к устойчивому фронту \mathcal{F} коранга ≤ 1 в гладком многообразии V нечетной размерности n . Предположим, что край Γ этой компоненты компактен и $\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = 0$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$ такого, что $\deg \mathcal{A} < n$. Тогда

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd}: \text{codim } \mathcal{A} = n} w(\mathcal{A}) \chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \frac{n+1}{2} w(A_n) \chi_0, \quad (0.2)$$

где $\chi_0 = \chi(\Gamma)$ – эйлерова характеристика гиперповерхности Γ .

Эта формула проверена мной вручную при $n \leq 11$ и на компьютере вплоть до $n = 17$. Я думаю, что она верна для любого (нечетного) n . Формулы (0.2) для всех $n \leq 13$ приведены в таблице 13.

В *третьей главе* рассматриваются приложения указанных выше результатов к некоторым задачам анализа и геометрии. Здесь мы допускаем наличие у многообразия связных компонент разных размерностей, в том числе нульмерных.

В параграфе 1 изучается топология особенностей множества Максвелла глобальных минимумов семейства $F(x, \lambda)$ гладких функций на гладком замкнутом многообразии M , гладко зависящих от k -мерного параметра λ . Множеством Максвелла этого семейства называется множество значений λ , при которых глобальный минимум функции $F(\cdot, \lambda)$ достигается либо в одной вырожденной критической точке, либо в нескольких разных точках многообразия M .

Множество Максвелла Σ семейства $F(x, \lambda)$ общего положения является множеством особых точек функции минимумов этого семейства, сопоставляющей точке λ пространства параметров Λ абсолютный минимум функции $F(\cdot, \lambda)$. График Γ функции минимумов семейства $F(x, \lambda)$ является краем правильной связной компоненты дополнения к некоторому фронту. Если $k \leq 6$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1, то Γ имеет только особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$, т.е. является краем эллиптической компоненты (см. [9]).

Легко видеть, что для любого \mathcal{A} естественная проекция графика функции минимумов в пространство Λ путем забывания значений этой функции осуществляет гладкое вложение многообразия \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ в Λ . Если $\text{codim } \mathcal{A} > 1$, то образ многообразия \mathcal{A}_Γ принадлежит множеству Максвелла Σ и состоит из точек, в которых ростки Σ диффеоморфны. По определению, множество Σ имеет в этих точках особенности типа \mathcal{A} .

Таким образом, если многообразие Λ замкнуто, то при указанных ограничениях на его размерность (или на размерности связных компонент многообразия M) эйлеровы характеристики $\chi_\Sigma(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}_\Sigma) = \chi(\mathcal{A}_\Gamma)$ многообразий \mathcal{A}_Σ особенностей типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ множества Максвелла Σ семейства $F(x, \lambda)$ общего положения удовлетворяют всем соотношениям, полученным в главе 2 для эйлеровых характеристик многообразий особенностей компактного края эллиптической связной компоненты дополнения к устойчивому фронту коранга ≤ 1 (теорема 1.1.6). В разделе 1.2 мы показываем, что при четном k и некоторых дополнительных условиях формула (0.2) с $n = k + 1$ и $\chi_0 = \chi(\Lambda)$ имеет место даже для семейств $F(x, \lambda)$ с некомпактным пространством параметров Λ (теорема 1.2.3).

В параграфе 2 изучается топология особенностей множества опорных гиперплоскостей гладкого замкнутого подмногообразия M в \mathbb{R}^n . Опорной гиперплоскостью

называется касательная гиперплоскость, от которой многообразие лежит с одной стороны. Множество всех опорных гиперплоскостей многообразия является особым подмножеством в пространстве V всех аффинных гиперплоскостей в \mathbb{R}^n . Если многообразие M не лежит ни в какой гиперплоскости в \mathbb{R}^n , то это множество гомеоморфно $(n - 1)$ -мерной сфере.

Множество всех касательных гиперплоскостей многообразия M является фронтом в пространстве V . Множество Γ опорных гиперплоскостей многообразия M общего положения является краем правильной связной компоненты дополнения к этому фронту (состоящей из гиперплоскостей, которые не пересекают M и от которых M лежит с одной стороны). Если $n \leq 7$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1, то гиперповерхность Γ имеет только особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$, т.е. является краем эллиптической компоненты (см. [25]).

Точки, в которых Γ имеет особенность типа \mathcal{A} называются опорными гиперплоскостями типа \mathcal{A} . При указанных ограничениях на размерности, эйлеровы характеристики $\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}_\Gamma)$ многообразий \mathcal{A}_Γ опорных гиперплоскостей типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$ замкнутого подмногообразия M общего положения в \mathbb{R}^n удовлетворяют всем соотношениям из главы 2 между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей компактного края эллиптической связной компоненты дополнения к устойчивому фронту коранга ≤ 1 (теорема 2.1.9). При нечетном n и соответствующих дополнительных условиях справедлива формула (0.2) с $\chi_0 = 2$.

В параграфе 3 мы изучаем топологию особенностей множества опорных гиперсфер гладкого подмногообразия M в евклидовом пространстве \mathbb{R}^k . Опорной гиперсферой называется касательная гиперсфера, от которой многообразие лежит с одной стороны. Множество Γ опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M общего положения является объединением краев некоторых правильных связных компонент дополнения к фронту касательных гиперсфер и гиперплоскостей этого многообразия в пространстве всех гиперсфер и гиперплоскостей в \mathbb{R}^k . Если $k \leq 6$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1, то гиперповерхность Γ имеет только особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$, т.е. является объединением краев эллиптических компонент.

Гиперсферы, соответствующие особенностям типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ , называются опорными гиперсферами типа \mathcal{A} . Как и в предыдущих задачах, при указанных выше ограничениях на размерности, эйлеровы характеристики $\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}_\Gamma)$ многообразий \mathcal{A}_Γ опорных гиперсфер и гиперплоскостей типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$ замкнутого подмногообразия M общего положения в \mathbb{R}^k удовлетворяют тем же универсальным линейным соотношениям, что и эйлеровы характеристики многообразий особенностей компактного края эллиптической связной компоненты дополнения к устойчивому фронту коранга ≤ 1 (теорема 3.1.9).

В разделе 3.3 изучается топология некоторых подмножеств множества центров опорных гиперсфер многообразия M . Это особенно важно для компьютерного моделирования и других прикладных задач (см. [66], [67], [98] и др.).

Напомним, что опорная гиперсфера многообразия M называется внешне-опорной, если M лежит от этой гиперсферы с внешней стороны по отношению к ее центру. Опорные гиперсферы типа A_1 называются неособыми. Все остальные опорные гиперсферы называются особыми. Предположим, что дополнение $\mathbb{R}^k \setminus M$ имеет ограниченную связную компоненту U . Объединение связных компонент многообразия M , лежащих строго внутри замыкания \bar{U} области U обозначим через M_U . Множеством средних точек области U назовем подмножество $\Sigma \subset U$, образованное центрами особых внешне-опорных гиперсфер многообразия M (иногда это множество называют средней осью или конфликтным множеством).

Пусть $\chi_\Sigma(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}_\Sigma)$ – эйлерова характеристика подмногообразия \mathcal{A}_Σ в U , образованного центрами из Σ опорных гиперсфер типа \mathcal{A} . Предположим, что $\chi_\Sigma(\mathcal{A}) = 0$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ такого, что $\deg \mathcal{A} < k+1$. Тогда для гладкого замкнутого подмногообразия M общего положения в четномерном пространстве \mathbb{R}^k , $k \leq 6$, числа $\chi_\Sigma(\mathcal{A})$ внешне-опорных \mathcal{A} -сфер многообразия M с $\text{codim } \mathcal{A} = n = k + 1$ и центром в Σ удовлетворяют соотношению (0.2), где $\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \chi_\Sigma(\mathcal{A})$ и $\chi_0 = \chi(\bar{U}) - (-1)^k \chi(M_U)$ (теорема 3.3.8). В случае замкнутой выпуклой кривой M общего положения на евклидовой плоскости, это утверждение дает формулу Бозе (0.1), и следовательно, является ее многомерным обобщением. Имеется и другое обобщение этой формулы, не использующее тот факт, что хотя бы одна из связных компонент многообразия M является гиперповерхностью. Оно получено в главе 4.

Четвертая глава посвящена основному приложению – решению некоторых известных задач в контактной геометрии гладких пространственных кривых.

Параграф 1 начинается с напоминания основных определений. Мы также показываем, что фронт касательных гиперплоскостей замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$ является множеством критических значений устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1 гладкого замкнутого n -мерного многообразия в пространство $\mathbb{R}P^{n*}$.

Используя этот факт мы получаем для пространственных кривых ряд важных следствий из результатов предыдущих глав. В частности, в разделе 1.3 получено многомерное обобщение известной теоремы Фридмана [65] о том, что если связная замкнутая кривая γ общего положения в \mathbb{R}^3 не имеет точек уплощения (где кручение обращается в нуль), то число ее тройных касательных плоскостей (касающихся кривой в трех различных точках) четно.

Работа Фридмана изучалась многими авторами. В работе [59] Банчев, Гаффни и МакКрори обобщили результат Фридмана на случай кривых в \mathbb{R}^3 , имеющих точ-

ки уплощения. А именно, пусть T – число тройных касательных плоскостей кривой γ , а N – общее число точек, в которых γ трансверсально пересекает свои соприкасающиеся плоскости в точках уплощения. Тогда $T \equiv N/2 \pmod{2}$. Мы обобщаем эту формулу (а тем самым и теорему Фридмана) на случай произвольных замкнутых кривых общего положения в нечетномерном пространстве $\mathbb{R}P^n$ (не обязательно связных, аффинных или стягиваемых).

Рассмотрим замкнутую кривую γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$. Предположим, что она имеет $\theta(\gamma)$ нестягиваемых компонент. Касательной гиперплоскостью типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ кривой γ называется всякая гиперплоскость, касающаяся γ в p попарно различных точках с кратностями μ_1, \dots, μ_p . Для каждого \mathcal{A} такого, что $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p = n$, через $\chi_\gamma(\mathcal{A})$ обозначим число всех касательных гиперплоскостей типа \mathcal{A} кривой γ . Через $\widehat{\chi}_\gamma(\mathcal{A})$ обозначим число касательных гиперплоскостей типа \mathcal{A} , у каждой из которых количество точек трансверсального пересечения с γ сравнимо с $\deg \mathcal{A} + \theta(\gamma)$ по модулю 4, где $\deg \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$.

Одно из обобщений теоремы Фридмана состоит в следующем (теорема 1.3.1): для любой замкнутой кривой γ общего положения в пространстве $\mathbb{R}P^n$ нечетной размерности $n \geq 3$,

$$\chi_\gamma(nA_1) \equiv \widehat{\chi}_\gamma(A_3 + (n-3)A_1) \pmod{2}.$$

В частности, если кривая γ не имеет касательных гиперплоскостей типа $A_3 + (n-3)A_1$, то число ее n -касательных гиперплоскостей четно. Если $n = 3$, то число $\widehat{\chi}_\gamma(A_3)$ сравнимо с $[N + \theta(\gamma)C]/2$ по модулю 2, где C – число точек уплощения кривой γ , а N – число точек, в которых γ трансверсально пересекает свои соприкасающиеся плоскости в точках уплощения. Поэтому четность числа $T = \chi_\gamma(3A_1)$ тройных касательных плоскостей любой замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^3$ определяется по формуле:

$$T \equiv \frac{N + \theta(\gamma)C}{2} \pmod{2}.$$

Теорема Фридмана имеет и другие многомерные обобщения. Мы приведем здесь еще только одно (теорема 1.3.4). А именно, для любой замкнутой кривой γ общего положения в пространстве $\mathbb{R}P^n$ нечетной размерности $n \geq 3$,

$$\chi_\gamma(2A_{(n-1)/2} + A_1) \equiv \widehat{\chi}_\gamma(A_n) \pmod{2}.$$

В частности, если кривая γ не имеет точек уплощения, то число ее касательных гиперплоскостей типа $2A_{(n-1)/2} + A_1$ четно.

В параграфе 2 доказывается теорема о четырех точках уплощения слабо выпуклой кривой в \mathbb{R}^3 (теорема 2.1.2). Кривая называется слабо выпуклой, если она лежит на границе своей выпуклой оболочки. Мы доказываем, что всякая C^3 -вложенная связная замкнутая слабо выпуклая кривая со всюду ненулевой кривизной в \mathbb{R}^3 имеет не менее четырех (геометрически различных) точек уплощения. Это утверждение

является трехмерным обобщением теоремы Махопадхайя [84] о четырех вершинах плоской кривой. Вообще за время, прошедшее после работы Махопадхайя (а это почти сто лет), были опубликованы десятки работ, посвященные ее обобщениям (см. [77],[82],[60],[61],[86] и др). Во многих из них рассматривались слабо выпуклые кривые, удовлетворяющие различным дополнительным условиям. Мы же доказываем теорему о четырех точках уплощения слабо выпуклой кривой при самых слабых предположениях.

В параграфе 3 решается задача Арнольда номер 1998-6 из сборника [14]. Речь идет о так называемых допустимых гомотопиях кривой в $\mathbb{R}P^3$ (определение см. в разделе 3.1). Этот класс гомотопий был введен Арнольдом в [13]. Там же был найден замечательный инвариант этих гомотопий, отвечающий за точки уплощения кривой, – ее штурмовость. Однако этот инвариант не решает, например, следующую задачу: можно ли уничтожить допустимыми гомотопиями все шесть точек уплощения кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 3t$? Мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. Для доказательства мы определяем новый инвариант допустимых гомотопий пространственных кривых – число замкнутых двойных линий фронта ее касательных плоскостей. Кроме того, мы строим инвариант, обобщающий штурмовость кривой. Это некоторая весовая хордовая диаграмма. В ней число хорд, пересекающих нечетное число других хорд, равно штурмовости кривой.

В заключительном параграфе 4 получены обобщения формулы Бозе (0.1) для некоторых классов кривых в многомерных пространствах. В разделе 4.1 мы рассматриваем произвольную замкнутую выпуклую кривую γ общего положения в четномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^k ($k \leq 16$). Оказывается, что числа $\chi_\gamma(\mathcal{A})$ внешне-опорных гиперсфер типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd}$ кривой γ таких, что $\text{codim } \mathcal{A} = k + 1$, связаны соотношением (0.2), где $n = k + 1$, $\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \chi_\gamma(\mathcal{A})$ и $\chi_0 = 1$. Аналогичное утверждение справедливо и для внутренне-опорных гиперсфер кривой.

В разделе 4.2 рассматриваются кривые выпуклые по Барнеру. По определению, кривая в $\mathbb{R}P^n$ называется выпуклой по Барнеру, если через любые $n - 1$ ее точек (не обязательно геометрически различных) можно провести гиперплоскость, которая не пересекает кривую в других точках. Барнер [60] получил для таких кривых многомерное обобщение теоремы о четырех вершинах: всякая замкнутая выпуклая по Барнеру кривая в $\mathbb{R}P^n$ имеет по меньшей мере $n + 1$ геометрически различных точек уплощения. Мы обобщаем на этот класс кривых формулу Бозе. А именно, рассмотрим произвольную замкнутую выпуклую по Барнеру кривую γ общего положения в нечетномерном пространстве \mathbb{R}^n ($n \leq 17$). Тогда числа $\chi_\gamma(\mathcal{A})$ опорных гиперплоскостей типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd}$ кривой γ таких, что $\text{codim } \mathcal{A} = n$, связаны соотношением (0.2), где $\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \chi_\gamma(\mathcal{A})$ и $\chi_0 = 2$.

В заключении я хотел бы выразить глубокую благодарность Владимиру Игоревичу Арнольду, который на протяжении многих лет учил меня настоящей Математике и вдохновлял мои исследования в теории особенностей. Я также хотел бы поблагодарить всех участников (бывших и нынешних) семинара В. И. Арнольда в МГУ по теории особенностей гладких отображений. Их внимание, многочисленные полезные обсуждения и замечания, всегда очень помогали в моей работе. Особенно я благодарен М. Э. Казаряну, за плодотворные обсуждения различных вопросов глобальной теории особенностей.

Глава 1

Топология мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения в пространство нестрого бóльшей размерности

В этой главе мы строим разрешение мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения гладкого многообразия в пространство бóльшей или той же размерности. В качестве следствия, для каждой комбинации четностей размерности многообразия-образа и коразмерности образа отображения в этом многообразии получена полная система универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей различных типов у любого отображения, определенного на замкнутом многообразии и не имеющего более сложных особенностей.

Часть изложенных здесь результатов опубликована в [51], [97].

1 Устойчивые гладкие отображения коранга ≤ 1

В этом параграфе содержатся основные понятия и факты теории особенностей коранга 1 гладких отображений в пространство нестрого большей размерности. Подробности можно найти, например, в [5].

1.1 Основные определения и обозначения

Пусть M и V – произвольные гладкие многообразия положительных размерностей $\dim M = m$, $\dim V = n$, причем $l = n - m \geq 0$. Рассмотрим гладкое собственное отображение

$$f : M \rightarrow V.$$

Точка $x \in M$ называется *особой точкой* отображения f , если производная $f_{*x} : T_x M \rightarrow T_{f(x)} V$ этого отображения в точке x имеет ненулевое ядро.

1.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение f называется *отображением коранга ≤ 1* , если размерность ядра производной f_{*x} не превосходит 1 для любого $x \in M$.

Снабдим пространство \mathcal{W} всех гладких отображений многообразия M в многообразие V тонкой C^∞ -топологией Уитни (см. [22]). Мы будем говорить, что данное утверждение справедливо для отображения f *общего положения*, если существует открытое всюду плотное подмножество в пространстве \mathcal{W} такое, что указанное утверждение имеет место для всех отображений из этого подмножества.

1.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкое отображение $\tilde{f} : M \rightarrow V$ *лево-право эквивалентно* отображению f , если существуют диффеоморфизмы $g : M \rightarrow M$ и $h : V \rightarrow V$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{\tilde{f}} & V \end{array}$$

коммутативна.

1.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение f называется *устойчивым*, если любое гладкое отображение $\tilde{f} : M \rightarrow V$, достаточно близкое к f , лево-право эквивалентно f .

1.1.4. ПРИМЕР. Собственная иммерсия устойчива тогда и только тогда, когда ее образ имеет только трансверсальные самопересечения.

1.1.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Гладкие подмногообразия M_1, \dots, M_p в многообразии V пересекаются *трансверсально* в точке $y \in V$, если их касательные пространства $T_y M_1, \dots, T_y M_p$ в этой точке (рассматриваемые как подпространства в $T_y V$) удовлетворяют условию

$$\text{codim}(T_y M_1 \cap \dots \cap T_y M_p) = \text{codim}(T_y M_1) + \dots + \text{codim}(T_y M_p).$$

Если подмногообразия $M_1, \dots, M_p \subseteq V$ пересекаются трансверсально в точке $y \in V$, то для любых целых i_1, \dots, i_k таких, что $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p$, многообразия M_{i_1}, \dots, M_{i_k} пересекаются в точке y тоже трансверсально.

Устойчивые отображения образуют открытое подмножество в пространстве \mathcal{W} . В пространстве гладких отображений $M \rightarrow V$ коранга ≤ 1 устойчивые отображения всюду плотны, т.е. являются в нем отображениями общего положения.

Ростки отображения f классифицируются относительно лево-правой эквивалентности, т.е. с точностью до гладких замен локальных координат в многообразии-образе V и в многообразии-прообразе M . Класс эквивалентности ростка называется *особенностью*.

Пусть μ – целое неотрицательное число.

1.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение f имеет *особенность типа A_μ* в точке $x \in M$, если в подходящих гладких локальных координатах на многообразиях M и V его росток (f, x) в этой точке задается формулой

$$(f, x) : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t, \bar{q}, \bar{z}) \mapsto (S(t, \bar{q}), \bar{q}, \bar{z}),$$

где

$$t \in \mathbb{R}, \quad \bar{q} = (q_{1,1}, \dots, q_{1,\mu-1}; q_{2,1}, \dots, q_{2,\mu}; \dots; q_{l+1,1}, \dots, q_{l+1,\mu}) \in \mathbb{R}^{\mu(l+1)-1},$$

$$S(t, \bar{q}) = \begin{pmatrix} t^{\mu+1} + 0 + q_{1,\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + q_{1,1}t \\ 0 + q_{2,\mu}t^\mu + q_{2,\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + q_{2,1}t \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\mu}t^\mu + q_{l+1,\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + q_{l+1,1}t \end{pmatrix}^*$$

и \bar{z} – вектор переменных, дополняющих t, \bar{q} до системы координат в \mathbb{R}^m .

1.1.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь $\mu(l+1) \leq m$. Координаты \bar{q} присутствуют, только если $\mu(l+1) > 1$. Звездочка означает транспонирование. Если $\mu = 0$, то точка x является неособой. В случае $\mu > 0$ точка x особая.

Напомним, что локальной алгеброй отображения f в точке $x \in M$ называется фактор-алгебра алгебры $C_x^\infty(M)$ ростков в x гладких функций на M по идеалу $C_x^\infty(M) \cdot f^* \mathcal{I}_{f(x)}$, где \mathcal{I}_y – максимальный идеал алгебры $C_y^\infty(V)$. Легко видеть, что локальная алгебра особенности типа A_μ изоморфна алгебре $\mathbb{R}[[t]]/(t^{\mu+1})$ срезанных многочленов от одной переменной степени не выше μ . Число μ называется *показателем вырожденности* этой особенности.

1.1.8. ТЕОРЕМА ([83]). При $l = n - m \geq 0$ особенности любого устойчивого гладкого отображения $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 исчерпываются особенностями типов A_μ , где $0 \leq \mu \leq m/(l+1)$.

Множество A_μ^f точек $x \in M$, в которых отображение f имеет особенность типа A_μ , является гладким подмногообразием коразмерности $\mu(l+1)$ в M . Образ этого многообразия при отображении f является иммерсированным подмногообразием в V коразмерности $\mu(l+1)+l$. Многообразие A_μ^f и его образ, вообще говоря, незамкнуты и несвязны.

Пусть Φ_{A_μ} – замыкание $\overline{A_\mu^f}$ многообразия A_μ^f в многообразии M . Если f – устойчивое отображение коранга ≤ 1 , то множество Φ_{A_μ} является гладким подмногообразием коразмерности $\mu(l+1)$ в M (оно состоит из тех точек $x \in M$, в которых f имеет особенности типов $A_\nu, \nu \geq \mu$). В частности, $\Phi_{A_0} = M$.

1.1.9. ПРИМЕР. Отображение

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, \bar{q}, \bar{z}) \mapsto (S(t, \bar{q}), \bar{q}, \bar{z}),$$

где

$$t \in \mathbb{R}, \quad \bar{q} = (q_{1,1}, \dots, q_{1,\nu-1}; q_{2,1}, \dots, q_{2,\nu}; \dots; q_{l+1,1}, \dots, q_{l+1,\nu}) \in \mathbb{R}^{\nu(l+1)-1},$$

$$S(t, \bar{q}) = \begin{pmatrix} t^{\nu+1} + 0 + q_{1,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{1,1}t \\ 0 + q_{2,\nu}t^\nu + q_{2,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{2,1}t \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\nu}t^\nu + q_{l+1,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{l+1,1}t \end{pmatrix}^*$$

и $\nu(l+1) \leq m$, является устойчивым гладким отображением коранга ≤ 1 . Его особенности являются особенностями типов A_μ , где $\mu \leq \nu$. Подмногообразие $\Phi_{A_\mu} \subseteq \mathbb{R}^m$, где $\mu \geq 1$, задается уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t^\mu} = 0.$$

1.1.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Мультиособенностью* отображения f в точке $y \in V$ называется неупорядоченный набор особенностей f в попарно различных точках x полного прообраза $f^{-1}(y)$.

Пусть \mathbb{A} – свободная абелева полугруппа по сложению, образующими которой служат символы $A_0, A_1, \dots, A_\mu, \dots$. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$.

1.1.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение f имеет *мультиособенность типа \mathcal{A}* в точке $y \in V$, если:

- 1) полный прообраз $f^{-1}(y)$ точки y при отображении f состоит из p попарно различных точек;
- 2) существует порядок x_1, \dots, x_p точек из $f^{-1}(y)$ такой, что f имеет в этих точках особенности типов $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}$, соответственно;

3) образы при отображении f ростков $(A_{\mu_i}^f, x_i)$ в x_i многообразий $A_{\mu_i}^f, i = 1, \dots, p$, пересекаются трансверсально в точке y .

Числа μ_1, \dots, μ_p называются *показателями вырожденности* мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f . Числа

$$\text{codim}_l \mathcal{A} = (l+1) \sum_{i=1}^p \mu_i + pl \quad \text{и} \quad \text{deg}_l \mathcal{A} = \text{codim}_l \mathcal{A} + p$$

называются *коразмерностью* и *степеню* этих мультиособенностей, соответственно. В случае $l = 0$ коразмерность и степень мультиособенностей типа \mathcal{A} обычно обозначают через $\text{codim } \mathcal{A}$ и $\text{deg } \mathcal{A}$.

1.1.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Мы будем также говорить, что в точках из дополнения $V \setminus f(M)$ отображение f имеет *мультиособенность типа 0* (нуль полугруппы \mathbb{A}). Если $\mathcal{A} = 0$, то $\text{codim}_l \mathcal{A} = \text{deg}_l \mathcal{A} = 0$.

При $l = n - m \geq 0$ любое устойчивое гладкое собственное отображение $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 может иметь лишь мультиособенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$. Коразмерность мультиособенности не превышает размерности n объемлющего многообразия V . Если $l > 0$, то степень мультиособенности не превышает $n + n/l$. Если $l = 0$ и многообразие M замкнуто, то степени мультиособенностей отображения f в точках его образа ограничены сверху константой, зависящей от f .

Рассмотрим множество \mathcal{A}_f точек $y \in V$, в которых f имеет мультиособенность типа \mathcal{A} . Это множество является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim}_l \mathcal{A}$ в V (незамкнутым и несвязным, вообще говоря).

1.1.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие \mathcal{A}_f называется *многообразием мультиособенностей типа \mathcal{A}* отображения f .

Рассмотрим образ $f(M)$ отображения f . Это – особое подмножество коразмерности l в многообразии V . Его ростком в точке $y \in V$ называется объединение образов ростков f в точках $x \in f^{-1}(y)$. Если $l > 0$, то ростки образа устойчивого отображения f коранга ≤ 1 классифицируются относительно группы диффеоморфизмов объемлющего пространства V (класс эквивалентности ростка называется *особенностью*). Эта классификация также идет по элементам полугруппы \mathbb{A} .

1.1.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Образ отображение f имеет *особенность типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$* в точке $y \in V$, если f имеет в этой точке мультиособенность типа \mathcal{A} .

Показателями вырожденности, коразмерностью и степенью особенности типа \mathcal{A} образа отображения f в точке $y \in V$ называются соответствующие числа для мультиособенности самого отображения f в этой точке. Ростки в двух точках образа $f(M)$ устойчивого отображения f коранга ≤ 1 в пространство V большей раз-

мерности диффеоморфны тогда и только тогда, когда $f(M)$ имеет в этих точках особенности одинакового типа.

1.1.15. ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразие \mathcal{A}_f в случае $l > 0$ мы будем обычно называть *многообразием особенностей типа \mathcal{A} образа отображения f* .

1.2 Некоторые сведения из теории стратификаций

Здесь собраны все необходимые нам в дальнейшем определения и факты из теории стратификаций. Подробности см., например, в [32].

Рассмотрим произвольное замкнутое подмножество Ω гладкого n -мерного многообразия V . Как обычно, замыкание в V любого подмножества $X \subseteq V$ обозначается через \bar{X} .

1.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. C^∞ -стратификацией множества Ω называется локально конечное разбиение Σ этого множества на связные непересекающиеся подмножества (*страты*), являющиеся гладкими подмногообразиями в V и удовлетворяющие следующему условию: для любых двух стратов X и Y стратификации Σ таких, что $Y \cap \bar{X} = \emptyset$, имеет место включение $Y \subseteq \bar{X}$. В случае $Y \subseteq \bar{X}$ говорят, что Y *примыкает к X* .

Пусть X и Y – два непересекающихся гладких подмногообразия в \mathbb{R}^n . Предположим, что $Y \subset \bar{X}$, и рассмотрим произвольную точку $y \in Y$.

1.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тройка (X, Y, y) удовлетворяет *условиям A и B Уитни*, если для любых двух последовательностей $\{x_i\}, \{y_i\}$ точек $x_i \in X, y_i \in Y$ таких, что

- 1) $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y$;

- 2) в грасмановом многообразии всех $(\dim X)$ -мерных плоскостей в \mathbb{R}^n существует предел $\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i} X = \pi$ касательных пространств $T_{x_i} X$ к X в точках x_i ;

- 3) в многообразии всех прямых в \mathbb{R}^n существует предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = \tau$ прямых $\overline{x_i y_i}$, проходящих через точки x_i, y_i (соответственно),

имеют место включения: $A) T_y Y \subset \pi$; $B) \tau \subseteq \pi$.

Условия A и B Уитни инвариантны относительно локальных диффеоморфизмов пространства \mathbb{R}^n . Поэтому следующее определение корректно.

1.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. C^∞ -стратификация Σ подмножества $\Omega \subseteq V$ называется *стратификацией Уитни*, если для любых двух непересекающихся стратов X и Y в Σ таких, что Y примыкает к X , каждая тройка (X, Y, y) , где $y \in Y$, удовлетворяет условиям A и B Уитни в некоторой системе гладких локальных координат на V .

Мы приведем одно утверждение, полезное при практической проверке выполнения условий Уитни.

1.2.4. ЛЕММА ([79],[105]). Рассмотрим C^∞ -стратификацию Σ замкнутого подмножества в гладком n -мерном многообразии V . Предположим, что для любых двух непересекающихся стратов X и Y в Σ таких, что Y примыкает к X , выполнено следующее условие:

для каждой точки $y \in Y$ существуют целое $k \geq 0$ и замкнутое полуалгебраическое подмножество Z в \mathbb{R}^{n-k} , содержащее 0 , такие, что в подходящих гладких локальных координатах на V росток пары (\bar{X}, Y) в y является ростком в нуле пары в \mathbb{R}^n , представляющей собой прямое произведение \mathbb{R}^k на пару $(Z, 0)$.

Тогда Σ является стратификацией Уитни.

1.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. C^∞ -стратификация Уитни Σ подмножества $\Omega \subseteq V$ называется *минимальной*, если для любого страта X' любой C^∞ -стратификации Уитни множества Ω существует страт X в Σ такой, что $X' \subseteq X$.

Рассмотрим произвольные замкнутые подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ (возможно пересекающиеся) в многообразии V .

1.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратификацией многообразия V относительно набора подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ называется C^∞ -стратификация Уитни, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) для любого страта X и для любого $i = 1, \dots, k$ имеет место только одно из двух – либо $X \cap \Omega_i = \emptyset$, либо $X \subseteq \Omega_i$;
- 2) рассматриваемая стратификация минимальна среди всех C^∞ -стратификаций Уитни многообразия V , удовлетворяющих условию 1.

1.2.7. ТЕОРЕМА ([79],[105]). Пространство \mathbb{R}^n допускает стратификацию относительно любого конечного набора замкнутых полуалгебраических подмножеств.

Отметим, что если замкнутое подмножество гладкого многообразия допускает C^∞ -стратификацию Уитни, то оно триангулируемо (см. [23]).

1.3 Примыкание мультиособенностей отображения

Рассмотрим устойчивое гладкое собственное отображение $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Зафиксируем элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ и возьмем многообразие \mathcal{A}_f мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f .

Пусть $\overline{\mathcal{A}_f}$ – замыкание многообразия \mathcal{A}_f в объемлющем многообразии V . Например, $(\overline{A_0})_f = f(M)$, если $l > 0$.

1.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мультиособенность типа $X \in \mathbb{A}$ отображения f примыкает к мультиособенности типа \mathcal{A} , если $X_f \subseteq \overline{\mathcal{A}_f}$.

В частности, любая мультиособенность примыкает к самой себе. При $l > 0$ примыкание мультиособенностей отображения f естественно определяет *примыкание* соответствующих особенностей образа этого отображения.

Рассмотрим разбиение множества $\overline{\mathcal{A}_f}$ на связные компоненты многообразий X_f , $X \in \mathbb{A}$ мультиособенностей, примыкающих к мультиособенностям типа \mathcal{A} . Это разбиение является C^∞ -стратификацией Уитни. Легко видеть, что эта стратификация минимальна среди всех C^∞ -стратификаций Уитни множества $\overline{\mathcal{A}_f}$. Если $\overline{\mathcal{A}_f}$ – компактное подмножество в V , то указанная стратификация конечна.

1.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (Топологической) *границей* многообразия \mathcal{A}_f называется множество

$$\partial(\mathcal{A}_f) = \overline{\mathcal{A}_f} \setminus \mathcal{A}_f.$$

Коразмерность $\text{codim}_l X$ мультиособенностей типов $X \in \mathbb{A}$ отображения f в точках границы многообразия \mathcal{A}_f строго больше $\text{codim}_l \mathcal{A}$. Более того, хорошо известно следующее утверждение.

1.3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Тогда для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ имеет место формула

$$\partial(\mathcal{A}_f) = \overline{(\mathcal{A} + A_0)_f} \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq p} \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i + \mu_j + 1})_f} \right), \quad (1.1)$$

если $l > 0$, и

$$\partial(\mathcal{A}_f) = \overline{(\mathcal{A} + A_1)_f} \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq p} \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i + \mu_j + 1})_f} \right), \quad (1.2)$$

если $l = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В подходящих гладких локальных координатах на многообразиях M и V росток отображения f в любой точке $x \in M$ является разверткой ростка в нуле гладкой кривой $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$, $f_0(0) = 0$, заданной многочленом с векторными коэффициентами (см. [5]). Если отображение f имеет особенность типа A_μ в точке x , то порядок кривой f_0 в нуле равен $\mu + 1$.

Зафиксируем целое неотрицательное k и рассмотрим пространство многочленов $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$, $t \mapsto \varphi(t)$ от t с векторными коэффициентами из \mathbb{R}^{l+1} , которые удовлетворяют следующему условию: для любого φ существуют числа $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ и многочлен $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$, $t \mapsto \psi(t)$ степени k такие, что $\varphi(t) = \psi(t) \prod_{i=1}^p (t - t_i)^{\mu_i + 1}$ для всех t . Возьмем произвольную гладкую кривую

$$s \mapsto \varphi_s(t) = \psi_s(t) \prod_{i=1}^p (t - t_{i,s})^{\mu_i + 1}, \quad s \in [0, 1]$$

в этом пространстве.

Если $l > 0$, то в общей точке кривой φ_s общего положения числа $t_{1,s}, \dots, t_{p,s}$ попарно различны и $\psi_s(t) \neq 0$ для любого t . Однако при некоторых (изолированных) значениях s кратности вещественных корней многочлена φ_s могут измениться. А именно, возможно совпадение $t_{i,s} = t_{j,s}$ для некоторых $i \neq j$. Кроме того, при $l = 1$ многочлен ψ_s может иметь простой корень (отличный от $t_{1,s}, \dots, t_{p,s}$). Если $l > 1$, то последнее может происходить только в отдельных точках общих l -параметрических семейств многочленов указанного вида. Отсюда следует формула (1.1).

Пусть теперь $l = 0$. Предположим, что при $s = 0$ числа $t_{1,s}, \dots, t_{p,s}$ попарно различны и $\psi_s(t) \neq 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Тогда этим свойством обладает и любой многочлен φ_s с достаточно малым s . При увеличении параметра s кратности вещественных корней многочлена φ_s могут измениться. На кривой φ_s общего положения это может произойти только одним из двух способов. А именно, либо многочлен ψ_s имеет двукратный корень (отличный от $t_{1,s}, \dots, t_{p,s}$), либо $t_{i,s} = t_{j,s}$ для некоторых $i \neq j$. Отсюда следует формула (1.2). Предложение 1.3.3 доказано.

1.3.4. ПРИМЕР. Границы многообразий особенностей коразмерности $c \leq 4l + 2$ у образа устойчивого гладкого отображения $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 при $l = n - m > 0$ определяются следующими формулами (для простоты индекс f везде опущен):

$$c = l: \quad \partial(A_0) = (\overline{2A_0});$$

$$c = 2l: \quad \partial(2A_0) = (\overline{3A_0}) \cup (\overline{A_1});$$

$$c = 3l: \quad \partial(3A_0) = (\overline{4A_0}) \cup (\overline{A_1 + A_0});$$

$$c = 2l + 1: \quad \partial(A_1) = (\overline{A_1 + A_0});$$

$$c = 4l: \quad \partial(4A_0) = (\overline{5A_0}) \cup (\overline{A_1 + 2A_0});$$

$$c = 3l + 1: \quad \partial(A_1 + A_0) = (\overline{A_1 + 2A_0}) \cup (\overline{A_2});$$

$$c = 5l: \quad \partial(5A_0) = (\overline{6A_0}) \cup (\overline{A_1 + 3A_0});$$

$$c = 4l + 1: \quad \partial(A_1 + 2A_0) = (\overline{A_1 + 3A_0}) \cup (\overline{2A_1}) \cup (\overline{A_2 + A_0});$$

$$c = 3l + 2: \quad \partial(A_2) = (\overline{A_2 + A_0});$$

$$c = 6l: \quad \partial(6A_0) = (\overline{7A_0}) \cup (\overline{A_1 + 4A_0});$$

$$c = 5l + 1: \quad \partial(A_1 + 3A_0) = (\overline{A_1 + 4A_0}) \cup (\overline{2A_1 + A_0}) \cup (\overline{A_2 + 2A_0});$$

$$c = 4l + 2: \quad \partial(2A_1) = (\overline{2A_1 + A_0}) \cup (\overline{A_3});$$

$$c = 4l + 2: \quad \partial(A_2 + A_0) = (\overline{A_2 + 2A_0}) \cup (\overline{A_3}).$$

1.3.5. ПРИМЕР. Границы многообразий мультиособенностей коразмерности $c \leq 2$ устойчивого гладкого отображения $f : M \rightarrow V$ коранга ≤ 1 многообразий одинаковой размерности n определяются следующими формулами (для простоты индекс f везде опущен; число k целое, причем $k \geq 2$):

$$c = 0: \quad \begin{aligned} \partial(A_0) &= (\overline{A_1 + A_0}); \\ \partial(kA_0) &= (\overline{A_1 + kA_0}) \cup [\overline{A_1 + (k-2)A_0}]; \end{aligned}$$

$$c = 1: \quad \begin{aligned} \partial(A_1) &= (\overline{2A_1}); \\ \partial(A_1 + A_0) &= (\overline{2A_1 + A_0}) \cup (\overline{A_2}); \\ \partial(A_1 + kA_0) &= (\overline{2A_1 + kA_0}) \cup [\overline{A_2 + (k-1)A_0}] \cup [\overline{2A_1 + (k-2)A_0}]; \end{aligned}$$

$$c = 2: \quad \begin{aligned} \partial(2A_1) &= (\overline{3A_1}) \cup (\overline{A_3}); \\ \partial(2A_1 + A_0) &= (\overline{3A_1 + A_0}) \cup (\overline{A_3 + A_0}) \cup (\overline{A_2 + A_1}); \\ \partial(2A_1 + kA_0) &= (\overline{3A_1 + kA_0}) \cup (\overline{A_3 + kA_0}) \\ &\quad \cup [\overline{A_2 + A_1 + (k-1)A_0}] \cup [\overline{3A_1 + (k-2)A_0}]; \end{aligned}$$

$$c = 2: \quad \begin{aligned} \partial(A_2) &= (\overline{A_2 + A_1}); \\ \partial(A_2 + A_0) &= (\overline{A_2 + A_1 + A_0}) \cup (\overline{A_3}); \\ \partial(A_2 + kA_0) &= (\overline{A_2 + A_1 + kA_0}) \cup (\overline{A_3 + (k-1)A_0}) \cup (\overline{A_2 + A_1 + (k-2)A_0}). \end{aligned}$$

Последовательное применение формулы (1.1) или (1.2) позволяет перечислить типы всех мультиособенностей устойчивого отображения f коранга ≤ 1 , которые могут примыкать к мультиособенностям данного типа \mathcal{A} . Действительно, в правой части формулы (1.1) стоит объединение замыканий многообразий мультиособенностей коразмерностей $\text{codim}_l \mathcal{A} + l$ и $\text{codim}_l \mathcal{A} + 1$. Границы этих многообразий выражаются той же формулой через замыкания многообразий мультиособенностей коразмерностей $\text{codim}_l \mathcal{A} + 2l$, $\text{codim}_l \mathcal{A} + l + 1$ и $\text{codim}_l \mathcal{A} + 2$; и т.д. Аналогично используется формула (1.2): в ее правой части стоит объединение замыканий многообразий мультиособенностей коразмерности $\text{codim} \mathcal{A} + 1$.

1.3.6. ПРИМЕР. К особенностям типа $2A_0$ устойчивой гиперповерхности $f(M)$ в трехмерном пространстве примыкают изолированные особенности типов $3A_0$ и A_1 (если они вообще есть у $f(M)$); в четырехмерном – особенности типов $3A_0$, A_1 (они образуют кривые) и изолированные особенности типов $4A_0$, $A_1 + A_0$; в пятимерном – особенности типов $3A_0$, A_1 (в этом случае они образуют двумерные поверхности), особенности типов $4A_0$, $A_1 + A_0$ (образующие кривые) и изолированные особенности типов $5A_0$, $A_1 + 2A_0$, A_2 .

2 A_μ -преобразование устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1

В этом параграфе определена операция, которая каждому устойчивому гладкому собственному отображению коранга ≤ 1 в пространство нестрого большей размерности сопоставляет новое отображение того же типа с той же коразмерностью образа, но с более простыми особенностями.

2.1 Определение и основные свойства

Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Зафиксируем произвольное целое $\mu \geq 0$ и рассмотрим в M подмногообразии $\Phi_{A_\mu} = \overline{A_\mu^f}$.

Обозначим через Φ_{A_μ, A_0} замыкание $\overline{A_{\mu,0}^f}$ подмножества $A_{\mu,0}^f$ в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$, образованного парами (x, ξ) точек $x \in \Phi_{A_\mu} \setminus \Phi_{A_{\mu+1}}$, $\xi \in \Phi_{A_0} \setminus \Phi_{A_1}$, $\xi \neq x$ таких, что $f(x) = f(\xi)$.

2.1.1. ТЕОРЕМА. *Если множество Φ_{A_μ, A_0} не пусто, то оно является гладким подмногообразием коразмерности n в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$.*

Пусть $\Phi_{A_\mu, A_0} \neq \emptyset$ и $[A_\mu](f)$ – композиция гладких отображений

$$\Phi_{A_\mu, A_0} \rightarrow \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0} \rightarrow \Phi_{A_\mu},$$

первым из которых является естественное вложение, а второе представляет собой проекцию прямого произведения на первый сомножитель.

2.1.2. ТЕОРЕМА. *Отображение $[A_\mu](f)$ является устойчивым гладким собственным отображением коранга ≤ 1 .*

Образ отображения $[A_\mu](f)$ имеет коразмерность l в многообразии Φ_{A_μ} .

2.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $[A_\mu](f)$ называется A_μ -преобразованием отображения f .

Теоремы 2.1.1 и 2.1.2 следуют из предложений 2.3.1 и 2.3.2, доказанных в разделе 2.3. Оказывается, что в некотором смысле особенности отображения $[A_\mu](f)$ связаны с краевыми особенностями [3] серии B .

Пусть \mathcal{H} – гладкое подмногообразие коразмерности $l + 1$ в V . Предположим, что $\mathcal{H} \subset f(M)$ и рассмотрим целое $\kappa \geq 1$.

2.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Упорядоченная пара (\mathcal{H}, f) имеет *особенность типа B_κ* в точке $y \in \mathcal{H}$, если

1) полный прообраз $f^{-1}(y)$ точки y при отображении f состоит ровно из одной точки x ;

2) росток (f, x) в подходящих гладких локальных координатах на многообразиях M и V задается формулой

$$(f, x) : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t, \bar{q}, \bar{z}) \mapsto (S(t, \bar{q}), \bar{q}, \bar{z}),$$

где

$$t \in \mathbb{R}, \quad \bar{z} \in \mathbb{R}^{n-\kappa(l+1)}, \quad \bar{q} = (q_{1,1}, \dots, q_{1,\kappa-1}; \dots; q_{l+1,1}, \dots, q_{l+1,\kappa-1}) \in \mathbb{R}^{(\kappa-1)(l+1)},$$

$$S(t, \bar{q}) = \begin{pmatrix} t^\kappa + q_{1,\kappa-1}t^{\kappa-1} + q_{1,\kappa-2}t^{\kappa-2} + \dots + q_{1,1}t \\ 0 + q_{2,\kappa-1}t^{\kappa-1} + q_{2,\kappa-2}t^{\kappa-2} + \dots + q_{2,1}t \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\kappa-1}t^{\kappa-1} + q_{l+1,\kappa-2}t^{\kappa-2} + \dots + q_{l+1,1}t \end{pmatrix}^* ;$$

3) росток многообразия \mathcal{H} в точке y является ростком в 0 образа при отображении f гиперповерхности $t = 0$ в M .

2.1.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь $\kappa(l+1) \leq n$. Координаты \bar{q} присутствуют, если $\kappa > 1$. Координаты \bar{z} присутствуют, если $\kappa(l+1) < n$.

Множество $(B_\kappa)_{(\mathcal{H}, f)}$ точек $y \in \mathcal{H}$, в которых пара (\mathcal{H}, f) имеет особенность типа B_κ , является гладким подмногообразием коразмерности $\kappa(l+1)$ в объемлющем многообразии V . Оно является гладкой гиперповерхностью в многообразии $(A_{\kappa-1})_f$ мультиособенностей типа $A_{\kappa-1}$ отображения f .

2.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара (\mathcal{H}, f) имеет *особенность типа* $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$ в точке $y \in \mathcal{H}$, если

- 1) полный прообраз $f^{-1}(y)$ точки y при отображении f состоит из $r+1$ попарно различных точек;
- 2) существует порядок x_0, x_1, \dots, x_r точек из $f^{-1}(y)$ такой, что f имеет в этих точках особенности типов $A_{\kappa-1}, A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_r}$, соответственно;
- 3) пара $(\mathcal{H}, (f, x_0))$ имеет особенность типа B_κ в точке y ;
- 4) ростки в y многообразий $(B_\kappa)_{(\mathcal{H}, (f, x_0))}, (A_{\nu_1})_{(f, x_1)}, \dots, (A_{\nu_r})_{(f, x_r)}$ пересекаются в этой точке трансверсально.

Точки $y \in \mathcal{H}$, в которых пара (\mathcal{H}, f) имеет особенность типа $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$, образуют гладкое подмногообразие коразмерности

$$(l+1)(\kappa + \nu_1 + \dots + \nu_r) + rl \leq n$$

в многообразии V . Оно является гладкой гиперповерхностью в многообразии мультиособенностей типа $A_{\kappa-1} + A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ отображения f .

Рассмотрим теперь сужение φ_{A_μ} отображения f на многообразии Φ_{A_μ} . В многообразии Φ_{A_μ} выделено гладкое подмногообразие $\Phi_{A_{\mu+1}}$ коразмерности $l+1$. Легко видеть, что многообразие $\Phi_{A_{\mu+1}}$ лежит в образе отображения $[A_\mu](f)$.

2.1.7. ТЕОРЕМА. Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Тогда для любого $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \mathbb{A}$ справедливы следующие утверждения.

1) Образ при отображении φ_{A_μ} многообразия $X_{[A_\mu](f)}$ мультиособенностей типа X отображения $[A_\mu](f)$ является объединением многообразий мультиособенностей типов $X + A_\mu$ и $X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i + \mu + 1}$, $i = 1, \dots, r$ отображения f .

2) Отображение φ_{A_μ} является конечным накрытием над многообразием X_f мультиособенностей типа X отображения f . Листы этого накрытия нумеруются индексами i такими, что $\nu_i \geq \mu$.

3) Полный прообраз многообразия X_f относительно отображения φ_{A_μ} равен дополнению в многообразии Φ_{A_μ} к образу отображения $[A_\mu](f)$, если $X = A_\mu$, и совпадает с многообразием особенностей типа $B_{\nu - \mu}$ пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$, если $X = A_\nu$, $\nu > \mu$. В случае $r > 1$ он состоит из многообразий мультиособенностей отображения $[A_\mu](f)$, имеющих тип $X - A_\mu$ (если $\{\nu_1, \dots, \nu_r\} \ni \mu$), и многообразий особенностей пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$, имеющих тип $(B_{\nu_i - \mu}, X - A_{\nu_i})$ для всех i таких, что $\nu_i > \mu$.

Теорема 2.1.7 также, как и теоремы 2.1.1 и 2.1.2, следует из предложений 2.3.1 и 2.3.2 ниже.

2.1.8. ПРИМЕР. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(t, q) \mapsto (t^3 + qt, q)$. Оно имеет особенность типа A_2 в нуле $t = q = 0$ (сборка Уитни). Отображение $[A_0](f) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задается формулой

$$\begin{cases} t = v \\ q = -u^2 - uv - v^2. \end{cases}$$

Образ отображения $[A_0](f)$ изображен на рис. 1.1 (стр. 42). Он определяется неравенством $3t^2 + 4q \leq 0$ и представляет собой более темную область, ограниченную полой параболой $q = -3t^2/4$. Кривая Φ_{A_1} задается уравнением $q = -3t^2$ и изображена более крутой параболой, лежащей в темной области.

Стратификация плоскости (t, q) относительно указанных двух парабол совпадает с C^∞ -стратификацией по типам мультиособенностей отображения f в образах соответствующих точек. Имеется один 0-мерный страт типа A_2 , четыре одномерных страта типа $A_1 + A_0$, один двумерный страт типа A_0 и три двумерных страта типа $3A_0$. Пара $(\Phi_{A_1}, [A_0](f))$ имеет особенность типа B_2 в нуле.

2.1.9. ПРИМЕР. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$,

$$(t, q_1, q_2, q_3) \mapsto (t^3 + q_1t, q_2t^2 + q_3t, q_1, q_2, q_3).$$

Оно имеет особенность типа A_2 в нуле $t = q_1 = q_2 = q_3 = 0$. В этом случае отображе-

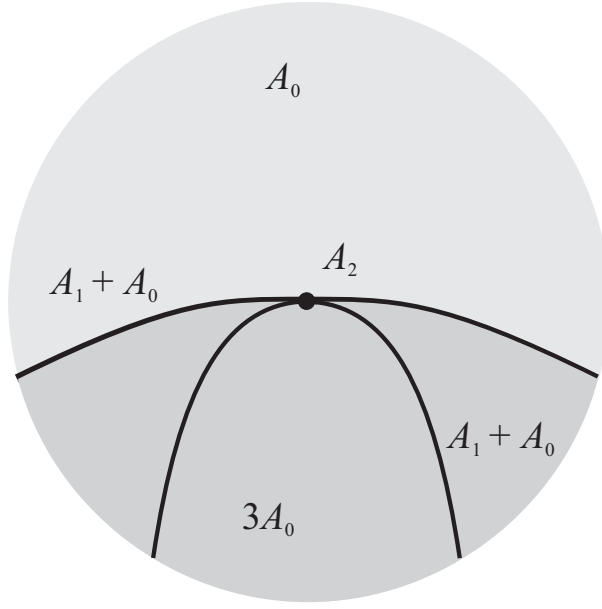


Рис. 1.1: A_0 -преобразование ростка отображения $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ с особенностью типа A_2 .

ние $[A_0](f) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ задается формулой

$$\begin{cases} t = v_1 \\ q_1 = -u^2 - uv_1 - v_1^2 \\ q_2 = v_2 \\ q_3 = -(u + v_1)v_2. \end{cases}$$

Образ отображения $[A_0](f)$ является особой гиперповерхностью в \mathbb{R}^4 . На рис. 1.2 (стр. 43) изображена перестройка двумерных сечений этой гиперповерхности гиперплоскостями из (общего) однопараметрического семейства гиперплоскостей $t = c$, $c \in \mathbb{R}$ в \mathbb{R}^4 . Каждое сечение диффеоморфно зонтику Уитни. В центре рисунка изображено сечение $t = 0$. Жирная прямая на каждом зонтике представляет собой сечение поверхности Φ_{A_1} . Эта поверхность задается системой уравнений

$$\begin{cases} 3t^2 + q_1 = 0 \\ 2tq_2 + q_3 = 0. \end{cases}$$

На рисунке указана C^∞ -стратификация зонтиков по типам особенностей гиперповерхности $f(\mathbb{R}^4) \subset \mathbb{R}^5$ в образах соответствующих точек при отображении f . На каждом зонтике, соответствующем значению $c \neq 0$, имеется два нуль-мерных страта типа $A_1 + A_0$, два одномерных страта типа A_1 , два одномерных страта типа $3A_0$ и четыре двумерных страта типа $2A_0$. На зонтике, соответствующем значению $c = 0$, имеется один нуль-мерный страт типа A_2 , два одномерных страта типа A_1 , один од-

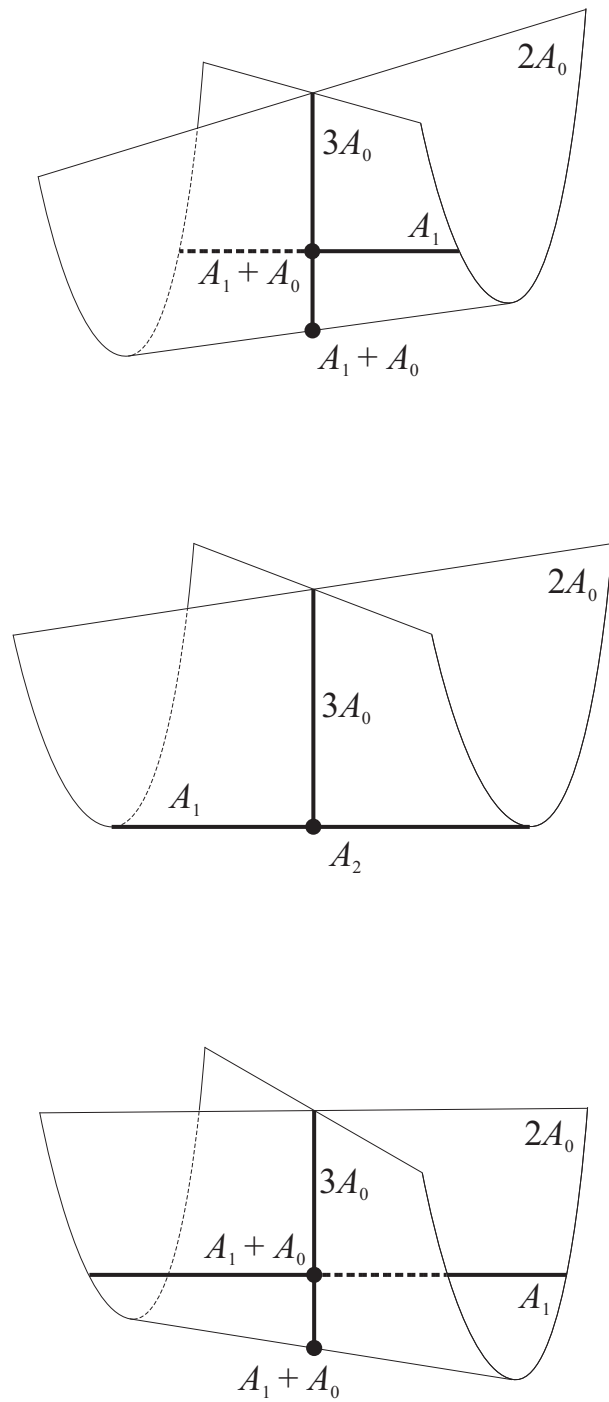


Рис. 1.2: A_0 -преобразование ростка отображения $f : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ с особенностью типа A_2 .

номерный страт типа $3A_0$ и четыре двумерных страта типа $2A_0$. Пара $(\Phi_{A_1}, [A_0](f))$ имеет особенность типа B_2 в нуле.

2.1.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Замыкание многообразия особенностей типа $2A_0$ образа $[A_0]$ -преобразования отображения f из примера 2.1.9 имеет гладкое продолжение в \mathbb{R}^4 . Стратификация ростка в нуле этой гладкой двумерной поверхности по типам мультиособенностей отображения f в образах соответствующих точек при отображении φ_{A_0} диффеоморфна стратификации на рис. 1.1.

2.2 Вспомогательные утверждения

Пусть l и ν – целые числа, $l \geq 0$, $\nu > 0$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\bar{q} = (q_{1,1}, \dots, q_{1,\nu-1}; q_{2,1}, \dots, q_{2,\nu}; \dots; q_{l+1,1}, \dots, q_{l+1,\nu}) \in \mathbb{R}^{m-1},$$

$$S(t, \bar{q}) = \begin{pmatrix} t^{\nu+1} + 0 + q_{1,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{1,1}t \\ 0 + q_{2,\nu}t^\nu + q_{2,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{2,1}t \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\nu}t^\nu + q_{l+1,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{l+1,1}t \end{pmatrix}^*.$$

Доказательство теорем 2.1.1, 2.1.2 и 2.1.7 опирается на следующие утверждения.

2.2.1. ЛЕММА. Пусть $u \in \mathbb{R}$ и

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}).$$

Предположим, что F как вектор-функция от u обращается в нуль при $u = t$ с кратностью $\mu + 1 \geq 1$. Тогда

$$F(u, t, \bar{q}) = (u - t)^{\mu+1} G_\mu(u, t, \tilde{q}),$$

где

$$\tilde{q} = (q_{1,\mu+1}, \dots, q_{1,\nu-1}; q_{2,\mu+1}, \dots, q_{2,\nu}; \dots; q_{l+1,\mu+1}, \dots, q_{l+1,\nu}),$$

$$G_\mu(u, t, \tilde{q}) = \sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+1}} (u - t)^{i-\mu},$$

причем $G_\mu|_{u=t} \neq 0$.

Это следует из формулы Тейлора для вектор-функций.

2.2.2. ЛЕММА. Пусть

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}, \quad f : (t, \bar{q}) \mapsto (S(t, \bar{q}), \bar{q}).$$

Тогда для любого целого неотрицательного $\mu < \nu$ набор $(t, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)}$, где

$$\tilde{q} = (q_{1,\mu+1}, \dots, q_{1,\nu-1}; q_{2,\mu+1}, \dots, q_{2,\nu}; \dots; q_{l+1,\mu+1}, \dots, q_{l+1,\nu}),$$

определяет координаты на многообразии $\Phi_{A_\mu} = \overline{A_\mu^f}$. Подмножество $\Phi_{A_\mu, A_0} = \overline{A_{\mu,0}^f} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ диффеоморфно гладкому подмногообразию $\Phi \times \{0\}$ в $\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1} \times \mathbb{R}^{m-1}$, где Φ – множество точек $(u, t, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1}$, в которых функция

$$G_\mu(u, t, \tilde{q}) = \sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \tilde{q})}{\partial t^{i+1}} (u-t)^{i-\mu}$$

обращается в нуль. Отображение $[A_\mu](f)$ лево-право эквивалентно сужению на многообразии Φ проекции

$$\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)}, \quad (u, t, \tilde{q}) \mapsto (t, \tilde{q}).$$

Действительно, подмногообразии $\Phi_{A_\mu} \subseteq \mathbb{R}^m$ задается уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t^\mu} = 0$$

(см. пример 1.1.9). Подмножество $\Phi_{A_\mu, A_0} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ диффеоморфно подмножеству $\Phi \times \{0\}$ в $\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1} \times \mathbb{R}^{m-1}$, где Φ – замыкание множества точек $(u, t, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1}$ таких, что $u \neq t$ и

$$F(u, t, \tilde{q}) = S(u, \tilde{q}) - S(t, \tilde{q}) = 0.$$

Поэтому лемма 2.2.2 следует из леммы 2.2.1.

2.2.3. ЛЕММА. Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Тогда его надстройка

$$\tilde{f} : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow V \times \mathbb{R}^k, \quad (x, z) \mapsto (f(x), z)$$

является отображением такого же типа. При этом для любого целого неотрицательного μ такого, что $\mu(l+1) < m$, существуют диффеоморфизм многообразия $\tilde{\Phi}_{A_\mu} = \overline{A_{\mu,0}^{\tilde{f}}}$ на $\Phi_{A_\mu} \times \mathbb{R}^k$, где $\Phi_{A_\mu} = \overline{A_\mu^f}$, и диффеоморфизм многообразия $\tilde{\Phi}_{A_\mu} \times \tilde{\Phi}_{A_0}$ на $(\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}) \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ такие, что:

1) подмножество $\tilde{\Phi}_{A_\mu, A_0} = \overline{A_{\mu,0}^{\tilde{f}}}$ в $\tilde{\Phi}_{A_\mu} \times \tilde{\Phi}_{A_0}$ диффеоморфно подмножеству

$$\Phi_{A_\mu, A_0} \times (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset (\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}) \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k),$$

где $\Phi_{A_\mu, A_0} = \overline{A_{\mu,0}^f} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$;

2) естественная проекция $\tilde{\Phi}_{A_\mu} \times \tilde{\Phi}_{A_0} \rightarrow \tilde{\Phi}_{A_\mu}$ лево-право эквивалентна проекции

$$(\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}) \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \rightarrow \Phi_{A_\mu} \times \mathbb{R}^k, \quad ((x, \xi), (z, w)) \mapsto (x, z).$$

Это утверждение очевидно.

2.3 Доказательство теорем 2.1.1, 2.1.2 и 2.1.7

Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Рассмотрим подмногообразия $\Phi_{A_\mu} \subseteq M$, $\Phi_{A_{\mu+1}} \subset \Phi_{A_\mu}$ и подмножество $\Phi_{A_\mu, A_0} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$.

2.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(x, x) \in \Phi_{A_\mu, A_0}$ и отображение f имеет в точке $f(x)$ мультиособенность типа A_ν . Тогда $\nu \geq \mu + 1$, росток множества Φ_{A_μ, A_0} в точке (x, x) является ростком гладкого подмногообразия в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ и

- 1) отображение $[A_\mu](f)$ имеет в точке x мультиособенность типа $A_{\nu-\mu-1}$;
- 2) пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$ имеет в точке x особенность типа $B_{\nu-\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В подходящих локальных координатах на многообразиях M и V росток отображения f в точке x задается формулой

$$(f, x) : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t, \bar{q}, \bar{z}) \mapsto (S(t, \bar{q}), \bar{q}, \bar{z}),$$

где

$$t \in \mathbb{R}, \quad \bar{q} = (q_{1,1}, \dots, q_{1,\nu-1}; q_{2,1}, \dots, q_{2,\nu}; \dots; q_{l+1,1}, \dots, q_{l+1,\nu}) \in \mathbb{R}^{\nu(l+1)-1},$$

$$S(t, \bar{q}) = \begin{pmatrix} t^{\nu+1} + 0 + q_{1,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{1,1}t \\ 0 + q_{2,\nu}t^\nu + q_{2,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{2,1}t \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\nu}t^\nu + q_{l+1,\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_{l+1,1}t \end{pmatrix}^*,$$

и \bar{z} – вектор переменных, дополняющих t, \bar{q} до системы координат в \mathbb{R}^m . Мы рассмотрим лишь случай, когда переменные \bar{z} отсутствуют. Из леммы 2.2.3 следует, что это не ограничит общности наших рассуждений.

Итак, по лемме 2.2.2 набор $(t, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)}$, где

$$\tilde{q} = (q_{1,\mu+1}, \dots, q_{1,\nu-1}; q_{2,\mu+1}, \dots, q_{2,\nu}; \dots; q_{l+1,\mu+1}, \dots, q_{l+1,\nu}),$$

определяет гладкие локальные координаты на многообразии Φ_{A_μ} . Росток подмножества $\Phi_{A_\mu, A_0} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ в точке (x, x) диффеоморфен ростку в нуле гладкого подмногообразия $\Phi \times \{0\}$ в $\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1} \times \mathbb{R}^{m-1}$, где

$$\Phi = \left\{ (u, t, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1} \left| \sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+1}} (u-t)^{i-\mu} = 0 \right. \right\}.$$

Росток отображения $[A_\mu](f)$ в точке (x, x) лево-право эквивалентен сужению проекции

$$\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)}, \quad (u, t, \tilde{q}) \mapsto (t, \tilde{q}).$$

на многообразии Φ .

Теперь заметим, что компоненты отображений

$$Q_i = \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S}{\partial t^{i+1}}, \quad i = \mu, \dots, \nu - 1,$$

также определяют гладкие локальные координаты на Φ_{A_μ} . В этих координатах росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu+1}} \subset \Phi_{A_\mu}$ в точке x задается уравнением $Q_\mu = 0$ (см. пример 1.1.9), т.е. является образом при отображении $[A_\mu](f)$ ростка в нуле гиперповерхности $u - t = 0$.

Отсюда следует, что пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$ имеет особенность типа $B_{\nu-\mu}$ в точке x . В частности, отображение $[A_\mu](f)$ имеет в точке x мультиособенность типа $A_{\nu-\mu-1}$. Предложение 2.3.1 доказано.

2.3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(x, \xi) \in \Phi_{A_\mu, A_0}$ и отображение f имеет мультиособенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$, $r > 1$ в точке $y = f(x)$. Предположим также, что отображение f имеет особенность типа A_{ν_i} , $i \in \{1, \dots, r\}$ в точке x . Тогда $\nu_i \geq \mu$, росток множества Φ_{A_μ, A_0} в точке (x, ξ) является ростком гладкого подмногообразия в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ и

1) отображение $[A_\mu](f)$ имеет в точке x мультиособенность типа $X - A_{\nu_i}$, если $\nu_i = \mu$, и $X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i - \mu - 1}$, если $\nu_i > \mu$;

2) если $\nu_i > \mu$ (т.е. $x \in \Phi_{A_{\mu+1}}$), то пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$ имеет в точке x особенность типа $(B_{\nu_i - \mu}, X - A_{\nu_i})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности можем считать, что $i = 1$.

Пусть $x_1 = x, x_2, \dots, x_r$ — попарно различные точки из $f^{-1}(y)$ и отображение f имеет в этих точках особенности типов $A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_r}$, соответственно. Тогда (см. [22]) существуют локальные координаты

$$(\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^r, \bar{z}) \in \mathbb{R}^n$$

на многообразии V с началом в точке y , где

$$\bar{Y}^j = (\bar{y}^j, Y^j), \quad \bar{y}^j \in \mathbb{R}^{l+1},$$

$$Y^j = (q_{1,1}^j, \dots, q_{1,\nu_j-1}^j; q_{2,1}^j, \dots, q_{2,\nu_j}^j; \dots; q_{l+1,1}^j, \dots, q_{l+1,\nu_j}^j) \in \mathbb{R}^{\nu_j(l+1)-1},$$

такие, что для любого $j = 1, \dots, r$ росток (f, x_j) отображения f в точке x_j задается формулами

$$(\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^{j-1}; t_j, Y^j; \bar{Y}^{j+1}, \dots, \bar{Y}^r, \bar{z}) \mapsto (\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^{j-1}; S_j(t_j, Y^j), Y^j; \bar{Y}^{j+1}, \dots, \bar{Y}^r, \bar{z}),$$

$$S_j(t_j, Y^j) = \begin{pmatrix} t_j^{\nu_j+1} + 0 + q_{1,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{1,1}^j t_j \\ 0 + q_{2,\nu_j}^j t_j^{\nu_j} + q_{2,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{2,1}^j t_j \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\nu_j}^j t_j^{\nu_j} + q_{l+1,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{l+1,1}^j t_j \end{pmatrix}^* \quad (1.3)$$

в локальных координатах

$$(\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^{j-1}, t_j, Y^j; \bar{Y}^{j+1}, \dots, \bar{Y}^r, \bar{z}), \quad t_j \in \mathbb{R}$$

на многообразии M с началом в точке x_j . Здесь \bar{z} – вектор дополнительных переменных. Как и при доказательстве предыдущего утверждения, достаточно рассмотреть лишь случай, когда эти переменные отсутствуют.

Согласно лемме 2.2.2 набор

$$(t_1; q_{1,\mu+1}^1, \dots, q_{1,\nu_1-1}^1; q_{2,\mu+1}^1, \dots, q_{2,\nu_1}^1; \dots; q_{l+1,\mu+1}^1, \dots, q_{l+1,\nu_1}^1; \bar{Y}^2, \dots, \bar{Y}^r)$$

определяет локальные координаты на многообразии Φ_{A_μ} с началом в точке x . Зафиксируем эти координаты и рассмотрим множество Ξ всех точек $\xi \in M$ таких, что $(x, \xi) \in \Phi_{A_\mu, A_0}$.

Ясно, что множество Ξ всегда содержит $r - 1$ точек $x_j, j = 2, \dots, r$. Для любого такого j росток подмножества $\Phi_{A_\mu, A_0} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ в точке (x, x_j) является ростком гладкого подмногообразия с локальными координатами

$$(t_1; q_{1,\mu+1}^1, \dots, q_{1,\nu_1-1}^1; q_{2,\mu+1}^1, \dots, q_{2,\nu_1}^1; \dots; q_{l+1,\mu+1}^1, \dots, q_{l+1,\nu_1}^1; \bar{Y}^2, \dots, \bar{Y}^{j-1}, t_j, Y^j; \bar{Y}^{j+1}, \dots, \bar{Y}^r).$$

При этом отображение $[A_\mu](f)$ имеет особенность типа A_{ν_j} в точке (x, x_j) в силу формулы (1.3).

Кроме указанных точек, множество Ξ может содержать еще только одну точку. А именно, – точку x .

Согласно предложению 2.3.1 это происходит, когда $\nu_1 > \mu$. При этом росток множества Φ_{A_μ, A_0} в точке (x, x) является ростком гладкого подмногообразия в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ и пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f, x))$ имеет в точке x особенность типа $B_{\nu_1-\mu}$ (здесь $[A_\mu](f, x)$ обозначает A_μ -преобразование ростка отображения f в точке x).

Остается заметить, что плоскости

$$\{t_1 = q_{1,\mu+1}^1 = \dots = q_{1,\nu_1-1}^1 = q_{2,\mu+1}^1 = \dots = q_{2,\nu_1}^1 = \dots = q_{l+1,\mu+1}^1 = \dots = q_{l+1,\nu_1}^1 = 0\},$$

$$\{\bar{Y}^j = 0\}, \quad j = 2, \dots, r$$

в пространстве $\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)}$ с координатами

$$(t_1; q_{1,\mu+1}^1, \dots, q_{1,\nu_1-1}^1; q_{2,\mu+1}^1, \dots, q_{2,\nu_1}^1; \dots; q_{l+1,\mu+1}^1, \dots, q_{l+1,\nu_1}^1; \bar{Y}^2, \dots, \bar{Y}^r)$$

пересекаются в нуле трансверсально. Предложение 2.3.2 доказано.

Теоремы 2.1.1, 2.1.2 и 2.1.7 являются простыми следствиями предложений 2.3.1 и 2.3.2.

2.3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически предложения 2.3.1 и 2.3.2 описывают классификацию мультиособенностей отображения $[A_\mu](f)$ и классификацию особенностей пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$ относительно диффеоморфизмов многообразий Φ_{A_μ} и Φ_{A_μ, A_0} .

3 Разрешение мультиособенностей устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1

В этом параграфе описана конструкция разрешения мультиособенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения в пространство нестрого большей размерности.

3.1 Основная конструкция

Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Рассмотрим произвольный элемент \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A} и сопоставим ему подмножество

$$\mathcal{A}_f^\infty = \bigcup_k (\mathcal{A} + kA_0)_f$$

в V , объединяющее многообразия $(\mathcal{A} + kA_0)_f$ мультиособенностей типов $\mathcal{A} + kA_0$ отображения f по всем целым $k \geq 0$. Это подмножество является иммерсированным подмногообразием в V . Его замыкание в многообразии V обозначим через $\overline{\mathcal{A}_f^\infty}$.

3.1.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $l > 0$, то $\overline{\mathcal{A}_f^\infty} = \overline{\mathcal{A}_f}$.

Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq 0$. Предположим, что $\mathcal{A}_f^\infty \neq \emptyset$, и зафиксируем порядок чисел μ_1, \dots, μ_p . Тогда возникает последовательность гладких отображений

$$\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \xrightarrow{\psi_p} \dots \xrightarrow{\psi_3} \Phi_{A_{\mu_1}, A_{\mu_2}} \xrightarrow{\psi_2} \Phi_{A_{\mu_1}} \xrightarrow{\psi_1} V,$$

где каждое отображение ψ_i является композицией гладких собственных отображений

$$\begin{aligned} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_{\mu_i}} &\xrightarrow{g_i^{\mu_i}} \dots & (1.4) \\ &\xrightarrow{g_i^2} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_1} \xrightarrow{g_i^1} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_0} \xrightarrow{f_i} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}}. \end{aligned}$$

Отображения f_i и g_i^j строятся индуктивно по следующей схеме.

1) В качестве $f_1 : \Phi_{A_0} \rightarrow \Phi_0$ выступает исходное отображение $f : M \rightarrow V$, так что $\Phi_0 = V, \Phi_{A_0} = M$.

2) f_i – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 . Его образ имеет коразмерность l в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}}$.

3) Многообразием $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_j}$ служит замыкание множества $A_j^{f_i}$ точек $x \in \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_0}$, в которых отображение f_i имеет особенность типа A_j .

4) g_i^j – вложение коразмерности $l + 1$ многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_j}$ в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_{j-1}}$.

5) Многообразие $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}, A_0}$ и отображение f_{i+1} определяются при помощи A_{μ_i} -преобразования отображения f_i :

$$f_{i+1} = [A_{\mu_i}](f_i).$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} : \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \rightarrow V, \quad \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_p.$$

Из предложения 1.3.3 и теоремы 2.1.7 легко вытекает следующее утверждение.

3.1.2. ТЕОРЕМА. *Образом отображения $\varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}$ является множество $\overline{A_f^\infty}$.*

Пусть $(M)^i = M \times \dots \times M$ (i раз). Рассмотрим подмногообразие $M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$ в $(M)^i$, образованное наборами (x_1, \dots, x_i) попарно различных точек многообразия M таких, что $f(x_1) = \dots = f(x_i) \in (A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_i})_f^\infty$, причем отображение f имеет особенность типа A_{μ_s} в точке $x_s, s = 1, \dots, i$.

3.1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любого $i = 1, \dots, p$ существует гладкое вложение $\phi_i : \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}} \rightarrow (M)^i$, образом которого является замыкание $\overline{M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}}$ многообразия $M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$ в пространстве $(M)^i$. Вложения ϕ_1, \dots, ϕ_p включаются в коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & \xrightarrow{\psi_p} & \dots & \xrightarrow{\psi_3} & \Phi_{A_{\mu_1}, A_{\mu_2}} & \xrightarrow{\psi_2} & \Phi_{A_{\mu_1}} & \xrightarrow{\psi_1} & V \\ & \downarrow \phi_p & & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow id \\ (M)^p & \xrightarrow{h_p} & \dots & \xrightarrow{h_3} & (M)^2 & \xrightarrow{h_2} & M & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

где $h_i : (M)^i \rightarrow (M)^{i-1}, (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1})$ – отображение забывания последней координаты, а id – тождественное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 1$ это очевидно (см. пример 1.1.9). Предположим, что утверждение верно при всех $p \leq k - 1$ и докажем его для $p = k$.

Пусть $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}^0 = \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}^{-1}((A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_k})_f^\infty)$. Это открытое всюду плотное подмногообразие в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$. По предположению индукции, оно образовано (упорядоченными) парами $((x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}), (x_1, \dots, x_{k-2}, x_k))$ наборов из попарно различных точек x_1, \dots, x_k многообразия M таких, что $(x_1, \dots, x_k) \in M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$. Отображение

$$((x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}), (x_1, \dots, x_{k-2}, x_k)) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$$

определяет диффеоморфизм многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}^0$ на $M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$.

Остается лишь проверить, что замыкание $\overline{M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}}$ является гладким подмногообразием в $(M)^k$ и что указанный диффеоморфизм продолжается до диффеоморфизма многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$ на $\overline{M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}}$. Но это легко следует из утверждения 1 предложения 4.4.1 ниже. Предложение 3.1.3 доказано.

3.1.4. ТЕОРЕМА. Пары $(\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}, \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}})$, полученные при разных упорядочениях набора (μ_1, \dots, μ_p) показателей вырожденности мультиособенностей типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ отображения f , естественно диффеоморфны. А именно, для любой перестановки $\tau : (1, \dots, p) \rightarrow (1, \dots, p)$ существует диффеоморфизм $\phi_\tau : \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \rightarrow \Phi_{A_{\mu_{\tau(1)}}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & \xrightarrow{\phi_\tau} & \Phi_{A_{\mu_{\tau(1)}}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}} \\ \downarrow \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & & \downarrow \varphi_{A_{\mu_{\tau(1)}}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}} \\ V & \xrightarrow{id} & V \end{array}$$

коммутативна.

Это утверждение следует из предложения 3.1.3. Действие диффеоморфизма ϕ_τ определяется перестановкой $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)})$ сомножителей в произведении $(M)^p$.

Таким образом, корректно следующее определение.

3.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}$ и гладкое отображение $\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}$ называются *характеристическими* для мультиособенностей типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ отображения f . Описанная выше конструкция, сопоставляющая элементу $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ пару $(\Phi_{\mathcal{A}}, \varphi_{\mathcal{A}})$, называется *разрешением* этих мультиособенностей (или *разрешением* особенностей типа \mathcal{A} образа отображения f , если $l > 0$).

При $l = 0$ мы будем пользоваться указанной терминологией и в случае, когда отображение f не имеет мультиособенностей типа \mathcal{A} в своем образе, однако $\mathcal{A}_f^\infty \neq \emptyset$.

3.1.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathcal{A} = 0$, то $\Phi_{\mathcal{A}} = V$, а $\varphi_{\mathcal{A}} : \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$ – тождественное отображение.

Основное свойство описанной конструкции заключается в следующем.

3.1.7. ТЕОРЕМА. Если мультиособенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ отображения f примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A} + kA_0$ при некотором целом $k \geq 0$, то отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ является конечным накрытием над многообразием X_f . Кратность этого накрытия зависит только от \mathcal{A} и X (т.е. она не зависит от t, n, M, V, f, k и от порядка A_{μ_i} -преобразований).

Это утверждение является очевидным следствием теорем 2.1.7 и 3.1.4.

3.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кратность отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ над многообразием X_f мультиособенностей типа X отображения f называется *индексом* мультиособенности типа X относительно мультиособенности типа \mathcal{A} и обозначается через $I_{\mathcal{A}}(X)$.

Предложение 3.1.3 показывает, что наша конструкция разрешения мультиособенностей устойчивого отображения коранга ≤ 1 является обобщением хорошо известного в алгебраической геометрии принципа итерации Клеймана [75]. Действительно,

при использовании принципа итерации строятся и изучаются замыкания многообразий вида $M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$ (см., например, [80]). Однако получающиеся при этом гладкие многообразия не связываются диаграммами (1.4).

3.1.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Между характеристическими многообразиями всевозможных мультиособенностей отображения f , отвечающими, к тому же, различным упорядочениям показателей вырожденности этих мультиособенностей, имеется большое количество отображений. Они образуют огромную коммутативную диаграмму. В ней есть замечательная поддиаграмма.

А именно, разрешим мультиособенности каждого типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ последовательностью A_{μ_i} -преобразований в невозрастающем порядке следования показателей вырожденности μ_1, \dots, μ_p . Тогда возникнет ориентированный граф $A(f)$, у которого:

- 1) вершины соответствуют многообразию V и характеристическим многообразиям $\Phi_{\mathcal{A}}$, полученным в результате указанного разрешения;
- 2) ориентированные ребра отвечают устойчивым отображениям f_i коранга ≤ 1 и вложениям g_i^j из диаграмм вида (1.4).

Легко видеть, что граф $A(f)$ является деревом (с корнем V). Цепи этого дерева представляют характеристические отображения мультиособенностей отображения f , определяемые данным разрешением.

3.1.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дерево $A(f)$ называется *характеристической башней* мультиособенностей отображения f .

Башня $A(f)$ изображена на рис. 1.3 (см. стр. 53). Многоточия обозначают поддерева в $A(f)$, порожденные вершинами $\Phi_{\mathcal{A}}$, которые соответствуют элементам $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ с $p > 4$ или $\mu_1 + \dots + \mu_p > 4$. Горизонтальные ребра отвечают устойчивым отображениям f_i коранга ≤ 1 , а вертикальные – вложениям g_i^j . Из каждой вершины $\Phi_{\mathcal{A}}$ выходит ровно одно ребро, а входит не более двух. Если в вершину $\Phi_{\mathcal{A}}$ входят два ребра, то либо $\mathcal{A} = A_{\mu}$, либо $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + A_{\mu}$, где все показатели вырожденности мультиособенности типа $\tilde{\mathcal{A}}$ строго больше μ .

3.2 Вычисление относительных индексов мультиособенностей

Из теорем 2.1.7 и 3.1.4 следует простая рекуррентная формула для вычисления относительных индексов мультиособенностей устойчивого гладкого собственного отображения $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$.

3.2.1. ТЕОРЕМА. Индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ мультиособенности типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \mathbb{A}$ отображения f относительно мультиособенности типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$

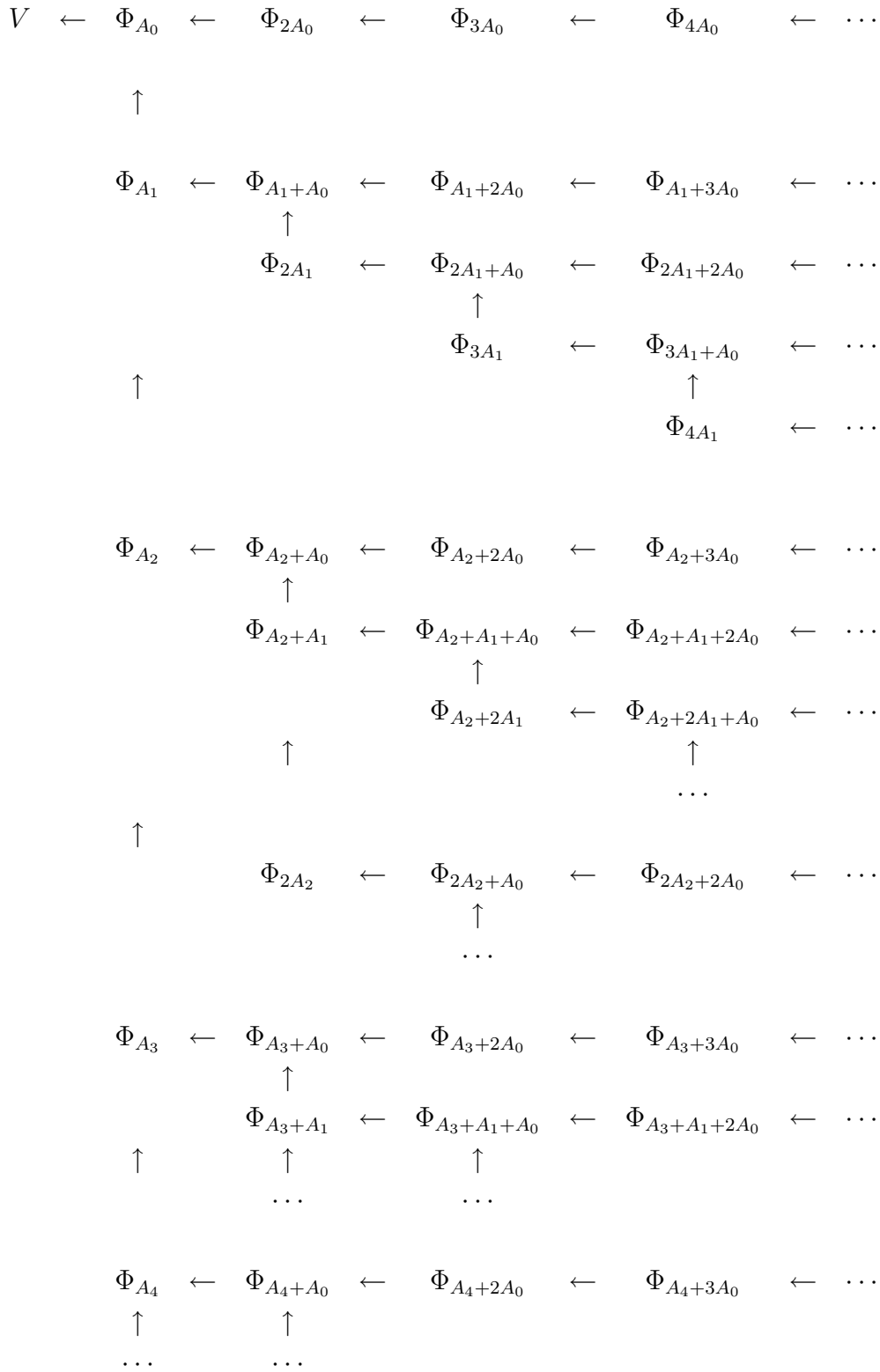


Рис. 1.3: Характеристическая башня мультиособенностей устойчивого гладкого отображения $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 , где $m \leq n$.

вычисляется рекуррентно, исходя из следующих условий:

- 1) если $\mu^* = \max\{\mu_1, \dots, \mu_p\} > \nu^* = \max\{\nu_1, \dots, \nu_r\}$, то $I_{\mathcal{A}}(X) = 0$;
- 2) если $\mu^* \leq \nu^*$, то

$$I_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{\nu_i = \mu^*} I_{\mathcal{A} - A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i}) + \sum_{\nu_i > \mu^*} I_{\mathcal{A} - A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i - \mu^* - 1}),$$

где $I_0(Y) = 1$ для любого $Y \in \mathbb{A}$.

3.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $l > 0$, то особенность типа X образа отображения f примыкает к особенности типа \mathcal{A} тогда и только тогда, когда $I_{\mathcal{A}}(X) \neq 0$. Если $l = 0$ и отображение f имеет мультиособенности типа X , то условие $I_{\mathcal{A}}(X) \neq 0$ эквивалентно тому, что эти мультиособенности примыкают к мультиособенностям типа $\mathcal{A} + kA_0$ для некоторого целого $k \geq 0$.

Теорема 3.2.1 позволяет легко получить явную формулу для вычисления относительных индексов мультиособенностей.

3.2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$, $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$, причем $\mathcal{A} \neq 0$ и

$$\mu^* = \max\{\mu_1, \dots, \mu_p\} \leq \nu^* = \max\{\nu_1, \dots, \nu_r\}.$$

Тогда индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ мультиособенности типа X отображения f относительно мультиособенности типа \mathcal{A} вычисляется по формуле

$$I_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{(\kappa_1, \dots, \kappa_p)} \prod_{i=1}^p \left[\sum_{j=1}^r \delta_{\kappa_i}(\nu_j) - \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{\kappa_i}(\kappa_j) + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{\kappa_i}(\kappa_j - \mu_j - 1) \right],$$

где внешняя сумма берется по всем упорядоченным наборам целых чисел $\kappa_1, \dots, \kappa_p$ таких, что $\mu_i \leq \kappa_i \leq \nu^*$, $i = 1, \dots, p$, а

$$\delta_{\kappa}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = \kappa \geq 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для мультиособенностей типов $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ и $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ малых коразмерностей индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ можно быстро вычислить при помощи *дерева (упорядоченной) пары $\mathcal{A} \vdash X$* в предположении, что $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_p$. Это ориентированное дерево, ребра которого снабжены целыми положительными весами. Вершины обозначаются элементами полугруппы \mathbb{A} (в том числе и нулевым). Корнем является элемент X .

Ориентации ребер определяются ориентациями цепей, выходящих из X и заканчивающихся в концевых вершинах дерева. Длина любой такой цепи (т.е. количество ее ребер) не превосходит числа p неприводимых компонент мультиособенности типа

\mathcal{A} . Вершины, находящиеся на расстоянии $i \leq p$ от корня X , а также ребра в них входящие (вместе с весами), определяются вершинами, удаленными от X на расстояние $i - 1$.

А именно, из вершины 0 ребра не выходят. Чтобы перечислить ребра, выходящие из произвольной вершины $Y = A_{\kappa_1} + \dots + A_{\kappa_s}$, обозначим через $\#(A_\kappa|Y)$ число слагаемых в Y , равных A_κ .

Пусть вершина Y находится на расстоянии $i - 1$ от корня X . Тогда:

1) если $\#(A_{\mu_i}|Y) > 0$, то из вершины Y выходит ребро с концом $Y - A_{\mu_i}$; вес этого ребра равен $\#(A_{\mu_i}|Y)$;

2) для любого целого положительного $\kappa > \mu_i$ такого, что $\#(A_\kappa|Y) > 0$, из вершины Y выходит ребро с концом $Y - A_\kappa + A_{\kappa - \mu_i - 1}$; его вес равен $\#(A_\kappa|Y)$.

Никакие другие ребра из вершины Y не выходят.

3.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индексом цепи* дерева пары $\mathcal{A} \vdash X$ называется произведение весов ребер, составляющих эту цепь.

Из теоремы 3.2.1 очевидно получаем

3.2.5. ТЕОРЕМА. *Индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ мультиособенности типа X относительно мультиособенности типа \mathcal{A} равен сумме индексов всех цепей дерева пары $\mathcal{A} \vdash X$, которые выходят из корня X и имеют длину, равную числу p неприводимых компонент мультиособенности типа \mathcal{A} .*

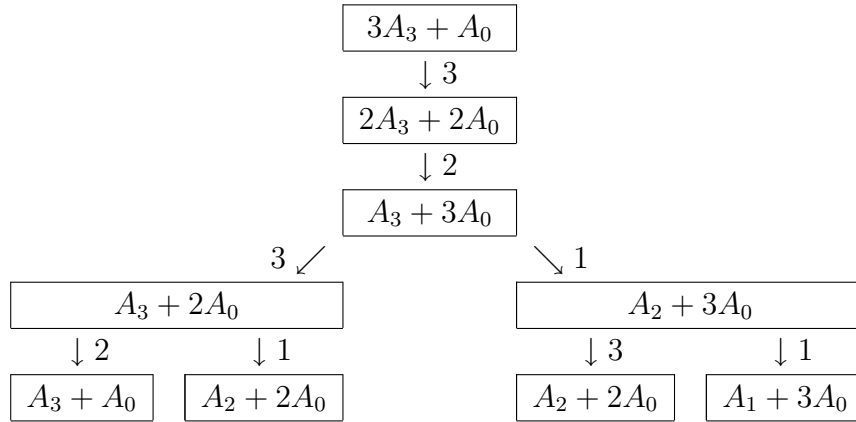


Рис. 1.4: Дерево пары $(2A_2 + 2A_0) \vdash (3A_3 + A_0)$.

3.2.6. ПРИМЕР. На рис. 1.4 (см. стр. 55) представлено дерево пары $(2A_2 + 2A_0) \vdash (3A_3 + A_0)$. Вершины изображены прямоугольниками, ребра – стрелками, рядом с которыми написаны их веса. Дерево имеет четыре цепи длины 4, выходящие из корня $3A_3 + A_0$. Их индексы равны $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$, $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 18$, $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$, $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$,

соответственно. Поэтому

$$I_{2A_2+2A_0}(3A_3 + A_0) = 36 + 18 + 18 + 6 = 78.$$

3.2.7. ПРИМЕР. Дерево пары $pA_\mu \vdash rA_\mu$, где $p \leq r$, является цепью длины p , выходящей из корня rA_μ . Веса ребер этой цепи изменяются на 1 при переходе через каждую вершину и пробегают все значения от r до $r - p + 1$. Поэтому

$$I_{pA_\mu}(rA_\mu) = p! \binom{r}{p}.$$

4 Каноническая стратификация характеристического многообразия

В этом параграфе мы изучаем естественную стратификацию характеристических многообразий мультиособенностей устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1 по типам мультиособенностей, которые имеются у этого отображения в образах точек характеристического многообразия при их характеристическом отображении. Описаны особенности этой стратификации с точностью до диффеоморфизмов объемлющего характеристического многообразия.

4.1 Особенности типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$

Пусть Σ – произвольная C^∞ -стратификация гладкого n -мерного многообразия V . Рассмотрим целые неотрицательные l , κ и p , такие что $l < n$, $p \leq \kappa + 1$ и

$$c = (\kappa - p)(l + 1) + l + p \leq n.$$

В следующем определении используется понятие стратификации гладкого многообразия относительно набора замкнутых подмножеств (см. раздел 1.2).

4.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратификация Σ имеет *особенность типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$* , $p = 0$, в данной точке $y \in V$, если росток (Σ, y) этой стратификации в точке y диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства \mathbb{R}^n относительно

- 1) (при $l > 0$) образа устойчивого гладкого собственного отображения $f : \mathbb{R}^{n-l} \rightarrow \mathbb{R}^n$ коранга ≤ 1 , имеющего в точке $f(0) = 0$ особенность типа A_κ ;
- 2) (при $l = 0$) множества критических значений устойчивого гладкого собственного отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ коранга ≤ 1 , имеющего в точке $f(0) = 0$ мультиособенность типа A_κ .

Корректность определения 4.1.1 (как и корректность всех определений далее, где используется понятие стратификации гладкого многообразия относительно набора замкнутых подмножеств) следует из теоремы 1.2.7.

Пусть теперь $p > 0$. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^n с координатами

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \bar{\lambda}_p, \dots, \bar{\lambda}_\kappa, \bar{z}),$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\bar{\lambda}_j = (\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{l+1,j}) \in \mathbb{R}^{l+1}$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n-c}$, и положим

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{l+1}.$$

4.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратификация Σ имеет *особенность типа* $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$, $p > 0$, в точке $y \in V$, если росток (Σ, y) диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства \mathbb{R}^n относительно набора следующих подмножеств:

1) образа (при $l > 0$) или множества критических значений (при $l = 0$) отображения $f : \mathbb{R}^{n-l} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, t, \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_\kappa, \bar{z}) \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, S(t, \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_\kappa), \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_\kappa, \bar{z}),$$

где $t \in \mathbb{R}$ и

$$S(t, \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_\kappa) = e_1 t^{\kappa-p+1} + \sum_{i=p+1}^{\kappa} \bar{\lambda}_i t^{i-p}$$

(входит в набор только при $p \leq \kappa$, если $l > 0$, и при $p < \kappa$, если $l = 0$);

2) p гладких подмногообразий \mathcal{H}_i , $i = 1, \dots, p$, где \mathcal{H}_i – образ сужения отображения f на гиперплоскость $t = -(\lambda_i + \dots + \lambda_{p-1})$, если $i < p$, и на гиперплоскость $t = 0$, если $i = p$ (входят в набор только при $p \leq \kappa$);

3) $p(p-1)/2$ гиперплоскостей

$$\Pi_{i,j} : \lambda_i + \dots + \lambda_{j-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq p$$

(входят в набор только при $p > 1$).

4.1.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Для любого κ особенности типов $\mathcal{S}_\kappa^\kappa(0)$ и $\mathcal{S}_\kappa^{\kappa+1}(0)$ диффеоморфны (особенности типа $\mathcal{S}_1^1(0)$ диффеоморфны также особенностям типа $\mathcal{S}_1^0(0)$). Росток (Σ, y) с особенностью типа $\mathcal{S}_0^1(l)$ в точке $y \in V$ является ростком многообразия V для любого l .

Число κ называется *показателем вырожденности* особенности типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$. Множество $(\mathcal{S}_\kappa^p(l))_\Sigma$ точек $y \in V$, в которых стратификация Σ имеет особенность типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$, является гладким подмногообразием коразмерности c в многообразии V (незамкнутым и несвязным, вообще говоря).

4.1.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что каждая пара (\mathcal{H}_i, f) , $i = 1, \dots, p$, имеет особенность типа $B_{\kappa-p+1}$ в начале координат. Действительно,

$$\left. \frac{\partial^j S}{\partial(t + \lambda_i + \dots + \lambda_{p-1})^j} \right|_{t=\lambda_i=\dots=\lambda_{p-1}=0} =$$

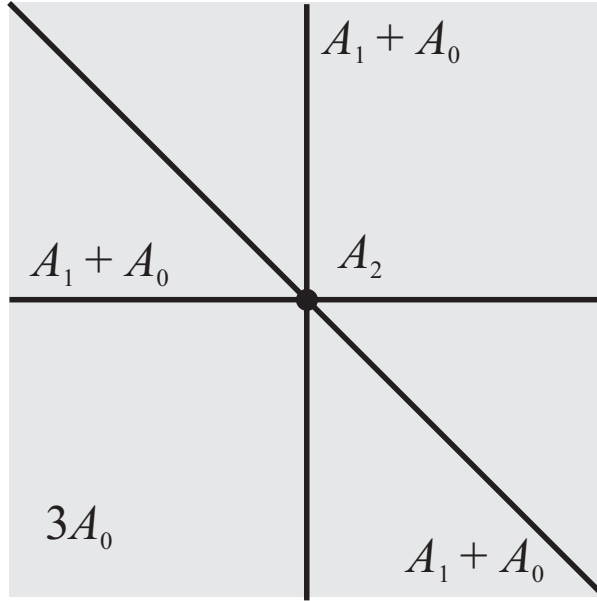


Рис. 1.5: Особенность типа $\mathcal{S}_2^2(0)$ стратификации плоскости.

$$= \frac{\partial^j S}{\partial t^j} \Big|_{t=\lambda_1=\dots=\lambda_{p-1}=0} = \begin{cases} j!, & \text{если } j = \kappa - p + 1; \\ j! \bar{\lambda}_{p+j}, & \text{если } 1 \leq j \leq \kappa - p. \end{cases}$$

Отметим также, что

$$H_i \cap \Pi_{i,j} = H_j \cap \Pi_{i,j}$$

для любых $1 \leq i < j \leq p$.

4.1.5. ПРИМЕР. Пусть росток стратификации двумерного многообразия имеет особенность типа $\mathcal{S}_2^2(0)$. Тогда этот росток диффеоморфен ростку в 0 стратификации плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(\lambda_1, \lambda_2)\}$ относительно набора следующих трех прямых:

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0.$$

Страты этой стратификации изображены на рис. 1.5 (стр. 58). Среди них имеется 1 нульмерный страт, 6 одномерных и 6 двумерных (указанные на рисунке обозначения нужны для примера 4.2.3).

4.1.6. ПРИМЕР. Пусть росток стратификации трехмерного многообразия имеет особенность типа $\mathcal{S}_2^2(1)$. Тогда этот росток диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства $\mathbb{R}^3 = \{(\lambda_1, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,2})\}$ относительно набора следующих подмножеств:

- 1) плоскости $\lambda_{2,2} = 0$;
- 2) прямой $\lambda_{1,2} = -\lambda_1, \lambda_{2,2} = 0$; прямой $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,2} = 0$;
- 3) плоскости $\lambda_1 = 0$.

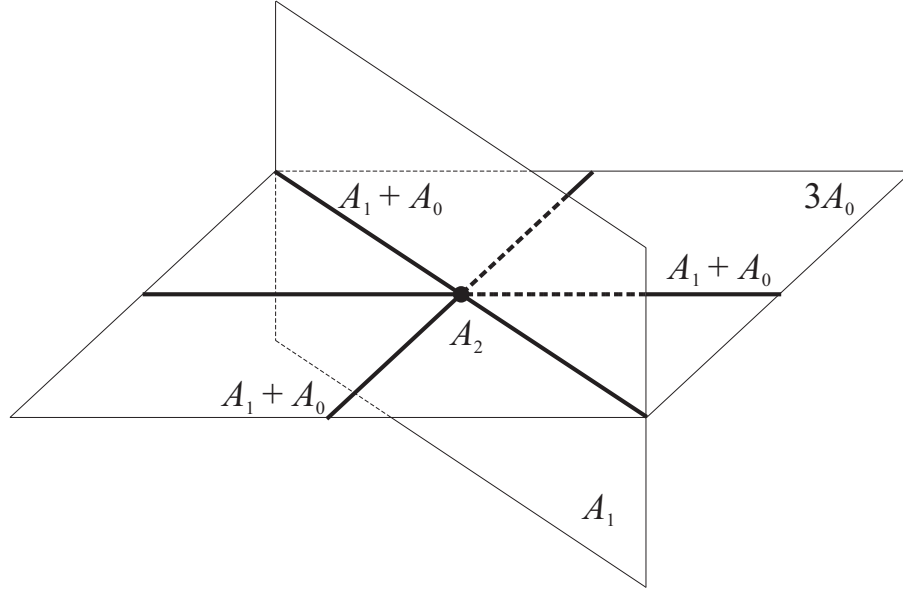


Рис. 1.6: Особенность типа $\mathcal{S}_2^2(1)$ стратификации трехмерного пространства.

Страты положительной коразмерности этой стратификации изображены на рис. 1.6 (стр. 59). Здесь 1 нульмерный страт, 6 одномерных и 8 двумерных (указанные на рисунке обозначения нужны для примера 4.2.4).

4.1.7. ПРИМЕР. Пусть росток стратификации трехмерного многообразия имеет особенность типа $\mathcal{S}_3^2(0)$. Тогда этот росток диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства $\mathbb{R}^3 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\}$ относительно набора следующих гладких поверхностей:

- 1) дискриминанта $\lambda_3^2 + 4\lambda_2 = 0$ квадратного трехчлена $t^2 + \lambda_3 t - \lambda_2$;
- 2) поверхности $\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 = 0$; плоскости $\lambda_2 = 0$;
- 3) плоскости $\lambda_1 = 0$.

В координатах

$$x = \lambda_1 - \frac{\lambda_3}{2}, \quad y = -\frac{\lambda_3}{2}, \quad z = \frac{\lambda_3^2}{4} + \lambda_2$$

эти поверхности задаются уравнениями (соответственно)

$$z = 0, \quad z = x^2, \quad z = y^2, \quad y = x.$$

Их объединение изображено на рис. 1.7 (стр. 60). Имеется 1 нульмерный страт, 10 одномерных и 22 двумерных (указанные на рисунке обозначения нужны для примера 2.4.4 в главе 2).

Зафиксируем l и рассмотрим свободную абелеву полугруппу по сложению с образующими $\mathcal{S}_\kappa^p = \mathcal{S}_\kappa^p(l)$, где κ, p – неотрицательные целые числа, причем $p \leq \kappa + 1$.

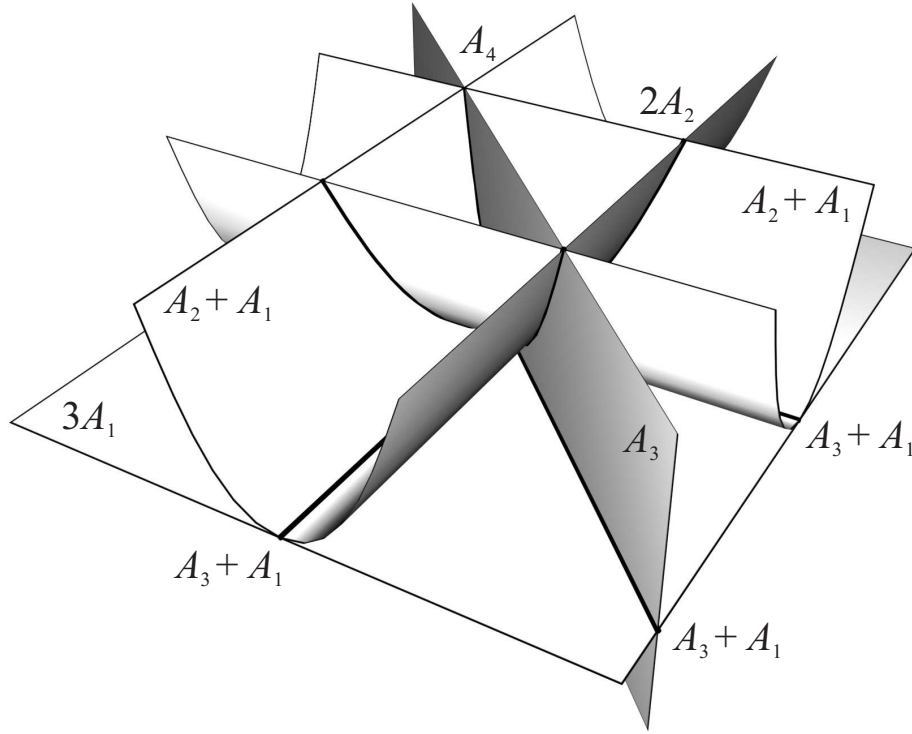


Рис. 1.7: Особенность типа $\mathcal{S}_3^2(0)$ стратификации трехмерного пространства.

4.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что стратификация Σ имеет *особенность типа* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$ в точке $y \in V$, если росток (Σ, y) диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства \mathbb{R}^n относительно набора замкнутых подмножеств $\Sigma_j^i, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, \alpha_i$, таких, что:

- 1) для любого $i = 1, \dots, r$ росток $(\Sigma^i, 0)$ стратификации Σ^i пространства \mathbb{R}^n относительно набора подмножеств $\Sigma_1^i, \dots, \Sigma_{\alpha_i}^i$ имеет особенность типа $\mathcal{S}_{\kappa_i}^{p_i}$ в 0;
- 2) ростки в 0 многообразий $(\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1})_{\Sigma^1}, \dots, (\mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r})_{\Sigma^r}$ пересекаются трансверсально в начале координат.

Числа $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ называются *показателями вырожденности* особенности типа \mathcal{S} . Число

$$\text{codim}_l \mathcal{S} = (l+1) \sum_{i=1}^r \kappa_i - l \sum_{i=1}^r p_i + lr$$

называется *коразмерностью* этой особенности.

Коразмерность особенности не превышает размерности n объемлющего многообразия V . Для любого фиксированного $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$ множество \mathcal{S}_{Σ} точек $y \in V$, в которых стратификация Σ имеет особенность типа \mathcal{S} , является гладким

подмногообразием коразмерности $\text{codim}_l \mathcal{S}$ в V . Связные компоненты многообразия \mathcal{S}_Σ являются стратами стратификации Σ .

4.1.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если C^∞ -стратификация многообразия V имеет лишь особенности типов $\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$, то она является стратификацией Уитни.

Действительно, такая стратификация удовлетворяет обоим условиям Уитни из определения 1.2.2 согласно лемме 1.2.4.

4.2 Особенности канонической стратификации

Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ такой, что $\mathcal{A}_f^\infty \neq \emptyset$, и рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f .

4.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Канонической стратификацией многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ называется его разбиение на связные компоненты (страты) полных прообразов $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(X_f)$ многообразий X_f по всем типам X мультиособенностей отображения f .

Каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является, очевидно, его C^∞ -стратификацией.

4.2.2. ТЕОРЕМА. Для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ имеет лишь особенности типов $\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$, где $\mathcal{S}_{\kappa}^i = \mathcal{S}_{\kappa}^i(l)$.

А именно, пусть $\xi \in \Phi_{\mathcal{A}}$. Предположим, что отображение f имеет мультиособенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ в точке $y = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi)$. Тогда существует отображение

$$\alpha : I = \{1, \dots, p\} \rightarrow J = \{1, \dots, r\}$$

такое, что:

1) для любого $j = 1, \dots, r$, множество $\alpha^{-1}(j)$ состоит из $p_j \geq 0$ элементов и

$$\kappa_j = \nu_j - \sum_{i \in \alpha^{-1}(j)} \mu_i \geq p_j - 1;$$

2) каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ имеет в точке ξ особенность типа

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$$

(коразмерность этой особенности равна $\text{codim}_l X - \text{codim}_l \mathcal{A}$).

Обратно, для любого отображения $\alpha : I \rightarrow J$, удовлетворяющего условию 1, существует точка $\tilde{\xi} \in \varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(y)$, в которой каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ имеет особенность типа \mathcal{S} .

Это утверждение следует из предложения 4.4.4, доказанного в разделе 4.4 ниже.

4.2.3. ПРИМЕР. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – устойчивое гладкое собственное отображение (оно является отображением коранга ≤ 1). Предположим, что f имеет мультиособенность типа A_2 в некоторой точке y пространства \mathbb{R}^2 -образа (такое отображение имеет мультиособенности типа $3A_0$).

Рассмотрим характеристическое многообразие Φ_{2A_0} и характеристическое отображение φ_{2A_0} мультиособенностей типа $2A_0$ отображения f . Каноническая стратификация многообразия Φ_{2A_0} имеет особенность типа $\mathcal{S}_2^2(0)$ в точке $\xi = \varphi_{2A_0}^{-1}(y)$.

Росток этой стратификации в точке ξ диффеоморфен ростку стратификации плоскости на рис. 1.5 (стр. 58). Страты обозначены типами мультиособенностей отображения f в образах соответствующих точек при отображении φ_{2A_0} . Нульмерный страт A_2 примыкает к шести одномерным стратам типа $A_1 + A_0$ и к шести двумерным стратам типа $3A_0$ (геометрический смысл изображенных прямых объяснен в примере 4.4.2).

4.2.4. ПРИМЕР. Пусть $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ – устойчивое гладкое собственное отображение (оно также является отображением коранга ≤ 1). Предположим, что f имеет мультиособенность типа A_2 в некоторой точке $y \in \mathbb{R}^5$.

Рассмотрим характеристическое многообразие Φ_{2A_0} и характеристическое отображение φ_{2A_0} особенностей типа $2A_0$ образа отображения f . Каноническая стратификация многообразия Φ_{2A_0} имеет особенность типа $\mathcal{S}_2^2(1)$ в точке $\xi = \varphi_{2A_0}^{-1}(y)$.

Росток этой стратификации в точке ξ диффеоморфен ростку стратификации трехмерного пространства на рис. 1.6 (стр. 59). Страты положительной коразмерности обозначены здесь типами мультиособенностей отображения f в образах соответствующих точек при отображении φ_{2A_0} . Нульмерный страт A_2 примыкает к шести одномерным стратам типа $A_1 + A_0$ и к восьми двумерным стратам, среди которых 2 страта типа A_1 и 6 стратов типа $3A_0$ (геометрический смысл изображенных прямых и плоскостей объяснен в примере 4.4.3).

4.2.5. ТЕОРЕМА. Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Тогда для любого $A \in \mathbb{A}$ такого, что $A_f^\infty \neq \emptyset$, каноническая стратификация характеристического многообразия Φ_A мультиособенностей типа A отображения f является C^∞ -стратификацией Уитни.

Это утверждение следует из теоремы 4.2.2 и предложения 4.1.9.

4.3 Вспомогательные утверждения

В этом разделе сформулированы некоторые простые алгебраические факты, необходимые для доказательства теоремы 4.2.2.

4.3.1. ЛЕММА.

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{k+i}{i} \binom{r}{p-i} = \binom{r-k-1}{p} \quad (1.5)$$

для любых целых неотрицательных k, p, r таких, что $k+p < r$.

Доказательство заключается в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной t в рядах $(1+t)^{r-k-1}$ и $(1+t)^r(1+t)^{-(k+1)}$.

4.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (1.5) является частным случаем формулы 5.24 в книге [24].

В следующих трех леммах рассматривается многочлен

$$P = e_1 t^d + q_{d-1} t^{d-1} + \dots + q_1 t + q_0$$

от $t \in \mathbb{R}$ с векторными коэффициентами $q_0, \dots, q_{d-1}, e_1 \in \mathbb{R}^{l+1}$, где

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0).$$

4.3.3. ЛЕММА. Пусть t_* – корень уравнения $P - q_0 = 0$. Тогда либо $t_* = 0$, либо t_* – (ненулевой) корень уравнения

$$\frac{P - q_0}{t} = 0$$

той же кратности.

Это утверждение очевидно.

4.3.4. ЛЕММА. Пусть

$$P_\mu = e_1 t^{d-\mu} + \sum_{i=\mu}^{d-1} q_i t^{i-\mu}, \quad \mu = 0, 1, \dots, d.$$

Тогда для любого $\mu < d$ многочлен

$$R_\mu = e_1 v^{d-\mu-1} + \sum_{i=0}^{d-\mu-2} \frac{1}{(i+\mu+1)!} \frac{\partial^{i+\mu+1} P}{\partial t^{i+\mu+1}} v^i$$

от $v \in \mathbb{R}$ можно представить в виде

$$R_\mu = \frac{1}{\mu!} \sum_{k=0}^{d-\mu-1} \frac{\partial^\mu P_{k+1}}{\partial t^\mu} (v+t)^k.$$

В частности, для любых $t_* \neq 0$ и $k = 0, 1, \dots, d-\mu-1$

$$\left. \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \left[\frac{P - (q_k t^k + \dots + q_1 t + q_0)}{t^{k+1}} \right] \right|_{t=t_*} = \frac{\mu!}{k!} \left. \frac{\partial^k R_\mu}{\partial v^k} \right|_{v=-t_*}. \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^k R_\mu}{\partial v^k} \Big|_{v=-t} = \sum_{i=k}^{d-\mu-1} \frac{i!}{(i+\mu+1)!(i-k)!} \frac{\partial^{i+\mu+1} P}{\partial t^{i+\mu+1}} (-t)^{i-k} = \\
& = k! \sum_{i=k}^{d-\mu-1} (-1)^{i-k} \binom{i}{i-k} \left[e_1 \binom{d}{i+\mu+1} t^{d-\mu-k-1} + \sum_{r=i+\mu+1}^{d-1} \binom{r}{i+\mu+1} q_r t^{r-\mu-k-1} \right] = \\
& = k! \left[e_1 t^{d-\mu-k-1} \sum_{i=0}^{d-\mu-k-1} (-1)^i \binom{k+i}{i} \binom{d}{i+\mu+k+1} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{r=\mu+k+1}^{d-1} q_r t^{r-\mu-k-1} \sum_{i=0}^{r-\mu-k-1} (-1)^i \binom{k+i}{i} \binom{r}{i+\mu+k+1} \right].
\end{aligned}$$

Отсюда по формуле (1.5) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k R_\mu}{\partial v^k} \Big|_{v=-t} & = k! \left[\binom{d-k-1}{\mu} e_1 t^{d-\mu-k-1} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{r=\mu+k+1}^{d-1} \binom{r-k-1}{\mu} q_r t^{r-\mu-k-1} \right] = \frac{k!}{\mu!} \frac{\partial^\mu P_{k+1}}{\partial t^\mu}.
\end{aligned}$$

Лемма 4.3.4 доказана.

4.3.5. ЛЕММА. Пусть t_* – ненулевой корень многочлена P . Предположим, что кратность этого корня равна $\mu+1$ и

$$\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \left[\frac{P - (q_k t^k + \dots + q_1 t + q_0)}{t^{k+1}} \right] \Big|_{t=t_*} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r$$

для некоторого целого неотрицательного $r < d - \mu$. Тогда $q_0 = \dots = q_r = 0$.

Действительно, указанные равенства определяют систему линейных однородных уравнений

$$\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \left[\frac{q_k}{t} + \dots + \frac{q_1}{t^k} + \frac{q_0}{t^{k+1}} \right] \Big|_{t=t_*} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r$$

с неизвестными q_0, \dots, q_r . Эта система имеет только тривиальное решение.

4.4 Доказательство теоремы 4.2.2

Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Зафиксируем произвольный ненулевой элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ такой, что $\mathcal{A}_f^\infty \neq \emptyset$.

Рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f . Возьмем произвольную точку ξ на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$.

4.4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть отображение f имеет мультиособенность типа \mathcal{A} в точке $y = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi)$. Тогда

$$\kappa_p = \nu - \sum_{i=1}^p \mu_i \geq p - 1$$

и существуют локальные координаты

$$(t, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p - p - 1}^p, \bar{u}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^m$$

на многообразии M с началом в точке $x = f^{-1}(y)$ и локальные координаты

$$(t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \bar{Q}^p, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{n_p}, \quad n_p = n - \text{codim}_l \mathcal{A},$$

на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ с началом в точке ξ , где

$$t, t_1, \dots, t_{p-1} \in \mathbb{R}, \quad \bar{Q}^p = (Q_1^p, \dots, Q_{\kappa_p - p}^p), \quad Q_i^p = (Q_{1,i}^p, \dots, Q_{l+1,i}^p) \in \mathbb{R}^{l+1},$$

(\bar{z} и \bar{u} – векторы дополнительных переменных) такие, что справедливы следующие утверждения.

1) Для любых $t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \bar{Q}^p, \bar{z}$, достаточно близких к нулю, существует \bar{u} , гладко зависящее от $t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p - p}^p$, такое, что полный прообраз точки

$$\varphi_{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \bar{Q}^p, \bar{z}) \in V$$

относительно отображения f содержит точки

$$(t_0 + \dots + t_i, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p - p - 1}^p, \bar{u}, \bar{z}) \in M, \quad i = 0, \dots, p - 1,$$

где

$$\sum_{i=1}^{p-1} (\nu - \mu_1 - \dots - \mu_i - i + 1)t_i + (\nu + 1)t_0 = \begin{cases} Q_{1, \kappa_p - p}^p, & \text{если } \kappa_p \geq p; \\ 0, & \text{если } \kappa_p = p - 1. \end{cases}$$

2) Росток страта канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ является ростком в нуле страта стратификации пространства \mathbb{R}^{n_p} относительно набора следующих подмножеств:

а) образа $\mathcal{R}(f_{p+1})$ (при $l > 0$) или множества $\mathcal{F}(f_{p+1})$ (при $l = 0$) критических значений отображения $f_{p+1} : \mathbb{R}^{m_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_p}$,

$$(t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p, \bar{z}) \mapsto (t_1, \dots, t_{p-1}, -S_p(t_p, \bar{Q}^p), \bar{Q}^p, \bar{z}),$$

где $m_p = n_p - l$,

$$S_p(t_p, \bar{Q}^p) = e_1 t_p^{\kappa_p - p + 1} + \sum_{i=1}^{\kappa_p - p} Q_i^p t_p^i, \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{l+1}$$

(входит в набор только при $p \leq \kappa_p$, если $l > 0$, и при $p < \kappa_p$, если $l = 0$);

b) p гладких подмногообразий $\mathcal{H}_i^p, i = 1, \dots, p$, где \mathcal{H}_i^p – образ сужения отображения f_{p+1} на гиперплоскость $t_i + \dots + t_p = 0$ (входят в набор только при $p \leq \kappa_p$);

c) $p(p-1)/2$ гиперплоскостей

$$\Pi_{i,j}^p : t_i + \dots + t_{j-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq p$$

(входят в набор только при $p > 1$).

3) Ростки множеств $\mathcal{R}(f_{p+1}), \mathcal{F}(f_{p+1}), \mathcal{H}_i^p, \Pi_{i,j}^p$ в нуле являются полными про-образами ростков множеств

$$\overline{(\mathcal{A} + A_0)_f^\infty}, \quad \overline{(\mathcal{A} + A_1)_f^\infty}, \quad \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1})_f^\infty}, \quad \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1})_f^\infty}$$

в точке y , соответственно, относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проведем индукцию по p . В случае $p = 1$ утверждение следует из предложения 2.3.1. Тем не менее, мы частично повторим рассуждение, чтобы зафиксировать обозначения. Кроме того, мы подробно рассмотрим случай $p = 2$, поскольку здесь появляется новый элемент рассуждения. Наконец, мы будем считать, что $\text{codim}_l A_\nu = n$. Из леммы 2.2.3 следует, что это не ограничит общности наших рассуждений.

СЛУЧАЙ $p = 1$. В подходящих локальных координатах на многообразиях M и V росток отображения f в точке $\xi = x = x_1$ задается формулой

$$(f, x_1) : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t_0, \bar{q}) \mapsto (S(t_0, \bar{q}), \bar{q}),$$

где

$$t_0 \in \mathbb{R}, \quad \bar{q} = (q_{1,1}, \dots, q_{1,\nu-1}; q_{2,1}, \dots, q_{2,\nu}; \dots; q_{l+1,1}, \dots, q_{l+1,\nu}),$$

$$S(t_0, \bar{q}) = \begin{pmatrix} t_0^{\nu+1} + 0 + q_{1,\nu-1} t_0^{\nu-1} + \dots + q_{1,1} t_0 \\ 0 + q_{2,\nu} t_0^\nu + q_{2,\nu-1} t_0^{\nu-1} + \dots + q_{2,1} t_0 \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\nu} t_0^\nu + q_{l+1,\nu-1} t_0^{\nu-1} + \dots + q_{l+1,1} t_0 \end{pmatrix}^*.$$

Росток подмногообразия $\Phi_{A_\mu} \subseteq M$ в этой точке задается уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = \frac{\partial^2 S}{\partial t_0^2} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t_0^\mu} = 0$$

(пример 1.1.9). Набор $(Q_0^1, \dots, Q_{\kappa_1-1}^1) \in \mathbb{R}^{n_1}$, где $\kappa_1 = \nu - \mu_1$, $n_1 = m - \mu_1(l + 1)$ и

$$Q_i^1 = \frac{1}{(i + \mu_1 + 1)!} \frac{\partial^{i+\mu_1+1} S}{\partial t_0^{i+\mu_1+1}}, \quad i = 0, \dots, \kappa_1 - 1,$$

определяет локальные координаты на $\Phi_{A_{\mu_1}}$ (заметим, что первая компонента вектора $Q_{\kappa_1-1}^1$ равна $(\nu + 1)t_0$).

В этих координатах росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_1+1}} \subset \Phi_{A_{\mu_1}}$ в точке x_1 задается уравнением

$$\mathcal{H}_1^1 : Q_0^1 = 0.$$

Набор $(t_1, \bar{Q}^1) \in \mathbb{R}^{m_1}$, где $m_1 = n_1 - l$ и $\bar{Q}^1 = (Q_1^1, \dots, Q_{\kappa_1-1}^1)$, определяет координаты на многообразии $\Phi_{A_{\mu_1+A_0}}$ в окрестности точки $x_2 = (x_1, x_1)$. Росток отображения $f_2 = [A_{\mu_1}](f)$ в точке x_2 задается формулой

$$(f_2, x_2) : (\mathbb{R}^{m_1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n_1}, 0), \quad (t_1, \bar{Q}^1) \mapsto (-S_1(t_1, \bar{Q}^1), \bar{Q}^1),$$

где

$$S_1(t_1, \bar{Q}^1) = e_1 t_1^{\kappa_1} + \sum_{i=1}^{\kappa_1-1} Q_i^1 t_1^i$$

(см. лемму 2.2.2; для любых достаточно малых t_1, \bar{Q}^1 точка $(t_0 + t_1, \bar{q}) \in M$, где \bar{q} гладко зависит от t_1, \bar{Q}^1 , входит в полный прообраз точки $(\varphi_{A_{\mu_1}} \circ f_2)(t_1, \bar{Q}^1)$ относительно отображения f).

Ростки множеств $\mathcal{R}(f_2)$, $\mathcal{F}(f_2)$ и \mathcal{H}_1^1 в нуле являются, очевидно, полными прообразами ростков в точке y множеств $\overline{(A_{\mu_1} + A_0)}_f^\infty$, $\overline{(A_{\mu_1} + A_1)}_f^\infty$ и $\overline{(A_{\mu_1+1})}_f^\infty$, соответственно, относительно ростка отображения $\varphi_{A_{\mu_1}}$ в точке x_1 .

СЛУЧАЙ $p = 2$. Пусть $\Phi_{A_\mu} = \Phi_{A_\mu}^1$ и $\varphi_{A_\mu} = \varphi_{A_\mu}^1$. Через $\Phi_{A_\mu}^2$ и $\varphi_{A_\mu}^2$ обозначим характеристическое многообразие и характеристическое отображение мультиособенностей типа A_μ отображения f_2 , соответственно.

Рассмотрим росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_2}}^2 = \Phi_{A_{\mu_1+A_{\mu_2}}} \subseteq \Phi_{A_0}^2$ в точке $\xi = x_2$. В локальных координатах (t_1, \bar{Q}^1) на многообразии $\Phi_{A_0}^2$ он задается уравнениями

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial t_1^2} = \dots = \frac{\partial^{\mu_2} S_1}{\partial t_1^{\mu_2}} = 0.$$

Набор $(t_1, Q_0^2, \dots, Q_{\kappa_2-2}^2) \in \mathbb{R}^{n_2}$, где $\kappa_2 = \kappa_1 - \mu_2$, $n_2 = m_1 - \mu_2(l + 1)$ и

$$Q_i^2 = \frac{1}{(i + \mu_2 + 1)!} \frac{\partial^{i+\mu_2+1} S_1}{\partial t_1^{i+\mu_2+1}}, \quad i = 0, \dots, \kappa_2 - 2,$$

служит локальными координатами на $\Phi_{A_{\mu_2}}^2$ (заметим, что $Q_{\kappa_2-2}^2 = \kappa_1 t_1 e_1 + Q_{\kappa_1-1}^1$).

В этих координатах росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_2+1}}^2 \subset \Phi_{A_{\mu_2}}^2$ в точке x_2 задается уравнением

$$\mathcal{H}_2^2 : Q_0^2 = 0.$$

Набор $(t_1, t_2, \bar{Q}^2) \in \mathbb{R}^{m_2}$, где $m_2 = n_2 - l$ и $\bar{Q}^2 = (Q_1^2, \dots, Q_{\kappa_2-2}^2)$, определяет координаты на многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}+A_{\mu_2}+A_0}$ в окрестности точки $x_3 = (x_2, x_2)$. Росток отображения $f_3 = [A_{\mu_2}](f_2)$ в точке x_3 задается формулой

$$(f_3, x_3) : (\mathbb{R}^{m_2}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n_2}, 0), \quad (t_1, t_2, \bar{Q}^2) \mapsto (t_1, -S_2(t_2, \bar{Q}^2), \bar{Q}^2),$$

где

$$S_2(t_2, \bar{Q}^2) = e_1 t_2^{\kappa_2-1} + \sum_{i=1}^{\kappa_2-2} Q_i^2 t_2^i$$

(см. лемму 2.2.2; для любых достаточно малых t_1, t_2, \bar{Q}^2 точка $(t_0 + t_1 + t_2, \bar{q}) \in M$, где \bar{q} гладко зависит от t_1, t_2, \bar{Q}^2 , входит в полный прообраз точки $(\varphi_{A_{\mu_1}+A_{\mu_2}} \circ f_3)(t_1, t_2, \bar{Q}^2)$ относительно отображения f).

Теперь рассмотрим в $\Phi_{A_{\mu_2}}^2$ росток в x_2 полного прообраза многообразия \mathcal{H}_1^1 относительно отображения $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$. Согласно лемме 4.3.3 он состоит из двух компонент: ростка гиперплоскости

$$\Pi_{1,2}^2 : t_1 = 0$$

и ростка гладкого подмногообразия, совпадающего с замыканием многообразия

$$\frac{\partial^{\mu_2}}{\partial t_1^{\mu_2}} \left(\frac{S_1}{t_1} \right) = 0.$$

По лемме 4.3.4 (формула (1.6) при $k = 0$ и $\mu = \mu_2$) росток этого замыкания задается уравнением

$$\mathcal{H}_1^2 : Q_0^2 = -S_2|_{t_2=-t_1}.$$

Остается дать инвариантное описание ростков гиперповерхностей $\mathcal{R}(f_3)$, $\mathcal{F}(f_3)$, \mathcal{H}_1^2 , \mathcal{H}_2^2 и $\Pi_{1,2}^2$ в нуле.

Ростки $\mathcal{R}(f_3)$, $\mathcal{F}(f_3)$ и \mathcal{H}_2^2 являются полными прообразами ростков в y множеств

$$\overline{(A_{\mu_1} + A_{\mu_2} + A_0)_f^\infty}, \quad \overline{(A_{\mu_1} + A_{\mu_2} + A_1)_f^\infty} \quad \text{и} \quad \overline{(A_{\mu_1} + A_{\mu_2+1})_f^\infty},$$

соответственно, относительно ростка отображения $\varphi_{A_{\mu_1}+A_{\mu_2}}$ в точке ξ . Это следует из того, что $Q_0^1 \neq 0$ почти во всех точках образов ростков $\mathcal{R}(f_3)$, $\mathcal{F}(f_3)$, \mathcal{H}_2^2 при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ (т.е. отображение $\varphi_{A_{\mu_1}}^1$ является иммерсией почти всюду).

Ростки \mathcal{H}_1^2 и $\Pi_{1,2}^2$ являются полными прообразами ростков в y множеств

$$\overline{(A_{\mu_1+1} + A_{\mu_2})_f^\infty} \quad \text{и} \quad \overline{(A_{\mu_1+\mu_2+1})_f^\infty}$$

соответственно, относительно ростка $(\varphi_{A_{\mu_1}+A_{\mu_2}}, \xi)$. Первое следует из того, что образ ростка \mathcal{H}_1^2 при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ задается уравнением $Q_0^1 = 0$, причем $Q_1^1 \neq 0$ почти всюду на этом образе. Второе вытекает из того, что образ ростка $\Pi_{1,2}^2$ при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ задается уравнениями $Q_0^1 = \dots = Q_{\mu_2}^1 = 0$, причем $Q_{\mu_2+1}^1 \neq 0$ почти во всех его точках.

4.4.2. ПРИМЕР. Рассмотрим отображение f из примера 4.2.3. Ростки множеств $\mathcal{H}_1^2, \mathcal{H}_2^2, \Pi_{1,2}^2$ в точке $x = x_2$ при $\mathcal{A} = 2A_0$ изображены на рис. 1.5 (стр. 58). Они представлены здесь тремя прямыми.

4.4.3. ПРИМЕР. Рассмотрим отображение f из примера 4.2.4. Ростки множеств $\mathcal{R}(f_3), \mathcal{H}_1^2, \mathcal{H}_2^2, \Pi_{1,2}^2$ в точке $x = x_2$ при $\mathcal{A} = 2A_0$ изображены на рис. 1.6 (стр. 59). Множество $\mathcal{R}(f_3)$ представлено здесь горизонтальной плоскостью. Многообразие $\Pi_{1,2}^2$ изображено вертикальной плоскостью. Многообразия \mathcal{H}_1^2 и \mathcal{H}_2^2 представлены прямыми, которые лежат в горизонтальной плоскости и трансверсальны вертикальной.

ШАГ ИНДУКЦИИ. Предположим, что мы выполнили (последовательно) A_{μ_i} -преобразования отображений $f_i, i = 1, \dots, p_0 - 1$ ($f_1 = f$) и доказали предложение 4.4.1 для всех $p < p_0$. Выполним теперь $A_{\mu_{p_0}}$ -преобразование отображения $f_{p_0} = [A_{\mu_{p_0-1}}](f_{p_0-1})$ и докажем утверждение для $p = p_0$. Чтобы сделать обозначения более простыми мы опустим индекс 0 у числа p_0 .

Рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{A_\mu}^p$ и характеристическое отображение $\varphi_{A_\mu}^p$ мультиособенностей типа A_μ отображения f_p . По предположению индукции набор $(t_1, \dots, t_{p-1}, \bar{Q}^{p-1}) \in \mathbb{R}^{m_{p-1}}$, где $\bar{Q}^{p-1} = (Q_1^{p-1}, \dots, Q_{\kappa_{p-1}-p+1}^{p-1})$, $Q_i^{p-1} \in \mathbb{R}^{l+1}$, определяет локальные координаты на многообразии $\Phi_{A_0}^p$ с началом в точке $\xi = x_p = (\varphi_{A_0}^p)^{-1}(x_{p-1})$. Росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_p}}^p = \Phi_{\mathcal{A}} \subseteq \Phi_{A_0}^p$ в точке x_p задается уравнениями

$$\frac{\partial S_{p-1}}{\partial t_{p-1}} = \frac{\partial^2 S_{p-1}}{\partial t_{p-1}^2} = \dots = \frac{\partial^{\mu_p} S_{p-1}}{\partial t_{p-1}^{\mu_p}} = 0,$$

где

$$S_{p-1}(t_{p-1}, \bar{Q}^{p-1}) = e_1 t_{p-1}^{\kappa_{p-1}-p+2} + \sum_{i=1}^{\kappa_{p-1}-p+1} Q_i^{p-1} t_{p-1}^i.$$

Набор $(t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p-p}^p) \in \mathbb{R}^{n_p}$, где $\kappa_p = \kappa_{p-1} - \mu_p$, $n_p = m_{p-1} - \mu_p(l+1)$ и

$$Q_i^p = \frac{1}{(i + \mu_p + 1)!} \frac{\partial^{i+\mu_p+1} S_{p-1}}{\partial t_{p-1}^{i+\mu_p+1}}, \quad i = 0, \dots, \kappa_p - p,$$

служит локальными координатами на $\Phi_{A_{\mu_p}}^p$ (заметим, что $Q_{\kappa_p-p}^p = (\kappa_{p-1}-p+2)t_{p-1}e_1 + Q_{\kappa_{p-1}-p+1}^{p-1}$).

В этих координатах росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_{p+1}}}^p \subset \Phi_{A_{\mu_p}}^p$ в точке x_p задается уравнением

$$\mathcal{H}_p^p : Q_0^p = 0.$$

Набор $(t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p) \in \mathbb{R}^{m_p}$, где $m_p = n_p - l$ и $\bar{Q}^p = (Q_1^p, \dots, Q_{\kappa_p-p}^p)$, определяет координаты на многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}+\dots+A_{\mu_p}+A_0}$ в окрестности точки $x_{p+1} = (x_p, x_p)$. Росток отображения $f_{p+1} = [A_{\mu_p}](f_p)$ в точке x_{p+1} задается формулой

$$(f_{p+1}, x_{p+1}) : (\mathbb{R}^{m_p}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n_p}, 0), \quad (t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p) \mapsto (t_1, \dots, t_{p-1}, -S_p(t_p, \bar{Q}^p), \bar{Q}^p),$$

где

$$S_p(t_p, \bar{Q}^p) = e_1 t_p^{\kappa_p - p + 1} + \sum_{i=1}^{\kappa_p - p} Q_i^p t_p^i$$

(см. лемму 2.2.2; для любых достаточно малых $t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p$ точка $(t_0 + \dots + t_p, \bar{q}) \in M$, где \bar{q} гладко зависит от $t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p$, входит в полный прообраз точки

$$(\varphi_{A_{\mu_1 + \dots + A_{\mu_p}}} \circ f_{p+1})(t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p)$$

относительно отображения f).

Теперь рассмотрим в $\Phi_{A_{\mu_p}}^p$ ростки в x_p полных прообразов многообразий \mathcal{H}_i^{p-1} , $i = 1, \dots, p-1$ и $\Pi_{i,j}^{p-1}$, $1 \leq i < j \leq p-1$ относительно отображения $\varphi_{A_{\mu_p}}^p$. Ростки полных прообразов многообразий $\Pi_{i,j}^{p-1}$ являются ростками в нуле гиперплоскостей

$$\Pi_{i,j}^p : t_i + \dots + t_{j-1} = 0,$$

соответственно. Росток полного прообраза каждого многообразия \mathcal{H}_i^{p-1} состоит из двух компонент (лемма 4.3.3): ростка гиперплоскости

$$\Pi_{i,p}^p : t_i + \dots + t_{p-1} = 0$$

и ростка гладкого подмногообразия, совпадающего с замыканием многообразия

$$\frac{\partial^{\mu_p}}{\partial(t_i + \dots + t_{p-1})^{\mu_p}} \left(\frac{S_{p-1} - S_{p-1}|_{t_i + \dots + t_{p-1} = 0}}{t_i + \dots + t_{p-1}} \right) = 0.$$

По лемме 4.3.4 (формула (1.6) при $k = 0$ и $\mu = \mu_p$) росток этого замыкания задается уравнением

$$H_i^p : Q_0^p = -S_p|_{t_i + \dots + t_p = 0}.$$

Остается только дать инвариантное описание ростков множеств $\mathcal{R}(f_{p+1})$, $\mathcal{F}(f_{p+1})$, \mathcal{H}_i^p , $i = 1, \dots, p$, и $\Pi_{i,j}^p$, $1 \leq i < j \leq p$ в нуле.

Пусть $\phi_\alpha = \varphi_{A_{\mu_{\alpha+1}}}^{\alpha+1} \circ \dots \circ \varphi_{A_{\mu_p}}^p$, где $\alpha = 1, \dots, p-1$. Рассмотрим образы $\phi_\alpha(\mathcal{R}(f_{p+1}))$, $\phi_\alpha(\mathcal{F}(f_{p+1}))$, $\phi_\alpha(\mathcal{H}_i^p)$, $\phi_\alpha(\Pi_{i,j}^p)$ ростков множеств $\mathcal{R}(f_{p+1})$, $\mathcal{F}(f_{p+1})$, \mathcal{H}_i^p , $\Pi_{i,j}^p$ в нуле при отображении ϕ_α .

Легко видеть, что $Q_0^\alpha \neq 0$ для любого α почти во всех точках ростков $\phi_\alpha(\mathcal{R}(f_{p+1}))$ и $\phi_\alpha(\mathcal{F}(f_{p+1}))$ (т.е. отображение $\varphi_{A_{\mu_\alpha}}^\alpha$ является иммерсией почти всюду). Следовательно, ростки $\mathcal{R}(f_{p+1})$ и $\mathcal{F}(f_{p+1})$ являются полными прообразами ростков в y множеств

$$\overline{(\mathcal{A} + A_0)_f^\infty} \quad \text{и} \quad \overline{(\mathcal{A} + A_1)_f^\infty},$$

соответственно, относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ .

Росток \mathcal{H}_i^p является полным прообразом ростка в y множества

$$\overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1})_f^\infty}$$

относительно ростка отображения $(\varphi_{\mathcal{A}}, \xi)$. Это следует из того, что $Q_0^\alpha \neq 0$ для любого $\alpha \neq i$ и $Q_0^\alpha = 0, Q_1^\alpha \neq 0$ при $\alpha = i$ почти всюду на $\phi_\alpha(\mathcal{H}_i^p)$.

Наконец, росток $\Pi_{i,j}^p$ является полным прообразом ростка в u множества

$$\overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i + \mu_j + 1})_f^\infty}$$

(относительно ростка $(\varphi_{\mathcal{A}}, \xi)$). Это вытекает из того, что почти всюду на $\phi_\alpha(\Pi_{i,j}^p)$ справедливо следующее:

- 1) $Q_0^\alpha \neq 0$ для любого $\alpha = j, \dots, p-1$;
- 2) число $t_\alpha = -(t_i + \dots + t_{\alpha-1})$ является ненулевым корнем кратности $\mu_j + 1$ уравнения $Q_0^\alpha = -S_\alpha(t_\alpha, \bar{Q}^\alpha)$ при $\alpha = i+1, \dots, j-1$; в частности $Q_0^\alpha \neq 0$;
- 3) $Q_0^\alpha = \dots = Q_{\mu_j}^\alpha = 0, Q_{\mu_j+1}^\alpha \neq 0$ при $\alpha = i$;
- 4) $Q_0^\alpha \neq 0$ для любого $\alpha = 1, \dots, i-1$.

Свойства 1-4 проверяются последовательно. А именно, свойство 1 очевидно. Свойство 2 доказывается индукцией по убывающему α .

Действительно, при $\alpha = j-1$ свойство 2 справедливо по определению. Предположим, что число $t_\alpha = -(t_i + \dots + t_{\alpha-1})$ является ненулевым корнем кратности $\mu_j + 1$ уравнения $Q_0^\alpha = -S_\alpha(t_\alpha, \bar{Q}^\alpha)$. Тогда по леммам 4.3.4 и 4.3.5 при

$$P = S_{\alpha-1} + Q_0^{\alpha-1}, \quad \mu = \mu_\alpha, \quad R_\mu = S_\alpha + Q_0^\alpha, \quad v = t_\alpha, \quad t_* = t_i + \dots + t_{\alpha-1}, \quad r = \mu_j$$

число $t_{\alpha-1} = -(t_i + \dots + t_{\alpha-2})$ является корнем кратности $\mu_j + 1$ уравнения

$$Q_0^{\alpha-1} = -S_{\alpha-1}(t_{\alpha-1}, \bar{Q}^{\alpha-1}).$$

Если $\alpha > i+1$, то этот корень не равен нулю почти во всех точках ростка $\phi_{\alpha-1}(\Pi_{i,j}^p)$.

Свойство 3 следует из свойства 2 при $\alpha = i+1$ и лемм 4.3.4 и 4.3.5 при

$$P = S_i + Q_0^i, \quad \mu = \mu_{i+1}, \quad R_\mu = S_{i+1} + Q_0^{i+1}, \quad v = t_{i+1}, \quad t_* = t_i, \quad r = \mu_j.$$

Из свойства 3 немедленно следует свойство 4.

Таким образом, предложение 4.4.1 полностью доказано.

4.4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть отображение f имеет мультиособенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ в точке $y = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi)$. Обозначим через x_1, \dots, x_r попарно различные точки из $f^{-1}(y)$ и предположим, что f имеет в этих точках особенности типов $A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_r}$, соответственно. Тогда найдется разбиение

$$I = \bigcup_{j=1}^r I_j$$

множества $I = \{1, \dots, p\}$ на попарно непересекающиеся подмножества I_j такие, что справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $j = 1, \dots, r$ множество I_j состоит из $p_j \geq 0$ чисел, упорядоченных по возрастанию, причем

$$\kappa_j = \nu_j - \sum_{i \in I_j} \mu_i \geq p_j - 1.$$

2) На многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ существуют локальные координаты

$$(\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^r, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{n - \text{codim}_l \mathcal{A}}$$

с началом в точке ξ , где

$$\bar{\Lambda}^j = (\bar{\lambda}_0^j, \Lambda^j), \quad \bar{\lambda}_0^j = (\lambda_{1,0}^j, \dots, \lambda_{l+1,0}^j) \in \mathbb{R}^{l+1},$$

$$\Lambda^j = (q_{1,1}^j, \dots, q_{1,\nu_j-1}^j; q_{2,1}^j, \dots, q_{2,\nu_j}^j; \dots; q_{l+1,1}^j, \dots, q_{l+1,\nu_j}^j) \in \mathbb{R}^{\nu_j(l+1)-1},$$

если $p_j = 0$, и

$$\bar{\Lambda}^j = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_{p_j-1}^j, \bar{\lambda}_{p_j}^j, \Lambda^j), \quad \Lambda^j = (\bar{\lambda}_{p_j+1}^j, \dots, \bar{\lambda}_{\kappa_j}^j), \quad \lambda_i^j \in \mathbb{R}, \quad \bar{\lambda}_i^j \in \mathbb{R}^{l+1},$$

если $p_j > 0$ (\bar{z} – вектор дополнительных переменных), такие, что росток в точке ξ страта канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является ростком в нуле страта стратификации пространства $\mathbb{R}^{n - \text{codim}_l \mathcal{A}}$ относительно набора $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ следующих подмножеств.

Если $p_j = 0$, то Σ_j – образ $\mathcal{R}(f_j)$ (при $l > 0$) или множество критических значений $\mathcal{F}(f_j)$ (при $l = 0$) отображения $f_j : \mathbb{R}^{m - \text{codim}_l \mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^{n - \text{codim}_l \mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned} & (\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^{j-1}; t_j, \Lambda^j; \bar{\Lambda}^{j+1}, \dots, \bar{\Lambda}^r, \bar{z}) \\ & \mapsto (\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^{j-1}; S_j(t_j, \Lambda^j), \Lambda^j; \bar{\Lambda}^{j+1}, \dots, \bar{\Lambda}^r, \bar{z}), \end{aligned}$$

где $t_j \in \mathbb{R}$ и

$$S_j(t_j, \Lambda^j) = \begin{pmatrix} t_j^{\nu_j+1} + 0 + q_{1,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{1,1}^j t_j \\ 0 + q_{2,\nu_j}^j t_j^{\nu_j} + q_{2,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{2,1}^j t_j \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\nu_j}^j t_j^{\nu_j} + q_{l+1,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{l+1,1}^j t_j \end{pmatrix}^*.$$

Если $p_j > 0$, то Σ_j – набор, состоящий из следующих множеств:

а) образа $\mathcal{R}(f_j)$ (при $l > 0$) или множества критических значений $\mathcal{F}(f_j)$ (при $l = 0$) отображения $f_j : \mathbb{R}^{m - \text{codim}_l \mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^{n - \text{codim}_l \mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned} & (\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^{j-1}; \lambda_1^j, \dots, \lambda_{p_j-1}^j, t_j, \Lambda^j; \bar{\Lambda}^{j+1}, \dots, \bar{\Lambda}^r, \bar{z}) \\ & \mapsto (\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^{j-1}; \lambda_1^j, \dots, \lambda_{p_j-1}^j, S_j(t_j, \Lambda^j), \Lambda^j; \bar{\Lambda}^{j+1}, \dots, \bar{\Lambda}^r, \bar{z}), \end{aligned}$$

где $t_j \in \mathbb{R}$ и

$$S_j(t_j, \Lambda^j) = e_1 t_j^{\kappa_j - p_j + 1} + \sum_{i=p_j+1}^{\kappa_j} \bar{\lambda}_i^j t_j^{i-p_j}$$

(входит в набор только при $p_j \leq \kappa_j$, если $l > 0$, и при $p_j < \kappa_j$, если $l = 0$);

b) p_j гладких подмногообразий $\mathcal{H}_i^j, i = 1, \dots, p_j$, где \mathcal{H}_i^j образ сужения отображения f_j на гиперплоскость $t_j = -(\lambda_i^j + \dots + \lambda_{p_j-1}^j)$, если $i < p_j$, и на гиперплоскость $t_j = 0$, если $i = p_j$ (входят в набор только при $p_j \leq \kappa_j$);

c) $p_j(p_j - 1)/2$ гиперплоскостей $\Pi_{i,k}^j$, заданных уравнениями

$$\lambda_i^j + \dots + \lambda_{k-1}^j = 0, \quad 1 \leq i < k \leq p_j$$

(входят в набор только при $p_j > 1$).

3) Ростки множеств $\mathcal{R}(f_j), \mathcal{F}(f_j), \mathcal{H}_i^j, \Pi_{i,k}^j$ в нуле являются полными прообразами ростков множеств

$$\overline{(\mathcal{A}^j + A_0)_{(f, x_j)}^\infty}, \quad \overline{(\mathcal{A}^j + A_1)_{(f, x_j)}^\infty}, \quad \overline{(\mathcal{A}^j - A_{\mu(i,j)} + A_{\mu(i,j)+1})_{(f, x_j)}^\infty}, \\ \overline{(\mathcal{A}^j - A_{\mu(i,j)} - A_{\mu(k,j)} + A_{\mu(i,j)+\mu(k,j)+1})_{(f, x_j)}^\infty}$$

в точке y , соответственно, относительно ростка отображения φ_A в точке ξ . Здесь $\mathcal{A}^j = \sum_{s \in I_j} A_{\mu(s,j)}$, индекс (s, j) является s -м числом в наборе I_j , а (f, x_j) – росток отображения f в точке x_j .

4) Ростки объединений $\bigcup_{j=1}^r \mathcal{R}(f_j)$ и $\bigcup_{j=1}^r \mathcal{F}(f_j)$ в нуле являются полными прообразами ростков множеств

$$\overline{(\mathcal{A} + A_0)_f^\infty} \quad \text{и} \quad \overline{(\mathcal{A} + A_1)_f^\infty}$$

в точке y , соответственно, относительно ростка отображения φ_A в точке ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем предполагать, что $\text{codim}_l X = n$. Из леммы 2.2.3 следует, что это не ограничит общности наших рассуждений.

Итак, как хорошо известно (см. [22]), существуют локальные координаты

$$(\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^r) \in \mathbb{R}^n$$

на многообразии V с началом в точке y , где

$$\bar{Y}^j = (\bar{y}^j, Y^j), \quad \bar{y}^j \in \mathbb{R}^{l+1},$$

$$Y^j = (q_{1,1}^j, \dots, q_{1,\nu_j-1}^j; q_{2,1}^j, \dots, q_{2,\nu_j}^j; \dots; q_{l+1,1}^j, \dots, q_{l+1,\nu_j}^j) \in \mathbb{R}^{\nu_j(l+1)-1},$$

такие, что росток (f, x_j) отображения f в точке $x_j, j = 1, \dots, r$, является ростком в нуле тривиального расширения

$$(\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^{j-1}; t_j, Y_j; \bar{Y}^{j+1}, \dots, \bar{Y}^r) \mapsto (\bar{Y}^1, \dots, \bar{Y}^{j-1}; g_j(t_j, Y_j); \bar{Y}^{j+1}, \dots, \bar{Y}^r)$$

отображения

$$g_j : (t_j, Y^j) \mapsto (S_j(t_j, Y^j), Y^j),$$

где $t_j \in \mathbb{R}$ и

$$S_j(t_j, Y^j) = \begin{pmatrix} t_j^{\nu_j+1} + 0 + q_{1,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{1,1}^j t_j \\ 0 + q_{2,\nu_j}^j t_j^{\nu_j} + q_{2,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{2,1}^j t_j \\ \dots \\ 0 + q_{l+1,\nu_j}^j t_j^{\nu_j} + q_{l+1,\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_{l+1,1}^j t_j \end{pmatrix}^*.$$

Отсюда следует, что существует разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 + \dots + \mathcal{A}^r$, $\mathcal{A}^j \in \mathbb{A}$, и локальные координаты

$$(\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^r) \in \mathbb{R}^{n-\text{codim}_l \mathcal{A}}, \quad \bar{\Lambda}^j \in \mathbb{R}^{\nu_j(l+1)+l-\text{codim}_l \mathcal{A}^j},$$

на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ с началом в точке ξ такие, что росток в ξ страта канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является ростком в нуле пересечения подмножеств $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ в $\mathbb{R}^{n-\text{codim}_l \mathcal{A}}$, которые определяются следующим образом:

если $\mathcal{A}^j = 0$, то $\bar{\Lambda}^j = \bar{Y}^j$; множество Δ_j – цилиндр, у которого направляющей служит многообразие мультиособенностей типа A_{ν_j} отображения g_j (в $\{\bar{\Lambda}^j\}$ -пространстве), а образующие задаются уравнениями $\bar{\Lambda}^j = \text{const}$;

если $\mathcal{A}^j \neq 0$, то $\bar{\Lambda}^j$ – локальные координаты на характеристическом многообразии Φ^j мультиособенностей типа \mathcal{A}^j отображения g_j ; множество Δ_j – цилиндр, у которого направляющей служит росток в нуле страта канонической стратификации многообразия Φ^j , а образующие задаются уравнениями $\bar{\Lambda}^j = \text{const}$.

Теперь предложение 4.4.4 следует из предложения 4.4.1.

Теорема 4.2.2 является следствием предложения 4.4.4.

5 Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1

Пусть Σ - конечномерное клеточное пространство. Предположим, что оно имеет конечно порожденные группы целочисленных гомологий с компактными носителями. Тогда эйлеровой характеристикой $\chi(\Sigma)$ пространства Σ называется сумма

$$\chi(\Sigma) = \sum_i (-1)^i b_i(\Sigma),$$

где $b_i(\Sigma)$ - ранг i -й группы его гомологий (i -е число Бетти).

В частности, пусть Σ - компактное подмножество гладкого многообразия. Предположим, что это множество допускает конечную C^∞ -стратификацию Уитни $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$. Тогда определена эйлерова характеристика множества Σ и каждого его страта $\Sigma_i, i = 1, \dots, k$. Более того, имеет место формула

$$\chi(\Sigma) = \sum_{i=1}^k (-1)^{\dim \Sigma_i} \chi(\Sigma_i) \quad (1.7)$$

(см., например, [85]). Эта формула лежит в основе теории [21] интегрирования по эйлеровой характеристике.

5.1 Основная формула

Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ - устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 , где $l = n - m \geq 0$. Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ такой, что

$$\text{codim}_l \mathcal{A} = (l + 1) \sum_{i=1}^p \mu_i + pl \leq n.$$

Рассмотрим многообразие \mathcal{A}_f мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f и объединение \mathcal{A}_f^∞ многообразий $(\mathcal{A} + kA_0)_f$ по всем целым $k \geq 0$. Возьмем замыкания $\overline{\mathcal{A}_f}$ и $\overline{\mathcal{A}_f^\infty}$ многообразий \mathcal{A}_f и \mathcal{A}_f^∞ в объемлющем многообразии V .

Предположим, что $\mathcal{A}_f^\infty \neq \emptyset$, и рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f . Если множество $\overline{\mathcal{A}_f^\infty}$ компактно, то многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ замкнуто и определена эйлерова характеристика $\chi_f(X) = \chi(X_f)$ многообразия X_f мультиособенностей любого типа $X \in \mathbb{A}$ такого, что $X_f \subseteq \overline{\mathcal{A}_f^\infty}$.

5.1.1. ТЕОРЕМА. Пусть $l > 0$ и множество $\overline{\mathcal{A}_f}$ компактно. Тогда эйлерова характеристика $\chi(\Phi_{\mathcal{A}})$ характеристического многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ особенностей типа \mathcal{A}

образа отображения f вычисляется через эйлеровы характеристики $\chi_f(X)$ многообразий X_f , $X \in \mathbb{A}$ особенностей, примыкающих к особенностям типа \mathcal{A} , по формуле

$$(-1)^{\text{codim}_l \mathcal{A}} \chi(\Phi_{\mathcal{A}}) = \sum_X (-1)^{\text{codim}_l X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi_f(X). \quad (1.8)$$

5.1.2. ТЕОРЕМА. Пусть $l = 0$ и множество $\overline{\mathcal{A}_f^\infty}$ компактно. Тогда эйлерова характеристика $\chi(\Phi_{\mathcal{A}})$ характеристического многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f вычисляется через эйлеровы характеристики $\chi_f(X)$ многообразий X_f , $X \in \mathbb{A}$ мультиособенностей, примыкающих к мультиособенностям типов $\mathcal{A} + kA_0$, где $k \geq 0$, по формуле (1.8).

Эти утверждения следуют из теорем 3.1.2, 3.1.7, 4.2.5 и формулы (1.7).

5.1.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $l > 0$, многообразие \mathcal{A}_f имеет нечетную размерность и множество $\overline{\mathcal{A}_f}$ компактно. Тогда эйлеровы характеристики $\chi_f(X)$ многообразий X_f , $X \in \mathbb{A}$ особенностей образа отображения f , примыкающих к особенностям типа \mathcal{A} , связаны соотношением

$$\sum_X (-1)^{\text{codim}_l X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi_f(X) = 0. \quad (1.9)$$

5.1.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $l = 0$, многообразие \mathcal{A}_f^∞ имеет нечетную размерность и множество $\overline{\mathcal{A}_f^\infty}$ компактно. Тогда эйлеровы характеристики $\chi_f(X)$ многообразий X_f , $X \in \mathbb{A}$ мультиособенностей отображения f , примыкающих к мультиособенностям типов $\mathcal{A} + kA_0$, где $k \geq 0$, связаны соотношением (1.9).

Эти утверждения следуют из теорем 5.1.1, 5.1.2 и того факта, что при указанных условиях $\chi(\Phi_{\mathcal{A}}) = 0$ (эйлерова характеристика любого гладкого замкнутого нечетномерного многообразия равна нулю).

5.1.5. ПРИМЕР. Рассмотрим устойчивое гладкое отображение $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 , где M – замкнутое многообразие и $l = n - m > 0$.

1) Граница многообразия особенностей типа A_0 множества $f(M)$ состоит из всех особенностей коразмерности больше l (см. пример 1.3.4). Поэтому для любого нечетного m формула (1.9) и теорема 3.2.5 приводят к следующему соотношению между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей множества $f(M)$:

$$\chi_f(A_0) = (-1)^{l+1} \sum_{\text{codim}_l X > l} (-1)^{\text{codim}_l X} r(X) \chi_f(X),$$

где $r(X)$ – число r неприводимых компонент у особенностей типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$.

2) Граница многообразия особенностей типа $2A_0$ состоит из всех особенностей коразмерности больше $2l$. Поэтому для любого нечетного $n \geq 3$ имеем:

$$2\chi_f(2A_0) = - \sum_{\text{codim}_l X > 2l} (-1)^{\text{codim}_l X} [r^2(X) - \#(A_0|X)] \chi_f(X).$$

Здесь $\#(A_0|A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$ – количество индексов $i \in \{1, \dots, r\}$ таких, что $\nu_i = 0$.

5.1.6. ПРИМЕР. Пусть $f : M^n \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 и M – замкнутое многообразие. Тогда для любого нечетного n и для любого целого $k > 0$ формула (1.9) (при $\mathcal{A} = kA_0$) и пример 3.2.7 приводят к следующему соотношению между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображения f :

$$k! \sum_{r \geq k} \binom{r}{k} \chi_f(rA_0) = - \sum_{\text{codim } X > 0, \text{ deg } X \geq k} (-1)^{\text{codim } X} I_{kA_0}(X) \chi_f(X).$$

Если многообразии V замкнуто, то это равенство верно и при $k = 0$.

В дальнейшем, ради упрощения громоздких выражений в таких формулах, мы используем более простое обозначение для эйлеровой характеристики $\chi_f(X)$ многообразия X_f . А именно, эйлерова характеристика многообразия $(k_1A_{\mu_1} + \dots + k_pA_{\mu_p})_f$, где k_1, \dots, k_p неотрицательные целые числа, а μ_1, \dots, μ_p попарно различны, обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$.

5.2 Вычисление линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образа отображения в пространство бóльшей размерности

Далее через $\langle l \rangle \in \mathbb{Z}_2$ обозначается класс вычетов по модулю 2 в кольце целых чисел, содержащий число l .

5.2.1. ТЕОРЕМА. Пусть $f : M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , многообразии M замкнуто и $l = n - m > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ такого, что многообразии \mathcal{A}_f особенностей типа \mathcal{A} образа отображения f имеет нечетную размерность, эйлерова характеристика $\chi_f(\mathcal{A})$ многообразия \mathcal{A}_f является линейной комбинацией

$$\chi_f(\mathcal{A}) = \sum_X K_{\mathcal{A}}^{(\langle l \rangle)}(X) \chi_f(X) \quad (1.10)$$

(с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_f(X)$ четномерных многообразий X_f особенностей типов $X \in \mathbb{A}$, у которых $\text{codim}_l X \in [\text{codim}_l \mathcal{A} + 1, n]$. Если многообразии V замкнуто, то это соотношение справедливо и для $\mathcal{A} = 0$.

2) Каждый коэффициент $K_{\mathcal{A}}^{(\langle l \rangle)}(X)$ в формуле (1.10) зависит только от \mathcal{A} , X и от четности числа l (т.е. не зависит от f и топологии многообразий M, V). А именно,

$$K_{\mathcal{A}}^{(\langle l \rangle)}(X) = \sum_{i=0}^s (-1)^i P_i^{(\langle l \rangle)}(\mathcal{A}, X), \quad (1.11)$$

где $s = (\text{codim}_l X - \text{codim}_l \mathcal{A} - 1)/2$, а $P_i^{(l)}(\mathcal{A}, X)$ равно сумме произведений вида

$$\prod_{j=0}^i \frac{I_{Y_j}(Y_{j+1})}{I_{Y_j}(Y_j)}$$

по всем упорядоченным наборам $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{i+1})$ элементов полугруппы \mathbb{A} таким, что $Y_0 = \mathcal{A}, Y_{i+1} = X$ и

$$\text{codim}_l \mathcal{A} < \text{codim}_l Y_1 < \dots < \text{codim}_l Y_i < \text{codim}_l X,$$

$$\text{codim}_l Y_1 \equiv \dots \equiv \text{codim}_l Y_i \equiv \text{codim}_l \mathcal{A} \pmod{2}.$$

3) Для любых \mathcal{A} и X таких, что $\text{codim}_l X$ превышает $\text{codim}_l \mathcal{A}$ на нечетное положительное число, существует целое $r \geq 0$ такое, что число $K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)2^r$ целое.

4) Списки формул (1.10) для всевозможных $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ при небольших значениях $s = \text{codim}_l \mathcal{A}$ приведены в следующих таблицах: в таблице 1 при $s \leq 6l + 2$ в случае нечетного l и нечетного $n \leq 6l + 3$; в таблице 2 при $s \leq 7l + 2$ в случае четного l и нечетного $n \leq 7l + 3$; в таблице 3 при $s \leq 6l + 1$ в случае нечетного l и четного $n \leq 6l + 2$; в таблице 4 при $s \leq 7l + 3$ в случае четного l и четного $n \leq 7l + 4$.

5) Эйлерова характеристика $\chi(f(M))$ образа отображения f является линейной комбинацией

$$\chi(f(M)) = \sum_X \mathcal{K}^{(l)}(X) \chi_f(X) \quad (1.12)$$

эйлеровых характеристик $\chi_f(X)$ четномерных многообразий X_f особенностей типов $X \in \mathbb{A}$, где $\text{codim}_l X \leq n$. Каждый коэффициент $\mathcal{K}^{(l)}(X)$ этой комбинации зависит только от X и от четности числа l . А именно,

$$\mathcal{K}^{(l)}(X) = 1 - \sum_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X),$$

где сумма берется по всем ненулевым элементам \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A} таким, что $\text{codim}_l \mathcal{A} < \text{codim}_l X$ и $\text{codim}_l \mathcal{A} \equiv n + 1 \pmod{2}$.

6) Формула (1.12) имеет следующий вид:

при нечетном l и нечетном $n \leq 6l + 3$,

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & \chi_{(0)}^{(1)} + \frac{1}{2}[\chi_{(1)}^{(1)} - 4\chi_{(0)}^{(3)}] + \chi_{(2)}^{(1)} + \chi_{(1,0)}^{(1,2)} + 16\chi_{(0)}^{(5)} \\ & - \frac{1}{4}[3\chi_{(3)}^{(1)} + 32\chi_{(2,0)}^{(1,2)} + 18\chi_{(1,0)}^{(2,1)} + 128\chi_{(1,0)}^{(1,4)} + 1088\chi_{(0)}^{(7)}] \\ & + \frac{1}{4}[38\chi_{(4)}^{(1)} + 176\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 128\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 89\chi_{(1)}^{(3)} \\ & + 928\chi_{(2,0)}^{(1,4)} + 624\chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 4384\chi_{(1,0)}^{(1,6)} + 31744\chi_{(0)}^{(9)}]; \end{aligned} \quad (1.13)$$

при четном l и нечетном $n \leq 7l + 3$,

$$\chi(f(M)) = \frac{1}{2}\chi_{(1)}^{(1)} + \frac{1}{4}[\chi_{(3)}^{(1)} - \chi_{(1)}^{(3)} + \chi_{(5)}^{(1)}]; \quad (1.14)$$

при нечетном l и четном $n \leq 6l + 2$,

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & -\chi_{(0)}^{(2)} + 5\chi_{(0)}^{(4)} - 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} - \chi_{(1)}^{(2)} - 6\chi_{(1,0)}^{(1,3)} - 61\chi_{(0)}^{(6)} \\ & + 7\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 5\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 40\chi_{(2,0)}^{(1,3)} \\ & + 25\chi_{(1,0)}^{(2,2)} + 180\chi_{(1,0)}^{(1,5)} + 1385\chi_{(0)}^{(8)}; \end{aligned} \quad (1.15)$$

при четном l и четном $n \leq 7l + 4$,

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & \chi_{(0)}^{(1)} + \chi_{(0)}^{(2)} + \chi_{(0)}^{(3)} + \chi_{(0)}^{(4)} - \chi_{(1)}^{(2)} + \chi_{(0)}^{(5)} - \chi_{(1,0)}^{(2,1)} + \chi_{(0)}^{(6)} \\ & + \chi_{(4)}^{(1)} - \chi_{(1,0)}^{(2,2)} + \chi_{(0)}^{(7)} + \chi_{(4,0)}^{(1,1)} + \chi_{(3,1)}^{(1,1)} + \chi_{(2)}^{(2)} - \chi_{(1,0)}^{(2,3)} + \chi_{(0)}^{(8)} \\ & + \chi_{(4,0)}^{(1,2)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)} + \chi_{(2,0)}^{(2,1)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,2)} - \chi_{(1,0)}^{(2,4)} + \chi_{(0)}^{(9)}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (1.1) и напомним соотношение (1.9) для каждого типа \mathcal{A} особенностей образа отображения f такого, что многообразие \mathcal{A}_f особенностей этого типа имеет нечетную размерность. В результате получится система однородных линейных уравнений, неизвестными которой являются эйлеровы характеристики всех многообразий особенностей множества $f(M)$.

Эта система легко представляется в треугольном виде относительно эйлеровых характеристик нечетномерных многообразий особенностей (необходимо лишь правильно занумеровать уравнения и неизвестные). Следовательно, эти эйлеровы характеристики линейно выражаются через остальные. Формулы, приведенные в пунктах 4 и 6 теоремы 5.2.1, получены путем решения указанной системы на компьютере с использованием пакета программ "Mathematica".

Доказательство утверждения 3 приведено в конце раздела 5.5.

5.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть выполнены условия теоремы 5.2.1, многообразие M имеет четную размерность и $\chi(M)$ – его эйлерова характеристика. Тогда эйлерова характеристика $\chi_f(A_0)$ многообразия $(A_0)_f$ неособых точек образа отображения f равна сумме $\chi(M)$ и линейной комбинации (с коэффициентами, не зависящими от M, V и f) эйлеровых характеристик четномерных многообразий особенностей множества $f(M)$, коразмерность которых выше l (теорема 5.1.1 при $\mathcal{A} = A_0$). Поэтому формулы (1.13) и (1.16) можно переписать, соответственно, в виде

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & \chi(M) + \frac{1}{2}[\chi_{(1)}^{(1)} + 2\chi_{(0)}^{(3)}] - \chi_{(1,0)}^{(1,2)} - 9\chi_{(0)}^{(5)} \\ & + \frac{1}{4}[5\chi_{(3)}^{(1)} + 20\chi_{(2,0)}^{(1,2)} + 10\chi_{(1,0)}^{(2,1)} + 80\chi_{(1,0)}^{(1,4)} + 620\chi_{(0)}^{(7)}] \\ & - \frac{1}{4}[22\chi_{(4)}^{(1)} + 112\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 80\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 55\chi_{(1)}^{(3)} + 564\chi_{(2,0)}^{(1,4)} \\ & + 372\chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 2584\chi_{(1,0)}^{(1,6)} + 18116\chi_{(0)}^{(9)}] \end{aligned} \quad (1.17)$$

(напомним, что здесь l и n нечетные, $n \leq 6l + 3$) и

$$\begin{aligned}
\chi(f(M)) = & \chi(M) - \chi_{(0)}^{(2)} - 2\chi_{(0)}^{(3)} + \chi_{(2)}^{(1)} - 3\chi_{(0)}^{(4)} + \chi_{(2,0)}^{(1,1)} + \chi_{(1)}^{(2)} - 4\chi_{(0)}^{(5)} \\
& + \chi_{(2,0)}^{(1,2)} + 2\chi_{(1,0)}^{(2,1)} - 5\chi_{(0)}^{(6)} - 2\chi_{(4)}^{(1)} + \chi_{(2,0)}^{(1,3)} + 3\chi_{(1,0)}^{(2,2)} - 6\chi_{(0)}^{(7)} \\
& - 3\chi_{(4,0)}^{(1,1)} - 4\chi_{(3,1)}^{(1,1)} - 3\chi_{(2)}^{(2)} + \chi_{(2,0)}^{(1,4)} + 4\chi_{(1,0)}^{(2,3)} - 7\chi_{(0)}^{(8)} \\
& - 4\chi_{(4,0)}^{(1,2)} - 5\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)} - 4\chi_{(2,0)}^{(2,1)} - 7\chi_{(2,1)}^{(1,2)} \\
& + \chi_{(2,0)}^{(1,5)} + 5\chi_{(1,0)}^{(2,4)} - 8\chi_{(0)}^{(9)}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

(здесь l и n четные, $n \leq 7l + 4$).

5.2.3. ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 3, l = 1$ равенство (1.17) дает известную формулу Изумии-Марара [73]:

$$\chi(f(M)) = \chi(M) + \frac{1}{2}\chi_f(A_1) + \chi_f(3A_0).$$

5.3 Вычисление линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображения многообразий одинаковой размерности

Пусть $f : M^n \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга ≤ 1 . Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ такой, что

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p \leq n.$$

Если M – замкнутое многообразие, то существует максимум d_f числа точек в полном прообразе $f^{-1}(y)$ по всем $y \in V$. В этом случае степень

$$\text{deg } \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$$

мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f не превосходит d_f .

5.3.1. ТЕОРЕМА. Пусть $f : M^n \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , где M – замкнутое многообразие. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ такого, что многообразие \mathcal{A}_f мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f имеет нечетную размерность, эйлерова характеристика $\chi_f(\mathcal{A})$ многообразия \mathcal{A}_f является линейной комбинацией

$$\chi_f(\mathcal{A}) = \sum_X K_{\mathcal{A}}^0(X) \chi_f(X) \tag{1.19}$$

(с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_f(X)$ четномерных многообразий X_f мультиособенностей типов $X \in \mathbb{A}$, у которых $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$ и $\text{deg } X \in [\text{deg } \mathcal{A}, d_f]$. Если многообразие V замкнуто, то указанное соотношение справедливо и для $\mathcal{A} = 0$.

2) Каждый коэффициент $K_{\mathcal{A}}^0(X)$ в формуле (1.19) зависит только от \mathcal{A} и X (т.е. не зависит от f и топологии многообразий M, V). А именно,

$$K_{\mathcal{A}}^0(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i P_i^0(\mathcal{A}, X), \quad (1.20)$$

где $P_i^0(\mathcal{A}, X)$ равно сумме произведений вида

$$\prod_{j=0}^i \frac{I_{Y_j}(Y_{j+1})}{I_{Y_j}(Y_j)}$$

по всем упорядоченным наборам $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{i+1})$ элементов полугруппы \mathbb{A} таким, что $Y_0 = \mathcal{A}, Y_{i+1} = X$,

$$\text{codim } \mathcal{A} \leq \text{codim } Y_1 \leq \dots \leq \text{codim } Y_i < \text{codim } X,$$

$$\text{codim } Y_1 \equiv \dots \equiv \text{codim } Y_i \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2},$$

$$\text{deg } \mathcal{A} \leq \text{deg } Y_1 \leq \dots \leq \text{deg } Y_i \leq \text{deg } X,$$

причем если $\text{codim } Y_{j+1} = \text{codim } Y_j$ для некоторого $j = 0, \dots, i-1$, то найдется целое положительное $k \leq \text{deg } Y_{j+2} - \text{deg } Y_j$ такое, что $Y_{j+1} = Y_j + kA_0$.

3) Для любых \mathcal{A} и X таких, что $\text{codim } X$ превышает $\text{codim } \mathcal{A}$ на нечетное положительное число, существует целое $r \geq 0$ такое, что число $K_{\mathcal{A}}^0(X)2^r$ целое. Кроме того,

$$K_{\mathcal{A}+kA_0}^0(X + kA_0) = K_{\mathcal{A}}^0(X)$$

при всех целых $k \geq 0$.

4) Списки формул (1.19) для всевозможных $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ при $s = \text{codim } \mathcal{A} \leq 5$ приведены в таблице 5 для нечетного $n \leq 5$ и в таблице 6 для четного $n \leq 6$.

5) Эйлерова характеристика $\chi(f(M))$ образа отображения f является линейной комбинацией

$$\chi(f(M)) = \sum_X \mathcal{K}^0(X) \chi_f(X) \quad (1.21)$$

эйлеровых характеристик $\chi_f(X)$ четномерных многообразий X_f мультиособенностей типов $X \in \mathbb{A}$, где $\text{codim } X \leq n$, а $\text{deg } X \leq d_f$. Каждый коэффициент $\mathcal{K}^0(X)$ этой комбинации зависит только от X . А именно,

$$\mathcal{K}^0(X) = 1 - \sum_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{A}}^0(X),$$

где сумма берется по всем ненулевым элементам \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A} таким, что $\text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } X$, $\text{deg } \mathcal{A} \leq \text{deg } X$ и $\text{codim } \mathcal{A} \equiv n + 1 \pmod{2}$.

6) Формула (1.21) имеет следующий вид:

при нечетном $n \leq 5$,

$$\chi(f(M)) = \frac{1}{2}\chi(1) - \frac{1}{4} [\chi(3) - \chi(3)] + \frac{1}{4} [2\chi(5) + \chi(5)]; \quad (1.22)$$

при четном $n \leq 6$,

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & \sum_{k \geq 1} \chi(0^k) + \sum_{k \geq 0} \left[-\chi(1,0^{2,k}) \right. \\ & + 5\chi(1,0^{4,k}) + 2\chi(2,1,0^{1,2,k}) + \chi(2,0^{2,k}) + \chi(3,1,0^{1,1,k}) + \chi(4,0^{1,k}) \\ & - 61\chi(1,0^{6,k}) - 28\chi(2,1,0^{1,4,k}) - 13\chi(2,2,1,0^{2,2,k}) - 6\chi(3,0^{3,k}) \\ & - 17\chi(3,1,0^{1,3,k}) - 8\chi(3,2,1,0^{1,1,1,k}) - 5\chi(3,0^{2,k}) - 11\chi(4,1,0^{1,2,k}) \\ & \left. - 5\chi(4,2,0^{1,1,k}) - 7\chi(5,1,0^{1,1,k}) - 4\chi(6,0^{1,k}) \right] \end{aligned} \quad (1.23)$$

(значения k в суммах справа не превышают d_f).

Всё в этой теореме, кроме утверждения 3, получается при помощи формул (1.2) и (1.9) аналогично теореме 5.2.1. Доказательство утверждения 3 приведено в конце раздела 5.5.

5.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Если многообразия V замкнуто, то

$$\chi(V) = \chi(V \setminus f(M)) + (-1)^n \chi(f(M)).$$

Поэтому формула (1.22) получается из формулы для $\chi(0^k)$ в таблице 5 при $k = 0$.

5.3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть выполнены условия теоремы 5.3.1 и n четное. Тогда эйлерова характеристика $\chi(M)$ многообразия M является линейной комбинацией эйлеровых характеристик четномерных многообразий мультиособенностей отображения f с коэффициентами, не зависящими от M, V и f (теорема 5.1.2). В частности, при $n \leq 6$ из формул таблицы 6 получаем:

$$\begin{aligned} \chi(M) = & \sum_{k \geq 1} k\chi(0^k) + \sum_{k \geq 0} \left[-(k+2)\chi(1,0^{2,k}) - \chi(2,0^{1,k}) \right. \\ & + (5k+20)\chi(1,0^{4,k}) + (2k+9)\chi(2,1,0^{1,2,k}) + (k+4)\chi(2,0^{2,k}) \\ & + (k+5)\chi(3,1,0^{1,1,k}) + (k+3)\chi(4,0^{1,k}) \\ & - (61k+366)\chi(1,0^{6,k}) - (28k+173)\chi(2,1,0^{1,4,k}) - (13k+82)\chi(2,2,1,0^{2,2,k}) \\ & - (6k+39)\chi(2,0^{3,k}) - (17k+101)\chi(3,1,0^{1,3,k}) - (8k+48)\chi(3,2,1,0^{1,1,1,k}) \\ & - (5k+28)\chi(3,0^{2,k}) - (11k+61)\chi(4,1,0^{1,2,k}) - (5k+29)\chi(4,2,0^{1,1,k}) \\ & \left. - (7k+36)\chi(5,1,0^{1,1,k}) - (4k+21)\chi(6,0^{1,k}) \right] \end{aligned} \quad (1.24)$$

(значения k в суммах справа не превышают d_f). Используя формулу (1.24), можно переписать (1.23) в виде:

$$\begin{aligned}
\chi(f(M)) = & \chi(M) - \sum_{k \geq 2} (k-1)\chi_{(0)}^{(k)} + \sum_{k \geq 0} \left[(k+1)\chi_{(1,0)}^{(2,k)} + \chi_{(2,0)}^{(1,k)} \right. \\
& - (5k+15)\chi_{(1,0)}^{(4,k)} - (2k+7)\chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k)} - (k+3)\chi_{(2,0)}^{(2,k)} \\
& - (k+4)\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k)} - (k+2)\chi_{(4,0)}^{(1,k)} \\
& + (61k+305)\chi_{(1,0)}^{(6,k)} + (28k+145)\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k)} \\
& + (13k+69)\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k)} + (6k+33)\chi_{(2,0)}^{(3,k)} \\
& + (17k+84)\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k)} + (8k+40)\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k)} \\
& + (5k+23)\chi_{(3,0)}^{(2,k)} + (11k+50)\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k)} \\
& \left. + (5k+24)\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k)} + (7k+29)\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)} + (4k+17)\chi_{(6,0)}^{(1,k)} \right].
\end{aligned} \tag{1.25}$$

5.3.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим произвольное четное $l > 0$. Тогда

$$K_{\mathcal{A}}^0(X) = K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)$$

при всех \mathcal{A} и X таких, что $\text{codim } X$ превышает $\text{codim } \mathcal{A}$ на нечетное положительное число. В частности, для чисел $K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)$ также справедлива вторая часть утверждения 3 теоремы 5.3.1. Все это следует из того, что если \mathcal{A} и X фиксированы, а размерность n достаточно большая, то числа $K_{\mathcal{A}}^0(X), K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)$ определяются из систем линейных уравнений (1.9) с помощью одинаковых миноров матриц коэффициентов при неизвестных (при подходящей нумерации уравнений и неизвестных).

Аналогично,

$$\mathcal{K}^0(X) = \mathcal{K}^{(l)}(X)$$

для всех $X \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. Поэтому формулы (1.14), (1.16) и (1.18) следуют из формул (1.22), (1.23) и (1.25), соответственно. Формулы в таблицах 2 и 4 следуют из соответствующих формул таблиц 5 и 6.

5.4 Некоторые соотношения по модулю 2 между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображения многообразий одинаковой размерности

Пусть $f : M^n \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , причем многообразии M замкнуто. Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = k_1 A_{\mu_1} + \dots +$

$k_p A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$, где μ_1, \dots, μ_p – попарно различные положительные целые числа. Через $\#(A_\mu | \mathcal{A})$, как обычно, обозначим число слагаемых в \mathcal{A} , равных A_μ .

Предположим, что $\text{codim } \mathcal{A} = n - 1$. Тогда для любого неотрицательного целого k формула (1.19) приводит к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
\chi_f(\mathcal{A} + kA_0) &= \frac{1}{2}[\#(A_1 | \mathcal{A}) + 1][\chi_f(\mathcal{A} + A_1 + (k-2)A_0) + \chi_f(\mathcal{A} + A_1 + kA_0)] \\
&+ \sum_{k_i > 0} [\#(A_{\mu_i+1} | \mathcal{A}) + 1] \chi_f(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1} + (k-1)A_0) \\
&+ \sum_{k_i > 0, k_j > 0, j > i} [\#(A_{\mu_i+\mu_j+1} | \mathcal{A}) + 1] \chi_f(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1} + kA_0) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} | \mathcal{A}) + 1] \chi_f(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1} + kA_0) \tag{1.26}
\end{aligned}$$

(в случае $\mathcal{A} = 0$ и $k = 0$ необходимо потребовать замкнутость многообразия V). Мы полагаем здесь, что $\chi_f(\mathcal{A} + A_1 + (k-2)A_0) = 0$, если $k < 2$, и $\chi_f(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1} + (k-1)A_0) = 0$, если $k < 1$.

5.4.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (1.26) представляет собой соотношение инцидентности в графе, образованном изолированными мультиособенностями и односвязными кривыми, состоящими из мультиособенностей типа $\mathcal{A} + kA_0$ отображения f .

Предположим теперь, что многообразие V связно. Тогда степени всех мультиособенностей отображения f имеют одинаковую четность, равную четности максимума d_f числа точек в полном прообразе $f^{-1}(y)$ по всем $y \in V$.

Для каждого элемента \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A} определим суммы $\chi_f^\infty(\mathcal{A})$ и $\widehat{\chi}_f(\mathcal{A})$ эйлеровых характеристик $\chi_f(\mathcal{A} + kA_0)$ по всем целым неотрицательным k , сравнимым с $\deg \mathcal{A} + d_f$ по модулю 2 и по модулю 4, соответственно. Складывая равенства (1.26) по всем целым $k \geq 0$, сравнимым с $\deg \mathcal{A} + d_f$ по модулю 4, получим:

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}_f(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2}[\#(A_1 | \mathcal{A}) + 1] \chi_f^\infty(\mathcal{A} + A_1) + \sum_{k_i > 0} [\#(A_{\mu_i+1} | \mathcal{A}) + 1] \widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1}) \\
&+ \sum_{k_i > 0, k_j > 0, j > i} [\#(A_{\mu_i+\mu_j+1} | \mathcal{A}) + 1] \widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1}) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} | \mathcal{A}) + 1] \widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1}) \tag{1.27}
\end{aligned}$$

(в случае $\mathcal{A} = 0$ многообразие V должно быть замкнутым).

5.4.2. ТЕОРЕМА. Пусть $f : M^n \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , многообразие M замкнуто, а многообразие V связно. Рассмотрим элемент

$\mathcal{A} = k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$, где μ_1, \dots, μ_p – попарно различные положительные целые числа и $\text{codim } \mathcal{A} = n - 1$. Тогда

$$[\#(A_1 | \mathcal{A}) + 1] \chi_f^\infty(\mathcal{A} + A_1) \equiv \sum_{k_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} | \mathcal{A}) + 1] \widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1}) \quad (1.28)$$

по модулю 2.

Это утверждение следует из формулы (1.27) (в случае $n = 1$ необходимо взять одноточечную компактификацию многообразия V , если оно не замкнуто).

5.4.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы (1.27) и (1.28) сохраняются, если определить $\widehat{\chi}_f(X)$ (для всех $X \in \mathbb{A}$ одновременно) как сумму эйлеровых характеристик $\chi_f(X + kA_0)$ по всем целым неотрицательным k , сравнимым с $\deg X + d_f + 2$ по модулю 4. В частности, в условиях теоремы 5.4.2, сумма

$$\sum_{k_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1} | \mathcal{A}) + 1] \chi_f^\infty(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1})$$

является четным числом.

5.4.4. ПРИМЕР. Пусть $n = 1$ и $\mathcal{A} = 0$. Тогда из формулы (1.28) получаем

$$\chi_f^\infty(A_1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Это хорошо известно: число критических точек функции Морса на одномерном гладком замкнутом многообразии четно.

5.4.5. ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$, где μ_1, \dots, μ_p попарно различны, $\mu_1 > 1, \dots, \mu_p > 1$ и $\mu_1 + \dots + \mu_p = n - 1$. Тогда $\chi_f^\infty(\mathcal{A} + A_1) \equiv 0 \pmod{2}$. В частности, если $n \geq 3$, то

$$\chi_f^\infty(A_{n-1} + A_1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

5.4.6. ПРИМЕР. Пусть n нечетное, $n \geq 3$ и $\mathcal{A} = (n - 1)A_1$. Тогда

$$\chi_f^\infty(nA_1) \equiv \widehat{\chi}_f(A_3 + (n - 3)A_1) \pmod{2}.$$

5.4.7. ПРИМЕР. Пусть n нечетное, $n \geq 3$ и $\mathcal{A} = 2A_{(n-1)/2}$. Тогда

$$\chi_f^\infty(2A_{(n-1)/2} + A_1) \equiv \widehat{\chi}_f(A_n) \pmod{2}.$$

Из теоремы 5.3.1 можно получать и другие следствия.

5.4.8. ТЕОРЕМА. Пусть $f : M^n \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , многообразие M замкнуто, а многообразие V связно. Рассмотрим элемент

$\mathcal{A} = k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$, где μ_1, \dots, μ_p – попарно различные положительные целые числа и $\text{codim } \mathcal{A} = n - 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
& [\#(A_1|\mathcal{A}) + 1]\chi_f^\infty(\mathcal{A} + A_1) + \sum_{k_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1}|\mathcal{A}) + 1]\widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1}) \equiv \\
& \equiv [\#(A_2|\mathcal{A}) + 1]\chi_f^\infty(\mathcal{A} + A_2) \\
& \quad + \sum_{k_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1}|\mathcal{A}) + 1][\#(A_1|\mathcal{A}) + 1]\chi_f^\infty(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1} + A_1) \\
& \quad + \sum_{k_i > 0} [\#(A_{\mu_i+2}|\mathcal{A}) + 1]\chi_f^\infty(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+2}) \\
& \quad + \sum_{k_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+2}|\mathcal{A}) + 1]\widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+2}) \\
& + \sum_{k_i > 1, k_j > 1, j > i} [\#(A_{2\mu_i+1}|\mathcal{A}) + 1][\#(A_{2\mu_j+1}|\mathcal{A}) + 1]\widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} - 2A_{\mu_j} + A_{2\mu_i+1} + A_{2\mu_j+1}) \\
& \quad + \sum_{k_i > 3} \binom{\#(A_{2\mu_i+1}|\mathcal{A}) + 2}{2} \widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - 4A_{\mu_i} + 2A_{2\mu_i+1}) \\
& \quad + \sum_{k_i > 2} [\#(A_{3\mu_i+2}|\mathcal{A}) + 1]\widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - 3A_{\mu_i} + A_{3\mu_i+2}) \\
& \quad + \sum_{k_i > 0, k_j > 1, j \neq i} [\#(A_{\mu_i+2\mu_j+2}|\mathcal{A}) + 1]\widehat{\chi}_f(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - 2A_{\mu_j} + A_{\mu_i+2\mu_j+2})
\end{aligned}$$

по модулю 2.

Мы не будем в дальнейшем использовать это утверждение и, поэтому, не приводим здесь его доказательство. Отметим лишь, что при $n = 3$ и $\mathcal{A} = A_1$ из теоремы 5.4.8 и примера 5.4.5 следует, что $\chi_f^\infty(A_3) \equiv 0 \pmod{2}$. Это хорошо известно: число ласточкиных хвостов на компактном волновом фронте общего положения в трехмерном пространстве четно.

В качестве еще одного следствия теоремы 5.3.1 мы получим классическую формулу Тома, описывающую четность числа сборок Уитни отображения общего положения двумерного многообразия в двумерное.

Пусть $f : M^n \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , многообразие M замкнуто и $n \leq 6$ четное. Тогда из формул (1.23) и (1.24) вытекают следующие сравнения по модулю 2:

$$\begin{aligned}
\chi(f(M)) \equiv & \sum_{k \geq 1} \chi_0^{(k)} + \sum_{k \geq 0} \left[\chi_{(1,0)}^{(2,k)} + \chi_{(1,0)}^{(4,k)} + \chi_{(2,0)}^{(2,k)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k)} + \chi_{(4,0)}^{(1,k)} \right. \\
& \left. + \chi_{(1,0)}^{(6,k)} + \chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k)} + \chi_{(3,0)}^{(2,k)} + \chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k)} + \chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k)} + \chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi(M) \equiv & \sum_{k \geq 1} k \chi_{(0)}^{(k)} + \sum_{k \geq 0} \left[k \chi_{(1,0)}^{(2,k)} + \chi_{(2,0)}^{(1,k)} \right. \\
& + k \chi_{(1,0)}^{(4,k)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k)} + k \chi_{(2,0)}^{(2,k)} + (k+1) \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k)} + (k+1) \chi_{(4,0)}^{(1,k)} \\
& + k \chi_{(1,0)}^{(6,k)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k)} + k \chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k)} + \chi_{(2,0)}^{(3,k)} + (k+1) \chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k)} \\
& \left. + k \chi_{(3,0)}^{(2,k)} + (k+1) \chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k)} + (k+1) \chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k)} + k \chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)} + \chi_{(6,0)}^{(1,k)} \right]
\end{aligned}$$

(значения k в суммах справа не превышают d_f).

Предположим теперь, что многообразие N связно. Тогда указанные сравнения приводят к формуле:

$$\begin{aligned}
\chi(M) \equiv & d_f \chi(f(M)) + \chi_f^\infty(A_2) + \chi_f^\infty(A_2 + 2A_1) + \chi_f^\infty(A_3 + A_1) \\
& + \chi_f^\infty(A_2 + 4A_1) + \chi_f^\infty(3A_2) + \chi_f^\infty(A_3 + 3A_1) + \chi_f^\infty(A_4 + A_2) + \chi_f^\infty(A_6) \pmod{2}.
\end{aligned}$$

Здесь $d_f \chi(f(M)) \equiv d_f \chi(V)$ по модулю 2, если многообразие N замкнуто. Таким образом, в случае $n = 2$ получаем:

5.4.9. СЛЕДСТВИЕ ([101],[78]). Пусть M, V – гладкие замкнутые двумерные многообразия и $f : M \rightarrow V$ – устойчивое гладкое отображение. Предположим, что многообразие V связно. Тогда четность числа $C = \chi_f^\infty(A_2)$ особенностей типа A_2 (сборки Уитни) отображения f определяется по формуле:

$$C \equiv \chi(M) + d_f \chi(V) \pmod{2}.$$

5.5 Полнота систем соотношений (1.10) и (1.19)

Пусть \mathcal{W} – множество всех устойчивых гладких отображений коранга ≤ 1 гладких замкнутых многообразий в гладкие замкнутые многообразия нестрого большей размерности. Рассмотрим произвольный класс отображений $W \subseteq \mathcal{W}$. Через B обозначим подмножество в полугруппе \mathbb{A} , образованное типами мультиособенностей, которые могут быть у отображений класса W . Тогда каждому отображению $f \in W$ можно сопоставить точку χ_f в вещественном векторном пространстве E_B финитных функций $B \rightarrow \mathbb{R}$. Эта точка называется *характеристикой* отображения f . Значение $\chi_f(\mathcal{A})$ характеристики χ_f на любом элементе $\mathcal{A} \in B$ равно эйлеровой характеристике $\chi(\mathcal{A}_f)$ многообразия \mathcal{A}_f мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f .

Рассмотрим подмножество Ω в E_B , образованное характеристиками χ_f всех отображений $f \in W$. Предположим, что ненулевая линейная функция $\alpha : E_B \rightarrow \mathbb{R}$ принимает во всех точках из Ω одинаковое значение $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда мы будем говорить, что имеется *универсальное* (для отображений класса W) *линейное соотношение* $\alpha(\chi) = \beta$ между значениями функций $\chi \in \Omega$. Система универсальных линейных соотношений

называется *полной*, если соотношения этой системы определяют минимальное аффинное подпространство в E_B , содержащее множество Ω .

Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbb{Z}_2$ – произвольные классы вычетов по модулю 2 в кольце целых чисел. Как и раньше, класс вычетов по модулю 2, содержащий целое число l , мы будем обозначать через $\langle l \rangle$. Через $W(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ обозначим класс отображений $f \in \mathcal{W}$, у которых размерность многообразия-образа больше размерности многообразия-прообраза и принадлежит \mathcal{P}_1 , а коразмерность образа отображения (в многообразии-образе) принадлежит \mathcal{P}_2 . Для этого класса отображений соответствующее подмножество $B \subseteq \mathbb{A}$ совпадает со всей полугруппой \mathbb{A} .

Зафиксируем положительное $l \in \mathcal{P}_2$ и рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ такой, что

$$\text{codim}_l \mathcal{A} = (l+1) \sum_{i=1}^p \mu_i + pl \notin \mathcal{P}_1.$$

Элемент \mathcal{A} определяет линейную функцию $\alpha_{\mathcal{A}}^{(l)} : E_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha_{\mathcal{A}}^{(l)} : \chi \mapsto \alpha_{\mathcal{A}}(\chi) = -\chi(\mathcal{A}) + \sum_X K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)\chi(X),$$

где сумма берется по всем $X \in \mathbb{A}$ таким, что $\text{codim}_l X > \text{codim}_l \mathcal{A}$ и $\text{codim}_l X \in \mathcal{P}_1$, а коэффициенты $K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)$ определяются формулой (1.11). В силу теоремы 5.2.1 (и замечания 3.2.2) функция $\alpha_{\mathcal{A}}^{(l)}$ не зависит от представителя $l > 0$ класса \mathcal{P}_2 и задает универсальное линейное соотношение $\alpha_{\mathcal{A}}^{(l)}(\chi_f) = 0$ между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображений $f \in W(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. Таким образом, имеет место следующая

5.5.1. ТЕОРЕМА. *Для каждой упорядоченной пары $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ классов вычетов $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbb{Z}_2$ формула (1.10) определяет систему*

$$\mathfrak{A}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \left\{ \alpha_{\mathcal{A}}^{(l)}(\chi_f) = 0, \mathcal{A} \in \mathbb{A} \mid \text{codim}_l \mathcal{A} \notin \mathcal{P}_1 \text{ для любого } l \in \mathcal{P}_2, l > 0 \right\}$$

универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображений f класса $W(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$.

Пусть теперь $W(\mathcal{P})$ – класс отображений $f \in \mathcal{W}$, у которых размерность многообразия-образа равна размерности многообразия-прообраза и принадлежит классу вычетов $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$. Подмножество $B \subseteq \mathbb{A}$, определяемое классом $W(\mathcal{P})$, также совпадает с \mathbb{A} . Любой элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ такой, что

$$\text{codim} \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p \notin \mathcal{P},$$

определяет линейную функцию $\alpha_{\mathcal{A}} : E_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha_{\mathcal{A}}^0 : \chi \mapsto \alpha_{\mathcal{A}}^0(\chi) = -\chi(\mathcal{A}) + \sum_X K_{\mathcal{A}}^0(X)\chi(X),$$

где сумма берется по всем $X \in \mathbb{A}$ таким, что $\text{codim } X > \text{codim } \mathcal{A}$, $\text{codim } X \in \mathcal{P}$, $\text{deg } X \geq \text{deg } \mathcal{A}$,

$$\text{deg } \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p,$$

а коэффициенты $K_{\mathcal{A}}^0(X)$ определяются формулой (1.20). В силу теоремы 5.3.1 функция $\alpha_{\mathcal{A}}^0$ задает универсальное линейное соотношение $\alpha_{\mathcal{A}}^0(\chi_f) = 0$ между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображений $f \in W(\mathcal{P})$. Следовательно, справедлива

5.5.2. ТЕОРЕМА. Для каждого $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$ формула (1.19) определяет систему

$$\mathfrak{a}(\mathcal{P}) = \{ \alpha_{\mathcal{A}}^0(\chi_f) = 0, \mathcal{A} \in \mathbb{A} \mid \text{codim } \mathcal{A} \notin \mathcal{P} \}$$

универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображений f класса $W(\mathcal{P})$.

Отметим, что

$$\mathfrak{a}(\mathcal{P}) = \mathfrak{a}(\mathcal{P}, \langle 0 \rangle)$$

для любого $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$ в силу замечания 5.3.4. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству следующего утверждения.

5.5.3. ТЕОРЕМА. Системы

$$\mathfrak{a}(\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle), \quad \mathfrak{a}(\langle 1 \rangle, \langle 0 \rangle), \quad \mathfrak{a}(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle), \quad \mathfrak{a}(\langle 1 \rangle, \langle 1 \rangle)$$

являются полными системами универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей отображений классов

$$W(\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle) \cup W(\langle 0 \rangle), \quad W(\langle 1 \rangle, \langle 0 \rangle) \cup W(\langle 1 \rangle), \quad W(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle), \quad W(\langle 1 \rangle, \langle 1 \rangle),$$

соответственно.

5.5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное подпространство $E(\mathcal{P}, \langle 0 \rangle) \subset E_{\mathbb{A}}$ ($E(\mathcal{P}, \langle 1 \rangle) \subset E_{\mathbb{A}}$), $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$, определяемое системой уравнений $\mathfrak{a}(\mathcal{P}, \langle 0 \rangle)$ (системой $\mathfrak{a}(\mathcal{P}, \langle 1 \rangle)$), называется универсальным пространством для характеристик отображений класса $W(\mathcal{P}, \langle 0 \rangle) \cup W(\mathcal{P})$ (класса $W(\mathcal{P}, \langle 1 \rangle)$, соответственно).

5.5.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Эйлеровы характеристики многообразий мультиособенностей рассматриваемых нами отображений ограничены также условиями типа неравенства и делимости. Например, число точек тройного самопересечения образа устойчивой иммерсии $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ гладкого замкнутого двумерного многообразия в пространство \mathbb{R}^3 (т.е. число особенностей типа $3A_0$) сравнимо по модулю 2 с эйлеровой характеристикой $\chi(M)$ многообразия M (см. [58]). Условия такого сорта имеют другую природу. Для их нахождения используются другие методы и объекты: многочлены Тома,

классы кобордизмов и пр. (см. [8], [29], [30], [99], [100]). Все ограничения на эйлеровы характеристики многообразий мультиособенностей устойчивых гладких отображений коранга ≤ 1 в многообразия нестрого бóльшей размерности нам не известны.

Зафиксируем произвольные целые положительные m и n такие, что $l = n - m \geq 0$. Через $W_{n,l} \subset \mathcal{W}$ обозначим класс устойчивых гладких отображений коранга ≤ 1 гладких замкнутых m -мерных многообразий в гладкие замкнутые многообразия размерности n . Теорема 5.5.3 вытекает, очевидно, из того, что системы соотношений (1.10) и (1.19) полны для отображений из любого фиксированного класса $W_{n,l}$. А именно, зафиксируем порядок на полугруппе \mathbb{A} .

5.5.6. ТЕОРЕМА. Пусть $l > 0$. Составим список типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ мультиособенностей, которые могут быть у отображения класса $W_{n,l}$. Предположим, что этот список состоит из d элементов ($d < \infty$). Пусть Ω – подмножество в \mathbb{R}^d , образованное (конечными) последовательностями эйлеровых характеристик $\chi_f(\mathcal{A})$ многообразий \mathcal{A}_f мультиособенностей типов \mathcal{A} из этого списка у отображений $f \in W_{n,l}$. Тогда система соотношений вида (1.10) задает минимальное аффинное подпространство в \mathbb{R}^d , содержащее множество Ω .

Пусть \mathbb{R}^∞ – векторное пространство бесконечных финитных (т.е. нулевых, начиная с некоторого места) последовательностей вещественных чисел.

5.5.7. ТЕОРЕМА. Составим список типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ мультиособенностей, которые могут быть у отображения класса $W_{n,0}$. Пусть Ω – подмножество в \mathbb{R}^∞ , образованное последовательностями эйлеровых характеристик $\chi_f(\mathcal{A})$ многообразий \mathcal{A}_f мультиособенностей типов \mathcal{A} из этого списка у отображений $f \in W_{n,0}$. Тогда система соотношений вида (1.19) задает минимальное аффинное подпространство в \mathbb{R}^∞ , содержащее множество Ω .

Аналогичные результаты справедливы и для классов устойчивых гладких отображений коранга ≤ 1 гладких замкнутых многообразий в произвольные гладкие многообразия нестрого бóльшей размерности. Необходимо лишь не включать нуль во все соответствующие подмножества полугруппы \mathbb{A} .

5.5.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Список типов в теореме 5.5.7 бесконечен, поскольку степень мультиособенностей устойчивого отображения коранга ≤ 1 многообразий одинаковой фиксированной размерности может быть сколь угодно большой.

Для доказательства теоремы 5.5.6 составим список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ всех элементов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ таких, что

$$\text{codim}_l \mathcal{A} \leq n, \quad \text{codim}_l \mathcal{A} \equiv n \pmod{2} \quad (1.29)$$

(многообразия мультиособенностей соответствующих типов у отображений рассматриваемого класса четномерны). Для доказательства теоремы 5.5.7 мы зафиксируем

произвольное целое положительное d и составим список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ элементов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ таких, что

$$\text{codim } \mathcal{A} \leq n, \quad \text{codim } \mathcal{A} \equiv n \pmod{2}, \quad \deg \mathcal{A} \leq d. \quad (1.30)$$

Теперь каждому отображению $f \in W_{n,l}$ (и такому, что $d_f \leq d$, если $l = 0$) сопоставим вектор

$$v(f) = (\chi_f(\mathcal{A}^1), \dots, \chi_f(\mathcal{A}^N)) \in \mathbb{R}^N$$

из эйлеровых характеристик $\chi_f(\mathcal{A}^i)$ многообразий \mathcal{A}_f^i мультиособенностей типов \mathcal{A}^i , $i = 1, \dots, N$. Через G обозначим подмножество в \mathbb{R}^N , образованное векторами $v(f)$ для всех отображений $f \in W_{n,l}$.

5.5.9. ТЕОРЕМА. *Множество G содержит полугруппу с N линейно независимыми образующими.*

Теоремы 5.5.6 и 5.5.7 следуют из теоремы 5.5.9. Последняя доказывается путем построения достаточного количества примеров отображений рассматриваемого типа.

5.5.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любых положительных целых m и n таких, что $l = n - m \geq 0$, и для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ такого, что $\text{codim}_l \mathcal{A} = n$, существует устойчивое гладкое отображение f коранга ≤ 1 гладкого замкнутого m -мерного многообразия в гладкое замкнутое многообразие размерности n , которое имеет ровно две мультиособенности типа \mathcal{A} и не имеет других изолированных мультиособенностей. При этом, если $l = 0$, то степени всех мультиособенностей отображения f не превосходят $\deg \mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{R}^{n+1} = \{(\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^p, z)\}$, где $\bar{\Lambda}^j = (\bar{\lambda}_0^j, \Lambda^j)$,

$$\bar{\lambda}_0^j = (\lambda_{1,0}^j, \dots, \lambda_{l+1,0}^j) \in \mathbb{R}^{l+1},$$

$$\Lambda^j = (q_{1,1}^j, \dots, q_{1,\mu_j-1}^j; q_{2,1}^j, \dots, q_{2,\mu_j}^j; \dots; q_{l+1,1}^j, \dots, q_{l+1,\mu_j}^j) \in \mathbb{R}^{\mu_j(l+1)-1}$$

и $z \in \mathbb{R}$. Рассмотрим отображения $f_j : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $j = 1, \dots, p$, заданные формулами

$$\begin{aligned} & (\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^{j-1}; t_j, \Lambda^j; \bar{\Lambda}^{j+1}, \dots, \bar{\Lambda}^p, z) \\ & \mapsto (\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^{j-1}; S_j(t_j, \Lambda^j), \Lambda^j; \bar{\Lambda}^{j+1}, \dots, \bar{\Lambda}^p, z), \end{aligned}$$

где $t_j \in \mathbb{R}$ и

$$S_j(t_j, \Lambda^j) = \begin{pmatrix} t_j^{\mu_j+1} & + & 0 & + & q_{1,\mu_j-1}^j t_j^{\mu_j-1} & + \dots + & q_{1,1}^j t_j \\ 0 & + & q_{2,\mu_j}^j t_j^{\mu_j} & + & q_{2,\mu_j-1}^j t_j^{\mu_j-1} & + \dots + & q_{2,1}^j t_j \\ & & & \dots & & & \\ 0 & + & q_{l+1,\mu_j}^j t_j^{\mu_j} & + & q_{l+1,\mu_j-1}^j t_j^{\mu_j-1} & + \dots + & q_{l+1,1}^j t_j \end{pmatrix}^*.$$

Отображения f_1, \dots, f_p определяют устойчивое гладкое собственное отображение \tilde{f} коранга ≤ 1 из несвязного объединения p экземпляров пространства \mathbb{R}^{m+1} в \mathbb{R}^{n+1} .

А именно, $\tilde{f} = f_j$ на j -ом экземпляре \mathbb{R}^{m+1} . При этом, если $l = 0$, то степени всех мультиособенностей отображения \tilde{f} не превосходят $\deg \mathcal{A}$.

Зафиксируем в \mathbb{R}^{n+1} стандартную сферу S^n радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Полный прообраз $M = \tilde{f}^{-1}(S^n)$ этой сферы относительно отображения \tilde{f} является гладким замкнутым m -мерным многообразием. Сужение

$$f = \tilde{f}|_M : M \rightarrow S^n$$

отображения \tilde{f} на это многообразие является устойчивым гладким отображением коранга ≤ 1 . Отображение f имеет ровно две изолированные мультиособенности и обе они имеют тип \mathcal{A} .

Действительно, прямая $\bar{\Lambda}^1 = 0, \dots, \bar{\Lambda}^p = 0$ состоит из точек, в которых \tilde{f} имеет мультиособенность типа \mathcal{A} . Эта прямая является единственным одномерным стратом естественной C^∞ -стратификации образа отображения \tilde{f} на связные компоненты многообразий вида $X_{\tilde{f}}, X \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. Вместе с любой своей точкой $(\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^p, z) \neq 0$ каждый страт этой стратификации содержит всю кривую

$$\gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \gamma : s \mapsto (\bar{\Lambda}^1(s), \dots, \bar{\Lambda}^p(s), z(s)),$$

где $z(s) = zs, \bar{\Lambda}^j(s) = (\bar{\lambda}_0^j(s), \Lambda^j(s)),$

$$\bar{\lambda}_0^j(s) = (\lambda_{1,0}^j s^{\mu_j+1}, \lambda_{2,0}^j s^{\mu_j+1}, \dots, \lambda_{l+1,0}^j s^{\mu_j+1}),$$

$$\Lambda^j(s) = (q_{1,1}^j s^{\mu_j}, \dots, q_{1,\mu_j-1}^j s^2; q_{2,1}^j s^{\mu_j}, \dots, q_{2,\mu_j}^j s; \dots; q_{l+1,1}^j s^{\mu_j}, \dots, q_{l+1,\mu_j}^j s).$$

Эта кривая трансверсально пересекает сферу S^n , причем ровно в одной точке. Таким образом, сфера S^n трансверсальна каждому страту указанной стратификации и пересекает страт \mathcal{A}_f мультиособенностей типа \mathcal{A} ровно в двух точках. Предложение 5.5.10 доказано.

5.5.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любых положительных целых m и n таких, что $l = n - m \geq 0$, и для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ такого, что $\text{codim}_l \mathcal{A} = c \leq n$, существует устойчивое гладкое отображение $f : M \rightarrow V$ коранга ≤ 1 гладкого замкнутого m -мерного многообразия M в гладкое замкнутое многообразие V размерности n , обладающее следующими свойствами:*

1) оно не имеет мультиособенностей коразмерности выше c , а все его мультиособенности коразмерности c имеют тип \mathcal{A} ; если $l = 0$, то степени всех мультиособенностей отображения f не превосходят $\deg \mathcal{A}$;

2) многообразие \mathcal{A}_f мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения f диффеоморфно несвязному объединению двух сфер размерности $n - c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомым отображением является, например, отображение

$$\widetilde{M}^{c-l} \times S^{n-c} \rightarrow \widetilde{V}^c \times S^{n-c}, \quad (x, s) \mapsto (\tilde{f}(x), s), \quad (1.31)$$

где \widetilde{M} и \widetilde{V} – гладкие замкнутые многообразия размерностей $c-l$ и c , соответственно, а $\widetilde{f} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{V}$ – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , у которого есть ровно две мультиособенности типа \mathcal{A} , нет других изолированных мультиособенностей и, если $l = 0$, то степени всех мультиособенностей не превосходят $\deg \mathcal{A}$ (такие многообразия и отображения существуют согласно предложению 5.5.10). Предложение 5.5.11 доказано.

5.5.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо сферы S^{n-c} в формуле (1.31) можно взять любое гладкое замкнутое $(n-c)$ -мерное многообразие Z . В этом случае многообразие \mathcal{A}_f диффеоморфно несвязному объединению двух копий Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.5.9. Сначала заметим, что в случае четного n эйлерову характеристику дополнения $V \setminus f(M)$ к образу отображения $f : M^m \rightarrow V^n$ можно увеличить на любое целое положительное число, не меняя при этом сам образ $f(M)$. Для этого можно, например, добавить к многообразию V соответствующее количество дополнительных связных компонент, диффеоморфных $\mathbb{R}P^n$. Таким образом, для доказательства теоремы 5.5.9 достаточно найти полугруппу с N линейно независимыми образующими в множестве векторов вида $(\chi_f(\mathcal{A}^1), \dots, \chi_f(\mathcal{A}^N)) \in \mathbb{R}^N$, $f \in W_{n,l}$, где $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ – список ненулевых элементов полугруппы \mathbb{A} , удовлетворяющих условиям (1.29) (или условиям (1.30), если $l = 0$).

Предположим, что этот список сформирован по неубыванию чисел $\text{codim}_l \mathcal{A}^i$. Более того, в случае $l = 0$ элементы вида $\mathcal{A} + kA_0$, где k – неотрицательное целое число, следуют друг за другом в порядке возрастания числа k . В частности, $\mathcal{A}^1 = A_0$ при четном m , $\mathcal{A}^1 = A_1$, если m и n нечетные, и $\mathcal{A}^1 = 2A_0$, если m нечетное, а n четное.

Зафиксируем гладкие замкнутые m -мерные многообразия M_1, \dots, M_N , гладкие замкнутые n -мерные многообразия V_1, \dots, V_N и устойчивые гладкие отображения $f_i : M_i \rightarrow V_i$, $i = 1, \dots, N$ коранга ≤ 1 , обладающие свойствами 1 – 2 из предложения 5.5.11 для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^i$, соответственно. Через $\chi_{i,j}$ обозначим эйлерову характеристику многообразия $\mathcal{A}_{f_i}^j$, образованного мультиособенностями типа \mathcal{A}^j отображения f_i , где $i, j = 1, \dots, N$.

Пусть r_1, \dots, r_N – произвольные целые неотрицательные числа, среди которых хотя бы одно не равно нулю. Рассмотрим отображение $f : M \rightarrow V$, где:

1) M – гладкое многообразие размерности m , имеющее $r_1 + \dots + r_N$ связных компонент $M_{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, r_i$ таких, что для любых i, j существует диффеоморфизм $g_{i,j} : M_i \rightarrow M_{i,j}$;

2) V – гладкое многообразие размерности n , имеющее $r_1 + \dots + r_N$ связных компонент $V_{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, r_i$ таких, что для любых i, j существует диффеоморфизм $h_{i,j} : V_i \rightarrow V_{i,j}$;

3) f замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f_i} & V_i \\ \downarrow g_{i,j} & & \downarrow h_{i,j} \\ M & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

для любых $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, r_i$.

Легко видеть, что отображение f является устойчивым гладким отображением коранга ≤ 1 . Эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^j)_f$ мультиособенностей типа \mathcal{A}^j этого отображения равна $\sum_{i=1}^N r_i \chi_{i,j}$ для любого $j = 1, \dots, N$.

Рассмотрим полугруппу в \mathbb{R}^N , состоящую из векторов

$$\left(\sum_{i=1}^N r_i \chi_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^N r_i \chi_{i,N} \right),$$

соответствующих всевозможным упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел (r_1, \dots, r_N) . Эта полугруппа порождена векторами

$$v_i = (\chi_{i,1}, \dots, \chi_{i,N}), \quad i = 1, \dots, N.$$

5.5.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Векторы v_1, \dots, v_N линейно независимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $(N \times N)$ -матрицу \mathcal{M} , строками которой служат векторы v_1, \dots, v_N . Матрица \mathcal{M} является ниже-треугольной (по построению $\chi_{i,j} = 0$ при всех $j > i$). На ее главной диагонали стоят ненулевые числа:

$$\chi_{i,i} = 2\chi(S^{n-\text{codim}_l \mathcal{A}^i}) = 4$$

для любого $i = 1, \dots, N$ (напомним, что $\text{codim}_l \mathcal{A}^i \equiv n$ по модулю 2).

Таким образом, $\det \mathcal{M} \neq 0$. Предложение 5.5.13 доказано.

Теорема 5.5.9 следует теперь из предложения 5.5.13.

5.5.14. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что теоремы 5.5.6, 5.5.7 и 5.5.9 справедливы даже в классе устойчивых гладких отображений коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n , определенных на гладких замкнутых связных гиперповерхностях, вложенных в \mathbb{R}^{m+1} ($0 < m \leq n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3 ТЕОРЕМЫ 5.2.1. Предположим, что существует целое $l > 0$, для которого утверждение неверно. Зафиксируем это l и рассмотрим минимальное n , при котором существуют $\mathcal{A}^0, X^0 \in \mathbb{A}$ такие, что

$$\text{codim}_l \mathcal{A}^0 < \text{codim}_l X^0 = n, \quad \text{codim}_l \mathcal{A}^0 \equiv n - 1 \pmod{2},$$

а число $K_{\mathcal{A}^0}^{(l)}(X^0)2^r$ не является целым ни при каком целом $r \geq 0$ (из таблиц 1 – 4 видно, что $n > 6l + 2$).

Возьмем элемент X^0 и построим устойчивое гладкое отображение f коранга ≤ 1 гладкого замкнутого $(n-l)$ -мерного многообразия в гладкое замкнутое многообразие размерности n , которое имеет ровно две мультиособенности типа X^0 и не имеет других изолированных мультиособенностей (такое отображение существует в силу предложения 5.5.10). Для отображения f должно быть выполнено соотношение (1.10), соответствующее элементу $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0$. Однако такое равенство невозможно при указанных выше предположениях, поскольку число $K_{\mathcal{A}^0}^{(l)}(X^0)\chi_f(X^0) = 2K_{\mathcal{A}^0}^{(l)}(X^0)$ не может быть суммой дробей, знаменатели которых являются степенями двойки. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3 ТЕОРЕМЫ 5.3.1. Первая часть этого утверждения доказывается аналогично предыдущему.

Для доказательства второй части рассмотрим произвольное устойчивое гладкое отображение $f : M \rightarrow V$ коранга ≤ 1 гладких замкнутых многообразий M и V размерности n . Возьмем несвязное объединение $M \sqcup V$ этих многообразий и построим отображение

$$\tilde{f} : M \sqcup V \rightarrow V,$$

где $\tilde{f}|_M = f$, а $\tilde{f}|_V$ – тождественное отображение.

Ясно, что \tilde{f} – устойчивое гладкое отображение коранга ≤ 1 , причем $\chi_{\tilde{f}}(\mathcal{A} + A_0) = \chi_f(\mathcal{A})$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$. Следовательно, если $\text{codim } \mathcal{A} \equiv n - 1 \pmod{2}$, то согласно формуле (1.19),

$$\sum_X K_{\mathcal{A}+A_0}^0(X + A_0)\chi_f(X) = \sum_X K_{\mathcal{A}}^0(X)\chi_f(X),$$

где суммирование идет по всем $X \in \mathbb{A}$ таким, что $\text{codim } X$ превышает $\text{codim } \mathcal{A}$ на нечетное положительное число, а $\deg X \leq d_f$. Остается заметить, что подобное равенство возможно, если и только если $K_{\mathcal{A}+A_0}^0(X + A_0) = K_{\mathcal{A}}^0(X)$ для всех указанных X . Это следует из теоремы 5.5.9.

Глава 2

Топология особенностей коранга 1 устойчивого волнового фронта

В этой главе мы строим разрешение особенностей фронта устойчивого лежандрова отображения, имеющего лишь особенности коранга 1. Это разрешение является обобщением конструкции, использованной в главе 1 для разрешения мультиособенностей произвольного устойчивого гладкого отображения коранга ≤ 1 многообразий одинаковой размерности.

В качестве следствия получены полные системы универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей различных типов на любом компактном фронте указанного вида (отдельно для случаев нечетной и четной размерности объемлющего фронт пространства). Кроме того, получены полные системы универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на краях некоторых связных компонент дополнения к фронту.

Изложенные здесь результаты опубликованы в [49], [50], [52], [53].

1 Лежандровы отображения, фронты и их особенности

В этом параграфе содержатся основные понятия и факты теории особенностей лежандровых отображений. Подробности см. в [5] и [12].

1.1 Основные примеры лежандровых отображений

Пусть E – гладкое многообразие. *Контактными элементами* на E называются пары вида (π, x) , где $x \in E$, а $\pi \subset T_x E$ – касательная гиперплоскость в точке x .

Рассмотрим гладкое поле контактных элементов на многообразии E . Локально такое поле задается гладкой 1-формой ω , как поле ее нулей.

1.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поле $\omega = 0$ контактных элементов на E называется *максимально неинтегрируемым*, если дифференциал $d\omega$ формы ω является невырожденной 2-формой на каждой гиперплоскости этого поля.

Максимально неинтегрируемые поля контактных элементов бывают только на нечетномерных многообразиях. Если размерность многообразия E равна $2n - 1$, то условие максимальной неинтегрируемости поля контактных элементов на E , локально заданного формой ω , эквивалентно тому, что $\omega \wedge (d\omega)^{n-1} \neq 0$. Условие максимальной неинтегрируемости поля не зависит от выбора формы ω .

1.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Контактной структурой* на нечетномерном многообразии называется максимально неинтегрируемое поле контактных элементов. Многообразии, снабженное контактной структурой, называется *контактным*.

Гладкое подмногообразие контактного многообразия называется *интегральным*, если его касательное пространство в каждой точке принадлежит гиперплоскости контактной структуры. Размерность интегрального многообразия меньше половины размерности контактного многообразия.

1.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интегральные подмногообразия контактного многообразия, имеющие наивысшую размерность (равную $n - 1$, если размерность объемлющего контактного многообразия равна $2n - 1$) называются *лежандровыми*. Гладкое вложение гладкого многообразия в контактное многообразие называется *лежандровым*, если его образ является лежандровым подмногообразием.

Рассмотрим гладкое расслоение

$$\rho : E \rightarrow V,$$

пространство E которого является контактным многообразием. Расслоение ρ называется *лежандровым*, если все его слои являются лежандровыми подмногообразиями в многообразии E . Если ρ лежандрово расслоение, то $\dim E = 2 \dim V - 1$.

1.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Проектирование лежандрова подмногообразия пространства лежандрова расслоения в базу этого расслоения называется *лежандровым отображением*. Образ лежандрова отображения называется (волновым) *фронтом*.

Пусть ρ – лежандрово расслоение и L – гладкое лежандрово подмногообразие в пространстве E этого расслоения. Тогда лежандрово отображение $f : L \rightarrow V$ многообразия L в базу расслоения ρ задается формулой $f = \rho \circ i$, где $i : L \rightarrow E$ – естественное (лежандрово) вложение. Мы всегда будем рассматривать такие вложения i , для которых отображение f является *собственным*.

1.1.5. ПРИМЕР. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^{2n-1} с координатами (\vec{p}, \vec{q}, q_0) , где $\vec{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_{n-1})$. Форма $\vec{p}d\vec{q} + dq_0$ определяет в \mathbb{R}^{2n-1} *стандартную* контактную структуру, а отображение

$$\rho : \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \rho : (\vec{p}, \vec{q}, q_0) \mapsto (\vec{q}, q_0) \quad (2.1)$$

задает *стандартное* лежандрово расслоение.

Пусть $F(\vec{t}, \vec{q}, q_0)$ – семейство гладких функций от k переменных $\vec{t} = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, гладко зависящих от параметров \vec{q}, q_0 . Предположим, что:

- 1) $F(0) = 0, \frac{\partial F}{\partial \vec{t}}(0) = 0, \frac{\partial F}{\partial \vec{q}}(0) = 0$;
- 2) ранг отображения $(\vec{t}, \vec{q}, q_0) \mapsto (F, \frac{\partial F}{\partial \vec{t}})$ в нуле равен $k + 1$.

Тогда росток в нуле множества

$$L = \left\{ (\vec{p}, \vec{q}, q_0) \in \mathbb{R}^{2n-1} \mid \exists \vec{t} \in \mathbb{R}^k : F = 0, \frac{\partial F}{\partial \vec{t}} = 0, \vec{p} = \frac{\partial F}{\partial \vec{q}} \right\} \quad (2.2)$$

является ростком гладкого лежандрова подмногообразия в \mathbb{R}^{2n-1} . Его фронтом в пространстве $\mathbb{R}^n = \{(\vec{q}, q_0)\}$ относительно проекции (2.1) является росток в нуле множества

$$\rho(L) = \left\{ (\vec{q}, q_0) \in \mathbb{R}^n \mid \exists \vec{t} \in \mathbb{R}^k : F = 0, \frac{\partial F}{\partial \vec{t}} = 0 \right\}. \quad (2.3)$$

1.1.6. ПРИМЕР. Пусть V – гладкое n -мерное многообразие. Рассмотрим пространство проективизации его кокасательного расслоения PT^*V . Это пространство является гладким $(2n - 1)$ -мерным многообразием. Оно образовано контактными элементами (π, y) , $y \in V$, $\pi \subset T_y V$ – касательная гиперплоскость в точке y , на исходном многообразии V .

Пространство PT^*V обладает естественной контактной структурой. Она определяется следующим образом: скорость движения контактного элемента (π, y) принадлежит гиперплоскости контактной структуры, если скорость точки контакта y принадлежит гиперплоскости π . Естественная проекция

$$\varrho : PT^*V \rightarrow V, \quad \varrho : (\pi, y) \mapsto y \quad (2.4)$$

является лежандровым расслоением относительно этой структуры (скорость движения точки контакта при движении контактного элемента вдоль слоя расслоения ϱ равна нулю).

Пусть M – гладкое замкнутое подмногообразие в многообразии V . Тогда множество контактных элементов на V , которые касаются многообразия M (т.е. содержат касательное пространство к M в точке контакта), является гладким замкнутым лежандровым подмногообразием в PT^*V . Фронтом этого многообразия относительно проекции ϱ является исходное многообразие M .

1.1.7. ПРИМЕР. Рассмотрим n -мерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ и проективизацию его кокасательного расслоения $PT^*(\mathbb{R}P^n)$. Контактные элементы на $\mathbb{R}P^n$ представляются упорядоченными парами вида (π, y) , где π – гиперплоскость в $\mathbb{R}P^n$, проходящая через точку y .

Гиперплоскости в $\mathbb{R}P^n$ образуют двойственное пространство $\mathbb{R}P^{n*}$, изоморфное $\mathbb{R}P^n$. Естественная проекция

$$\vartheta : PT^*(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \mathbb{R}P^{n*}, \quad \vartheta : (\pi, y) \mapsto \pi \quad (2.5)$$

является лежандровым расслоением относительно естественной контактной структуры на $PT^*(\mathbb{R}P^n)$. Действительно, при движении контактного элемента (π, y) вдоль слоя расслоения ϑ точка контакта y остается в гиперплоскости π .

Пусть M – гладкое замкнутое подмногообразие в $\mathbb{R}P^n$. Рассмотрим лежандрово подмногообразие в $PT^*(\mathbb{R}P^n)$, образованное контактными элементами (π, y) гиперплоскостей π в $\mathbb{R}P^n$, касающихся многообразия M в точке контакта y . Легко видеть, что фронтом этого многообразия относительно проекции ϑ является множество всех касательных гиперплоскостей подмногообразия M .

1.2 Классификация особенностей лежандровых отображений

Ростки лежандровых отображений классифицируются относительно группы лежандровых эквивалентностей. Класс эквивалентности ростка лежандрова отображения называется *лежандровой особенностью*.

1.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Лежандровой эквивалентностью* двух лежандровых расслоений называется любой диффеоморфизм между пространствами этих рассло-

ний, переводящий контактную структуру и слои первого расслоения в контактную структуру и слои второго.

Два лежандровых подмногообразия в пространствах разных лежандровых расслоений называются *лежандрово эквивалентными*, если существует лежандрова эквивалентность этих расслоений, переводящая первое подмногообразие во второе. Лежандровы отображения эквивалентных лежандровых многообразий называются *лежандрово эквивалентными*.

1.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Фронты лежандрово эквивалентных лежандровых отображений диффеоморфны.

Известно, что росток каждого лежандрова подмногообразия L в пространстве любого лежандрова расслоения лежандрово эквивалентен ростку лежандрова подмногообразия (2.2) в пространстве стандартного лежандрова расслоения при подходящем выборе семейства F . Всякое такое семейство называется *производящим семейством* ростка лежандрова многообразия L или особенности соответствующего лежандрова отображения этого ростка.

Пусть μ – положительное целое число.

1.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Лежандровыми особенностями типов $A_\mu, D_\mu, E_6, E_7, E_8$* называются особенности лежандровых отображений, заданных ростками в нуле следующих производящих семейств:

$$A_\mu : F = t^{\mu+1} + q_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + q_1t + q_0, \quad \mu \geq 1;$$

$$D_\mu^\pm : F = t_1^2t_2 \pm t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1}t_2^{\mu-2} + \dots + q_2t_2 + q_1t_1 + q_0, \quad \mu \geq 4;$$

$$E_6 : F = t_1^3 + t_2^4 + q_5t_1t_2^2 + q_4t_1t_2 + q_3t_2^2 + q_2t_2 + q_1t_1 + q_0;$$

$$E_7 : F = t_1^3 + t_1t_2^3 + q_6t_1^2t_2 + q_5t_1^2 + q_4t_1t_2 + q_3t_2^2 + q_2t_2 + q_1t_1 + q_0;$$

$$E_8 : F = t_1^3 + t_2^5 + q_7t_1t_2^3 + q_6t_1t_2^2 + q_5t_2^3 + q_4t_1t_2 + q_3t_2^2 + q_2t_2 + q_1t_1 + q_0.$$

Лежандровы особенности типов $A_\mu, D_\mu, E_6, E_7, E_8$ попарно лежандрово не эквивалентны. Особенности типов D_μ^+ и D_μ^- лежандрово эквивалентны тогда и только тогда, когда число μ нечетное.

1.2.4. ПРИМЕР. Пусть лежандрово отображение $f : L \rightarrow V$ в гладкое n -мерное многообразие V имеет особенность типа A_μ в точке $x \in L$. Тогда в подходящих локальных координатах на многообразиях L и V росток (f, x) отображения f в точке x задается формулой

$$(f, x) : (\mathbb{R}^{n-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t, \bar{q}) \mapsto \left(-S(t, \bar{q}) + t \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), -\frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), \bar{q} \right),$$

где

$$\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}), \quad S(t, \bar{q}) = t^{\mu+1} + q_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + q_2t^2.$$

Зафиксируем лежандрово расслоение и рассмотрим гладкое многообразие, допускающее лежандрово вложение в пространство этого расслоения. Каждое лежандрово вложение индуцирует лежандрово отображение рассматриваемого многообразия в базу расслоения.

Снабдим пространство \mathcal{W} всех таких отображений тонкой C^∞ -топологией Уитни. Мы будем говорить, что данное утверждение справедливо для лежандрова отображения (или фронта) *общего положения*, если существует открытое всюду плотное подмножество в пространстве \mathcal{W} такое, что указанное утверждение имеет место для всех отображений из этого подмножества.

1.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Лежандрово отображение называется *лежандрово устойчивым*, если всякое близкое лежандрово отображение ему лежандрово эквивалентно.

Фронт устойчивого лежандрова отображения называется *устойчивым*. Устойчивый фронт является гиперповерхностью в объемлющем пространстве (вообще говоря, особой). Ростки устойчивого фронта классифицируются относительно группы диффеоморфизмов объемлющего пространства (класс эквивалентности ростка называется *особенностью*).

Устойчивые лежандровы отображения образуют открытое подмножество в пространстве всех лежандровых отображений.

1.2.6. ТЕОРЕМА ([2]). *В пространстве лежандровых отображений в многообразии размерности $n \leq 6$ устойчивые отображения всюду плотны. Их особенности лежандрово эквивалентны особенностям типов A_μ, D_μ, E_μ , где $\mu \leq n$.*

Таким образом устойчивые волновые фронты в пространствах размерности не выше шести являются фронтами общего положения.

1.2.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Если данная (особая) гиперповерхность \mathcal{F} в гладком многообразии V является фронтом устойчивого собственного лежандрова отображения, то она является фронтом некоторого гладкого лежандрова подмногообразия L в пространстве PT^*V относительно проекции (2.4). А именно, подмногообразие $L \subset PT^*V$ является замыканием множества контактных элементов на многообразии V , касающихся фронта \mathcal{F} в его гладких точках (см. [5]). При этом исходное лежандрово многообразие, фронтом которого является \mathcal{F} , диффеоморфно многообразию L .

1.2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт устойчивого собственного лежандрова отображения связного многообразия называется *неприводимым*.

1.3 Устойчивые лежандровы отображения коранга ≤ 1 и их фронты

Рассмотрим произвольное собственное лежандрово отображение $f : L \rightarrow V$.

1.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение f называется *лежандровым отображением коранга ≤ 1* , если для любого $x \in L$ размерность ядра производной $f_{*x} : T_x L \rightarrow T_{f(x)} V$ не превосходит 1.

Лежандровы отображения коранга ≤ 1 образуют открытое подмножество в пространстве всех лежандровых отображений $f : L \rightarrow V$. В пространстве лежандровых отображений коранга ≤ 1 устойчивые отображения всюду плотны, т.е. являются лежандровыми отображениями общего положения. Особенности устойчивых лежандровых отображений коранга ≤ 1 в гладкое многообразие размерности n лежандрово эквивалентны особенностям типов A_μ , где $\mu \leq n$.

Множество A_μ^f точек $x \in L$, в которых отображение f имеет особенность типа A_μ , является гладким подмногообразием коразмерности $\mu - 1$ в L . Образ этого многообразия при отображении f является иммерсированным подмногообразием коразмерности μ в V . Многообразие A_μ^f и его образ, вообще говоря, незамкнуты.

Обозначим через Φ_{A_μ} замыкание $\overline{A_\mu^f}$ многообразия A_μ^f в многообразии L . Если f – устойчивое лежандрово отображение коранга ≤ 1 , то множество Φ_{A_μ} является гладким подмногообразием коразмерности $\mu - 1$ в L (оно состоит из тех точек $x \in L$, в которых f имеет особенности типов A_ν , $\nu \geq \mu$). В частности, $\Phi_{A_1} = L$.

1.3.2. ПРИМЕР. Отображение

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, \bar{q}) \mapsto \left(-S(t, \bar{q}) + t \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), -\frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), \bar{q} \right),$$

где

$$\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad S(t, \bar{q}) = t^{\nu+1} + q_{\nu-1} t^{\nu-1} + \dots + q_2 t^2, \quad \nu \leq n,$$

является устойчивым собственным лежандровым отображением коранга ≤ 1 . Его особенности лежандрово эквивалентны особенностям типов A_μ , где $\mu \leq \nu$. Подмногообразие $\Phi_{A_\mu} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, где $\mu \geq 2$, задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t^\mu} = 0.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать, в основном, только устойчивые собственные лежандровы отображения коранга ≤ 1 . Фронты таких отображений называется *устойчивыми фронтами коранга ≤ 1* .

1.3.3. ПРИМЕР. Пусть M и V – гладкие многообразия одинаковой размерности. Рассмотрим гладкое собственное отображение $g : M \rightarrow V$. Предположим, что g – устойчивое отображение коранга ≤ 1 . Тогда множество \mathcal{F}_g его критических значений является устойчивым фронтом коранга ≤ 1 в V .

Соответствующим лежандровым многообразием служит множество L_g критических точек отображения g . Сужение g на L_g является лежандровым отображением относительно проекции (2.4). При этом лежандрово вложение $L_g \rightarrow PT^*V$ сопоставляет точке $x \in L_g$ контактный элемент $(\pi, g(x))$ на V , где π – касательная гиперплоскость в $T_{g(x)}V$, являющаяся образом производной g_{*x} .

Таким образом, полученные далее в этой главе результаты применимы, в частности, и к множествам критических значений устойчивых гладких собственных отображений коранга ≤ 1 многообразий одинаковой размерности. В том числе, и к каустикам так называемых лагранжевых отображений (см. [12]), если они устойчивы и имеют лишь особенности коранга 1.

1.3.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы примера 1.2.4 видно, что фронт ростка лежандрова отображения с особенностью типа A_μ в многообразии размерности n диффеоморфен множеству критических значений ростка $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ гладкого отображения с особенностью типа A_μ в нуле. Отсюда следует, что росток любого устойчивого фронта коранга ≤ 1 диффеоморфен ростку множества критических значений некоторого устойчивого гладкого собственного отображения коранга ≤ 1 многообразий одинаковой размерности.

Особенности устойчивого фронта коранга ≤ 1 , а также соответствующие мультиособенности самого лежандрова отображения, классифицируются по элементам свободной абелевой полугруппы $\mathbb{A}_+ \subset \mathbb{A}$ по сложению, образующими которой служат символы $A_1, A_2, \dots, A_\mu, \dots$

А именно, пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения в гладком n -мерном многообразии V . Тогда из формулы (2.3) получаем.

1.3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт \mathcal{F} имеет *особенность типа A_μ* в точке y , если его росток (\mathcal{F}, y) в этой точке диффеоморфен ростку в нуле гиперповерхности в пространстве $\mathbb{R}^n = \{(q_0, \dots, q_{n-1})\}$, образованной точками, для которых многочлен

$$t^{\mu+1} + q_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + q_1t + q_0$$

от t имеет кратный вещественный корень.

Число μ называется *кратностью* особенности типа A_μ . Множество $(A_\mu)_{\mathcal{F}}$ точек $y \in V$, в которых фронт \mathcal{F} имеет особенность типа A_μ , является гладким подмногообразием коразмерности μ в V (не замкнутым, вообще говоря).

Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$.

1.3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт \mathcal{F} имеет *особенность* типа \mathcal{A} в точке y , если:

1) росток (\mathcal{F}, y) состоит из p неприводимых компонент $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ с особенностями типов $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}$ в точке y , соответственно;

2) ростки в y многообразий $(A_{\mu_1})_{\mathcal{F}_1}, \dots, (A_{\mu_p})_{\mathcal{F}_p}$ пересекаются в этой точке трансверсально (определение трансверсальности дано в замечании 1.1.5 главы 1).

1.3.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Мы будем также говорить, что во всех точках из дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ фронт \mathcal{F} имеет особенность типа 0 (нуль полугруппы \mathbb{A}_+).

Числа μ_1, \dots, μ_p называются *кратностями* особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} . Числа

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p \quad \text{и} \quad \text{deg } \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$$

называется *корузмерностью* и *степенью* этих особенностей, соответственно.

1.3.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathcal{A} = 0$, то $\text{codim } \mathcal{A} = \text{deg } \mathcal{A} = 0$.

1.3.9. ПРИМЕР. Фронт \mathcal{F}_g из примера 1.3.3 имеет особенность типа \mathcal{A} в точке $y \in V$ тогда и только тогда, когда существует целое $k \geq 0$ такое, что отображение g имеет в y мультиособенность типа $\mathcal{A} + kA_0 \in \mathbb{A}$.

Корузмерность особенностей типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$ фронта \mathcal{F} не превышает размерности n объемлющего многообразия V . Такие особенности диффеоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ точек $y \in V$, в которых фронт \mathcal{F} имеет особенность типа \mathcal{A} . Множество $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ является гладким подмногообразием корузмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в многообразии V (незамкнутым и несвязным, вообще говоря).

1.3.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ называется *многообразием особенностей типа \mathcal{A}* фронта \mathcal{F} .

1.3.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Если все особенности данной замкнутой гиперповерхности в многообразии V диффеоморфны особенностям устойчивых фронтов коранга ≤ 1 , то эта гиперповерхность сама является устойчивым фронтом коранга ≤ 1 . А именно, она является образом сужения проекции (2.4) на замыкание подмножества в PT^*V , образованного контактными элементами на V , касающимися рассматриваемой гиперповерхности в ее гладких точках.

1.4 Присыкания особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1

Пусть \mathcal{F} – устойчивый фронт коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Зафиксируем элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ и рассмотрим многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} .

Пусть $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ – замыкание многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ в объемлющем многообразии V . Например, $\overline{(A_1)_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$.

1.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Особенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ фронта \mathcal{F} *примыкает* к особенности типа \mathcal{A} , если $X_{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$. В частности, любая особенность фронта \mathcal{F} примыкает к самой себе.

Рассмотрим разбиение множества $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ на связные компоненты многообразий $X_{\mathcal{F}}$, $X \in \mathbb{A}_+$ особенностей, примыкающих к особенностям типа \mathcal{A} . Это разбиение является C^∞ -стратификацией Уитни. Легко видеть, что эта стратификация минимальна среди всех C^∞ -стратификаций Уитни множества $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$. Если $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ – компактное подмножество в V , то указанная стратификация конечна.

1.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (Топологической) *границей* многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ называется множество

$$\partial(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{F}}.$$

Коразмерность $\text{codim } X$ особенностей типов $X \in \mathbb{A}_+$ фронта \mathcal{F} в точках границы многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ строго больше $\text{codim } \mathcal{A}$. Более того, хорошо известно следующее утверждение.

1.4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть \mathcal{F} – устойчивый фронт коранга ≤ 1 . Тогда для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ имеет место формула:

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) = \overline{(\mathcal{A} + A_1)_{\mathcal{F}}} \cup \left(\bigcup_{i=1}^p \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1})_{\mathcal{F}}} \right) \cup \\ \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq p} \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1})_{\mathcal{F}}} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем целое неотрицательное k и рассмотрим пространство многочленов P от $t \in \mathbb{R}$ с вещественными коэффициентами, которые удовлетворяют следующему условию: для любого P существуют числа $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ и многочлен $Q(t) = t^k + q_{k-1}t^{k-1} + \dots + q_0$ с вещественными коэффициентами такие, что $P(t) = Q(t) \prod_{i=1}^p (t - t_i)^{\mu_i+1}$ и $q_{k-1} = \sum_{i=1}^p (\mu_i + 1)t_i$ (т.е. сумма всех корней многочлена P равна нулю). В общей точке любой кривой γ общего положения в этом пространстве числа t_1, \dots, t_m попарно различны, а все корни многочлена Q простые и не совпадают с t_1, \dots, t_m . Но в некоторых (изолированных) точках кривой γ кратности вещественных корней многочлена P могут измениться, причем только одним из трех способов. А именно, либо соответствующий многочлен Q имеет двукратный вещественный корень (отличный от t_1, \dots, t_m), либо простой корень многочлена Q совпадает с одним из чисел t_1, \dots, t_m , либо $t_i = t_j$ для некоторых $i \neq j$.

Отсюда и следует указанная выше формула. Предложение 1.4.3 доказано.

1.4.4. ПРИМЕР. Границы многообразий особенностей коразмерности $c \leq 5$ у устойчивого фронта \mathcal{F} коранга ≤ 1 определяются следующими формулами (для простоты индекс \mathcal{F} везде опущен):

$$c = 1: \quad \partial(A_1) = (\overline{2A_1}) \cup (\overline{A_2});$$

$$c = 2: \quad \begin{aligned} \partial(2A_1) &= (\overline{3A_1}) \cup (\overline{A_2 + A_1}) \cup (\overline{A_3}); \\ \partial(A_2) &= (\overline{A_2 + A_1}) \cup (\overline{A_3}); \end{aligned}$$

$$c = 3: \quad \begin{aligned} \partial(3A_1) &= (\overline{4A_1}) \cup (\overline{A_2 + 2A_1}) \cup (\overline{A_3 + A_1}); \\ \partial(A_2 + A_1) &= (\overline{A_2 + 2A_1}) \cup (\overline{2A_2}) \cup (\overline{A_3 + A_1}) \cup (\overline{A_4}); \\ \partial(A_3) &= (\overline{A_3 + A_1}) \cup (\overline{A_4}); \end{aligned}$$

$$c = 4: \quad \begin{aligned} \partial(4A_1) &= (\overline{5A_1}) \cup (\overline{A_2 + 3A_1}) \cup (\overline{A_3 + 2A_1}); \\ \partial(A_2 + 2A_1) &= (\overline{A_2 + 3A_1}) \cup (\overline{2A_2 + A_1}) \cup (\overline{A_3 + 2A_1}) \cup (\overline{A_3 + A_2}) \cup (\overline{A_4 + A_1}); \\ \partial(2A_2) &= (\overline{2A_2 + A_1}) \cup (\overline{A_3 + A_2}) \cup (\overline{A_5}); \\ \partial(A_3 + A_1) &= (\overline{A_3 + 2A_1}) \cup (\overline{A_3 + A_2}) \cup (\overline{A_4 + A_1}) \cup (\overline{A_5}); \\ \partial(A_4) &= (\overline{A_4 + A_1}) \cup (\overline{A_5}); \end{aligned}$$

$$c = 5: \quad \begin{aligned} \partial(5A_1) &= (\overline{6A_1}) \cup (\overline{A_2 + 4A_1}) \cup (\overline{A_3 + 3A_1}); \\ \partial(A_2 + 3A_1) &= (\overline{A_2 + 4A_1}) \cup (\overline{2A_2 + 2A_1}) \cup \\ &\quad \cup (\overline{A_3 + 3A_1}) \cup (\overline{A_3 + A_2 + A_1}) \cup (\overline{A_4 + 2A_1}); \\ \partial(2A_2 + A_1) &= (\overline{2A_2 + 2A_1}) \cup (\overline{3A_2}) \cup (\overline{A_3 + A_2 + A_1}) \cup (\overline{A_4 + A_2}) \cup (\overline{A_5 + A_1}); \\ \partial(A_3 + 2A_1) &= (\overline{A_3 + 3A_1}) \cup (\overline{A_3 + A_2 + A_1}) \cup (\overline{2A_3}) \cup (\overline{A_4 + 2A_1}) \cup (\overline{A_5 + A_1}); \\ \partial(A_3 + A_2) &= (\overline{A_3 + A_2 + A_1}) \cup (\overline{2A_3}) \cup (\overline{A_4 + A_2}) \cup (\overline{A_6}); \\ \partial(A_4 + A_1) &= (\overline{A_4 + 2A_1}) \cup (\overline{A_4 + A_2}) \cup (\overline{A_5 + A_1}) \cup (\overline{A_6}); \\ \partial(A_5) &= (\overline{A_5 + A_1}) \cup (\overline{A_6}). \end{aligned}$$

Последовательное применение формулы (2.6) позволяет перечислить типы всех особенностей фронта \mathcal{F} , которые могут примыкать к особенностям данного типа \mathcal{A} . Действительно, в правой части этой формулы стоит объединение замыканий всех $(\dim \mathcal{A}_{\mathcal{F}} - 1)$ -мерных многообразий особенностей, входящих в $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$. Границы этих многообразий выражаются той же формулой через замыкания многообразий особенностей размерности $\dim \mathcal{A}_{\mathcal{F}} - 2$ и т.д.

1.4.5. ПРИМЕР. К особенностям типа A_2 фронта \mathcal{F} в трехмерном пространстве примыкают изолированные особенности типов $A_2 + A_1$ и A_3 (если они вообще есть у фронта \mathcal{F}); в четырехмерном – особенности типов $A_2 + A_1$, A_3 (они образуют кривые) и изолированные особенности типов $A_2 + 2A_1$, $2A_2$, $A_3 + A_1$, A_4 ; в пятимерном – особенности типов $A_2 + A_1$, A_3 (в этом случае они образуют двумерные поверхности),

особенности типов $A_2 + 2A_1, 2A_2, A_3 + A_1, A_4$ (образующие кривые) и изолированные особенности типов $A_2 + 3A_1, 2A_2 + A_1, A_3 + 2A_1, A_3 + A_2, A_4 + A_1, A_5$.

1.4.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$. Через $\overline{\mathcal{A}}$ обозначим минимальное подмножество в \mathbb{A}_+ такое, что:

- 1) $\mathcal{A} \in \overline{\mathcal{A}}$;
- 2) если $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \overline{\mathcal{A}}$, то

$$X + A_1 \in \overline{\mathcal{A}}, \quad X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i+1} \in \overline{\mathcal{A}}, \quad X - A_{\nu_j} - A_{\nu_k} + A_{\nu_j+\nu_k+1} \in \overline{\mathcal{A}},$$

для всех $i = 1, \dots, r, 1 \leq j < k \leq r$.

Пусть $\partial(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A} \subset \mathbb{A}_+$. Тогда, согласно формуле (2.6), замыкание $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \subset V$ многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} состоит из точек, в которых \mathcal{F} имеет особенности типов $X \in \overline{\mathcal{A}}$. Граница $\partial(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$ многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ состоит из точек, в которых \mathcal{F} имеет особенности типов $X \in \partial(\mathcal{A})$.

2 Разрешение особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1

В этом параграфе описана конструкция разрешения особенностей устойчивых волновых фронтов коранга ≤ 1 .

2.1 A_μ -преобразование фронта

Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения $f : L \rightarrow V$ коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Зафиксируем произвольное целое $\mu \geq 1$ и рассмотрим в L подмногообразии $\Phi_{A_\mu} = \overline{A_\mu^f}$.

Обозначим через $\Sigma_{\mathcal{F}}$ замыкание в многообразии Φ_{A_μ} множества точек x таких, что фронт \mathcal{F} имеет особенность типа $A_\mu + A_1$ в точке $f(x)$. Если множество $\Sigma_{\mathcal{F}}$ не пусто, то оно является (особой) гиперповерхностью в Φ_{A_μ} .

2.1.1. ПРИМЕР. Рассмотрим сначала в качестве \mathcal{F} множество \mathcal{F}_g критических значений устойчивого гладкого собственного отображения $g : M \rightarrow V$ коранга ≤ 1 , где M – гладкое многообразие той же размерности, что и V (см. пример 1.3.3). В этом случае L – множество критических точек отображения g , лежандрово отображение f является сужением g на L , а $\Phi_{A_\mu} = \overline{A_\mu^g}$ для любого $\mu \geq 1$.

Пусть $\overline{A_{\mu,0}^g}$ – замыкание подмножества в $\Phi_{A_\mu} \times M$, образованного парами (x, ξ) точек $x \in \Phi_{A_\mu} \setminus \Phi_{A_{\mu+1}}, \xi \in M \setminus \Phi_{A_1}, \xi \neq x$ таких, что $g(x) = g(\xi)$. Предположим, что $\overline{A_{\mu,0}^g} \neq \emptyset$ и рассмотрим A_μ -преобразование $[A_\mu](g) : \overline{A_{\mu,0}^g} \rightarrow \Phi_{A_\mu}, (x, \xi) \mapsto x$ отображения g .

2.1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для $\mathcal{F} = \mathcal{F}_g$ множество $\Sigma_{\mathcal{F}}$ является множеством критических значений отображения $[A_{\mu}](g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество критических значений отображения $[A_{\mu}](g)$ является замыканием множества точек $x \in \Phi_{A_{\mu}}$ таких, что $f(x) = f(\xi)$ для некоторого $\xi \in \Phi_{A_1} \setminus \Phi_{A_2}$, т.е. является множеством $\Sigma_{\mathcal{F}_g}$. Предложение 2.1.2 доказано.

Из замечаний 1.3.4 и 1.3.9, предложения 2.1.2 и теоремы 2.1.2 главы 1 (в случае $l = 0$) получаем следующее утверждение.

2.1.3. ТЕОРЕМА. Для любого \mathcal{F} особенности гиперповерхности $\Sigma_{\mathcal{F}}$ диффеоморфны особенностям устойчивых фронтов коранга ≤ 1 .

Пусть $\Sigma_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$. Тогда из теоремы 2.1.3 и замечания 1.3.11 следует, что множество $\Sigma_{\mathcal{F}}$ является устойчивым фронтом коранга ≤ 1 в многообразии $\Phi_{A_{\mu}}$. Соответствующим лежандровым многообразием служит замыкание Φ_{A_{μ}, A_1} в пространстве $PT^*(\Phi_{A_{\mu}})$ множества контактных элементов на $\Phi_{A_{\mu}}$, касающихся гиперповерхности $\Sigma_{\mathcal{F}}$ в ее гладких точках. Лежандровым отображением является сужение на многообразии Φ_{A_{μ}, A_1} естественной проекции $PT^*(\Phi_{A_{\mu}}) \rightarrow \Phi_{A_{\mu}}$.

2.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фронт $\Sigma_{\mathcal{F}} \subset \Phi_{A_{\mu}}$ называется A_{μ} -преобразованием фронта \mathcal{F} и обозначается через $[A_{\mu}](\mathcal{F})$.

Как и в случае A_{μ} -преобразования произвольного устойчивого отображения коранга ≤ 1 , особенности фронта $[A_{\mu}](\mathcal{F})$ можно связать с краевыми особенностями функций (серии B).

Рассмотрим гладкую гиперповерхность \mathcal{H} в V и целое $\kappa \geq 1$.

2.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Упорядоченная пара $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ имеет особенность типа B_{κ} в точке $y \in \mathcal{H}$, если росток $((\mathcal{H}, \mathcal{F}), y)$ этой пары диффеоморфен ростку в нуле пары в пространстве $\mathbb{R}^n = \{(q_0, \dots, q_{n-1})\}$, состоящей из

- 1) гиперплоскости $q_0 = 0$;
- 2) гиперповерхности, образованной точками, для которых многочлен

$$t^{\kappa} + q_{\kappa-1}t^{\kappa-1} + \dots + q_1t + q_0$$

от t имеет кратный вещественный корень (при $\kappa = 1$ вторая компонента ростка пары равна \emptyset).

Множество $(B_{\kappa})_{(\mathcal{H}, \mathcal{F})}$ точек $y \in \mathcal{H}$, в которых пара $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ имеет особенность типа B_{κ} , является гладким подмногообразием коразмерности κ в объемлющем многообразии V . При $\kappa > 1$ это подмногообразие является гладкой гиперповерхностью в многообразии $(A_{\kappa-1})_{\mathcal{F}}$ особенностей типа $A_{\kappa-1}$ фронта \mathcal{F} .

2.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ имеет особенность типа $(B_{\kappa}, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$ в точке $y \in \mathcal{H}$, если

- 1) росток (\mathcal{F}, y) состоит из $r + 1$ неприводимых компонент;
- 2) существует порядок $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ неприводимых компонент ростка (\mathcal{F}, y) такой, что эти компоненты имеют в точке y особенности типов $A_{\kappa-1}, A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_r}$, соответственно (при $\kappa = 1$ компонента $\mathcal{F}_0 = \emptyset$);
- 3) пара $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0)$ имеет особенность типа B_κ в точке y ;
- 4) ростки в y многообразий $(B_\kappa)_{(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0)}, (A_{\nu_1})_{\mathcal{F}_1}, \dots, (A_{\nu_r})_{\mathcal{F}_r}$ пересекаются в этой точке трансверсально.

Точки $y \in \mathcal{H}$, в которых пара $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ имеет особенность типа $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$, образуют гладкое подмногообразие коразмерности

$$\kappa + \nu_1 + \dots + \nu_r$$

в многообразии V . Оно является гладкой гиперповерхностью в многообразии особенностей типа $A_{\kappa-1} + A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ фронта \mathcal{F} .

2.1.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть M – гладкое многообразие той же размерности, что и V . Рассмотрим устойчивое гладкое собственное отображение $g : M \rightarrow V$ коранга ≤ 1 . Пусть \mathcal{F}_g – множество критических значений отображения g , а гиперповерхность \mathcal{H} лежит в образе $g(M)$ этого отображения. Тогда пара $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_g)$ имеет особенность типа $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$ в точке $y \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда существует целое $s \geq 0$ такое, что пара (\mathcal{H}, g) имеет в y особенность типа $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} + sA_0)$.

Рассмотрим теперь сужение φ_{A_μ} лежандрова отображения f на многообразии Φ_{A_μ} . В многообразии Φ_{A_μ} выделена гладкая гиперповерхность $\Phi_{A_{\mu+1}}$ и фронт $[A_\mu](\mathcal{F})$.

2.1.8. ТЕОРЕМА. Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения $f : L \rightarrow V$ коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Тогда для любого $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \mathbb{A}_+$ справедливы следующие утверждения.

1) Образ при отображении φ_{A_μ} многообразия $X_{[A_\mu](\mathcal{F})}$ особенностей типа X фронта $[A_\mu](\mathcal{F})$ является объединением многообразий особенностей типов $X + A_\mu$, $X + A_{\mu+1}$ и $X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i + \mu + 1}$, $i = 1, \dots, r$, фронта \mathcal{F} .

2) Отображение φ_{A_μ} является конечным накрытием над многообразием $X_{\mathcal{F}}$ особенностей типа X фронта \mathcal{F} . Листы этого накрытия нумеруются индексами i такими, что $\nu_i \geq \mu$.

3) Полный прообраз многообразия $X_{\mathcal{F}}$ относительно отображения φ_{A_μ} равен $\Phi_{A_\mu} \setminus (\Phi_{A_{\mu+1}} \cup [A_\mu](\mathcal{F}))$, если $X = A_\mu$, и совпадает с многообразием особенностей типа $B_{\nu-\mu}$ пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$, если $X = A_\nu$, $\nu > \mu$. В случае $r > 1$ он состоит из многообразий особенностей фронта $[A_\mu](\mathcal{F})$, имеющих тип $X - A_\mu$ (если $\{\nu_1, \dots, \nu_r\} \ni \mu$), и многообразий особенностей пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$, имеющих тип $(B_{\nu_i - \mu}, X - A_{\nu_i})$ для всех i таких, что $\nu_i > \mu$.

Это утверждение следует из замечаний 1.3.4 и 2.1.7, предложения 2.1.2 и теоремы 2.1.7 главы 1. Фактически оно представляет собой классификацию особенностей фронта $[A_\mu](\mathcal{F})$ и особенностей пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](\mathcal{F}))$ относительно диффеоморфизмов объемлющего многообразия Φ_{A_μ} .

2.1.9. ПРИМЕР. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^4 = \{(q_0, q_1, q_2, q_3)\}$ гиперповерхность \mathcal{F} , образованную точками, для которых многочлен $t^5 + q_3t^3 + q_2t^2 + q_1t + q_0$ от t имеет кратный вещественный корень. Гиперповерхность \mathcal{F} является устойчивым фронтом коранга ≤ 1 с особенностью типа A_4 в нуле $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Переменные t, q_2, q_3 определяют координаты на лежандровом многообразии $L \subset PT^*\mathbb{R}^4$, фронтом которого является \mathcal{F} относительно естественной проекции $\rho : PT^*\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

В этих координатах фронт $[A_1](\mathcal{F}) \subset L$ образован точками, для которых многочлен

$$u^3 + 5tu^2 + (10t^2 + q_3)u + 2(10t^3 + 3q_3t + q_2)$$

от u имеет кратный вещественный корень. Гиперповерхность $\Phi_{A_2} \subset L$ задается уравнением $10t^3 + 3q_3t + q_2 = 0$. Объединение $\Phi_{A_2} \cup [A_1](\mathcal{F})$ диффеоморфно гиперповерхности на рис. 2.1 (стр. 111). Гиперповерхность Φ_{A_2} представлена горизонтальной плоскостью, а росток фронта $[A_1](\mathcal{F})$ – поверхностью с ребром возврата.

На рисунке указана C^∞ -стратификация объединения $\Phi_{A_2} \cup [A_1](\mathcal{F})$ по типам особенностей фронта \mathcal{F} в образах соответствующих точек при проектировании ρ . Имеется один нульмерный страт типа A_4 , четыре одномерных страта типа $A_2 + A_1$, два одномерных страта типа A_3 , шесть двумерных стратов типа $2A_1$ и четыре двумерных страта типа A_2 . Пара $(\Phi_{A_2}, [A_1](\mathcal{F}))$ имеет особенность типа B_3 в нуле.

2.2 Основная конструкция

Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения $f : L \rightarrow V$ коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим произвольный элемент \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A}_+ и предположим, что многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} не пусто.

Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq 0$. Зафиксируем порядок чисел μ_1, \dots, μ_p . Тогда возникает последовательность гладких отображений

$$\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \xrightarrow{\psi_p} \dots \xrightarrow{\psi_3} \Phi_{A_{\mu_1}, A_{\mu_2}} \xrightarrow{\psi_2} \Phi_{A_{\mu_1}} \xrightarrow{\psi_1} V,$$

где каждое отображение ψ_i является композицией гладких собственных отображений

$$\begin{aligned} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_{\mu_i}} &\xrightarrow{g_i^{\mu_i}} \dots \\ &\xrightarrow{g_i^3} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_2} \xrightarrow{g_i^2} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_1} \xrightarrow{f_i} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

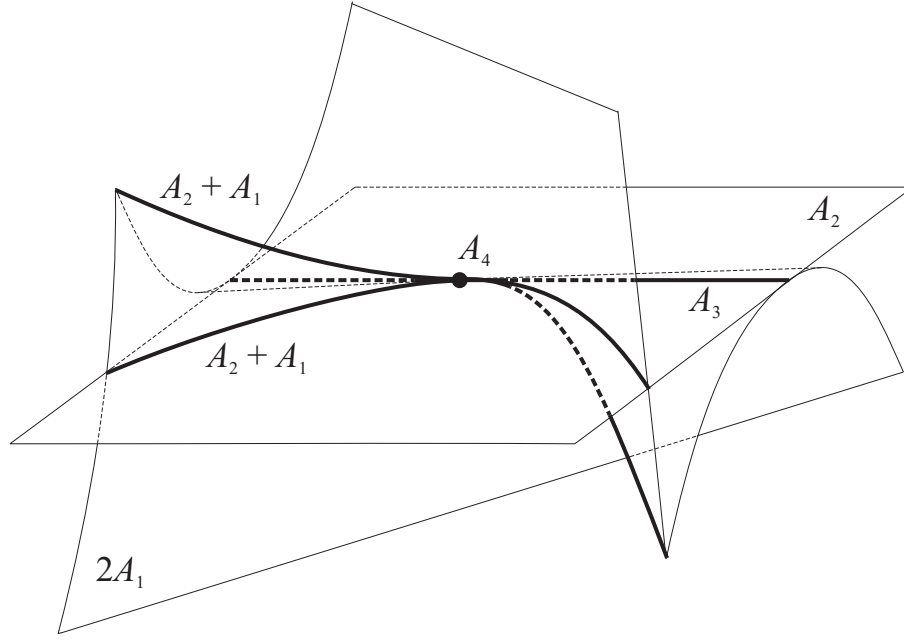


Рис. 2.1: A_1 -преобразование трехмерного фронта с особенностью типа A_4 .

Отображения f_i и g_i^j строятся индуктивно по следующей схеме.

1) В качестве $f_1 : \Phi_{A_1} \rightarrow \Phi_0$ выступает исходное лежандрово отображение $f : L \rightarrow V$ так, что $\Phi_0 = V$, $\Phi_{A_1} = L$.

2) f_i – устойчивое собственное лежандрово отображение коранга ≤ 1 . Его образ является фронтом \mathcal{F}^i в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}}$ (фронт $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$).

3) Многообразием $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_j}$ служит замыкание множества $A_j^{f_i}$ точек $x \in \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_1}$, в которых отображение f_i имеет особенность типа A_j .

4) g_i^j – вложение коразмерности 1 многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_j}$ в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_{j-1}}$.

5) Многообразие $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}, A_1}$ является замыканием в $PT^*(\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}})$ множества контактных элементов на $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$, касающихся фронта

$$\mathcal{F}^{i+1} = [A_{\mu_i}](\mathcal{F}^i) \subset \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$$

в его гладких точках. Отображением f_{i+1} является сужение на $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}, A_1}$ естественной проекции $PT^*(\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}) \rightarrow \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} : \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \rightarrow V, \quad \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_p.$$

Из предложения 1.4.3 и теоремы 2.1.8 легко вытекает следующее утверждение.

2.2.1. ТЕОРЕМА. *Образом отображения $\varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}$ является замыкание $\overline{A_{\mathcal{F}}} \subset V$ многообразия $A_{\mathcal{F}}$.*

2.2.2. ПРИМЕР. Рассмотрим множество \mathcal{F}_g критических значений устойчивого гладкого собственного отображения $g : M \rightarrow V$ коранга ≤ 1 , где M – гладкое многообразие той же размерности, что и V . Через $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}^g$ и $\varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}^g$ обозначим характеристическое многообразие и характеристическое отображение мультиособенностей типа \mathcal{A} отображения g , полученные при их разрешении в указанном порядке следования A_{μ_i} -преобразований. Тогда из предложения 2.1.2 получим по индукции.

2.2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *В случае $\mathcal{F} = \mathcal{F}_g$ многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}$ естественно диффеоморфно многообразию $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}^g$. А именно, существует диффеоморфизм $\phi : \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \rightarrow \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}^g$ такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & \xrightarrow{\phi} & \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}^g \\ \downarrow \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & & \downarrow \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}^g \\ V & \xrightarrow{id} & V \end{array}$$

коммутативна (здесь id – тождественное отображение).

Пусть $(L)^i = L \times \dots \times L$ (i раз). Рассмотрим подмногообразие $L_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$ в $(L)^i$, образованное наборами (x_1, \dots, x_i) попарно различных точек многообразия L таких, что $f(x_1) = \dots = f(x_i) \in (A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_i})_{\mathcal{F}}$ и отображение f имеет особенность типа A_{μ_s} в точке $x_s, s = 1, \dots, i$.

2.2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любого $i = 1, \dots, p$ существует гладкое вложение $\phi_i : \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}} \rightarrow (L)^i$, образом которого является замыкание $\overline{L_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}}$ многообразия $L_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$ в пространстве $(L)^i$. Вложения ϕ_1, \dots, ϕ_p включаются в коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & \xrightarrow{\psi_p} & \dots & \xrightarrow{\psi_3} & \Phi_{A_{\mu_1}, A_{\mu_2}} & \xrightarrow{\psi_2} & \Phi_{A_{\mu_1}} & \xrightarrow{\psi_1} & V \\ \downarrow \phi_p & & & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow id \\ (L)^p & \xrightarrow{h_p} & \dots & \xrightarrow{h_3} & (L)^2 & \xrightarrow{h_2} & L & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

где $h_i : (L)^i \rightarrow (L)^{i-1}, (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1})$ – отображение забывания последней координаты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 1$ это очевидно (см. пример 1.3.2). Предположим, что утверждение верно при всех $p \leq k - 1$ и докажем его для $p = k$.

Пусть \mathcal{L} – замыкание в пространстве PT^*V множества контактных элементов на многообразии V , касающихся фронта \mathcal{F} в его гладких точках. Это гладкое лежандрово подмногообразие в V . Фронтом этого подмногообразия относительно проекции (2.4) является \mathcal{F} .

Рассмотрим многообразие $PT^*(L_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_{k-1}}})}$. Оно образовано упорядоченными наборами $(x_1, \dots, x_{k-1}, \pi)$, где $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in L_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_{k-1}}}$, а π – гиперплоскость в касательном пространстве $T_y((A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{k-1}})_{\mathcal{F}}) \subset T_y V$ к подмногообразию $(A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{k-1}})_{\mathcal{F}} \subset V$ в точке $y = f(x_1)$.

Пусть $\Phi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}^0} = \varphi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}}^{-1}((A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_k})_{\mathcal{F}})$. Это открытое всюду плотное подмногообразие в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}}$. По предположению индукции, оно состоит из наборов $(x_1, \dots, x_{k-1}, \pi) \in PT^*(L_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_{k-1}}})}$, для каждого из которых существует (и притом единственная) точка $x_k \in L$ такая, что $(x_1, \dots, x_k) \in L_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}}$ и

$$\pi = \widehat{\pi} \cap T_y((A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_{k-1}})_{\mathcal{F}}),$$

где $y = f(x_1)$, а $\widehat{\pi}$ – гиперплоскость в $T_y V$, определяемая следующим условием: образ ростка (L, x_k) при отображении f является образом ростка $(\mathcal{L}, (\widehat{\pi}, y))$ при отображении (2.4). Отображение

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, \pi) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$$

определяет диффеоморфизм многообразия $\Phi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}^0}$ на $L_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}}$.

Остается лишь проверить, что замыкание $\overline{L_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}}}$ является гладким подмногообразием в $(L)^k$ и что указанный диффеоморфизм продолжается до диффеоморфизма многообразия $\Phi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}}$ на $\overline{L_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_k}}}}$. Но эти факты локальные и поэтому следуют из предложения 3.1.3 главы 1 и предложения 2.2.3 выше. Предложение 2.2.4 доказано.

2.2.5. ТЕОРЕМА. *Пары $(\Phi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_p}}}, \varphi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_p}}})$, полученные при разных упорядочениях набора (μ_1, \dots, μ_p) кратностей особенностей типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ фронта \mathcal{F} , естественно диффеоморфны. А именно, для любой перестановки $\tau : (1, \dots, p) \rightarrow (1, \dots, p)$ существует диффеоморфизм $\phi_{\tau} : \Phi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_p}}} \rightarrow \Phi_{A_{\mu_{\tau(1)}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}}$ такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_p}}} & \xrightarrow{\phi_{\tau}} & \Phi_{A_{\mu_{\tau(1)}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}} \\ \downarrow \varphi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_p}}} & & \downarrow \varphi_{A_{\mu_{\tau(1)}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}} \\ V & \xrightarrow{id} & V \end{array}$$

коммутативна.

Это утверждение следует из предложения 2.2.4. Действие диффеоморфизма ϕ_{τ} определяется перестановкой $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)})$ сомножителей в произведении $(L)^p$.

Теорема 2.2.5 делает корректным следующее определение.

2.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_p}}}$ и гладкое отображение $\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_{A_{\mu_1, \dots, A_{\mu_p}}}$ называются *характеристическими* для особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} .

Описанная выше конструкция, сопоставляющая элементу $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$ пару $(\Phi_{\mathcal{A}}, \varphi_{\mathcal{A}})$, называется *разрешением* этих особенностей.

2.2.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathcal{A} = 0$, то $\Phi_{\mathcal{A}} = V$, а $\varphi_{\mathcal{A}} : \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$ – тождественное отображение.

Основное свойство описанной конструкции заключается в следующем.

2.2.8. ТЕОРЕМА. *Если особенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ фронта \mathcal{F} примыкает к особенности типа \mathcal{A} , то отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ является конечным накрытием над многообразием $X_{\mathcal{F}}$. Кратность этого накрытия зависит только от \mathcal{A} и X (т.е. она не зависит от n, V, \mathcal{F}) и от порядка A_{μ_i} -преобразований.*

Это утверждение является очевидным следствием теорем 2.1.8 и 2.2.5.

2.2.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кратность отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ над многообразием $X_{\mathcal{F}}$ особенностей типа X фронта \mathcal{F} называется *индексом* особенности типа X относительно особенности типа \mathcal{A} и обозначается через $I_{\mathcal{A}}(X)$.

2.2.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Между характеристическими многообразиями всевозможных особенностей фронта \mathcal{F} , отвечающими, к тому же, различным упорядочениям кратностей этих особенностей, имеется большое количество отображений. Они образуют огромную коммутативную диаграмму. В ней есть замечательная поддиаграмма.

А именно, разрешим особенности каждого типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ последовательностью A_{μ_i} -преобразований в невозрастающем порядке следования кратностей μ_1, \dots, μ_p . Тогда возникнет ориентированный граф $A(\mathcal{F})$, у которого:

- 1) вершины соответствуют многообразию V и характеристическим многообразиям $\Phi_{\mathcal{A}}$, полученным в результате указанного разрешения;
- 2) ориентированные ребра отвечают лежандровым отображениям f_i и вложениям g_i^j из диаграмм вида (2.7).

Легко видеть, что граф $A(\mathcal{F})$ является деревом (с корнем V). Цепи этого дерева представляют характеристические отображения особенностей фронта \mathcal{F} , определяемые данным разрешением.

2.2.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дерево $A(\mathcal{F})$ называется *характеристической башней* особенностей фронта \mathcal{F} .

Башня $A(\mathcal{F})$ изображена на рис. 2.2. Многоточия обозначают поддеревья в $A(\mathcal{F})$, порожденные вершинами $\Phi_{\mathcal{A}}$, которые соответствуют элементам \mathcal{A} с $\text{codim } \mathcal{A} > 6$. Горизонтальные ребра отвечают лежандровым отображениям f_i , а вертикальные – вложениям g_i^j . Из каждой вершины $\Phi_{\mathcal{A}}$ выходит ровно одно ребро, а входит не более двух. Если в вершину $\Phi_{\mathcal{A}}$ входят два ребра, то либо $\mathcal{A} = A_{\mu}$, либо $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + A_{\mu}$, где все кратности особенности типа $\tilde{\mathcal{A}}$ строго больше μ .

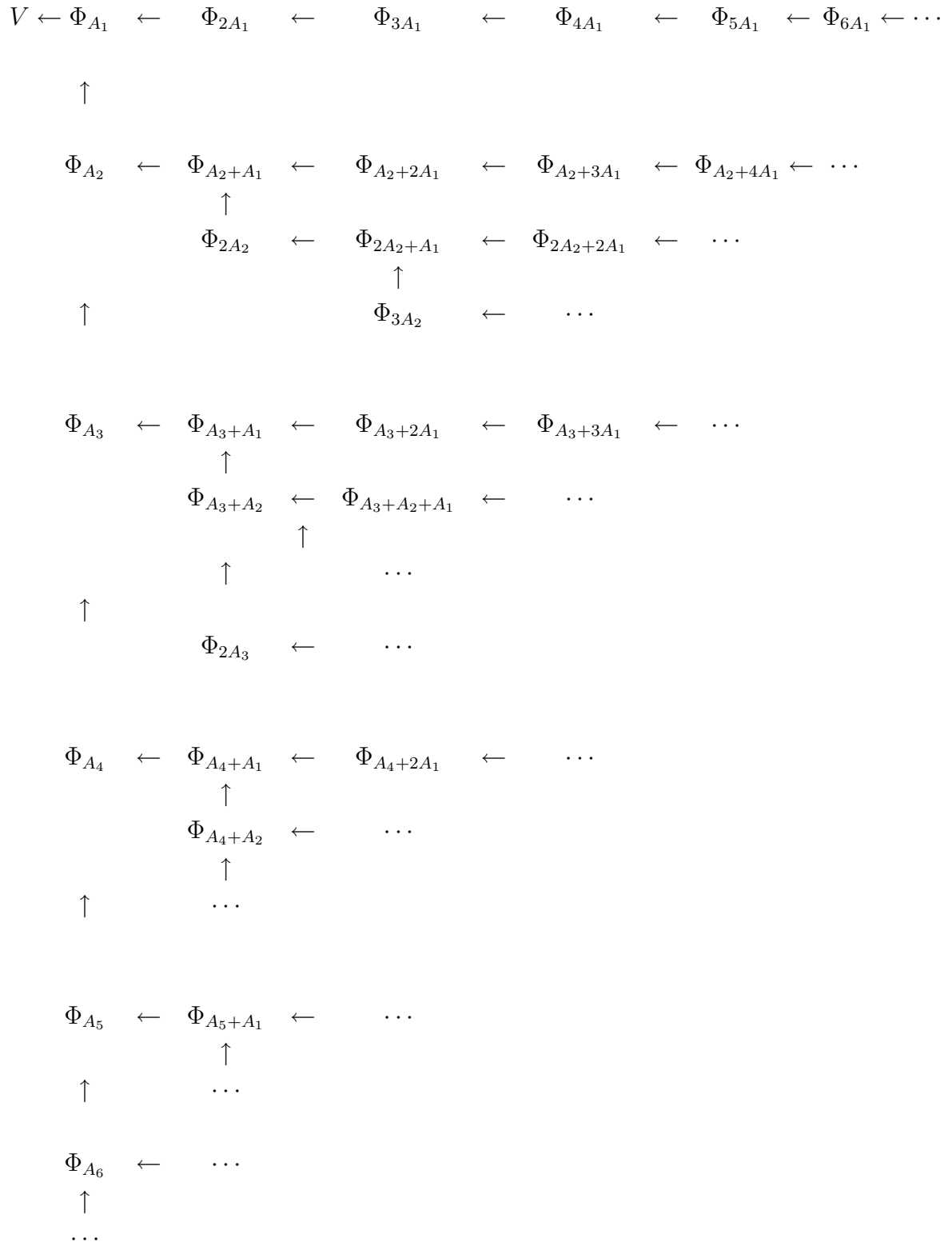


Рис. 2.2: Характеристическая башня особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1 .

2.3 Вычисление относительных индексов особенностей фронта

Из теорем 2.2.5 и 2.1.8 вытекает простая рекуррентная формула для вычисления относительных индексов особенностей устойчивого фронта $\mathcal{F} \subset V$ коранга ≤ 1 .

2.3.1. ТЕОРЕМА. *Индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ особенности типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \mathbb{A}_+$ фронта \mathcal{F} относительно особенности типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ вычисляется рекуррентно, исходя из следующих условий:*

- 1) если $\mu^* = \max\{\mu_1, \dots, \mu_p\} > \nu^* = \max\{\nu_1, \dots, \nu_r\}$, то $I_{\mathcal{A}}(X) = 0$;
- 2) если $\mu^* \leq \nu^*$, то

$$I_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{\nu_i = \mu^*, \mu^* + 1} I_{\mathcal{A} - A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i}) + \sum_{\nu_i > \mu^* + 1} I_{\mathcal{A} - A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i - \mu^* - 1}),$$

где $I_0(Y) = 1$ для любого $Y \in \mathbb{A}_+$.

2.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Особенность типа X устойчивого фронта \mathcal{F} примыкает к особенности типа \mathcal{A} тогда и только тогда, когда $I_{\mathcal{A}}(X) \neq 0$.

2.3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Для всех $\mathcal{A}, X \in \mathbb{A}_+$ число $I_{\mathcal{A}}(X)$, вычисляемые по теореме 2.3.1, равно числу $I_{\mathcal{A}}(X)$, вычисляемому по теореме 3.2.1 из главы 1.

В частности, индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ лежандровых особенностей типов $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ и $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ малых коразмерностей можно быстро вычислить при помощи дерева пары $\mathcal{A} \vdash X$ (см. раздел 3.2 главы 1).

2.4 Особенности канонической стратификации характеристического многообразия особенностей фронта

Здесь описывается естественная стратификация характеристического многообразия особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1 по типам особенностей, которые имеет фронт в образах точек характеристического многообразия при их характеристическом отображении.

Пусть \mathcal{F} – устойчивый фронт коранга ≤ 1 в n -мерном многообразии V . Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ такой, что $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, и рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} .

2.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Канонической стратификацией* многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ называется разбиение этого многообразия на связные компоненты (страты) полных прообразов $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(X_{\mathcal{F}})$ многообразий $X_{\mathcal{F}}$ по всем типам X особенностей фронта \mathcal{F} .

Каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является, очевидно, его C^∞ -стратификацией.

2.4.2. ТЕОРЕМА. *Каноническая стратификация характеристического многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} является C^∞ -стратификацией Уитни.*

Это утверждение следует из теоремы 4.2.5 главы 1 и предложения 2.2.3. Более того, из предложения 2.2.3, а также из теоремы 4.2.2 главы 1 следует, что с точностью до диффеоморфизмов многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ особенности канонической стратификации этого многообразия исчерпываются особенностями типов $\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$, где $\mathcal{S}_{\kappa}^p = \mathcal{S}_{\kappa}^p(0)$. Подробное описание этих особенностей в нетривиальном случае $\mathcal{A} \neq 0$ приведено ниже.

Зафиксируем произвольную точку ξ на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$.

2.4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть фронт \mathcal{F} имеет особенность типа \mathcal{A}_ν в точке $y = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi)$. Тогда $\kappa_p = \nu - \text{codim } \mathcal{A} \geq p - 1$ и каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ имеет особенность типа $\mathcal{S}_{\kappa_p}^p$ в точке ξ . А именно, на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ существуют локальные координаты*

$$(t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p-p}^p, z_1, \dots, z_{n-\nu}) \in \mathbb{R}^{n-\text{codim } \mathcal{A}}$$

с началом в точке ξ такие, что справедливы следующие утверждения.

1) Росток в ξ канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является ростком в нуле стратификации пространства $\mathbb{R}^{n-\text{codim } \mathcal{A}}$ относительно набора следующих подмножеств:

а) фронта \mathcal{F}^{p+1} , образованного точками, для которых функция

$$S_p(t_p, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p-p}^p) = t_p^{\kappa_p-p+1} + \sum_{i=0}^{\kappa_p-p} Q_i^p t_p^i$$

как многочлен от t_p имеет кратный вещественный корень (входит в набор только при $p < \kappa_p$);

б) p гладких гиперповерхностей \mathcal{H}_i^p , заданных уравнениями

$$S_p|_{t_i+\dots+t_p=0} = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

(входят в набор только при $p \leq \kappa_p$);

с) $p(p-1)/2$ гиперплоскостей $\Pi_{i,j}^p$, заданных уравнениями

$$t_i + \dots + t_{j-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq p$$

(входят в набор только при $p > 1$).

2) Ростки гиперповерхностей \mathcal{F}^{p+1} , \mathcal{H}_i^p , $\Pi_{i,j}^p$ в нуле являются полными прообразами ростков множеств

$$\overline{(\mathcal{A} + A_1)_{\mathcal{F}}}, \quad \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1})_{\mathcal{F}}}, \quad \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1})_{\mathcal{F}}}$$

в точке y , соответственно, относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ .

2.4.4. ПРИМЕР. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^5$ – устойчивый фронт коранга ≤ 1 с особенностью типа A_5 в некоторой точке y . Рассмотрим характеристическое многообразие Φ_{2A_1} и характеристическое отображение φ_{2A_1} особенностей типа $2A_1$ этого фронта. Каноническая стратификация многообразия Φ_{2A_1} имеет особенность типа \mathcal{S}_3^2 в точке $\xi = \varphi_{2A_1}^{-1}(y)$.

Росток этой стратификации в точке ξ диффеоморфен ростку в нуле стратификации трехмерного пространства относительно набора четырех поверхностей, изображенных на рис. 1.7 (стр. 60) в гладких координатах примера 4.1.7 главы 1. Здесь фронт \mathcal{F}^3 представлен горизонтальной плоскостью. Гиперповерхности \mathcal{H}_1^2 и \mathcal{H}_2^2 представлены параболическими цилиндрами. Гиперплоскость $\Pi_{1,2}^2$ изображена вертикальной плоскостью.

Страты положительной коразмерности обозначены типами особенностей фронта \mathcal{F} в образах соответствующих точек при отображении φ_{2A_1} . (Невидимый) нульмерный страт A_5 примыкает к десяти одномерным стратам, среди которых два страта типа A_4 , два страта типа $2A_2$ и шесть стратов типа $A_3 + A_1$. Он также примыкает к двадцати двум двумерным стратам, среди которых 4 страта типа A_3 , 6 стратов типа $3A_1$ и 12 стратов типа $A_2 + A_1$.

2.4.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть фронт \mathcal{F} имеет особенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ в точке $y = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi)$. Рассмотрим неприводимые компоненты $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ ростка (\mathcal{F}, y) и предположим, что эти компоненты имеют в точке y особенности типов $A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_r}$, соответственно. Тогда найдется разбиение

$$I = \bigcup_{j=1}^r I_j$$

множества $I = \{1, \dots, p\}$ на попарно непересекающиеся подмножества I_j такие, что справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $j = 1, \dots, r$ множество I_j состоит из $p_j \geq 0$ чисел, упорядоченных по возрастанию, причем

$$\kappa_j = \nu_j - \sum_{i \in I_j} \mu_i \geq p_j - 1.$$

2) На многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ существуют локальные координаты

$$(\lambda_1^1, \dots, \lambda_{\kappa_1}^1, \dots, \lambda_1^r, \dots, \lambda_{\kappa_r}^r, z_1, \dots, z_{n-\text{codim } X}) \in \mathbb{R}^{n-\text{codim } X}$$

с началом в точке ξ такие, что росток в ξ канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является ростком в нуле стратификации пространства $\mathbb{R}^{n-\text{codim } \mathcal{A}}$ относительно набора $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ следующих подмножеств.

Если $p_j = 0$, то Σ_j – фронт \mathcal{F}_j^* , образованный точками, для которых функция

$$S_j(t_j, \lambda_1^j, \dots, \lambda_{\kappa_j}^j) = t_j^{\kappa_j+1} + \lambda_{\kappa_j}^j t_j^{\kappa_j-1} + \dots + \lambda_2^j t_j + \lambda_1^j$$

как многочлен от t_j имеет кратный вещественный корень. Если $p_j > 0$, то Σ_j – набор, состоящий из следующих гиперповерхностей:

а) фронта \mathcal{F}_j^* , образованного точками, для которых функция

$$S_j(t_j, \lambda_{p_j}^j, \dots, \lambda_{\kappa_j}^j) = t_j^{\kappa_j-p_j+1} + \sum_{i=p_j}^{\kappa_j} \lambda_i^j t_j^{i-p_j}$$

как многочлен от t_j имеет кратный вещественный корень (входит в набор только при $p_j < \kappa_j$);

б) p_j гладких гиперповерхностей $\mathcal{H}_i^j, i = 1, \dots, p_j$, заданных уравнениями

$$\mathcal{H}_i^j : S_j|_{t_j = -(\lambda_i^j + \dots + \lambda_{p_j-1}^j)} = 0, \quad i < p_j; \quad \mathcal{H}_{p_j}^j : S_j|_{t_j=0} = 0$$

(входят в набор только при $p_j \leq \kappa_j$);

с) $p_j(p_j - 1)/2$ гиперплоскостей $\Pi_{i,k}^j$, заданных уравнениями

$$\lambda_i^j + \dots + \lambda_{k-1}^j = 0, \quad 1 \leq i < k \leq p_j$$

(входят в набор только при $p_j > 1$).

3) Ростки гиперповерхностей $\mathcal{F}_j^*, \mathcal{H}_i^j, \Pi_{i,k}^j$ в нуле являются полными прообразами ростков множеств

$$\overline{(\mathcal{A}^j + A_1)_{\mathcal{F}_j}}, \quad \overline{(\mathcal{A}^j - A_{\mu(i,j)} + A_{\mu(i,j)+1})_{\mathcal{F}_j}}, \quad \overline{(\mathcal{A}^j - A_{\mu(i,j)} - A_{\mu(k,j)} + A_{\mu(i,j)+\mu(k,j)+1})_{\mathcal{F}_j}}$$

в точке y , соответственно, относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ . Здесь $\mathcal{A}^j = \sum_{s \in I_j} A_{\mu(s,j)}$, а индекс (s, j) является s -м числом в наборе I_j .

4) Росток объединения $\mathcal{F}^* = \bigcup_{j=1}^r \mathcal{F}_j^*$ в нуле является полным прообразом ростка множества

$$\overline{(\mathcal{A} + A_1)_{\mathcal{F}}}$$

в точке y относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ .

Предложения 2.4.3 и 2.4.5 являются очевидными следствиями предложений 4.4.1 и 4.4.4 главы 1, а также предложения 2.2.3.

3 Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей устойчивого фронта коранга ≤ 1

В этом параграфе найдены полные системы универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей компактного устойчивого фронта коранга ≤ 1 (отдельно для случаев нечетной и четной размерности объемлющего фронт пространства).

3.1 Вычисление соотношений между эйлеровыми характеристиками

Пусть \mathcal{F} – устойчивый фронт коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ такой, что

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p \leq n.$$

Рассмотрим многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} и замыкание $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ этого многообразия в объемлющем многообразии V . Предположим, что $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, и возьмем характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} . Если множество $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ компактно, то многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ замкнуто. При этом определена эйлерова характеристика $\chi_{\mathcal{F}}(X) = \chi(X_{\mathcal{F}})$ многообразия $X_{\mathcal{F}}$ особенностей любого типа $X \in \mathbb{A}_+$ такого, что $X_{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$.

3.1.1. ТЕОРЕМА. *Пусть множество $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ компактно. Тогда эйлерова характеристика $\chi(\Phi_{\mathcal{A}})$ характеристического многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} вычисляется через эйлеровы характеристики $\chi_{\mathcal{F}}(X)$ многообразий $X_{\mathcal{F}}$, $X \in \mathbb{A}_+$ особенностей, примыкающих к особенностям типа \mathcal{A} , по формуле*

$$(-1)^{\text{codim } \mathcal{A}} \chi(\Phi_{\mathcal{A}}) = \sum_X (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi_{\mathcal{F}}(X).$$

Это утверждение следует из теорем 2.2.1, 2.2.8, 2.4.2 и формулы (1.7).

3.1.2. СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ имеет нечетную размерность и множество $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ компактно. Тогда эйлеровы характеристики $\chi_{\mathcal{F}}(X)$ многообразий $X_{\mathcal{F}}$, $X \in \mathbb{A}_+$ особенностей фронта \mathcal{F} , примыкающих к особенностям типа \mathcal{A} , связаны соотношением*

$$\sum_X (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi_{\mathcal{F}}(X) = 0. \quad (2.8)$$

Это утверждение следует из теоремы 3.1.1 и того факта, что при указанных условиях $\chi(\Phi_{\mathcal{A}}) = 0$ (эйлерова характеристика любого гладкого замкнутого нечетномерного многообразия равна нулю).

3.1.3. ПРИМЕР. Устойчивый компактный фронт \mathcal{F} коранга ≤ 1 в n -мерном многообразии может иметь особенности только двух типов в коразмерности 2, а именно, особенности типов $2A_1$ и A_2 .

1) Граница многообразия особенностей типа $2A_1$ фронта \mathcal{F} состоит из всех особенностей коразмерности больше двух (см. пример 1.4.4). Поэтому для любого нечетного $n \geq 3$ формула (2.8) и теорема 3.2.5 главы 1 приводят к следующему соотношению между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей фронта \mathcal{F} :

$$2\chi_{\mathcal{F}}(2A_1) = - \sum_{\text{codim } X > 2} (-1)^{\text{codim } X} [r^2(X) - \#(A_1|X) - \#(A_2|X)] \chi_{\mathcal{F}}(X).$$

Здесь $r(X)$ – число r неприводимых компонент особенности типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$, $\#(A_i|X)$ – количество индексов $j \in \{1, \dots, r\}$ таких, что $\nu_j = i$.

2) Граница многообразия особенностей типа A_2 состоит из всех особенностей коразмерности больше двух, кроме особенностей типа rA_1 . Поэтому для любого нечетного $n \geq 3$ имеем

$$\chi_{\mathcal{F}}(A_2) = - \sum_{\text{codim } X > 2} (-1)^{\text{codim } X} [r(X) - \#(A_1|X)] \chi_{\mathcal{F}}(X).$$

В дальнейшем, ради упрощения громоздких выражений в таких формулах, используется более простое обозначение для эйлеровой характеристики $\chi_{\mathcal{F}}(X)$ многообразия $X_{\mathcal{F}}$. А именно, эйлерову характеристику многообразия $(k_1A_{\mu_1} + \dots + k_pA_{\mu_p})_{\mathcal{F}}$, где k_1, \dots, k_p неотрицательные целые числа, а μ_1, \dots, μ_p попарно различны, мы обозначаем через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$.

3.1.4. ТЕОРЕМА. Пусть \mathcal{F} – компактный устойчивый фронт коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ такого, что многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} имеет нечетную размерность, эйлерова характеристика $\chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ является линейной комбинацией

$$\chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) = \sum_X K_{\mathcal{A}}(X) \chi_{\mathcal{F}}(X) \quad (2.9)$$

(с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_{\mathcal{F}}(X)$ четномерных многообразий $X_{\mathcal{F}}$ особенностей типов $X \in \mathbb{A}_+$ таких, что $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$. Если многообразие V замкнуто, то это соотношение справедливо и для $\mathcal{A} = 0$.

2) Каждый коэффициент $K_{\mathcal{A}}(X)$ в формуле (2.9) зависит только от \mathcal{A} и X (т.е. не зависит от V и \mathcal{F}). А именно,

$$K_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{i=0}^s (-1)^i P_i(\mathcal{A}, X), \quad (2.10)$$

где $s = (\text{codim } X - \text{codim } \mathcal{A} - 1)/2$, а $P_i(\mathcal{A}, X)$ равно сумме произведений вида

$$\prod_{j=0}^i \frac{I_{Y_j}(Y_{j+1})}{I_{Y_j}(Y_j)}$$

по всем упорядоченным наборам $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{i+1})$ элементов полугруппы \mathbb{A}_+ таким, что $Y_0 = \mathcal{A}, Y_{i+1} = X, \text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } Y_1 < \dots < \text{codim } Y_i < \text{codim } X$ и

$$\text{codim } Y_1 \equiv \dots \equiv \text{codim } Y_i \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}.$$

3) Для любых \mathcal{A} и X таких, что $\text{codim } X$ превышает $\text{codim } \mathcal{A}$ на нечетное положительное число, существует целое $r \geq 0$ такое, что число $K_{\mathcal{A}}(X)2^r$ целое.

4) Списки формул (2.9) для всевозможных $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$ при $s = \text{codim } \mathcal{A} \leq 6$ приведены в таблице 7 для нечетного $n \leq 7$ и в таблице 8 для четного $n \leq 6$.

5) Эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F})$ фронта \mathcal{F} является линейной комбинацией

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_X \mathcal{K}(X) \chi_{\mathcal{F}}(X) \quad (2.11)$$

эйлеровых характеристик $\chi_{\mathcal{F}}(X)$ четномерных многообразий $X_{\mathcal{F}}$ особенностей типов $X \in \mathbb{A}_+$, где $\text{codim } X \leq n$. Каждый коэффициент $\mathcal{K}(X)$ этой комбинации зависит только от X . А именно,

$$\mathcal{K}(X) = 1 - \sum_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{A}}(X),$$

где сумма берется по всем ненулевым элементам \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A}_+ таким, что $\text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } X$ и $\text{codim } \mathcal{A} \equiv n + 1 \pmod{2}$.

6) Формула (2.11) имеет следующий вид:

при нечетном $n \leq 7$,

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{F}) = & \chi_{(1)}^{(1)} - \frac{1}{2}[\chi_{(3)}^{(1)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 4\chi_{(1)}^{(3)}] \\ & + \frac{1}{2}[5\chi_{(5)}^{(1)} + 7\chi_{(4,1)}^{(1,1)} + 5\chi_{(3,2)}^{(1,1)} \\ & + 10\chi_{(3,1)}^{(1,2)} + 8\chi_{(2,1)}^{(2,1)} + 16\chi_{(2,1)}^{(1,3)} + 32\chi_{(1)}^{(5)}] \\ & - \frac{1}{4}[63\chi_{(7)}^{(1)} + 98\chi_{(6,1)}^{(1,1)} + 76\chi_{(5,2)}^{(1,1)} + 152\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + 75\chi_{(4,3)}^{(1,1)} \\ & + 116\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} + 232\chi_{(4,1)}^{(1,3)} + 114\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 88\chi_{(3,2)}^{(1,2)} \\ & + 176\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} + 352\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + 136\chi_{(2,1)}^{(3,1)} + 272\chi_{(2,1)}^{(2,3)} \\ & + 544\chi_{(2,1)}^{(1,5)} + 1088\chi_{(1)}^{(7)}]; \end{aligned} \quad (2.12)$$

при четном $n \leq 6$,

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{F}) = & -\chi\binom{2}{1} + \chi\binom{1}{4} + \chi\binom{1,1}{3,1} + \chi\binom{2}{2} + 2\chi\binom{1,2}{2,1} + 5\chi\binom{4}{1} \\
& - 4\chi\binom{1}{6} - 7\chi\binom{1,1}{5,1} - 5\chi\binom{1,1}{4,2} - 11\chi\binom{1,2}{4,1} - 5\chi\binom{2}{3} - 8\chi\binom{1,1,1}{3,2,1} \\
& - 17\chi\binom{1,3}{3,1} - 6\chi\binom{3}{2} - 13\chi\binom{2,2}{2,1} - 28\chi\binom{1,4}{2,1} - 61\chi\binom{6}{1};
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Доказательство теоремы 3.1.4 аналогично доказательству теоремы 5.2.1 главы 1.

3.1.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3.1.1 (при $\mathcal{A} = A_1$) позволяет переписать формулу (2.12) в виде

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{F}) = & \chi(L) + \frac{1}{2}[\chi\binom{1}{3} + 2\chi\binom{3}{1}] \\
& - \frac{1}{2}[\chi\binom{1}{5} + 3\chi\binom{1,1}{4,1} + \chi\binom{1,1}{3,2}] \\
& + 4\chi\binom{1,2}{3,1} + 2\chi\binom{2,1}{2,1} + 6\chi\binom{1,3}{2,1} + 18\chi\binom{5}{1}] \\
& + \frac{1}{4}[21\chi\binom{1}{7} + 34\chi\binom{1,1}{6,1} + 24\chi\binom{1,1}{5,2} + 60\chi\binom{1,2}{5,1} + 25\chi\binom{1,1}{4,3} \\
& + 40\chi\binom{1,1,1}{4,2,1} + 100\chi\binom{1,3}{4,1} + 42\chi\binom{2,1}{3,1} + 28\chi\binom{1,2}{3,2} \\
& + 68\chi\binom{1,1,2}{3,2,1} + 164\chi\binom{1,4}{3,1} + 44\chi\binom{3,1}{2,1} + 108\chi\binom{2,3}{2,1} \\
& + 260\chi\binom{1,5}{2,1} + 620\chi\binom{7}{1}],
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\chi(L)$ – эйлерова характеристика многообразия L , фронтом которого является \mathcal{F} .

3.1.6. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $n = 3$ равенство (2.14) дает известную формулу Изумии-Марара [72]:

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(L) + \frac{1}{2}\chi_{\mathcal{F}}(A_3) + \chi_{\mathcal{F}}(3A_1).$$

3.1.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\mathcal{A}, X \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$. Предположим, что $\text{codim } X$ превышает $\text{codim } \mathcal{A}$ на нечетное положительное число. Тогда для любого достаточно большого $n \equiv \text{codim } \mathcal{A} + 1 \pmod{2}$ имеем

$$K_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{i \geq 0} K_{\mathcal{A}+iA_0}^0(X)$$

($K_{\mathcal{A}+iA_0}^0(X)$ – числа из теоремы 5.3.1 главы 1).

Аналогично, $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}^0(X)$ для всех $X \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$. В частности, из формулы (2.13) легко следует формула (1.23).

3.2 Полнота системы соотношений (2.9)

Пусть \mathcal{W} – множество всех компактных устойчивых фронтов коранга ≤ 1 во всевозможных гладких замкнутых многообразиях. Рассмотрим произвольный класс фронтов $W \subseteq \mathcal{W}$. Через B обозначим подмножество в полугруппе \mathbb{A}_+ , образованное типами особенностей, которые могут быть у фронтов класса W . Тогда каждому фронту $\mathcal{F} \in W$ можно сопоставить точку $\chi_{\mathcal{F}}$ в вещественном векторном пространстве E_B финитных функций $B \rightarrow \mathbb{R}$. Эта точка называется *характеристикой* фронта \mathcal{F} . Значение $\chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ характеристики $\chi_{\mathcal{F}}$ на любом элементе $\mathcal{A} \in B$ равно эйлеровой характеристике $\chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$ многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} .

Рассмотрим подмножество Ω в E_B , образованное характеристиками $\chi_{\mathcal{F}}$ всех фронтов $\mathcal{F} \in W$. Предположим, что ненулевая линейная функция $\alpha : E_B \rightarrow \mathbb{R}$ принимает во всех точках из Ω одинаковое значение $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда мы будем говорить, что имеется *универсальное* (для фронтов класса W) *линейное соотношение* $\alpha(\chi) = \beta$ между значениями функций $\chi \in \Omega$. Система универсальных линейных соотношений называется *полной*, если соотношения этой системы определяют минимальное аффинное подпространство в E_B , содержащее множество Ω .

Пусть $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$ – класс вычетов по модулю 2 в кольце целых чисел. Класс вычетов по модулю 2, содержащий целое число k , мы будем обозначать через $\langle k \rangle$. Через $W(\mathcal{P})$ обозначим класс фронтов $\mathcal{F} \in \mathcal{W}$, лежащих в пространствах, размерность которых принадлежит \mathcal{P} . Для этого класса фронтов соответствующее подмножество $B \subseteq \mathbb{A}_+$ совпадает со всей полугруппой \mathbb{A}_+ .

Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ такой, что

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p \notin \mathcal{P}.$$

Он определяет линейную функцию $\alpha_{\mathcal{A}} : E_{\mathbb{A}_+} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha_{\mathcal{A}} : \chi \mapsto \alpha_{\mathcal{A}}(\chi) = -\chi(\mathcal{A}) + \sum_X K_{\mathcal{A}}(X)\chi(X),$$

где сумма берется по всем $X \in \mathbb{A}_+$ таким, что $\text{codim } X > \text{codim } \mathcal{A}$ и $\text{codim } X \in \mathcal{P}$, а коэффициенты $K_{\mathcal{A}}(X)$ определяются формулой (2.10). В силу теоремы 3.1.4 функция $\alpha_{\mathcal{A}}$ задает универсальное линейное соотношение $\alpha_{\mathcal{A}}(\chi_{\mathcal{F}}) = 0$ между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей фронтов $\mathcal{F} \in W(\mathcal{P})$. Таким образом, справедлива

3.2.1. ТЕОРЕМА. Для каждого $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$ формула (2.9) определяет систему

$$\mathfrak{A}(\mathcal{P}) = \{\alpha_{\mathcal{A}}(\chi_{\mathcal{F}}) = 0, \mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \mid \text{codim } \mathcal{A} \notin \mathcal{P}\}$$

универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей фронтов \mathcal{F} класса $W(\mathcal{P})$.

Как и в случае произвольных устойчивых отображений коранга ≤ 1 , основной нашей целью является следующее утверждение.

3.2.2. ТЕОРЕМА. Системы

$$\mathfrak{A}(\langle 0 \rangle), \quad \mathfrak{A}(\langle 1 \rangle)$$

являются полными системами универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей фронтов классов

$$W(\langle 0 \rangle), \quad W(\langle 1 \rangle),$$

соответственно.

3.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное подпространство $E(\mathcal{P}) \subset E_{\mathbb{A}_+}$, $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$, определяемое системой уравнений $\mathfrak{A}(\mathcal{P})$, называется *универсальным пространством* для характеристик фронтов класса $W(\mathcal{P})$.

3.2.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Эйлеровы характеристики многообразий особенностей фронта ограничены также условиями типа неравенства и делимости (см. [20], [27]). Например, компактный фронт общего положения в \mathbb{R}^3 имеет четное число особенностей типа $A_2 + A_1$ (см. [6]). Все ограничения такого сорта нам не известны.

Зафиксируем произвольное целое $n \geq 1$. Через $W_n \subseteq W$ обозначим класс устойчивых компактных фронтов коранга ≤ 1 в гладких замкнутых многообразиях размерности n . Теорема 3.2.2 вытекает, очевидно, из того, что система соотношений (2.9) полна для фронтов из любого фиксированного класса W_n . А именно, зафиксируем порядок на полугруппе \mathbb{A}_+ .

3.2.5. ТЕОРЕМА. Составим список типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$ особенностей, которые могут быть у фронта класса W_n . Предположим, что этот список состоит из d элементов. Пусть Ω подмножество в \mathbb{R}^d , образованное (конечными) последовательностями эйлеровых характеристик $\chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ многообразий $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типов \mathcal{A} из этого списка у фронтов $\mathcal{F} \in W_n$. Тогда система соотношений вида (2.9) задает минимальное аффинное подпространство в \mathbb{R}^d , содержащее множество Ω .

Для доказательства теоремы 3.2.5 составим список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ всех элементов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$ таких, что

$$\text{codim } \mathcal{A} \leq n, \quad \text{codim } \mathcal{A} \equiv n \pmod{2}$$

(многообразия особенностей соответствующих типов у фронтов рассматриваемого класса четномерны). Каждому фронту $\mathcal{F} \in W_n$ сопоставим вектор

$$v(\mathcal{F}) = (\chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}^1), \dots, \chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}^N)) \in \mathbb{R}^N$$

из эйлеровых характеристик $\chi_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}^i)$ многообразий $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^i$ особенностей типов \mathcal{A}^i , $i = 1, \dots, N$. Через G обозначим подмножество в \mathbb{R}^N , образованное векторами $v(\mathcal{F})$ для всех фронтов $\mathcal{F} \in W_n$.

Теорема 3.2.5 следует из того, что множество G содержит полугруппу с N линейно независимыми образующими. Последнее с очевидностью вытекает из теоремы 5.5.9 главы 1 на основании того факта, что множество критических значений устойчивого отображения коранга ≤ 1 многообразий одинаковой размерности является устойчивым волновым фронтом коранга ≤ 1 .

3.2.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что при $n > 1$ теорема 3.2.5 верна и в классе неприводимых устойчивых компактных фронтов коранга ≤ 1 (см. [53]). Неприводимый фронт в одномерном многообразии состоит из одной точки.

Аналогичные результаты справедливы и для классов устойчивых компактных фронтов коранга ≤ 1 в произвольных гладких многообразиях. Необходимо лишь не включать нуль во все соответствующие подмножества полугруппы \mathbb{A}_+ .

4 Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей на крае связной компоненты дополнения к устойчивому фронту коранга ≤ 1

Многочисленные работы разных авторов посвящены изучению особенностей границ различных связных компонент дополнения к фронту общего положения (см. [7], [10], [17], [33] и др.). В настоящем параграфе найдены некоторые условия существования этих особенностей.

4.1 Правильные связные компоненты дополнения к фронту

Пусть Σ – замкнутое непустое подмножество в гладком n -мерном многообразии V , причем $\Sigma \neq V$. Рассмотрим произвольную связную компоненту U дополнения $V \setminus \Sigma$ к Σ . Через \bar{U} обозначим замыкание множества U в V .

4.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Компонента U называется *правильной*, если подмножество $\bar{U} \subset V$ является C^0 -подмногообразием с краем $\partial\bar{U} = \bar{U} \setminus U$, т.е. каждая точка $y \in \partial\bar{U}$ обладает окрестностью $O(y)$ в V такой, что тройка $(y, O(y) \cap \bar{U}, O(y))$ гомеоморфна тройке $(0, \mathbb{R}_-^n, \mathbb{R}^n)$, где $\mathbb{R}_-^n = \{(q_0, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid q_0 \leq 0\}$.

Если компонента U правильная, то множество $\partial U = \partial\bar{U}$ называется ее *краем*.

4.1.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Дополнение к Σ может не иметь правильных связных компонент. Рассмотрим, например, окружность-меридиан Σ на стандартном торе $(S^1)^2$ в \mathbb{R}^3 . Дополнение $(S^1)^2 \setminus \Sigma$ имеет единственную связную компоненту (гомеоморфную цилиндру). Эта компонента не является правильной.

Пусть μ – целое положительное число, $\mu \leq n$, и $\Delta_\mu(n)$ – гиперповерхность в $\mathbb{R}^n = \{(q_0, \dots, q_{n-1})\}$, образованная точками, для которых многочлен

$$t^{\mu+1} + q_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + q_1t + q_0 \tag{2.15}$$

от t имеет кратный вещественный корень. Эта гиперповерхность является устойчивым фронтом коранга ≤ 1 .

Рассмотрим связные компоненты дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\mu(n)$. Компонента, соответствующая многочленам (2.15), которые имеют $\mu + 1$ попарно различных вещественных корней, называется *гиперболической*. Компонента, соответствующая многочленам с минимально возможным числом вещественных корней (т.е. с одним вещественным корнем, если μ четное, и без таковых, если μ нечетное), называется *обобщенно-эллиптической* (или просто *эллиптической* в случае нечетного μ).

Следующее утверждение хорошо известно.

4.1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\mu(n)$ имеет ровно две правильные связанные компоненты, а именно, гиперболическую и обобщенно-эллиптическую.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связные компоненты U_k дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\mu(n)$ нумеруются числом k вещественных корней многочлена (2.15). Если $1 < k < \mu$, то замыкание компоненты U_k содержит многочлен $P(t)$, который имеет $k-2$ простых вещественных корня и два различных вещественных корня t_1, t_2 кратности 2. В любой сколь угодно малой окрестности $O(P)$ этого многочлена (в пространстве многочленов вида (2.15)) найдутся многочлены $P_1(t)$ и $P_2(t)$ такие, что

$$P_1(t_1)P''(t_1) < 0, \quad P_1(t_2)P''(t_2) > 0, \quad P_2(t_1)P''(t_1) > 0, \quad P_2(t_2)P''(t_2) < 0.$$

Многочлены P_1, P_2 лежат в компоненте U_k , но их нельзя соединить непрерывной кривой в разности $O(P) \setminus \Delta_\mu(n)$, если окрестность $O(P)$ достаточно мала. Предложение 4.1.3 доказано.

Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения в многообразии V . Рассмотрим произвольную правильную связную компоненту U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к \mathcal{F} . Край этой компоненты обозначим через Γ .

4.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предположим, что фронт \mathcal{F} имеет особенность типа A_μ в данной точке $y \in \Gamma$. Тогда компонента U называется *гиперболической (обобщенно-эллиптической, эллиптической) в точке y* , если росток в y пары (\mathcal{F}, \bar{U}) в V диффеоморфен ростку в начале координат пары в \mathbb{R}^n , состоящей из фронта $\Delta_\mu(n)$ и замыкания гиперболической (обобщенно-эллиптической, эллиптической, соответственно) связной компоненты дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \Delta_\mu(n)$.

4.1.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mu = 1$, то компонента U является одновременно гиперболической и эллиптической в точке y .

4.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Компонента U называется *гиперболической (обобщенно-эллиптической, эллиптической)*, если

1) фронт \mathcal{F} имеет на Γ только особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$;

2) каждая точка $y \in \Gamma$ обладает окрестностью $O(y) \subset V$, в которой множество $U \cap O(y)$ является пересечением гиперболических (обобщенно-эллиптических, эллиптических, соответственно) связных компонент дополнения в $O(y)$ к неприводимым компонентам ростка (\mathcal{F}, y) .

Нас будут интересовать в основном только гиперболические и эллиптические связные компоненты дополнения $V \setminus \mathcal{F}$.

4.1.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Компонента U является эллиптической тогда и только тогда, когда фронт \mathcal{F} имеет на Γ только особенности типов $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ с нечетными кратностями μ_1, \dots, μ_p .

Из предложения 4.1.3 следует, что ростки краев двух гиперболических (обобщенно-эллиптических, эллиптических, соответственно) связных компонент дополнения к фронту устойчивого собственного лежандрова отображения диффеоморфны тогда и только тогда, когда диффеоморфны ростки самого этого фронта в соответствующих точках. Для связных компонент разных типов это неверно.

4.1.8. ПРИМЕР. Росток в нуле поверхности пирамиды ласточкина хвоста $\Delta_3(3)$ в \mathbb{R}^3 (т.е. края гиперболической связной компоненты дополнения $\mathbb{R}^3 \setminus \Delta_3(3)$) не диффеоморфен ростку в нуле оборванного ласточкина хвоста (края эллиптической связной компоненты указанного дополнения; см. рис. 0.2 на стр. 18).

Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$.

4.1.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Край Γ гиперболической (обобщенно-эллиптической, эллиптической) связной компоненты дополнения к фронту \mathcal{F} имеет *особенность типа \mathcal{A}* в точке $y \in \Gamma$, если фронт \mathcal{F} имеет в y особенность типа \mathcal{A} . Числа

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p, \quad \text{deg } \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$$

называются *коразмерностью* и *степенью* этой особенности (соответственно).

Рассмотрим многообразие $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} . Множество $\mathcal{A}_{\Gamma} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cap \Gamma$ точек $y \in \Gamma$, в которых фронт \mathcal{F} имеет особенность типа \mathcal{A} является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в V . Связные компоненты этого многообразия являются связными компонентами многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

4.1.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие \mathcal{A}_{Γ} называется *многообразием особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} на Γ* .

Если Γ – край гиперболической (обобщенно-эллиптической, эллиптической) связной компоненты дополнения $V \setminus \mathcal{F}$, то \mathcal{A}_{Γ} называется *многообразием особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ* .

4.2 Вычисление соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей

Пусть \mathcal{F} – устойчивый фронт коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Выберем произвольную правильную связную компоненту U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ и рассмотрим ее край Γ .

Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ и предположим, что многообразие \mathcal{A}_{Γ} особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} на Γ не пусто. Через $\overline{\mathcal{A}_{\Gamma}}$ обозначим замыкание многообразия \mathcal{A}_{Γ} в многообразии V . Например, $\overline{(A_1)_{\Gamma}} = \Gamma$.

4.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Особенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ фронта \mathcal{F} на Γ *примыкает* к особенности типа \mathcal{A} , если $X_\Gamma \subseteq \overline{\mathcal{A}_\Gamma}$. *Границей* многообразия \mathcal{A}_Γ называется множество $\partial(\mathcal{A}_\Gamma) = \overline{\mathcal{A}_\Gamma} \setminus \mathcal{A}_\Gamma$.

Рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}} : \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} . Через $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma$ обозначим полный прообраз подмножества $\overline{\mathcal{A}_\Gamma} \subset V$ относительно отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$. Если множество $\overline{\mathcal{A}_\Gamma}$ компактно, то компактно множество $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma$ и определена эйлерова характеристика $\chi_\Gamma(X) = \chi(X_\Gamma)$ многообразия X_Γ особенностей любого типа $X \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ такого, что $X_\Gamma \subseteq \overline{\mathcal{A}_\Gamma}$.

4.2.2. ТЕОРЕМА. *Предположим, что множество $\overline{\mathcal{A}_\Gamma}$ компактно. Тогда эйлерова характеристика $\chi(\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma)$ множества $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma$ вычисляется через эйлеровы характеристики $\chi_\Gamma(X)$ многообразий X_Γ , $X \in \mathbb{A}_+$ особенностей, примыкающих к особенностям типа \mathcal{A} , по формуле*

$$(-1)^n \chi(\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma) = \sum_X (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi_\Gamma(X).$$

Это утверждение следует из теорем 2.2.1, 2.2.8, 2.4.2 и формулы (1.7).

4.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество

$$\partial_{out}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) = \overline{(\mathcal{A} + A_1)_{\mathcal{F}}} \subset V$$

называется *внешней границей* многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} . Множество

$$C_{in}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \setminus \partial_{out}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$$

называется *внутренним замыканием* многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

Следующее утверждение доказано в разделе 4.7.

4.2.4. ТЕОРЕМА. *Подмножество $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma \subset \Phi_{\mathcal{A}}$ является C^0 -подмногообразием с краем. Каждая связная компонента этого подмногообразия представляет собой замыкание правильной связной компоненты дополнения $\Phi_{\mathcal{A}} \setminus \varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\partial_{out}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}))$.*

Рассмотрим множества

$$\partial_{out}(\mathcal{A}_\Gamma) = \partial_{out}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) \cap \Gamma, \quad C_{in}(\mathcal{A}_\Gamma) = C_{in}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) \cap \Gamma.$$

Они называются *внешней границей* и *внутренним замыканием* многообразия \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} на Γ (соответственно).

4.2.5. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда гиперповерхность Γ является краем эллиптической связной компоненты дополнения $V \setminus \mathcal{F}$, множество $C_{in}(\mathcal{A}_\Gamma)$ состоит из многообразий X_Γ особенностей типов X , у которых $\deg X = \deg \mathcal{A}$; множество $\partial_{out}(\mathcal{A}_\Gamma)$ состоит из многообразий X_Γ особенностей типов X таких, что $\deg X > \deg \mathcal{A}$.

4.2.6. ТЕОРЕМА. Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим произвольную правильную связную компоненту дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ и ее край Γ . Предположим, что фронт \mathcal{F} имеет на Γ только особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$. Тогда для любого \mathcal{A} такого, что многообразия \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} фронта \mathcal{F} на Γ имеет нечетную размерность, а его замыкание $\overline{\mathcal{A}_\Gamma} \subset V$ компактно, эйлеровы характеристики $\chi_\Gamma(X)$ многообразий X_Γ , $X \in \mathbb{A}_+$ особенностей, примыкающих к особенностям типа \mathcal{A} , связаны соотношением

$$\sum_{X: X_\Gamma \subseteq C_{in}(\mathcal{A}_\Gamma)} (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi_\Gamma(X) = -\frac{1}{2} \sum_{X: X_\Gamma \subseteq \partial_{out}(\mathcal{A}_\Gamma)} (-1)^{\text{codim } X} I_{\mathcal{A}}(X) \chi_\Gamma(X). \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности можно считать, что Γ – край правильной связной компоненты дополнения к устойчивому фронту коранга ≤ 1 в V . Поэтому, в силу теоремы 4.2.4, подмножество $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma \subset \Phi_{\mathcal{A}}$ является C^0 -подмногообразием с краем $\partial(\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma) = \varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(\partial_{out}(\mathcal{A}_\Gamma))$. Это подмножество компактно, поскольку таковым является множество $\overline{\mathcal{A}_\Gamma}$. Каноническая стратификация многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ индуцирует на $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma$ конечную C^∞ -стратификацию Уитни. Следовательно, множество $\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma$ имеет конечную триангуляцию, а значит, $\chi(\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma) = 1/2\chi(\partial(\Phi_{\mathcal{A}}^\Gamma))$ (эйлерова характеристика компактного триангулируемого нечетномерного C^0 -многообразия с краем равна половине эйлеровой характеристики края). Теперь формула (2.16) вытекает из теоремы 4.2.2. Теорема 4.2.6 доказана.

4.2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Γ край гиперболической или эллиптической связной компоненты U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к устойчивому фронту \mathcal{F} коранга ≤ 1 в гладком многообразии V . Тогда для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ имеет место формула

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{A}_\Gamma) = \overline{(\mathcal{A} + A_1)_\Gamma} \cup \left(\bigcup_{i=1}^p \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_i+1})_\Gamma} \right) \cup \\ \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq p} \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1})_\Gamma} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

если компонента U гиперболическая, и

$$\partial(\mathcal{A}_\Gamma) = \overline{(\mathcal{A} + A_1)_\Gamma} \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq p} \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i+\mu_j+1})_\Gamma} \right), \quad (2.18)$$

если компонента U эллиптическая.

Формула (2.17) следует из формулы (2.6). Чтобы получить формулу (2.18), необходимо повторить рассуждения из доказательства предложения 1.4.3 для пространства неотрицательных многочленов вида $P(t)$.

Последовательное применение формулы (2.17) (или (2.18)) позволяет перечислить типы всех особенностей фронта \mathcal{F} на гиперповерхности Γ , которые могут примыкать к особенностям данного типа \mathcal{A} .

4.2.8. ПРИМЕР. Рассмотрим край Γ эллиптической связной компоненты дополнения к устойчивому компактному фронту \mathcal{F} коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии. Фронт \mathcal{F} может иметь на Γ особенности только двух типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ с коразмерностью $\text{codim } \mathcal{A} = 4$. А именно, особенности типов $4A_1$ и $A_3 + A_1$.

1) Множество $C_{in}((4A_1)_\Gamma)$ состоит из многообразий особенностей типов $4A_1, A_3 + 2A_1, 2A_3, A_5 + A_1, A_7$. Множество $\partial_{out}((4A_1)_\Gamma)$ состоит из многообразий особенностей типов $5A_1, 6A_1, A_3 + 3A_1, 7A_1, A_3 + 4A_1, 2A_3 + A_1, A_5 + 2A_1$ и особенностей всех типов $X \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ с коразмерностью $\text{codim } X > 7$. Поэтому для $n = 5$ или 7 формула (2.16) и теорема 3.2.5 главы 1 приводят к следующему соотношению между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей гиперповерхности Γ :

$$\begin{aligned} 24\chi_{(1)}^{(4)} &= 12\chi_{(3,1)}^{(1,2)} + 60\chi_{(1)}^{(5)} - 4\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - 6\chi_{(3)}^{(2)} - 30\chi_{(3,1)}^{(1,3)} - 180\chi_{(1)}^{(6)} \\ &+ \chi_{(7)}^{(1)} + 10\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + 15\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 96\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + 420\chi_{(1)}^{(7)}. \end{aligned}$$

2) Множество $C_{in}((A_3 + A_1)_\Gamma)$ состоит из многообразий особенностей типов $A_3 + A_1$ и A_5 . Множество $\partial_{out}((A_3 + A_1)_\Gamma)$ состоит из многообразий особенностей типа $A_3 + 2A_1$ и особенностей всех типов $X \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ с коразмерностью $\text{codim } X > 5$, кроме особенностей типа kA_1 . Поэтому для $n = 5$ или 7 имеем

$$\begin{aligned} 2\chi_{(3,1)}^{(1,1)} &= 2\chi_{(5)}^{(1)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,2)} - 2\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - 2\chi_{(3)}^{(2)} - 3\chi_{(3,1)}^{(1,3)} \\ &+ \chi_{(7)}^{(1)} + 3\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + 4\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 4\chi_{(3,1)}^{(1,4)}. \end{aligned}$$

Здесь, как и далее, эйлерова характеристика многообразия $(k_1A_{\mu_1} + \dots + k_pA_{\mu_p})_\Gamma$, где k_1, \dots, k_p неотрицательные целые числа, а μ_1, \dots, μ_p попарно различны, обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$.

4.2.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для любых элементов \mathcal{A} и X полугруппы \mathbb{A}_+ положим

$$\delta(\mathcal{A}, X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \in \overline{(\mathcal{A} + A_1)}; \\ 0, & \text{если } X \notin \overline{(\mathcal{A} + A_1)} \end{cases}$$

(подмножество $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{A}_+$ определено в замечании 1.4.6).

4.2.10. ТЕОРЕМА. Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим произвольную гиперболическую связную компоненту U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к \mathcal{F} . Предположим, что край Γ компоненты U компактен. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ такого, что многообразие \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ имеет нечетную размерность, эйлерова характеристика $\chi_\Gamma(\mathcal{A})$ многообразия \mathcal{A}_Γ является линейной комбинацией

$$\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \sum_X K_{\mathcal{A}}^{\text{hyp}}(X) \chi_\Gamma(X) \quad (2.19)$$

(с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_\Gamma(X)$ четномерных многообразий X_Γ особенностей типов $X \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ таких, что $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$.

2) Каждый коэффициент $K_{\mathcal{A}}^{\text{hyp}}(X)$ в формуле (2.19) зависит только от \mathcal{A} и X (т.е. не зависит от V , \mathcal{F} и выбора компоненты U среди гиперболических связных компонент дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ с компактными краями). А именно,

$$K_{\mathcal{A}}^{\text{hyp}}(X) = \sum_{i=0}^s (-1)^i P_i^{\text{hyp}}(\mathcal{A}, X), \quad (2.20)$$

где $s = (\text{codim } X - \text{codim } \mathcal{A} - 1)/2$, а $P_i^{\text{hyp}}(\mathcal{A}, X)$ равно сумме произведений вида

$$\prod_{j=0}^i \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta(Y_j, Y_{j+1})} \frac{I_{Y_j}(Y_{j+1})}{I_{Y_j}(Y_j)}$$

по всем упорядоченным наборам $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{i+1})$ элементов полугруппы \mathbb{A}_+ таким, что $Y_0 = \mathcal{A}, Y_{i+1} = X$,

$$\text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } Y_1 < \dots < \text{codim } Y_i < \text{codim } X,$$

$$\text{codim } Y_1 \equiv \dots \equiv \text{codim } Y_i \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}.$$

3) Для любых \mathcal{A} и X таких, что $\text{codim } X$ превышает $\text{codim } \mathcal{A}$ на нечетное положительное число, существует целое $r \geq 0$ такое, что число $K_{\mathcal{A}}^{\text{hyp}}(X)2^r$ целое.

4) Списки формул (2.19) для всевозможных $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ при $s = \text{codim } \mathcal{A} \leq 6$ приведены в таблице 9 для нечетного $n \leq 7$ и в таблице 10 для четного $n \leq 6$.

5) Если n нечетное, то эйлерова характеристика $\chi(\Gamma)$ гиперповерхности Γ является линейной комбинацией

$$\chi(\Gamma) = \sum_X \mathcal{K}^{\text{hyp}}(X) \chi_\Gamma(X) \quad (2.21)$$

эйлеровых характеристик $\chi_\Gamma(X)$ четномерных многообразий X_Γ особенностей типов $X \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$, где $\text{codim } X \leq n$. Каждый коэффициент $\mathcal{K}^{\text{hyp}}(X)$ этой комбинации зависит только от X . А именно,

$$\mathcal{K}^{\text{hyp}}(X) = 1 - \sum_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{A}}^{\text{hyp}}(X),$$

где сумма берется по всем ненулевым элементам \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A}_+ таким, что $\text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } X$ и число $\text{codim } \mathcal{A}$ четное.

6) Для нечетного $n \leq 7$ формула (2.21) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi(\Gamma) = & \chi(1) - \frac{1}{2}[\chi(3) + \chi(2,1) + \chi(3)] \\ & + \chi(5) + \chi(4,1) + \chi(3,2) + \chi(3,1) + \chi(2,1) + \chi(2,1) + \chi(2,1) + \chi(5) \\ & - \frac{1}{4}[17\chi(7) + 15\chi(6,1) + 17\chi(5,2) + 17\chi(5,2) + 16\chi(4,3) \\ & + 15\chi(4,2,1) + 17\chi(4,1) + 13\chi(3,1) + 15\chi(3,2) + 15\chi(3,2,1) \\ & + 17\chi(3,1) + 17\chi(2,1) + 17\chi(2,1) + 17\chi(2,1) + 17\chi(1)]. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbb{A}_{\text{odd}} \subset \mathbb{A}_+$ – свободная абелева полугруппа по сложению, образующими которой служат символы $A_1, A_3, \dots, A_{2k+1}, \dots$ (с нечетными индексами). Тогда

$$\delta(\mathcal{A}, X) = \text{sign}(\text{deg } X - \text{deg } \mathcal{A})$$

для любых $\mathcal{A}, X \in \mathbb{A}_{\text{odd}}$.

4.2.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Весом элемента $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ называется число

$$w(\mathcal{A}) = (-1)^{[p/2]} w(A_{\mu_1}) \dots w(A_{\mu_p}), \quad (2.22)$$

где

$$w(A_{2k+1}) = \frac{1}{2k+1} \binom{2k+1}{k}$$

и $[x]$ – целая часть числа x .

4.2.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Число $w(A_{2k+1})$ является k -м числом Каталана, $k \geq 0$, т.е. числом различных правильных скобочных структур из k пар скобок (см. [31]).

4.2.13. ТЕОРЕМА. Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лемандрова отображения в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим произвольную эллиптическую связную компоненту U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к \mathcal{F} . Предположим, что край Γ компоненты U компактен. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ такого, что многообразие \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ имеет нечетную размерность, эйлерова характеристика $\chi_\Gamma(\mathcal{A})$ многообразия \mathcal{A}_Γ является линейной комбинацией

$$\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \sum_X K_{\mathcal{A}}^{\text{elp}}(X) \chi_\Gamma(X) \quad (2.23)$$

(с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_\Gamma(X)$ четномерных многообразий X_Γ особенностей типов $X \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ таких, что $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$.

2) Каждый коэффициент $K_{\mathcal{A}}^{elp}(X)$ в формуле (2.23) зависит только от \mathcal{A} и X (т.е. не зависит от V , \mathcal{F} и выбора компоненты U среди эллиптических связных компонент дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ с компактными краями). А именно,

$$K_{\mathcal{A}}^{elp}(X) = \sum_{i=0}^s (-1)^i P_i^{elp}(\mathcal{A}, X), \quad (2.24)$$

где $s = (\text{codim } X - \text{codim } \mathcal{A} - 1)/2$, а $P_i^{elp}(\mathcal{A}, X)$ равно сумме произведений вида

$$\prod_{j=0}^i \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta(Y_j, Y_{j+1})} \frac{I_{Y_j}(Y_{j+1})}{I_{Y_j}(Y_j)}$$

по всем упорядоченным наборам $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{i+1})$ элементов полугруппы \mathbb{A}_{odd} таким, что $Y_0 = \mathcal{A}, Y_{i+1} = X$,

$$\text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } Y_1 < \dots < \text{codim } Y_i < \text{codim } X,$$

$$\text{codim } Y_1 \equiv \dots \equiv \text{codim } Y_i \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}.$$

3) Для любых \mathcal{A} и X таких, что $\text{codim } X$ превышает $\text{codim } \mathcal{A}$ на нечетное положительное число, существует целое $r \geq 0$ такое, что число $K_{\mathcal{A}}^{elp}(X)2^r$ целое.

4) Списки формул (2.23) для всевозможных $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$ при $s = \text{codim } \mathcal{A} \leq 10$ приведены в таблице 11 для нечетного $n \leq 11$ и в таблице 12 для четного $n \leq 10$.

5) Если n нечетное, то эйлерова характеристика $\chi(\Gamma)$ гиперповерхности Γ является линейной комбинацией

$$\chi(\Gamma) = \sum_X \mathcal{K}^{elp}(X) \chi_{\Gamma}(X) \quad (2.25)$$

эйлеровых характеристик $\chi_{\Gamma}(X)$ четномерных многообразий X_{Γ} особенностей типов $X \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$, где $\text{codim } X \leq n$. Каждый коэффициент $\mathcal{K}^{elp}(X)$ этой комбинации зависит только от X . А именно,

$$\mathcal{K}^{elp}(X) = 1 - \sum_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{A}}^{elp}(X),$$

где сумма берется по всем ненулевым элементам \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A}_{odd} таким, что $\text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } X$, а число $\text{codim } \mathcal{A}$ четное.

6) Для нечетного $n \leq 11$ формула (2.21) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\chi(\Gamma) = & \chi(1) + \frac{1}{2}[\chi(3) - \chi(1^3)] + \frac{1}{2}[\chi(5) + 2\chi(1^5)] \\
& + \frac{1}{4}[\chi(7) - 2\chi(5,1) - \chi(3,1^2) - 3\chi(3,1^4) - 17\chi(1^7)] \\
& + \frac{1}{4}[3\chi(9) + 4\chi(7,1) + 3\chi(5,3,1) \\
& \quad + 13\chi(5,1^4) + 2\chi(3) + 8\chi(3,1^3) + 30\chi(3,1^6) + 124\chi(1^9)] \\
& - \frac{1}{4}[7\chi(11) + 22\chi(9,1) + 16\chi(7,3,1) + 56\chi(7,1^4) + 17\chi(5,1^2) \\
& \quad + 12\chi(5,3) + 42\chi(5,3,1) + 152\chi(5,1^6) + 30\chi(3,1^2) \\
& \quad + 106\chi(3,1^5) + 378\chi(3,1^8) + 1382\chi(1^{11})].
\end{aligned} \tag{2.26}$$

7) Пусть n нечетное ($n \leq 17$) и $\chi_\Gamma(\mathcal{A}) = 0$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ такого, что $\deg \mathcal{A} < n$. Тогда

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}}: \text{codim } \mathcal{A} = n} w(\mathcal{A}) \chi_\Gamma(\mathcal{A}) = \frac{n+1}{2} w(A_n) \chi(\Gamma). \tag{2.27}$$

Формулы (2.27) для $n \leq 13$ получаются из формул таблицы 13 при $\chi_0 = \chi(\Gamma)$.

Доказательство теорем 4.2.10 и 4.2.13 аналогично доказательству теоремы 5.2.1 главы 1. А именно, используются формулы (2.17), (2.18) и (2.16). Утверждение 3 (в обеих теоремах) следует из предложения 4.4.3 ниже. Упомянутые выше таблицы получены на компьютере. Формула (2.27) найдена путем анализа первых шести формул таблицы 13 (полученных первоначально вручную!) и проверена на компьютере при всех нечетных $n \leq 17$.

4.2.14. ГИПОТЕЗА. Формула (2.27) справедлива для любого (нечетного) n .

4.2.15. ЗАМЕЧАНИЕ. При нечетном $n \geq 11$ число элементов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ таких, что $\deg \mathcal{A} < n$, меньше числа элементов \mathcal{A} с нечетной коразмерностью $\text{codim } \mathcal{A} < n$. Тем не менее, если выполнены условия утверждения 7 теоремы 4.2.13, то эйлерова характеристика $\chi(\Gamma)$ гиперповерхности Γ выражается исключительно через числа изолированных особенностей этой гиперповерхности.

4.2.16. ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы (2.26) легко следует формула (1.22). Действительно, рассмотрим устойчивое гладкое отображение $f : M \rightarrow V$ коранга ≤ 1 замкнутых многообразий одинаковой нечетной размерности n . Дополнение $V \setminus f(M)$ к его образу $f(M)$ является эллиптической связной компонентой дополнения к множеству критических значений отображения f (если не пусто).

Пусть Γ – край этой компоненты. Тогда $\chi(f(M)) = 1/2\chi(\Gamma)$. Следовательно, в случае нечетного n правая часть формулы (1.21) равна половине правой части формулы (2.25).

4.3 Полнота систем соотношений (2.19) и (2.23)

В этом разделе край всякой гиперболической (эллиптической) связной компоненты дополнения к устойчивому компактному фронту коранга ≤ 1 мы будем называть *hyp*-гиперповерхностью (*elp*-гиперповерхностью, соответственно) в гладком многообразии, объемлющем фронт. Через \mathcal{W}^{hyp} (через \mathcal{W}^{elp}) обозначим множество всех *hyp*-гиперповерхностей (*elp*-гиперповерхностей, соответственно) во всех гладких многообразиях для всевозможных фронтов указанного типа.

Рассмотрим произвольный класс гиперповерхностей $W \subseteq \mathcal{W}^{hyp}$ ($W \subseteq \mathcal{W}^{elp}$). Через B обозначим подмножество в $\mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ ($\mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$, соответственно), образованное типами особенностей, которые могут быть у гиперповерхностей класса W . Тогда каждой гиперповерхности $\Gamma \in W$ можно сопоставить точку χ_Γ в вещественном векторном пространстве E_B финитных функций $B \rightarrow \mathbb{R}$. Эта точка называется *характеристикой* гиперповерхности Γ . Значение $\chi_\Gamma(\mathcal{A})$ характеристики χ_Γ на любом элементе $\mathcal{A} \in B$ равно эйлеровой характеристике $\chi(\mathcal{A}_\Gamma)$ многообразия \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ .

Рассмотрим подмножество Ω в E_B , образованное характеристиками χ_Γ всех гиперповерхностей $\Gamma \in W$. Предположим, что ненулевая линейная функция $\alpha : E_B \rightarrow \mathbb{R}$ принимает во всех точках из Ω одинаковое значение $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда мы будем говорить, что имеется *универсальное* (для гиперповерхностей класса W) *линейное соотношение* $\alpha(\chi) = \beta$ между значениями функций $\chi \in \Omega$. Система универсальных линейных соотношений называется *полной*, если соотношения этой системы определяют минимальное аффинное подпространство в E_B , содержащее множество Ω .

Пусть $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$ – класс вычетов по модулю 2 в кольце целых чисел. Как и раньше, класс вычетов по модулю 2, содержащий целое число k , мы будем обозначать через $\langle k \rangle$. Через $W^{hyp}(\mathcal{P})$ (через $W^{elp}(\mathcal{P})$) обозначим класс гиперповерхностей $\Gamma \in \mathcal{W}^{hyp}$ ($\Gamma \in \mathcal{W}^{elp}$, соответственно), лежащих в пространствах, размерность которых принадлежит \mathcal{P} . Для гиперповерхностей класса $W^{hyp}(\mathcal{P})$ ($W^{elp}(\mathcal{P})$) соответствующее подмножество $B \subseteq \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ ($B \subseteq \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$) совпадает с $\mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ ($\mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$).

Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ такой, что

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p \notin \mathcal{P}.$$

Он определяет линейную функцию $\alpha_{\mathcal{A}}^{hyp} : E_{\mathbb{A}_+ \setminus \{0\}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha_{\mathcal{A}}^{hyp} : \chi \mapsto \alpha_{\mathcal{A}}^{hyp}(\chi) = -\chi(\mathcal{A}) + \sum_X K_{\mathcal{A}}^{hyp}(X)\chi(X),$$

где сумма берется по всем $X \in \mathbb{A}_+$ таким, что $\text{codim } X > \text{codim } \mathcal{A}$ и $\text{codim } X \in \mathcal{P}$, а коэффициенты $K_{\mathcal{A}}^{hyp}(X)$ определяются формулой (2.20). В силу теоремы 4.2.10 функция $\alpha_{\mathcal{A}}^{hyp}$ задает универсальное линейное соотношение $\alpha_{\mathcal{A}}^{hyp}(\chi_\Gamma) = 0$ между эйлеровы-

ми характеристиками многообразий особенностей гиперповерхностей $\Gamma \in W^{hyp}(\mathcal{P})$. Таким образом, справедлива следующая

4.3.1. ТЕОРЕМА. Для каждого $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$ формула (2.19) определяет систему

$$\mathfrak{A}^{hyp}(\mathcal{P}) = \left\{ \alpha_{\mathcal{A}}^{hyp}(\chi_{\Gamma}) = 0, \mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\} \mid \text{codim } \mathcal{A} \notin \mathcal{P} \right\}$$

универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей гиперповерхностей Γ класса $W^{hyp}(\mathcal{P})$.

Аналогично, рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$ с коразмерностью $\text{codim } \mathcal{A} \notin \mathcal{P}$. Этот элемент определяет линейную функцию $\alpha_{\mathcal{A}}^{elp} : E_{\mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha_{\mathcal{A}}^{elp} : \chi \mapsto \alpha_{\mathcal{A}}^{elp}(\chi) = -\chi(\mathcal{A}) + \sum_X K_{\mathcal{A}}^{elp}(X)\chi(X),$$

где сумма берется по всем $X \in \mathbb{A}_{odd}$ таким, что $\text{codim } X > \text{codim } \mathcal{A}$ и $\text{codim } X \in \mathcal{P}$, а коэффициенты $K_{\mathcal{A}}^{elp}(X)$ определяются формулой (2.24). В силу теоремы 4.2.13 функция $\alpha_{\mathcal{A}}^{elp}$ задает универсальное линейное соотношение $\alpha_{\mathcal{A}}^{elp}(\chi_{\Gamma}) = 0$ между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей гиперповерхностей $\Gamma \in W^{elp}(\mathcal{P})$. Таким образом, справедлива

4.3.2. ТЕОРЕМА. Для каждого $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$ формула (2.23) определяет систему

$$\mathfrak{A}^{elp}(\mathcal{P}) = \left\{ \alpha_{\mathcal{A}}^{elp}(\chi_{\Gamma}) = 0, \mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\} \mid \text{codim } \mathcal{A} \notin \mathcal{P} \right\}$$

универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей гиперповерхностей Γ класса $W^{elp}(\mathcal{P})$.

Оставшаяся часть этого параграфа (кроме последнего раздела) посвящена доказательству следующего утверждения.

4.3.3. ТЕОРЕМА. Системы

$$\mathfrak{A}^{hyp}(\langle 0 \rangle), \quad \mathfrak{A}^{hyp}(\langle 1 \rangle), \quad \mathfrak{A}^{elp}(\langle 0 \rangle), \quad \mathfrak{A}^{elp}(\langle 1 \rangle)$$

являются полными системами универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей гиперповерхностей классов

$$W^{hyp}(\langle 0 \rangle), \quad W^{hyp}(\langle 1 \rangle), \quad W^{elp}(\langle 0 \rangle), \quad W^{elp}(\langle 1 \rangle),$$

соответственно.

4.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторное подпространство $E^{hyp}(\mathcal{P}) \subset E_{\mathbb{A}_+ \setminus \{0\}}$ ($E^{elp}(\mathcal{P}) \subset E_{\mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}}$), $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}_2$, определяемое системой уравнений $\mathfrak{A}^{hyp}(\mathcal{P})$ ($\mathfrak{A}^{elp}(\mathcal{P})$, соответственно), называется универсальным пространством для характеристик гиперповерхностей класса $W^{hyp}(\mathcal{P})$ (класса $W^{elp}(\mathcal{P})$).

Зафиксируем произвольное целое $n \geq 1$. Через $W_n^{hyp} \subseteq \mathcal{W}^{hyp}$ ($W_n^{elp} \subseteq \mathcal{W}^{elp}$) обозначим класс *hyp*-гиперповерхностей (*elp*-гиперповерхностей, соответственно), лежащих в гладких многообразиях размерности n . Теорема 4.3.3 вытекает, очевидно, из того, что системы соотношений (2.19) и (2.23) полны для гиперповерхностей из любого фиксированного класса W_n^{hyp} или W_n^{elp} (соответственно). А именно, зафиксируем порядки на полугруппах \mathbb{A}_+ и \mathbb{A}_{odd} .

4.3.5. ТЕОРЕМА. Составим список типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ особенностей, которые могут быть у устойчивого фронта коранга ≤ 1 в n -мерном пространстве. Предположим, что этот список состоит из d элементов. Пусть Ω – подмножество в \mathbb{R}^d , образованное (конечными) последовательностями эйлеровых характеристик $\chi_\Gamma(\mathcal{A})$ многообразий \mathcal{A}_Γ особенностей типов \mathcal{A} из этого списка у гиперповерхностей $\Gamma \in W_n^{hyp}$. Тогда при $n > 1$ система соотношений вида (2.19) задает минимальное аффинное подпространство в \mathbb{R}^d , содержащее множество Ω .

4.3.6. ТЕОРЕМА. Составим список типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$ особенностей с нечетными кратностями, которые могут быть у устойчивого фронта коранга ≤ 1 в n -мерном пространстве. Предположим, что этот список состоит из d элементов. Пусть Ω – подмножество в \mathbb{R}^d , образованное (конечными) последовательностями эйлеровых характеристик $\chi_\Gamma(\mathcal{A})$ многообразий \mathcal{A}_Γ особенностей типов \mathcal{A} из этого списка у гиперповерхностей $\Gamma \in W_n^{elp}$. Тогда при $n > 1$ система соотношений вида (2.23) задает минимальное аффинное подпространство в \mathbb{R}^d , содержащее множество Ω .

Для доказательства теорем 4.3.5 и 4.3.6 составим список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ всех элементов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ таких, что

$$\text{codim } \mathcal{A} \leq n, \quad \text{codim } \mathcal{A} \equiv n \pmod{2}.$$

Через N_{odd} обозначим количество тех элементов из этого списка, которые принадлежат полугруппе \mathbb{A}_{odd} .

Пусть $\widetilde{W}_n^{hyp} \subseteq \widetilde{\mathcal{W}}_n^{hyp}$ ($\widetilde{W}_n^{elp} \subseteq \widetilde{\mathcal{W}}_n^{elp}$) – класс гиперповерхностей в \mathbb{R}^n , которые являются краями гиперболических (эллиптических, соответственно) ограниченных связных компонент дополнений к устойчивым компактным неприводимым фронтам коранга ≤ 1 . Каждой гиперповерхности Γ из \widetilde{W}_n^{hyp} или \widetilde{W}_n^{elp} сопоставим вектор

$$v(\Gamma) = (\chi_\Gamma(\mathcal{A}^1), \dots, \chi_\Gamma(\mathcal{A}^N)) \in \mathbb{R}^N$$

из эйлеровых характеристик $\chi_\Gamma(\mathcal{A}^i)$ многообразий \mathcal{A}_Γ^i особенностей типов \mathcal{A}^i , $i = 1, \dots, N$. Через G_{hyp} (через G_{elp}) обозначим подмножество в \mathbb{R}^N , образованное векторами $v(\Gamma)$ для всех гиперповерхностей $\Gamma \in \widetilde{W}_n^{hyp}$ ($\Gamma \in \widetilde{W}_n^{elp}$, соответственно).

4.3.7. ТЕОРЕМА. При $n > 1$ множество G_{hyp} (множество G_{elp}) содержит подгруппу с N (N_{odd} , соответственно) линейно независимыми образующими и нулем

в точке $(\chi(S^{n-1}), 0, \dots, 0)$, где $\chi(S^{n-1})$ – эйлерова характеристика $(n-1)$ -мерной сферы S^{n-1} .

Теорема 4.3.7 доказана в разделе 4.5 ниже. Теоремы 4.3.5 и 4.3.6 следуют из теоремы 4.3.7.

4.4 Специальные фронты в \mathbb{R}^n

Теорема 4.3.7 доказывается путем построения достаточного количества примеров фронтов рассматриваемого типа. Мы будем “склеивать” их из некоторых специальных фронтов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

4.4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть \mathcal{F} – устойчивый компактный фронт коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n , где $n > 2$. Предположим, что дополнение к \mathcal{F} имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, эллиптическую) ограниченную связную компоненту U , край Γ которой состоит из точек нескольких неприводимых компонент фронта \mathcal{F} . Тогда существует неприводимый устойчивый компактный фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n такой, что дополнение к $\tilde{\mathcal{F}}$ имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, эллиптическую, соответственно) ограниченную связную компоненту, край $\tilde{\Gamma}$ которой удовлетворяет следующему условию: многообразие $\mathcal{A}_{\tilde{\Gamma}}$ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности $\tilde{\Gamma}$ совпадает с многообразием \mathcal{A}_{Γ} особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0, A_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что гиперповерхность Γ состоит из точек k неприводимых компонент $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ фронта \mathcal{F} , где $k \geq 2$. Тогда найдутся гладко вложенные кривые $\gamma_i : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, k-1$ такие, что:

- 1) каждая кривая γ_i пересекает фронт \mathcal{F} ровно в двух гладких точках P_i^1, P_i^2 , причем трансверсально;
- 2) $P_i^1 = \gamma_i(t_1) \in \mathcal{F}_i$, а $P_i^2 = \gamma_i(t_2) \in \mathcal{F}_{i+1}$, где $a < t_1 < t_2 < b$ и $\gamma_i(t_1, t_2) \subset U$;
- 3) кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ попарно не пересекаются.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестности O_i кривых γ_i в \mathbb{R}^n . Если ε достаточно мало, то замыкания $\bar{O}_1, \dots, \bar{O}_{k-1}$ этих окрестностей попарно не пересекаются; каждое пересечение $\bar{O}_i \cap \mathcal{F}$ состоит только из гладких точек фронта \mathcal{F} и имеет ровно две связные компоненты $D_i^1 \ni P_i^1, D_i^2 \ni P_i^2$; подмножества $D_i^1, D_i^2 \subset \mathbb{R}^n$ являются гладко вложенными замкнутыми $(n-1)$ -мерными дисками с гладкими краями $\partial D_i^1, \partial D_i^2$ (диффеоморфными $(n-2)$ -мерной сфере S^{n-2}); каждое пересечение $C_i = \partial O_i \cap \bar{U}$, где ∂O_i – граница окрестности O_i , а \bar{U} – замыкание компоненты U , является гладко вложенным цилиндром $S^{n-2} \times [t_1, t_2]$.

Следовательно, искомый фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ можно получить из множества

$$\left[\left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i \right) \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (D_i^1 \cup D_i^2) \right] \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \right)$$

путем стандартного сглаживания (использующего разбиение единицы) в малых окрестностях сфер $\partial D_i^1, \partial D_i^2, i = 1, \dots, k-1$. Предложение 4.4.1 доказано.

4.4.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ является связной суммой фронтов $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ (см. [56]). Это суммирование проведено так, чтобы дополнение к фронту $\tilde{\mathcal{F}}$ имело связную компоненту с необходимыми нам свойствами.

4.4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$, где $\text{codim } \mathcal{A} = n > 1$. Тогда существуют неприводимые устойчивые компактные фронты $\Sigma^-(\mathcal{A})$ и $\Sigma^+(\mathcal{A})$ коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n такие, что:

- 1) дополнение к $\Sigma^-(\mathcal{A})$ ($\Sigma^+(\mathcal{A})$) имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую) ограниченную связную компоненту U^- (U^+ , соответственно); если $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}}$, то компонента U^+ эллиптическая;
- 2) край любой из компонент U^-, U^+ имеет ровно две особенности типа \mathcal{A} и не имеет других изолированных особенностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ утверждение очевидно. Подходящими фронтами являются, например, следующие кривые на плоскости x, y :

$$\Sigma^-(2A_1) = \Sigma^+(2A_1) : \quad x = \sin t, \quad y = \cos 3t;$$

$$\Sigma^-(A_2) : \quad x = \sin t, \quad y = \cos^3 t;$$

$$\Sigma^+(A_2) : \quad x = \frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^6 t}, \quad y = \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t + \cos^6 t}.$$

Пусть $n > 2$ и Σ_i – фронт в \mathbb{R}^{n+1} , образованный точками

$$(\lambda_0^1, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\mu_1-1}^1, \dots, \lambda_0^p, \lambda_1^p, \dots, \lambda_{\mu_p-1}^p, \lambda_*),$$

для которых многочлен

$$t^{\mu_i+1} + \lambda_{\mu_i-1}^i t^{\mu_i-1} + \dots + \lambda_1^i t + \lambda_0^i$$

от t имеет кратный вещественный корень, $i = 1, \dots, p$. Через U_i^- (U_i^+) обозначим гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, соответственно) правильную связную компоненту дополнения $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma_i$.

Легко видеть, что гиперповерхность $\Sigma = \bigcup_{i=1}^p \Sigma_i$ является устойчивым фронтом коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^{n+1} . Множества $U^- = \bigcap_{i=1}^p U_i^-$ и $U^+ = \bigcap_{i=1}^p U_i^+$ являются правильными связными компонентами дополнения $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Sigma$ (гиперболической и обобщенно-эллиптической, соответственно).

Рассмотрим в \mathbb{R}^{n+1} сферу S^n радиуса $R > 0$ с центром в нуле. Пересечение $\Sigma \cap S^n$ является компактным устойчивым фронтом коранга ≤ 1 на S^n . Этот фронт имеет ровно две изолированные особенности и обе они являются особенностями типа \mathcal{A} .

Действительно, прямая $\lambda_0^1 = \dots = \lambda_{\mu_p-1}^p = 0$ состоит из особенностей типа \mathcal{A} фронта Σ и является единственным одномерным стратом минимальной C^∞ -стратификации этого фронта. Вместе с любой своей точкой $(\lambda_0^1, \dots, \lambda_{\mu_p-1}^p, \lambda_*) \neq 0$ каждый страт фронта Σ содержит всю кривую $\gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\gamma : s \mapsto (\lambda_0^1 s^{\mu_1+1}, \lambda_1^1 s^{\mu_1}, \dots, \lambda_{\mu_1-1}^1 s^2; \dots; \lambda_0^p s^{\mu_p+1}, \lambda_1^p s^{\mu_p}, \dots, \lambda_{\mu_p-1}^p s^2; \lambda_* s).$$

Эта кривая трансверсально пересекает сферу S^n , причем ровно в одной точке. Следовательно, сфера S^n трансверсальна каждому страту фронта Σ и пересекает страт особенностей типа \mathcal{A} ровно в двух точках.

Рассмотрим теперь пересечения $U^- \cap S^n$ и $U^+ \cap S^n$. Они являются гиперболической и обобщенно-эллиптической, соответственно, связными компонентами дополнения $S^n \setminus (\Sigma \cap S^n)$. Край любой из этих компонент содержит обе особенности типа \mathcal{A} фронта $\Sigma \cap S^n$. Если $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd}$, то компонента $U^+ \cap S^n$ является эллиптической.

Зафиксируем произвольную точку $P \in S^n$ и рассмотрим подпространство \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^{n+1} , удаленное от P на расстояние 1. Через σ_P обозначим стереографическую проекцию пространства \mathbb{R}^n на сферу S^n с полюсом P .

Прообраз фронта $\Sigma \cap S^n$ и прообраз множества $U^- \cap S^n$ относительно проекции σ_P , где $P \in S^n \setminus (\Sigma \cup U^-)$ (прообраз фронта $\Sigma \cap S^n$ и прообраз множества $U^+ \cap S^n$ относительно проекции σ_P , где $P \in S^n \setminus (\Sigma \cup U^+)$) являются фронтом в \mathbb{R}^n и гиперболической (обобщенно-эллиптической, соответственно) ограниченной связной компонентой его дополнения, которые обладают всеми нужными свойствами, кроме неприводимости фронта. Предложение 4.4.3 следует теперь из предложения 4.4.1.

4.4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$, где $1 < c = \text{codim } \mathcal{A} \leq n$. Тогда существуют неприводимые устойчивые компактные фронты $\Sigma_n^-(\mathcal{A})$ и $\Sigma_n^+(\mathcal{A})$ коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n такие, что:

1) дополнение к $\Sigma_n^-(\mathcal{A})$ (к $\Sigma_n^+(\mathcal{A})$) имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую) ограниченную связную компоненту U^- (U^+ , соответственно); если $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd}$, то компонента U^+ эллиптическая;

2) край любой из компонент U^- , U^+ не имеет особенностей коразмерности выше c , а все его особенности коразмерности c являются особенностями типа \mathcal{A} ;

3) многообразия, образованные особенностями типа \mathcal{A} края любой из компонент U^- , U^+ , диффеоморфно несвязному объединению двух сфер размерности $n - c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c < n$, то искомые фронты диффеоморфны фронтам $\Sigma^-(\mathcal{A}) \times S^{n-c}$ и $\Sigma^+(\mathcal{A}) \times S^{n-c}$ в прямом произведении $\mathbb{R}^c \times S^{n-c}$, где $\Sigma^-(\mathcal{A})$ и $\Sigma^+(\mathcal{A})$ – неприводимые устойчивые компактные фронты коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^c , обладающие

свойствами 1–2 из предложения 4.4.3, а S^{n-c} сфера размерности $n - c$. Если же $c = n$, то предложение 4.4.4 вытекает из предложения 4.4.3 при помощи следующего утверждения.

4.4.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ – неприводимые устойчивые компактные фронты коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n , где $n > 1$. Предположим, что эти фронты расположены в k попарно не пересекающихся открытых шарах в \mathbb{R}^n , причем никакие два фронта не лежат в одном шаре. Предположим также, что для каждого $i = 1, \dots, k$ дополнение к фронту \mathcal{F}_i имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, эллиптическую) ограниченную связную компоненту U_i с краем Γ_i . Тогда существует неприводимый устойчивый компактный фронт \mathcal{F} коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n такой, что дополнение к \mathcal{F} имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, эллиптическую, соответственно) ограниченную связную компоненту, край Γ которой обладает следующими свойствами:

1) многообразие \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ совпадает с (несвязным) объединением многообразий $\mathcal{A}_{\Gamma_1}, \dots, \mathcal{A}_{\Gamma_k}$ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0, A_1\}$;

2) эйлерова характеристика многообразия $(A_1)_\Gamma$ особенностей типа A_1 гиперповерхности Γ меньше суммы эйлеровых характеристик многообразий $(A_1)_{\Gamma_1}, \dots, (A_1)_{\Gamma_k}$ особенностей типа A_1 гиперповерхностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ на $k - 1$ эйлеровых характеристик $(n - 1)$ -мерной сферы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_k$ и $k \geq 2$. Тогда найдутся гладко вложенные кривые $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k - 1$ такие, что:

- 1) они пересекают фронт $\tilde{\mathcal{F}}$ только в гладких точках и только трансверсально;
- 2) каждая кривая γ_i пересекает только две гиперповерхности из $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, а именно, Γ_i и Γ_k ;
- 3) кривая γ_i пересекает каждую из гиперповерхностей Γ_i, Γ_k ровно в одной точке: $P_i^1 = \gamma_i(t_1) \in \Gamma_i$ и $P_i^2 = \gamma_i(t_2) \in \Gamma_k$, где $a < t_1 < t_2 < b$;
- 4) кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ попарно не пересекаются.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестности $O_\varepsilon(\gamma_i)$ кривых γ_i в \mathbb{R}^n . Если ε достаточно мало, то замыкания $\overline{O_\varepsilon(\gamma_1)}, \dots, \overline{O_\varepsilon(\gamma_{k-1})}$ этих окрестностей попарно не пересекаются; каждое пересечение $\overline{O_\varepsilon(\gamma_i)} \cap \tilde{\mathcal{F}}$ состоит только из гладких точек фронта $\tilde{\mathcal{F}}$ и имеет $m_i \geq 2$ связных компонент $D_i^j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, m_i$, где $D_i^1(\varepsilon) \ni P_i^1$, $D_i^2(\varepsilon) \ni P_i^2$; каждое подмножество $D_i^j(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ является гладко вложенным замкнутым $(n - 1)$ -мерным диском с гладким краем $\partial D_i^j(\varepsilon)$ (диффеоморфным $(n - 2)$ -мерной сфере S^{n-2}); каждая разность $C_i(\varepsilon) = \partial O_\varepsilon(\gamma_i) \setminus (U_i \cup U_k)$, где $\partial O_\varepsilon(\gamma_i)$ – граница окрестности $O_\varepsilon(\gamma_i)$, является гладко вложенным цилиндром $S^{n-2} \times [t_1, t_2]$.

Зафиксируем любое такое ε и выберем гладко вложенные замкнутые $(n - 1)$ -мерные диски $\tilde{D}_i^j(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 3, \dots, m_i$ в \mathbb{R}^n , которые не пересекают гипер-

поверхности $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ и множества $\bar{O}_{\varepsilon/2}(\gamma_1), \dots, \bar{O}_{\varepsilon/2}(\gamma_{k-1})$, но $\partial\tilde{D}_i^j(\varepsilon) = \partial D_i^j(\varepsilon)$ для всех i, j . Тогда искомый фронт получается из множества $(\tilde{\mathcal{F}} \setminus D) \cup C$, где

$$D = \bigcup_{i=1}^{k-1} [D_i^1(\varepsilon/2) \cup D_i^2(\varepsilon/2) \cup D_i^3(\varepsilon) \cup \dots \cup D_i^{m_i}(\varepsilon)],$$

$$C = \bigcup_{i=1}^{k-1} [C_i(\varepsilon/2) \cup \tilde{D}_i^3(\varepsilon) \cup \dots \cup \tilde{D}_i^{m_i}(\varepsilon)],$$

путем стандартного сглаживания (использующего разбиение единицы) в малых окрестностях сфер $\partial D_i^1(\varepsilon/2), \partial D_i^2(\varepsilon/2), \partial D_i^3(\varepsilon), \dots, \partial D_i^{m_i}(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, k-1$ с последующей малой деформацией дисков $\tilde{D}_i^3(\varepsilon), \dots, \tilde{D}_i^{m_i}(\varepsilon)$ вне этих окрестностей.

Предложение 4.4.5 доказано.

4.5 Доказательство теоремы 4.3.7

Пусть $n > 1$ и список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ сформирован по неубыванию коразмерностей $\text{codim } \mathcal{A}^i$. В частности, $\mathcal{A}^1 = A_1$ при нечетном n , и $\mathcal{A}^1 = 2A_1$, если n четное.

Зафиксируем неприводимые устойчивые компактные фронты

$$\Sigma_n^-(\mathcal{A}^2), \Sigma_n^+(\mathcal{A}^2), \dots, \Sigma_n^-(\mathcal{A}^N), \Sigma_n^+(\mathcal{A}^N)$$

коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n , обладающие свойствами 1–3 из предложения 4.4.4 для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^N$, соответственно. Через $\Sigma_n^-(\mathcal{A}^1), \Sigma_n^+(\mathcal{A}^1)$ обозначим аналогичные фронты для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1$, если n четное, и $(n-1)$ -мерные торы, гладко вложенные в \mathbb{R}^n , если n нечетное.

Дополнение к любому фронту $\Sigma_n^-(\mathcal{A}^i)$ ($\Sigma_n^+(\mathcal{A}^i)$), $i = 1, \dots, N$ имеет гиперболическую (обобщенно-эллиптическую, соответственно) ограниченную связную компоненту, край Γ_i^- (Γ_i^+) которой не имеет особенностей коразмерности выше $\text{codim } \mathcal{A}^i$, а все его особенности коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}^i$ являются особенностями типа \mathcal{A}^i . Многообразие $(\mathcal{A}^i)_{\Gamma_i^-}$ ($(\mathcal{A}^i)_{\Gamma_i^+}$) особенностей типа \mathcal{A}^i гиперповерхности Γ_i^- (Γ_i^+ , соответственно) диффеоморфно несвязному объединению двух сфер размерности $n - \text{codim } \mathcal{A}^i$, если $\mathcal{A}^i \neq A_1$, и является $(n-1)$ -мерным тором, если $\mathcal{A}^i = A_1$. Гиперповерхность Γ_i^+ имеет особенности только с нечетными кратностями, если $\mathcal{A}^i \in \mathbb{A}_{\text{odd}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3.7 для множества G_{hyp} . Пусть $\chi_{i,j}$ – эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^j)_{\Gamma_i^-}$ особенностей типа \mathcal{A}^j гиперповерхности Γ_i^- , где $i, j = 1, \dots, N$. Рассмотрим произвольные неотрицательные целые числа r_1, \dots, r_N , среди которых хотя бы одно не равно нулю. Для любого $i = 1, \dots, N$ построим r_i фронтов $\mathcal{F}_{i,k}$, $k = 1, \dots, r_i$ в \mathbb{R}^n , диффеоморфных фронту $\Sigma_n^-(\mathcal{A}^i)$ и таких, что каждый фронт $\mathcal{F}_{i,k}$ расположен в одном из $r_1 + \dots + r_N$ попарно не пересекающихся открытых шарах в \mathbb{R}^n , причем никакие два фронта не лежат в одном шаре.

К фронтам $\mathcal{F}_{i,k}, i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, r_i$ применим предложение 4.4.5. Согласно этому утверждению существует неприводимый устойчивый компактный фронт \mathcal{F} коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n такой, что:

- 1) дополнение к \mathcal{F} имеет гиперболическую ограниченную связную компоненту;
- 2) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^j)_\Gamma$ особенностей типа \mathcal{A}^j края Γ этой компоненты равна $\sum_{i=1}^N r_i \chi_{i,j}$ для любого $j = 2, \dots, N$;
- 3) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^1)_\Gamma$ особенностей типа \mathcal{A}^1 гиперповерхности Γ равна $\sum_{i=1}^N r_i [\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})] + \chi(S^{n-1})$.

Рассмотрим полугруппу в векторном пространстве \mathbb{R}^N , состоящую из векторов

$$\left(\sum_{i=1}^N r_i [\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})], \sum_{i=1}^N r_i \chi_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^N r_i \chi_{i,N} \right),$$

соответствующих всевозможным упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел (r_1, \dots, r_N) . Эта полугруппа порождена векторами

$$v_i = (\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1}), \chi_{i,2}, \dots, \chi_{i,N}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Они линейно независимы.

Действительно, рассмотрим $(N \times N)$ -матрицу \mathcal{M} , строками которой служат векторы v_1, \dots, v_N . Матрица \mathcal{M} является ниже-треугольной (по построению $\chi_{i,j} = 0$ при всех $j > i$). На ее главной диагонали стоят ненулевые числа: $\chi_{1,1} - \chi(S^{n-1}) = -2$, если $\mathcal{A}^1 = A_1$, и $\chi_{i,i} = 2\chi(S^{n-\text{codim } \mathcal{A}^i}) = 4$ для любого $\mathcal{A}^i \neq A_1$ (напомним, что $\text{codim } \mathcal{A}^i \equiv n \pmod{2}$).

Таким образом, $\det \mathcal{M} \neq 0$ и теорема 4.3.7 для множества G_{hyp} доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3.7 ДЛЯ МНОЖЕСТВА G_{elp} . Выпишем последовательно элементы $\mathcal{A}^{\tau(1)}, \dots, \mathcal{A}^{\tau(N_{odd})}$ списка $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$, принадлежащие полугруппе \mathbb{A}_{odd} (в частности, $\mathcal{A}^{\tau(1)} = A_1$). Через $\chi_{i,j}$ обозначим эйлерову характеристику многообразия $(\mathcal{A}^{\tau(j)})_{\Gamma_{\tau(i)}^+}$ особенностей типа $\mathcal{A}^{\tau(j)}$ гиперповерхности $\Gamma_{\tau(i)}^+$, $i, j = 1, \dots, N_{odd}$.

Аналогично предыдущему для любых целых неотрицательных $r_1, \dots, r_{N_{odd}}$ таких, что $r_1^2 + \dots + r_{N_{odd}}^2 \neq 0$, можно построить неприводимый устойчивый компактный фронт \mathcal{F} коранга ≤ 1 в \mathbb{R}^n такой, что:

- 1) дополнение к \mathcal{F} имеет эллиптическую ограниченную связную компоненту;
- 2) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^{\tau(j)})_\Gamma$ особенностей типа $\mathcal{A}^{\tau(j)}$ края Γ этой компоненты равна $\sum_{i=1}^{N_{odd}} r_i \chi_{i,j}$ для любого $j = 2, \dots, N_{odd}$;
- 3) эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^{\tau(1)})_\Gamma$ особенностей типа $\mathcal{A}^{\tau(1)}$ гиперповерхности Γ равна $\sum_{i=1}^{N_{odd}} r_i [\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})] + \chi(S^{n-1})$.

Как и выше полугруппа в векторном пространстве $\mathbb{R}^{N_{odd}}$, состоящая из векторов

$$\left(\sum_{i=1}^{N_{odd}} r_i [\chi_{i,1} - \chi(S^{n-1})], \sum_{i=1}^{N_{odd}} r_i \chi_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^{N_{odd}} r_i \chi_{i,N_{odd}} \right),$$

соответствующих всевозможным упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел $(r_1, \dots, r_{N_{\text{odd}}})$, порождена N_{odd} линейно независимыми векторами

$$v_i = (\chi_{i,1} - \chi(S^{m-1}), \chi_{i,2}, \dots, \chi_{i,N_{\text{odd}}}), \quad i = 1, \dots, N_{\text{odd}}.$$

Это доказывает теорему 4.3.7 для множества G_{elp} .

4.6 Вспомогательные утверждения

Следующие утверждения нужны для доказательства теоремы 4.2.4.

4.6.1. ЛЕММА. Пусть $u, t \in \mathbb{R}$, $\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$,

$$S(t, \bar{q}) = t^{\nu+1} + q_{\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_2t^2,$$

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}) - (u - t) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}).$$

Предположим, что F как многочлен от u имеет корень $u = t$ кратность $\mu + 1 \geq 2$. Тогда $F(u, t, \bar{q}) = (u - t)^{\mu+1} G_\mu(u, t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1})$, где

$$G_\mu(u, t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}) = \sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+1}} (u - t)^{i-\mu},$$

причем $G_\mu|_{u=t} \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция F представляет собой многочлен от переменных $u, t, q_2, \dots, q_{\nu-1}$. Поскольку $F|_{u=t} = \frac{\partial F}{\partial u}|_{u=t} = 0$, то $F(u, t, \bar{q}) = (u - t)^2 G(u, t, \bar{q})$, где функция $G(u, t, \bar{q})$ также является многочленом от $u, t, q_2, \dots, q_{\nu-1}$ (его степень по u равна $\nu - 1$).

Функция G вычисляется явно. Действительно,

$$\left. \frac{\partial^i G(u, t, \bar{q})}{\partial (u - t)^i} \right|_{u=t} = \frac{1}{(i+1)(i+2)} \cdot \left. \frac{\partial^{i+2} F(u, t, \bar{q})}{\partial u^{i+2}} \right|_{u=t} = \frac{1}{(i+1)(i+2)} \cdot \frac{\partial^{i+2} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+2}}$$

для любого целого неотрицательного i . Поэтому

$$G(u, t, \bar{q}) = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{1}{(i+2)!} \frac{\partial^{i+2} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+2}} (u - t)^i$$

согласно формуле Тейлора.

Если корень $u = t$ многочлена F (как многочлена от u) имеет кратность $\mu + 1 \geq 2$, то

$$G(u, t, \bar{q}) = (u - t)^{\mu-1} \sum_{i=\mu-1}^{\nu-1} \frac{1}{(i+2)!} \frac{\partial^{i+2} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+2}} (u - t)^{i-\mu+1},$$

где $\partial^{\mu+1} S(t, \bar{q}) / \partial t^{\mu+1} \neq 0$. Лемма 4.6.1 доказана.

4.6.2. ЛЕММА. Пусть $t \in \mathbb{R}$, $\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$,

$$S(t, \bar{q}) = t^{\nu+1} + q_{\nu-1}t^{\nu-1} + \dots + q_2t^2$$

и \mathcal{F} – фронт лежандрова отображения

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, \bar{q}) \mapsto \left(-S(t, \bar{q}) + t \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), -\frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), \bar{q} \right).$$

Тогда набор $(t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-\mu}$ определяет координаты на характеристическом многообразии Φ_{A_μ} особенностей типа A_μ фронта \mathcal{F} . В этих координатах фронт $[A_\mu](\mathcal{F}) \subset \Phi_{A_\mu}$ является множеством точек, для которых функция

$$G_\mu(u, t, q_{\mu+1}, \dots, q_{n-1}) = \sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+1}} (u-t)^{i-\mu}$$

как многочлен от $u-t$ имеет кратный вещественный корень.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подмногообразие $\Phi_{A_\mu} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t^\mu} = 0$$

(см. пример 1.3.2). Гиперповерхность $[A_\mu](\mathcal{F}) \subset \Phi_{A_\mu}$ является замыканием множества точек $(t, \bar{q}) \in \Phi_{A_\mu}$, для которых функция

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}) - (u-t) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q})$$

как многочлен от u имеет кратный вещественный корень $u \neq t$. Поэтому лемма 4.6.2 следует из леммы 4.6.1.

4.7 Доказательство теоремы 4.2.4

Пусть \mathcal{F} – фронт устойчивого собственного лежандрова отображения $f : L \rightarrow V$ коранга ≤ 1 в гладком n -мерном многообразии V . Рассмотрим произвольную правильную связную компоненту U дополнения $V \setminus \mathcal{F}$. Через Γ обозначим край этой компоненты.

Зафиксируем произвольное целое положительное μ и рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{A_\mu} \subseteq L$ особенностей типа A_μ фронта \mathcal{F} , характеристическое отображение $\varphi_{A_\mu} : \Phi_{A_\mu} \rightarrow V$, фронт $[A_\mu](\mathcal{F}) \subset \Phi_{A_\mu}$ и замыкание $\overline{(A_\mu)_\Gamma}$ многообразия $(A_\mu)_\Gamma$ особенностей типа A_μ гиперповерхности Γ . Через Ω обозначим полный прообраз множества $\overline{(A_\mu)_\Gamma}$ при отображении φ_{A_μ} .

4.7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть фронт \mathcal{F} имеет особенность типа A_ν в некоторой точке $y \in \overline{(A_\mu)_\Gamma}$, а компонента U является гиперболической (обобщенно-эллиптической) в этой точке. Тогда

1) если $\nu = \mu$ или $\mu + 1$, то росток (Ω, ξ) множества Ω в точке $\xi = \varphi_{A_\mu}^{-1}(y)$ является ростком многообразия Φ_{A_μ} ;

2) если $\nu > \mu + 1$, то росток (Ω, ξ) является ростком замыкания связной компоненты дополнения $\Phi_{A_\mu} \setminus [A_\mu](\mathcal{F})$; эта компонента является гиперболической (обобщенно-эллиптической, соответственно) в точке ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В подходящих локальных координатах на многообразиях L и V росток отображения f в точке ξ задается формулой

$$(f, \xi) : (\mathbb{R}^{n-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), \quad (t, \bar{q}) \mapsto \left(-S(t, \bar{q}) + t \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), -\frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q}), \bar{q} \right),$$

где

$$\bar{q} = (q_2, \dots, q_{n-1}), \quad S(t, \bar{q}) = t^{\nu+1} + q_{\nu-1} t^{\nu-1} + \dots + q_2 t^2$$

(пример 1.2.4). Росток многообразия Φ_{A_μ} в этой точке задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t^\mu} = 0.$$

Росток (Ω, ξ) является ростком в нуле замыкания множества точек (t, \bar{q}) из дополнения $\Phi_{A_\mu} \setminus \Phi_{A_{\mu+1}}$, для которых функция

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}) - (u - t) \frac{\partial}{\partial t} S(t, \bar{q})$$

как многочлен от u имеет максимально возможное число простых вещественных корней (минимально возможное число вещественных корней, с учетом их кратностей, если компонента U обобщенно-эллиптическая в точке y). Согласно лемме 4.6.1 последнее равносильно тому, что функция

$$\sum_{i=\mu}^{\nu} \frac{1}{(i+1)!} \frac{\partial^{i+1} S(t, \bar{q})}{\partial t^{i+1}} (u-t)^{i-\mu}$$

как многочлен от $u-t$ имеет $\nu - \mu$ простых вещественных корней (соответственно, не имеет вещественных корней, если $\nu - \mu$ четное, и имеет один простой вещественный корень, если $\nu - \mu$ нечетное).

Предложение 4.7.1 следует теперь из леммы 4.6.2.

4.7.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Подмножество $\Omega \subset \Phi_{A_\mu}$ является C^0 -подмногообразием с краем. Каждая связная компонента этого подмногообразия представляет собой замыкание правильной связной компоненты дополнения $\Phi_{A_\mu} \setminus [A_\mu](\mathcal{F})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \Omega$ и фронт \mathcal{F} имеет в точке $y = \varphi_{A_\mu}(\xi)$ особенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$. Рассмотрим неприводимые компоненты $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ ростка (\mathcal{F}, y) и предположим, что эти компоненты имеют в точке y особенности типов $A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_r}$, соответственно.

Мы будем считать, не ограничивая общности, что $\text{codim } X = n$. Следуя [26] выберем локальные координаты

$$(q_0^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1; \dots; q_0^r, \dots, q_{\nu_r-1}^r) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\nu_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{\nu_r}$$

на многообразии V такие, что для любого $j = 1, \dots, r$ компонента \mathcal{F}_j является ростком в нуле гиперповерхности $\Delta_{\nu_j}(n) \subset \mathbb{R}^n$, образованной точками, для которых многочлен

$$P_j(t_j) = t_j^{\nu_j+1} + q_{\nu_j-1}^j t_j^{\nu_j-1} + \dots + q_1^j t_j + q_0^j$$

от t_j имеет кратный вещественный корень.

В этих координатах росток замыкания \bar{U} области U в точке y является ростком в нуле пересечения $\bigcap_{j=1}^r \bar{U}_j$, где \bar{U}_j – замыкание правильной связной компоненты U_j дополнения к гиперповерхности $\Delta_{\nu_j}(n)$. Каждая из этих компонент либо гиперболическая, либо обобщенно-эллиптическая независимо друг от друга.

Пусть, для определенности, \mathcal{F}_1 – фронт роста многообразия L в точке ξ . Тогда набор

$$(t_1, q_{\mu+1}^1, \dots, q_{\nu_1-1}^1; q_0^2, \dots, q_{\nu_2-1}^2; \dots; q_0^r, \dots, q_{\nu_r-1}^r) \in \mathbb{R}^{n-\mu}$$

определяет локальные координаты на многообразии Φ_{A_μ} в окрестности точки ξ . В этих координатах росток (Ω, ξ) является ростком в нуле пересечения $\bigcap_{j=1}^p \Omega_j$ подмножеств Ω_j в $\mathbb{R}^{n-\mu}$, которые определяются следующим образом:

- 1) Ω_1 – полный прообраз замыкания $\overline{(A_\mu)_{\Gamma_1}}$ многообразия особенностей типа A_μ на крае Γ_1 компоненты U_1 относительно роста отображения φ_{A_μ} в точке ξ ;
- 2) если $j > 1$, то Ω_j – замыкание правильной связной компоненты дополнения к гиперповерхности в $\mathbb{R}^{n-\mu}$, образованной точками, для которых многочлен P_j имеет кратный вещественный корень; эта компонента гиперболическая (обобщенно-эллиптическая), если компонента U_j гиперболическая (обобщенно-эллиптическая, соответственно).

Предложение 4.7.2 следует теперь из предложения 4.7.1.

Теорема 4.2.4 является следствием предложений 4.7.2 и 2.4.5.

Глава 3

Приложения к некоторым задачам анализа и геометрии

Результаты главы 2 приводят к полезным следствиям в некоторых важных задачах теории особенностей. В настоящей главе мы используем их для получения ограничений на сосуществование особенностей множества Максвелла глобальных минимумов (или максимумов) семейства гладких функций, особенностей множества опорных гиперплоскостей гладкого подмногообразия в \mathbb{R}^n , особенностей множеств симметрий, конфликтных множеств и средних осей.

Изложенные здесь результаты опубликованы в [41], [42], [45], [90], [92], [95].

1 Топология особенностей множества Максвелла семейства гладких функций

Множествами Максвелла семейства гладких функций называют разные подмножества в пространстве параметров (см. [9]). Мы рассматриваем ниже лишь множество Максвелла глобальных минимумов и множество Максвелла глобальных максимумов функций семейства.

1.1 Множество Максвелла глобальных минимумов

Пусть M и Λ – гладкие многообразия, причем M замкнуто. Мы будем предполагать, что $\dim \Lambda = k$, а многообразие M может состоять из нескольких связных компонент разных размерностей, включая нульмерные. Последние мы будем называть *изолированными* точками многообразия M .

Рассмотрим семейство $F(x, \lambda)$ гладких функций от $x \in M$, гладко зависящих от (многомерного) параметра $\lambda \in \Lambda$. По теореме Вейерштрасса каждая функция этого семейства достигает на M своего наименьшего значения (т.е. имеет *глобальный минимум*).

Глобальный минимум называется *неособым*, если он достигается ровно в одной невырожденной критической точке.

1.1.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Мы будем считать далее, что изолированные точки многообразия M являются невырожденными критическими точками функции $F(\cdot, \lambda)$.

Множество значений параметра λ , при которых функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет неособый глобальный минимум, является открытой областью в многообразии Λ . Эта область называется *многообразием неособых глобальных минимумов* семейства $F(x, \lambda)$ и обозначается через $(A_1)_F$.

1.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множеством Максвелла* семейства $F(x, \lambda)$ называют множество $\Sigma = \Lambda \setminus (A_1)_F$ значений параметра λ , при которых глобальный минимум функции $F(\cdot, \lambda)$ является *особым* (т.е. достигается либо в одной вырожденной критической точке, либо в нескольких разных точках многообразия M).

Множество Максвелла является, вообще говоря, особой гиперповерхностью в многообразии Λ . Ее особенности классифицируются по типам точек глобального минимума функций относительно гладких замен переменных в прообразе.

Мы будем рассматривать только глобальные минимумы коранга 1 конечной кратности (которые достигаются в конечном числе конечнократных критических точек коранга 1). Они классифицируются по ненулевым элементам полугруппы \mathbb{A}_{odd} (напомним, что это – свободная абелева полугруппа по сложению, образующими которой

служат символы $A_1, A_3, \dots, A_{2l+1}, \dots$).

А именно, рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq 0$ полугруппы \mathbb{A}_{odd} (здесь μ_1, \dots, μ_p – положительные нечетные числа).

1.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкая функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ имеет на M *глобальный минимум типа \mathcal{A}* , если:

1) она достигает своего наименьшего значения y_0 ровно в p попарно различных точках многообразия M ;

2) существует порядок x_1, \dots, x_p точек из $f^{-1}(y_0)$ такой, что для любого $i = 1, \dots, p$ имеет место следующее: если x_i не является изолированной точкой многообразия M , то росток (f, x_i) задается формулой

$$t_1^{\mu_i+1} + t_2^2 + \dots + t_{m_i}^2 + y_0$$

в подходящих локальных координатах t_1, \dots, t_{m_i} на M ; если x_i – изолированная точка, то $\mu_i = 1$.

Числа

$$\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p \quad \text{и} \quad \text{deg } \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$$

называются *кочамерностью* и *степенью* глобального минимума типа \mathcal{A} , соответственно. Глобальные минимумы типа A_1 неособы. Глобальные минимумы любого типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ являются особыми.

Рассмотрим пространство \mathcal{W} всех гладких семейств $F(x, \lambda)$ гладких функций от $x \in M$, гладко зависящих от параметра $\lambda \in \Lambda$. Это пространство снабдим тонкой C^∞ -топологией Уитни. Будем говорить, что данное утверждение справедливо для *общего семейства* $F(x, \lambda)$, если существует открытое всюду плотное подмножество в пространстве \mathcal{W} такое, что указанное утверждение имеет место для каждого семейства из этого подмножества.

1.1.4. ТЕОРЕМА ([9],[16]). Пусть $\dim \Lambda = k \leq 6$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1. Тогда для общего семейства $F(x, \lambda)$ гладких функций от $x \in M$, гладко зависящих от параметра $\lambda \in \Lambda$, справедливы следующие утверждения.

1) Глобальные минимумы функций семейства $F(x, \lambda)$ являются глобальными минимумами типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$, где $\text{codim } \mathcal{A} \leq k + 1$.

2) Если функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет на многообразии M глобальный минимум типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq A_1$, то росток (Σ, λ) множества Максвелла Σ семейства $F(x, \lambda)$ в точке λ диффеоморфен ростку в нуле прямого произведения $(k + 1 - \text{codim } \mathcal{A})$ -мерного евклидова пространства и подмножества в гиперплоскости $\lambda_0^1 + \dots + \lambda_0^p = 0$ пространства

$$\mathbb{R}^{\text{codim } \mathcal{A}} = \{(\lambda_0^1, \dots, \lambda_{\mu_1-1}^1, \dots, \lambda_0^p, \dots, \lambda_{\mu_p-1}^p)\},$$

образованного точками, в которых функция

$$\min_{i=1, \dots, p} \left\{ \min_{t \in \mathbb{R}} \left\{ P_i(t) = t^{\mu_i+1} + \lambda_{\mu_i-1}^i t^{\mu_i-1} + \dots + \lambda_1^i t + \lambda_0^i \left| \frac{dP_i}{dt}(t) = 0 \right. \right\} \right\} \quad (3.1)$$

не является гладкой.

1.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество Максвелла Σ семейства $F(x, \lambda)$ имеет особенность типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ в данной точке $\lambda \in \Lambda$, если росток (Σ, λ) диффеоморфен ростку из утверждения 2 теоремы 1.1.4. Указанные выше числа $\text{codim } \mathcal{A}$ и $\text{deg } \mathcal{A}$ называются *коразмерностью* и *степенью* этой особенности, соответственно.

Пусть \mathcal{A}_Σ – множество точек $\lambda \in \Lambda$, в которых множество Максвелла Σ имеет особенность типа \mathcal{A} . Тогда для общего семейства $F(x, \lambda)$ множество \mathcal{A}_Σ является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A} - 1$ в многообразии Λ (незамкнутым и несвязным, вообще говоря). Оно называется *многообразием особенностей типа \mathcal{A}* множества Σ и состоит из точек $\lambda \in \Lambda$, в которых функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет на многообразии M глобальный минимум типа \mathcal{A} .

Предположим, что множество Максвелла Σ семейства $F(x, \lambda)$ имеет лишь особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$. Тогда для общего семейства $F(x, \lambda)$ разбиение множества Σ на связные компоненты многообразий вида \mathcal{A}_Σ является минимальной C^∞ -стратификацией Уитни.

Всюду далее эйлерова характеристика $\chi_\Sigma(\mathcal{A}) = \chi(\mathcal{A}_\Sigma)$ многообразия \mathcal{A}_Σ особенностей типа $\mathcal{A} = k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p}$ множества Σ , где k_1, \dots, k_p – неотрицательные целые числа, а μ_1, \dots, μ_p попарно различны, обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$.

1.1.6. ТЕОРЕМА. Пусть M и Λ – гладкие замкнутые многообразия. Предположим, что $\dim \Lambda = k \leq 6$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не больше 1. Тогда для общего семейства $F(x, \lambda)$ гладких функций от $x \in M$, гладко зависящих от параметра $\lambda \in \Lambda$, справедливы утверждения 1 – 5 ниже, в которых Σ – множество Максвелла этого семейства, а

$$\chi_0 = (-1)^k [\chi(\Lambda) - \chi_F(A_1)],$$

где $\chi(\Lambda)$ и $\chi_F(A_1)$ – эйлеровы характеристики многообразий Λ и $(A_1)_F$, соответственно ($(A_1)_F$ – многообразие неособых глобальных минимумов семейства $F(x, \lambda)$).

1) Если многообразие \mathcal{A}_Σ особенностей типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd}$ множества Σ имеет нечетную размерность, то его эйлерова характеристика $\chi_\Sigma(\mathcal{A})$ является линейной комбинацией

$$\chi_\Sigma(\mathcal{A}) = \sum_X K_{\mathcal{A}}^{elp}(X) \chi_\Sigma(X) \quad (3.2)$$

(с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi_\Sigma(X)$ четномерных многообразий X_Σ особенностей типов $X \in \mathbb{A}_{odd}$, где $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, k +$

1]. Каждый коэффициент $K_{\mathcal{A}}^{elp}(X)$ этой комбинации зависит только от \mathcal{A} и X и вычисляется по формуле (2.24) из главы 2.

2) Списки формул (3.2) для всевозможных $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd}$ при $s = \text{codim } \mathcal{A} \leq 10$, приведены в таблице 11 для четного $k \leq 10$ и в таблице 12 для нечетного $k \leq 9$ (исключая формулу при $s = 1$).

3) Эйлера характеристика $\chi(\Sigma)$ множества Σ равна χ_0 . С другой стороны она является линейной комбинацией

$$\chi(\Sigma) = \sum_X \mathcal{K}^{elp}(X) \chi_{\Sigma}(X) \quad (3.3)$$

эйлеровых характеристик $\chi_{\Sigma}(X)$ четномерных многообразий X_{Σ} особенностей типов $X \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$, где $\text{codim } X \leq k + 1$. Каждый коэффициент $\mathcal{K}^{elp}(X)$ этой комбинации зависит только от X . А именно,

$$\mathcal{K}^{elp}(X) = 1 - \sum_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{A}}^{elp}(X),$$

где сумма берется по всем ненулевым элементам \mathcal{A} полугруппы \mathbb{A}_{odd} таким, что $\mathcal{A} \neq A_1$, $\text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } X$ и $\text{codim } \mathcal{A} \equiv k \pmod{2}$.

4) Формула (3.3) имеет следующий вид:

при четном $k \leq 10$,

$$\begin{aligned} \chi(\Sigma) = & \frac{1}{2}[\chi(\binom{1}{3}) - \chi(\binom{3}{1})] + \frac{1}{2}[\chi(\binom{1}{5}) + 2\chi(\binom{5}{1})] \\ & + \frac{1}{4}[\chi(\binom{1}{7}) - 2\chi(\binom{1,2}{5,1}) - \chi(\binom{2,1}{3,1}) - 3\chi(\binom{1,4}{3,1}) - 17\chi(\binom{7}{1})] \\ & + \frac{1}{4}[3\chi(\binom{1}{9}) + 4\chi(\binom{1,2}{7,1}) + 3\chi(\binom{1,1,1}{5,3,1}) \\ & \quad + 13\chi(\binom{1,4}{5,1}) + 2\chi(\binom{3}{3}) + 8\chi(\binom{2,3}{3,1}) + 30\chi(\binom{1,6}{3,1}) + 124\chi(\binom{9}{1})] \\ & - \frac{1}{4}[7\chi(\binom{1}{11}) + 22\chi(\binom{1,2}{9,1}) + 16\chi(\binom{1,1,1}{7,3,1}) + 56\chi(\binom{1,4}{7,1}) + 17\chi(\binom{2,1}{5,1}) \\ & \quad + 12\chi(\binom{1,2}{5,3}) + 42\chi(\binom{1,1,3}{5,3,1}) + 152\chi(\binom{1,6}{5,1}) + 30\chi(\binom{3,2}{3,1}) \\ & \quad + 106\chi(\binom{2,5}{3,1}) + 378\chi(\binom{1,8}{3,1}) + 1382\chi(\binom{11}{1})]; \end{aligned} \quad (3.4)$$

при нечетном $k \leq 9$,

$$\begin{aligned} \chi(\Sigma) = & \chi(\binom{2}{1}) - \chi(\binom{4}{1}) + \frac{1}{2}[\chi(\binom{1,1}{5,1}) + \chi(\binom{1,3}{3,1}) + 6\chi(\binom{6}{1})] \\ & - \frac{1}{2}[\chi(\binom{1,1}{7,1}) + \chi(\binom{1,1}{5,3}) + 4\chi(\binom{1,3}{5,1}) + 2\chi(\binom{2,2}{3,1}) + 8\chi(\binom{1,5}{3,1}) + 34\chi(\binom{8}{1})] \\ & + \frac{1}{4}[11\chi(\binom{1,1}{9,1}) + 7\chi(\binom{1,1}{7,3}) + 26\chi(\binom{1,3}{7,1}) + 8\chi(\binom{2}{5}) + 19\chi(\binom{1,1,2}{5,3,1}) \\ & \quad + 71\chi(\binom{1,5}{5,1}) + 13\chi(\binom{3,1}{3,1}) + 46\chi(\binom{2,4}{3,1}) + 167\chi(\binom{1,7}{3,1}) + 620\chi(\binom{10}{1})]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

5) Пусть k четное ($k \leq 16$) и $\chi_\Sigma(\mathcal{A}) = 0$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ такого, что $\deg \mathcal{A} \leq k$. Тогда

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd}: \text{codim } \mathcal{A} = k+1} w(\mathcal{A}) \chi_\Sigma(\mathcal{A}) = (1 + k/2) w(A_{k+1}) \chi_0, \quad (3.6)$$

где веса $w(\mathcal{A})$ определяются формулами (2.22). Формулы (3.6) для $k \leq 12$ получаются из формул таблицы 13 при $n = k + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство $F(x, \lambda)$ определяет расширенное семейство

$$F_*(x, \bar{\lambda}) = F(x, \lambda) - \lambda_0$$

функций от $x \in M$, зависящих от параметра

$$\bar{\lambda} = (\lambda, \lambda_0) \in V = \Lambda \times \mathbb{R}.$$

Обозначим через \mathcal{F} множество значений параметра $\bar{\lambda}$, при которых функция $F_*(\cdot, \bar{\lambda})$ имеет нулевое критическое значение.

Для общего семейства $F(x, \lambda)$ множество \mathcal{F} является фронтом в многообразии V (см. пример 1.1.5 в главе 2). Дополнение $V \setminus \mathcal{F}$ к этому фронту имеет замечательную правильную связную компоненту, а именно, множество тех $\bar{\lambda}$, при которых функция $F_*(\cdot, \bar{\lambda})$ положительна на многообразии M .

Рассмотрим край Γ этой компоненты, т.е. множество значений параметра $\bar{\lambda}$, при которых функция $F_*(\cdot, \bar{\lambda})$ имеет нулевой глобальный минимум на M . Гиперповерхность Γ является графиком непрерывной функции

$$\lambda_0 = \min_{x \in M} F(x, \lambda)$$

и, поэтому, гомеоморфна многообразию Λ . Гомеоморфизмом h является сужение на Γ естественной проекции

$$V \rightarrow \Lambda, \quad \bar{\lambda} \mapsto \lambda.$$

Из теоремы 1.1.4 следует, что для общего семейства $F(x, \lambda)$ и при соответствующих ограничениях на размерности многообразий M и Λ фронт \mathcal{F} имеет на Γ только особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$. Гомеоморфизм h диффеоморфно отображает неособую часть $(A_1)_\Gamma$ гиперповерхности Γ в многообразии $(A_1)_F$ неособых глобальных минимумов семейства $F(x, \lambda)$. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ многообразие \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ переходит при отображении h в многообразии \mathcal{A}_Σ особенностей типа \mathcal{A} множества Максвелла Σ семейства $F(x, \lambda)$. При этом сужение гомеоморфизма h на многообразии \mathcal{A}_Γ является гладким вложением.

Теперь теорема 1.1.6 следует из теоремы 4.2.13 главы 2.

1.2 Случай некомпактного многообразия параметров

При некоторых дополнительных условиях теорема 1.1.6 будет справедлива и для семейства функций с некомпактным многообразием параметров (но с компактным множеством Максвелла).

1.2.1. ТЕОРЕМА. Пусть M и Λ – гладкие многообразия, причем M замкнуто. Предположим, что $\dim \Lambda = k \leq 6$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1. Предположим также, что многообразие Λ получается из гладкого замкнутого k -мерного многообразия $\tilde{\Lambda}$ удалением некоторого компактного подмножества \mathcal{N} , снабженного конечной C^∞ -стратификацией Уитни. Тогда для любого общего семейства $F(x, \lambda)$ гладких функций от $x \in M$, гладко зависящих от параметра $\lambda \in \Lambda$, с компактным множеством Максвелла Σ справедливы утверждения 1 – 5 из теоремы 1.1.6, в которых

$$\chi_0 = (-1)^k [\chi(\Lambda) - \chi_F(A_1)],$$

где $\chi(\Lambda)$ и $\chi_F(A_1)$ – эйлеровы характеристики многообразий Λ и $(A_1)_F$, соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разбиение единицы можно построить непрерывную функцию

$$\tilde{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \lambda_0,$$

совпадающую с функцией

$$\lambda_0 = \min_{x \in M} F(x, \lambda)$$

в окрестности множества Σ и гладкую в окрестности множества \mathcal{N} .

Для общего семейства $F(x, \lambda)$ график $\tilde{\Gamma}$ этой функции в пространстве $\tilde{V} = \tilde{\Lambda} \times \mathbb{R}$ является краем правильной связной компоненты дополнения к некоторому фронту в \tilde{V} . Более того, при соответствующих ограничениях на размерности многообразий M и Λ гиперповерхность $\tilde{\Gamma}$ имеет только особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$, где $\text{codim } \mathcal{A} \leq k + 1$ (теорема 1.1.4).

Как и при доказательстве теоремы 1.1.6 легко показать, что неособая часть $(A_1)_{\tilde{\Gamma}}$ гиперповерхности $\tilde{\Gamma}$ диффеоморфна объединению множества \mathcal{N} с многообразием $(A_1)_F$ неособых глобальных минимумов семейства $F(x, \lambda)$. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0, A_1\}$ многообразие $\mathcal{A}_{\tilde{\Gamma}}$ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности $\tilde{\Gamma}$ диффеоморфно многообразию \mathcal{A}_Σ особенностей типа \mathcal{A} множества Максвелла Σ семейства $F(x, \lambda)$.

Остается воспользоваться теоремой 4.2.13 из главы 2 и равенствами

$$\chi(\tilde{\Lambda}) = (-1)^k \chi(\Lambda) + \chi(\mathcal{N}),$$

$$\chi(\tilde{\Lambda}) = (-1)^k \chi_F(A_1) + \chi(\mathcal{N}) + \chi(\Sigma),$$

которые следуют из формулы (1.7). Теорема 1.2.1 доказана.

1.2.2. ПРИМЕР. Пусть $\Lambda = \mathbb{R}^k$. Тогда можно взять $\tilde{\Lambda} = S^k$ и $\mathcal{N} = \{\text{pt}\}$ (сфера S^k является одноточечной компактификацией пространства \mathbb{R}^k).

При некоторых дополнительных условиях утверждение 5 теоремы 1.1.6 будет справедливо и для семейства функций с некомпактным множеством Максвелла.

1.2.3. ТЕОРЕМА. Пусть M и Λ – гладкие многообразия, причем M замкнуто, а Λ имеет четную размерность k . Предположим, что $k \leq 6$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1 (однако $k \leq 16$). Предположим также, что многообразие Λ получается из гладкого замкнутого k -мерного многообразия $\tilde{\Lambda}$ удалением некоторого компактного подмножества \mathcal{N} , снабженного конечной C^∞ -стратификацией Уитни. Пусть, наконец, $\chi_0 = \chi(\Lambda)$ – эйлерова характеристика многообразия Λ . Тогда для множества Максвелла Σ общего семейства $F(x, \lambda)$ гладких функций от $x \in M$, гладко зависящих от $\lambda \in \Lambda$, будет иметь место равенство (3.6), если выполнены следующие условия:

- 1) существует окрестность $U \subset \tilde{\Lambda}$ множества \mathcal{N} такая, что ее замыкание \bar{U} гомотопно \mathcal{N} и является гладким многообразием с краем $\partial U = \bar{U} \setminus U$;
- 2) все изолированные особенности множества Σ лежат в $\tilde{\Lambda} \setminus \bar{U}$;
- 3) в точках гиперповерхности $\partial U \subset \tilde{\Lambda}$ множество Σ имеет особенности только типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0, A_1\}$, где $\text{codim } \mathcal{A} < k$;
- 4) для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0, A_1\}$ гиперповерхность ∂U трансверсальна многообразию \mathcal{A}_Σ особенностей типа \mathcal{A} множества Σ ;
- 5) $\chi(\mathcal{A}_\Sigma \cap \partial U) = 0$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0, A_1\}$ такого, что $\text{deg } \mathcal{A} \leq k - 2$;
- 6) $\chi(\mathcal{A}_\Sigma \setminus \bar{U}) = 0$ для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0, A_1\}$ такого, что $\text{deg } \mathcal{A} \leq k$;
- 7) $\chi((A_1)_F \setminus \bar{U}) = \chi((A_1)_F \cap \partial U) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$C = \min\{F(x, \lambda) | x \in M, \lambda \in \tilde{\Lambda} \setminus U\}.$$

Рассмотрим многообразие $\tilde{V} = \{(\lambda, \lambda_0) | \lambda \in \tilde{\Lambda}, \lambda_0 \in \mathbb{R}\}$ и снабдим его какой-нибудь римановой метрикой. Через $\tilde{\Gamma}$ обозначим объединение следующих трех гиперповерхностей в \tilde{V} :

- 1) $\{(\lambda, \lambda_0) | \lambda \in \tilde{\Lambda} \setminus U, \lambda_0 = \min_{x \in M} F(x, \lambda)\}$;
- 2) $\{(\lambda, \lambda_0) | \lambda \in \partial U, C - 1 \leq \lambda_0 \leq \min_{x \in M} F(x, \lambda)\}$;
- 3) $\{(\lambda, \lambda_0) | \lambda \in \bar{U}, \lambda_0 = C - 1\}$.

Зафиксируем произвольное достаточно малое $\varepsilon > 0$ и построим гиперповерхность Γ' в \tilde{V} , которая совпадает с $\tilde{\Gamma}$ вне $\varepsilon/2$ -окрестности многообразия

$$\{(\lambda, \lambda_0) | \lambda \in \partial U, \lambda_0 = C - 1\}$$

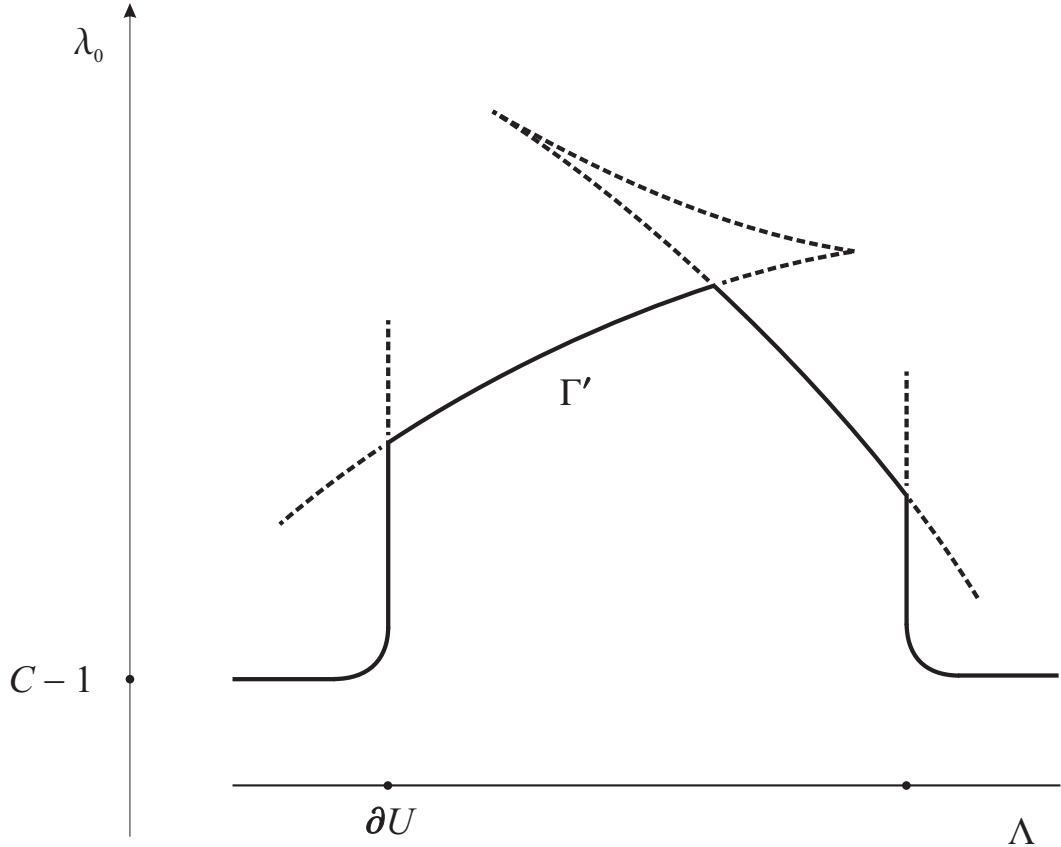


Рис. 3.1: Иллюстрация к доказательству теоремы 1.2.3.

и является гладко вложенной гиперповерхностью внутри ε -окрестности этого многообразия. Для общего семейства $F(x, \lambda)$ гиперповерхность Γ' является (компактным) краем правильной связной компоненты дополнения к некоторому фронту \mathcal{F} в \tilde{V} . Более того, при соответствующих ограничениях на размерности многообразий M и Λ гиперповерхность Γ' имеет особенности только типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$ (теорема 1.1.4).

1.2.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, фронт \mathcal{F} не компактен. Пример сечения такого фронта вертикальной гиперплоскостью в случае $k = 2$ изображен на рис. 3.1 (стр. 158). Пунктирная линия обозначает точки фронта \mathcal{F} , не принадлежащие Γ' .

По условию гиперповерхность Γ' и множество Максвелла семейства $F(x, \lambda)$ имеют одни и те же изолированные особенности. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ такого, что $\deg \mathcal{A} \leq k$, имеем:

$$\chi(\mathcal{A}_{\Gamma'}) = \begin{cases} \chi(\mathcal{A}_{\Sigma} \setminus \bar{U}) + \chi(\tilde{\mathcal{A}}_{\Sigma} \cap \partial U) = 0, & \text{если } \mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + A_1, \text{ где } \tilde{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}_{odd}; \\ \chi(\mathcal{A}_{\Sigma} \setminus \bar{U}) = 0, & \text{если } \mathcal{A} \neq \tilde{\mathcal{A}} + A_1, \text{ где } \tilde{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}_{odd}. \end{cases}$$

Наконец, очевидны следующие равенства:

$$\chi(\tilde{\Lambda}) = \chi(\Lambda) + \chi(\mathcal{N}),$$

$$\chi((A_1)_{\Gamma'}) = \chi((A_1)_F \setminus \bar{U}) + \chi(\mathcal{N}),$$

Теперь теорема 1.2.3 следует из теоремы 4.2.13 главы 2.

1.3 Множество Максвелла глобальных максимумов

Множество Максвелла глобальных максимумов семейства гладких функций определяется аналогично множеству Максвелла глобальных минимумов. Теоремы 1.1.6, 1.2.1 и 1.2.3 справедливы и в этом случае (функция f имеет глобальный максимум типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$, если функция $-f$ имеет глобальный минимум типа \mathcal{A}).

2 Топология особенностей множества опорных гиперплоскостей гладкого подмногообразия в аффинном пространстве

Исследование опорных гиперплоскостей гладкого подмногообразия в \mathbb{R}^n является важной составной частью общей задачи о строении достижимого множества в управляемых системах (см. [4]).

2.1 Особые опорные гиперплоскости

Пусть M – гладкое замкнутое подмногообразие в аффинном пространстве \mathbb{R}^n . Как и в предыдущем параграфе, многообразие M может иметь несколько связных компонент, причем эти компоненты могут иметь разные размерности, включая изолированные точки.

2.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Выпуклой оболочкой* многообразия M называется пересечение всех замкнутых полупространств в \mathbb{R}^n , содержащих M .

Выпуклая оболочка многообразия M является наименьшим замкнутым выпуклым подмножеством в \mathbb{R}^n , содержащим M .

2.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *неплоским*, если оно не лежит целиком ни в какой аффинной гиперплоскости в \mathbb{R}^n .

Выпуклая оболочка неплоского многообразия является n -мерным C^0 -многообразием с краем. Край выпуклой оболочки неплоского многообразия гомеоморфен $(n - 1)$ -мерной сфере (см. [1]).

2.1.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Имеется огромное количество работ, посвященных классификации особенностей края выпуклой оболочки подмногообразия общего положения в

\mathbb{R}^n . О некоторых результатах в этой области см., например, [15], [18], [25], [36], [37], [38], [47].

Обозначим через $V = G_{af}(n-1, n)$ многообразие Грассмана всех аффинных гиперплоскостей в \mathbb{R}^n . Это гладкое многообразие размерности n . Оно естественно изоморфно n -мерному вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^n$ без одной точки. Гиперплоскостями в V являются подмножества следующих двух типов:

- 1) множество гиперплоскостей в \mathbb{R}^n , проходящих через данную точку;
- 2) множество гиперплоскостей в \mathbb{R}^n , коллинеарных данной гиперплоскости.

Подмножество в многообразии V называется *аффинным*, если оно не пересекает некоторую гиперплоскость.

Рассмотрим произвольную гиперплоскость π в \mathbb{R}^n , касающуюся подмногообразия M (например, проходящую через изолированную точку этого многообразия).

2.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперплоскость π называется *опорной*, если многообразие M лежит целиком в одном из двух замкнутых полупространств, определенных этой гиперплоскостью.

Пусть Γ – множество всех опорных гиперплоскостей многообразия M . Это множество является (особой) компактной гиперповерхностью в многообразии V . Для неплоского многообразия M гиперповерхность Γ аффинна и гомеоморфна $(n-1)$ -мерной сфере (см. [25]). Аффинность этой гиперповерхности следует из того, что никакая опорная гиперплоскость многообразия M не проходит через внутренние точки его выпуклой оболочки.

2.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Опорная гиперплоскость π многообразия M называется *неособой*, если

- 1) она касается M ровно в одной точке x ;
- 2) если x не является изолированной точкой многообразия M , то сужение на M любой ненулевой линейной функции в \mathbb{R}^n , равной 0 на π и неотрицательной на M , имеет положительно определенный второй дифференциал в точке x .

Все остальные опорные гиперплоскости называются *особыми*.

Неособые опорные гиперплоскости многообразия M составляют гладкую часть $(A_1)_M$ гиперповерхности $\Gamma \subset V$. Эта часть является гладким $(n-1)$ -мерным подмногообразием в V (не замкнутым, вообще говоря). Особые опорные гиперплоскости соответствуют особым точкам гиперповерхности Γ .

Мы будем рассматривать особые опорные гиперплоскости, которые имеют с многообразием M касания коранга 1 конечной кратности в конечном числе точек. Такие гиперплоскости классифицируются по ненулевым элементам полугруппы \mathbb{A}_{odd} .

А именно, пусть π – опорная гиперплоскость многообразия M . Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq 0$ полугруппы \mathbb{A}_{odd} .

2.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперплоскость π называется *опорной гиперплоскостью типа \mathcal{A}* , если:

1) она касается M ровно в p точках, являющихся вершинами $(p - 1)$ -мерного симплекса;

2) существует порядок x_1, \dots, x_p точек касания такой, что для любого $i = 1, \dots, p$ имеет место следующее: если x_i не является изолированной точкой многообразия M , то росток в x_i сужения на M любой ненулевой линейной функции в \mathbb{R}^n , равной 0 на π и неотрицательной на M , задается формулой

$$t_1^{\mu_i+1} + t_2^2 + \dots + t_{m_i}^2$$

в подходящих локальных координатах t_1, \dots, t_{m_i} на M ; если x_i – изолированная точка, то $\mu_i = 1$.

Числа $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p$ и $\text{deg } \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$ называются *корузмерностью и степенью касания с M* опорной гиперплоскости типа \mathcal{A} , соответственно. Опорные гиперплоскости типа A_1 являются неособыми. Опорные гиперплоскости типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0, A_1\}$ являются особыми.

Рассмотрим пространство \mathcal{W} всех гладких вложений многообразия M в \mathbb{R}^n . Это пространство снабдим C^∞ -топологией Уитни. Будем говорить, что данное утверждение справедливо для подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ *общего положения*, если существует открытое всюду плотное подмножество в пространстве \mathcal{W} такое, что указанное утверждение имеет место для каждого вложения из этого подмножества.

2.1.7. ТЕОРЕМА ([25],[26]). Пусть M – гладкое замкнутое неплоское подмногообразие в \mathbb{R}^n . Предположим, что $n \leq 7$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1. Тогда для многообразия M общего положения справедливы следующие утверждения.

1) Опорные гиперплоскости многообразия M являются опорными гиперплоскостями типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$, где $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$.

2) Если π – опорная гиперплоскость типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$, то росток (Γ, π) множества Γ всех опорных гиперплоскостей многообразия M в точке π диффеоморфен ростку в нуле прямого произведения $(n - \text{codim } \mathcal{A})$ -мерного евклидова пространства и гиперповерхности в пространстве

$$\mathbb{R}^{\text{codim } \mathcal{A}} = \{(\lambda_0^1, \dots, \lambda_{\mu_1-1}^1, \dots, \lambda_0^p, \dots, \lambda_{\mu_p-1}^p)\},$$

образованной точками, в которых функция (3.1) равна 0.

Пусть Σ – множество особых опорных гиперплоскостей многообразия M .

2.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество Σ имеет *особенность типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0, A_1\}$* в данной точке $\pi \in \Gamma$, если росток (Σ, π) диффеоморфен ростку из

утверждения 2 теоремы 2.1.7. Указанные выше числа $\text{codim } \mathcal{A}$ и $\text{deg } \mathcal{A}$ называются *коразмерностью* и *степенью* этой особенности, соответственно.

Обозначим через \mathcal{A}_Σ множество точек $\pi \in \Gamma$, в которых множество Σ имеет особенность типа \mathcal{A} . Для подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ общего положения множество \mathcal{A}_Σ является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в многообразии V (не замкнутым и несвязным, вообще говоря). Оно называется *многообразием особенностей типа \mathcal{A}* множества Σ и состоит из опорных гиперплоскостей типа \mathcal{A} многообразия M .

Предположим, что многообразие M имеет лишь опорные гиперплоскости типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$. Тогда для многообразия M общего положения разбиение множество Γ всех его опорных гиперплоскостей на связные компоненты многообразия $(A_1)_M$ и многообразий вида \mathcal{A}_Σ , является минимальной конечной C^∞ -стратификацией Уитни.

2.1.9. ТЕОРЕМА. Пусть M – гладкое замкнутое неплоское подмногообразие в \mathbb{R}^n . Предположим, что $n \leq 7$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1. Тогда для многообразия M общего положения справедливы утверждения 1 – 5 из теоремы 1.1.6, в которых Σ – множество особых опорных гиперплоскостей многообразия M , $k = n - 1$, а

$$\chi_0 = \chi(S^{n-1}) + (-1)^n \chi_M(A_1),$$

где $\chi(S^{n-1})$ – эйлерова характеристика $(n - 1)$ -мерной сферы, а $\chi_M(A_1)$ – эйлерова характеристика многообразия $(A_1)_M$ неособых опорных гиперплоскостей многообразия M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \mathbb{R}^n – аффинная карта в $\mathbb{R}P^n$. Тогда многообразии V естественно изоморфно двойственному пространству $\mathbb{R}P^{n*}$ без одной точки (бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}^n$).

Рассмотрим лежандрово расслоение (2.5) из примера 1.1.7 главы 2. Его сужение на пространство $PT^*\mathbb{R}^n \subset PT^*(\mathbb{R}P^n)$ определяет лежандрово расслоение

$$\vartheta_0 : PT^*\mathbb{R}^n \rightarrow V, \quad (\pi, y) \mapsto \pi$$

относительно естественной контактной структуры на $PT^*(\mathbb{R}P^n)$.

Пусть L – множество контактных элементов (π, y) , где π – гиперплоскость в \mathbb{R}^n , касающаяся данного гладкого замкнутого подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке y . Это множество является гладким замкнутым лежандровым подмногообразием в $PT^*\mathbb{R}^n$.

Ограничение проекции ϑ_0 на многообразии L является лежандровым отображением. Фронт $\mathcal{F} = \vartheta_0(L)$ этого отображения является множеством всех касательных гиперплоскостей многообразия M .

Множество Γ опорных гиперплоскостей многообразия M является краем замечательной правильной связной компоненты дополнения $V \setminus \mathcal{F}$ к фронту \mathcal{F} в объемлющем многообразии V . Эта компонента состоит из гиперплоскостей в \mathbb{R}^n , которые не пересекают M и от которых M лежит с одной стороны.

Для многообразия M общего положения гиперповерхность Γ гомеоморфна $(n-1)$ -мерной сфере. Более того, в соответствующих размерностях фронт \mathcal{F} устойчив и имеет на Γ только особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$, где $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$ (теорема 2.1.7). При этом, для любого $\mathcal{A} \neq A_1$ многообразию \mathcal{A}_Γ особенностей типа \mathcal{A} гиперповерхности Γ есть в точности многообразие \mathcal{A}_Σ особых опорных гиперплоскостей типа \mathcal{A} многообразия M .

Теперь теорема 2.1.9 следует из теоремы 4.2.13 главы 2.

2.2 Слабо выпуклые подмногообразия в \mathbb{R}^n

В этом разделе мы изучим топологию множеств особых опорных гиперплоскостей многообразий одного важного (для приложений) типа.

2.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *слабо выпуклым*, если оно лежит на (топологической) границе своей выпуклой оболочки.

Например, всякое многообразие, лежащее на гладкой выпуклой гиперповерхности в \mathbb{R}^n , слабо выпукло. Связные компоненты слабо выпуклого многообразия слабо выпуклы. Обратное, вообще говоря, неверно.

Многообразие M слабо выпукло тогда и только тогда, когда через каждую его точку проходит по меньшей мере одна опорная гиперплоскость. Следовательно, если неплоское подмногообразие в \mathbb{R}^n слабо выпукло, то оно гладко вкладывается в $(n-1)$ -мерную сферу.

В частности, каждая связная компонента коразмерности 2 замкнутого неплоского подмногообразия в \mathbb{R}^n ориентируема и имеет четную эйлерову характеристику.

2.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *слабо выпуклым в строгом смысле*, если через каждую его точку проходит неособая опорная гиперплоскость.

Например, всякое многообразие, лежащее на гладкой строго выпуклой гиперповерхности в \mathbb{R}^n , слабо выпукло в строгом смысле. Подмногообразие слабо выпуклое в строгом смысле, очевидно, слабо выпукло. Обратное верно при некоторых дополнительных условиях.

2.2.3. ТЕОРЕМА. При $n \leq 7$ всякое гладкое замкнутое слабо выпуклое подмногообразие M общего положения в \mathbb{R}^n слабо выпукло в строгом смысле. Если размер-

ность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1, то это верно при любом n .

Подробное доказательство этого утверждения содержится в работе [44]. Мы не приводим его здесь, поскольку теорема 2.2.3 не используется в дальнейшем.

2.2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть гладкое замкнутое неплоское подмногообразие M в \mathbb{R}^n слабо выпукло в строгом смысле. Тогда многообразие $(A_1)_M$ его неособых опорных гиперплоскостей гомотопически эквивалентно M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многообразие V всех гиперплоскостей в \mathbb{R}^n . Для любой точки $x \in M$, достаточно близкой к данной, существует неособая опорная гиперплоскость $\pi(x) \in V$ многообразия M , гладко зависящая от x . Это семейство гиперплоскостей продолжается до гладкого вложения

$$\phi : M \rightarrow V, \quad x \mapsto \pi(x),$$

поскольку опорные гиперплоскости не проходят через внутренние точки выпуклой оболочки многообразия M .

Рассмотрим образ $\phi(M)$ вложения ϕ . Легко видеть, что подмногообразие $\phi(M) \subset V$ является строгим деформационным ретрактом многообразия $(A_1)_M$ всех неособых опорных гиперплоскостей многообразия M .

Действительно, рассмотрим множество гиперплоскостей, которые касаются многообразия M в данной точке x . Оно является проективным подпространством $\mathbb{R}P^{c-1}$ в V , где c – коразмерность связной компоненты многообразия M , содержащей точку x . Рассмотрим в $\mathbb{R}P^{c-1}$ аффинную карту \mathbb{R}^{c-1} , состоящую из гиперплоскостей, которые не проходят через некоторую фиксированную внутреннюю точку выпуклой оболочки многообразия M .

Опорные гиперплоскости образуют в \mathbb{R}^{c-1} компактное подмножество. Часть этого подмножества, состоящая из неособых опорных гиперплоскостей, является открытым выпуклым диском по двум причинам:

1) если π_1 и π_2 – две неособые опорные гиперплоскости многообразия M , проходящие через точку x , то весь отрезок в \mathbb{R}^{c-1} , соединяющий точки π_1, π_2 , состоит из опорных гиперплоскостей, пересекающих M только в точке x ;

2) множество положительно определенных квадратичных форм выпукло в пространстве $\mathbb{R}^{m(m+1)/2}$ всех квадратичных форм от m переменных.

Таким образом, многообразие $(A_1)_M$ гомотопически эквивалентно многообразию $\phi(M)$, а значит, и многообразию M . Предложение 2.2.4 доказано.

2.2.5. ТЕОРЕМА. Пусть гладкое замкнутое неплоское подмногообразие M в \mathbb{R}^n слабо выпукло в строгом смысле. Предположим, что

- 1) оно имеет N связных компонент;

- 2) размерность каждой компоненты не превышает $n - 2$;
 3) N_0 компонент имеют размерность $n - 2$.

Тогда множество Σ особых опорных гиперплоскостей многообразия M имеет следующие гомологии:

$$H_r(\Sigma, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{N_0+1}, & \text{если } r = 0; \\ H^{n-r-2}(M, \mathbb{Z}), & \text{если } 0 < r < n - 2; \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{N-1}, & \text{если } r = n - 2; \\ 0, & \text{если } r > n - 2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Эйлерова характеристика $\chi(\Sigma)$ множества Σ вычисляется по формуле

$$\chi(\Sigma) = \chi(S^{n-1}) + (-1)^n \chi(M). \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.2.4 имеет место изоморфизм групп приведенных когомологий

$$\tilde{H}^*(S^{n-1} - \Sigma, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^*(M, \mathbb{Z}).$$

Поэтому формула для групп гомологий множества Σ следует из двойственности Александера

$$\tilde{H}_r(\Sigma, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^{n-r-2}(S^{n-1} - \Sigma, \mathbb{Z}).$$

Для вычисления эйлеровой характеристики множества Σ мы воспользуемся изоморфизмом Пуанкаре

$$H^{n-r-2}(M, \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{i=1}^N H_{r-c_i+2}(M_i, \mathbb{Z}_2),$$

где M_1, \dots, M_N – связные компоненты многообразия M , а c_1, \dots, c_N – их коразмерности в \mathbb{R}^n , соответственно.

А именно, пусть $\beta_i(X)$ – ранг группы $H_i(X, \mathbb{Z}_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \chi(\Sigma) &= \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \beta_r(\Sigma) = \beta_0(\Sigma) + (-1)^n \beta_{n-2}(\Sigma) + \sum_{r=1}^{n-3} (-1)^r \sum_{i=1}^N \beta_{r-c_i+2}(M_i) \\ &= N_0 + 1 + (-1)^n (N - 1) + \sum_{i=1}^N (-1)^{c_i} \sum_{j=3-c_i}^{n-c_i-1} (-1)^j \beta_j(M_i) \\ &= 1 - (-1)^n + (-1)^n N + \sum_{i=1}^N (-1)^{c_i} (\chi(M_i) - (-1)^{n-c_i}) \\ &= \chi(S^{n-1}) + \sum_{i=1}^N (-1)^{c_i} \chi(M_i) = \chi(S^{n-1}) + (-1)^n \chi(M). \end{aligned}$$

Теорема 2.2.5 доказана.

3 Топология особенностей множества опорных гиперсфер гладкого подмногообразия в евклидовом пространстве

Рассмотрим гладкое замкнутое подмногообразие M в k -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^k . Как и выше, многообразие M может иметь несколько связных компонент, причем эти компоненты могут иметь разные размерности (включая изолированные точки).

3.1 Особые опорные гиперсферы

Пусть $|x - q|$ — расстояние между точками $x, q \in \mathbb{R}^k$. Тогда *гиперсферой* в \mathbb{R}^k радиуса $R > 0$ с центром $q \in \mathbb{R}^k$ называется множество

$$\{x \in \mathbb{R}^k : |x - q|^2 = R^2\}.$$

3.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразие M называется *несферическим*, если оно не лежит целиком ни в одной гиперсфере и ни в одной аффинной гиперплоскости в \mathbb{R}^k .

Рассмотрим произвольную гиперсферу π в \mathbb{R}^k , касающуюся подмногообразия M (например, проходящую через изолированную точку этого многообразия).

3.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперсфера π называется *опорной*, если многообразие M лежит от нее с одной стороны.

Опорные гиперсферы, от которых M лежит с внешней стороны (по отношению к центру гиперсферы), называются *внешне-опорными*. Остальные опорные гиперсферы называются *внутренне-опорными*.

3.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Опорная гиперсфера π подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^k$ называется *неособой*, если

- 1) она касается M ровно в одной точке x ;
- 2) если x не является изолированной точкой многообразия M , то для любой гладкой функции $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, равной 0 на π , неотрицательной на M и имеющей некритическое значение в точке x , второй дифференциал в x сужения f на M положительно определен.

Все остальные опорные гиперсферы называются *особыми*.

Совершенно очевидно, что через каждую точку многообразия M , не являющегося одноточечным, проходит бесконечно много неособых опорных гиперсфер и по меньшей мере одна особая опорная гиперсфера или особая опорная гиперплоскость.

3.1.4. ПРИМЕР. Каждая гиперсфера в \mathbb{R}^k , касающаяся замкнутого подмногообразия в данной точке и имеющая достаточно малый радиус, является неособой внешне-опорной гиперсферой этого многообразия.

Пусть $V_s = G_{af}^s(k, k-1)$ – многообразие всех гиперсфер и аффинных гиперплоскостей в \mathbb{R}^k . Это гладкое многообразие размерности $k+1$.

Множество Γ_s всех опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M является (особой) гиперповерхностью в многообразии V_s . Неособые опорные гиперсферы и гиперплоскости многообразия M образуют гладкую часть $(A_1)_M$ этой гиперповерхности. Особые опорные гиперсферы и гиперплоскости многообразия M соответствуют особым точкам гиперповерхности Γ_s . Они образуют компактное подмножество Σ в многообразии V_s .

3.1.5. ТЕОРЕМА. Пусть M – гладкое замкнутое несферическое подмногообразие в \mathbb{R}^k . Предположим, что оно имеет N связных компонент, причем ровно N_0 компонент являются гиперповерхностями. Тогда гомологии и эйлерова характеристика множество Σ особых опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M вычисляются по формулам (3.7) и (3.8), где $n = k+1$.

Это утверждение доказано в разделе 3.2.

В дальнейшем мы будем рассматривать опорные гиперсферы, которые имеют с многообразием M касания коранга 1 конечной кратности в конечном числе точек. Такие гиперсферы классифицируются по ненулевым элементам полугруппы \mathbb{A}_{odd} .

А именно, пусть π – опорная гиперсфера многообразия M . Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq 0$ полугруппы \mathbb{A}_{odd} .

3.1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперсфера π называется *опорной гиперсферой типа \mathcal{A}* , если:

1) она касается M ровно в p точках, являющихся вершинами $(p-1)$ -мерного симплекса;

2) существует порядок x_1, \dots, x_p точек касания такой, что для любого $i = 1, \dots, p$ имеет место следующее: если x_i не является изолированной точкой многообразия M , то росток в x_i сужения на M любой гладкой функции в \mathbb{R}^n , равной 0 на π , неотрицательной на M и имеющей некритическое значение в x_i , задается формулой

$$t_1^{\mu_i+1} + t_2^2 + \dots + t_{m_i}^2$$

в подходящих локальных координатах t_1, \dots, t_{m_i} на M ; если x_i – изолированная точка, то $\mu_i = 1$.

Числа $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p$ и $\text{deg } \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$ называются *коразмерностью и степенью касания с M* опорной гиперсферы типа \mathcal{A} , соответственно. Опорные

гиперсферы типа A_1 являются неособыми. Опорные гиперсферы типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ являются особыми.

3.1.7. ТЕОРЕМА ([9],[16]). Пусть M – гладкое замкнутое несферическое подмногообразие в \mathbb{R}^k . Предположим, что $k \leq 6$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1. Тогда для многообразия M общего положения справедливы следующие утверждения.

1) Опорные гиперсферы многообразия M являются опорными гиперсферами типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$, где $\text{codim } \mathcal{A} \leq k + 1$.

2) Если π – опорная гиперсфера типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$, то росток (Γ_s, π) множества Γ_s всех опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M в точке π диффеоморфен ростку в нуле прямого произведения $(k + 1 - \text{codim } \mathcal{A})$ -мерного евклидова пространства и гиперповерхности в пространстве

$$\mathbb{R}^{\text{codim } \mathcal{A}} = \{(\lambda_0^1, \dots, \lambda_{\mu_1-1}^1, \dots, \lambda_0^p, \dots, \lambda_{\mu_p-1}^p)\},$$

образованной точками, в которых функция (3.1) равна 0.

3.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество Σ особых опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M имеет особенность типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ в данной точке $\pi \in \Gamma_s$, если росток (Σ, π) диффеоморфен ростку из утверждения 2 теоремы 3.1.7. Указанные выше числа $\text{codim } \mathcal{A}$ и $\text{deg } \mathcal{A}$ называются *коразмерностью* и *степенью* этой особенности, соответственно.

Пусть \mathcal{A}_Σ – множество точек $\pi \in \Gamma_s$, в которых множество Σ имеет особенность типа \mathcal{A} . Тогда для подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^k$ общего положения множество \mathcal{A}_Σ является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в многообразии V_s (незамкнутым и несвязным, вообще говоря). Оно называется *многообразием особенностей типа \mathcal{A}* множества Σ и состоит из всех опорных гиперсфер и гиперплоскостей типа \mathcal{A} многообразия M .

Предположим, что многообразии M имеет лишь опорные гиперсферы и опорные гиперплоскости типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$. Тогда для многообразия M общего положения разбиение множества Γ_s всех опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M на связные компоненты многообразия $(A_1)_M$ и многообразий вида \mathcal{A}_Σ , является минимальной конечной C^∞ -стратификацией Уитни.

3.1.9. ТЕОРЕМА. Пусть M – гладкое замкнутое несферическое подмногообразие в \mathbb{R}^k . Предположим, что $k \leq 6$ или размерность каждой связной компоненты многообразия M не превышает 1. Тогда для многообразия M общего положения справедливы утверждения 1 – 5 из теоремы 1.1.6, в которых Σ – множество особых опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M , а

$$\chi_0 = \chi(S^k) - (-1)^k \chi(M),$$

где $\chi(S^k)$ – эйлерова характеристика k -мерной сферы, а $\chi(M)$ – эйлерова характеристика многообразия M .

3.2 Доказательство теорем 3.1.5 и 3.1.9

Пусть \mathbb{R}^k – подпространство в $(k+1)$ -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^{k+1} . Рассмотрим единичную k -мерную гиперсферу S^k в \mathbb{R}^{k+1} с центром в нуле. Через P обозначим одну из двух точек сферы S^k , удаленных от \mathbb{R}^k на расстояние 1.

Напомним, что *стереографической проекцией* пространства \mathbb{R}^k на сферу S^k с полюсом P называется отображение

$$\sigma : \mathbb{R}^k \rightarrow S^k, \quad Q \mapsto PQ \cap (S^k \setminus \{P\}),$$

сопоставляющее произвольной точке $Q \in \mathbb{R}^k$ точку пересечения прямой $PQ \subset \mathbb{R}^{k+1}$ с проколотой сферой $S^k \setminus \{P\}$. Это отображение является гладким вложением \mathbb{R}^k в S^k и переводит гиперсферы (гиперплоскости) в \mathbb{R}^k в трансверсальные сечения сферы S^k (проколотой сферы $S^k \setminus \{P\}$) гиперплоскостями в \mathbb{R}^{k+1} , не проходящими (проходящими, соответственно) через полюс P .

Рассмотрим многообразие $V = G_{af}(k, k+1)$ всех аффинных гиперплоскостей в \mathbb{R}^{k+1} и многообразие $V_s = G_{af}^s(k-1, k)$ всех гиперсфер и (аффинных) гиперплоскостей в \mathbb{R}^k . Стереографическая проекция σ индуцирует естественное гладкое вложение

$$\tilde{\sigma} : V_s \rightarrow V,$$

сопоставляющее гиперсфере (гиперплоскости) $\pi \in V_s$ гиперплоскость $\tilde{\sigma}(\pi) \in V$ такую, что $\sigma(\pi) \subseteq \pi \cap S^k$. Образом этого вложения является открытая область $V_0 \subset V$, состоящая из гиперплоскостей, пересекающих S^k по $(k-1)$ -мерным сферам.

3.2.1. ЛЕММА. Пусть $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k), y$ – декартова система координат в \mathbb{R}^{k+1} , подпространство \mathbb{R}^k задается уравнением $y = 0$, а полюс P имеет координаты $(\vec{x}, y) = (0, 1)$. Тогда $\vec{q} = \vec{x}$ – декартовы координаты в \mathbb{R}^k , сфера S^k определяется уравнением $|\vec{x}|^2 + y^2 = 1$, а стереографическая проекция σ – формулами:

$$\vec{x} = \frac{2\vec{q}}{|\vec{q}|^2 + 1}, \quad y = \frac{|\vec{q}|^2 - 1}{|\vec{q}|^2 + 1}.$$

Если π – гиперплоскость в \mathbb{R}^k , заданная уравнением $(\vec{a}, \vec{q}) = b$, где $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \neq 0$, то гиперплоскость $\tilde{\sigma}(\pi) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ задается уравнением $(\vec{a}, \vec{x}) + by = b$. Если π – гиперсфера в \mathbb{R}^k радиуса $R > 0$ с центром $q \in \mathbb{R}^k$, то гиперплоскость $\tilde{\sigma}(\pi) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ задается уравнением

$$2(\vec{q}, \vec{x}) + (|\vec{q}|^2 - R^2 - 1)y = |\vec{q}|^2 - R^2 + 1.$$

Доказательство этого утверждения заключается в непосредственном вычислении.

3.2.2. ЛЕММА. Пусть π – гиперсфера или гиперплоскость в \mathbb{R}^k и $Q \in \pi$ – ее произвольная точка. Рассмотрим гладкие функции $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f|_{\pi} = 0, \quad df|_Q \neq 0, \quad g|_{\tilde{\sigma}(\pi)} = 0, \quad dg|_{\sigma(Q)} \neq 0.$$

Тогда найдется гладкая функция $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $h(Q) \neq 0$ и $\sigma^*(g) = h \cdot f$ в некоторой окрестности точки Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем в пространствах \mathbb{R}^k и \mathbb{R}^{k+1} декартовы координаты из леммы 3.2.1. Тогда найдутся гладкие функции $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ и $\tilde{g} : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что:

1) $\tilde{f}(Q) \neq 0$ и $f = \tilde{f} \cdot f_0$ в некоторой окрестности точки Q , где

$$f_0(\vec{q}) = \begin{cases} (\vec{a}, \vec{q}) - b, & \text{если } \pi \text{ – гиперплоскость } (\vec{a}, \vec{q}) = b; \\ |\vec{q} - \vec{q}_0|^2 - R^2, & \text{если } \pi \text{ – гиперсфера радиуса } R > 0 \text{ с центром } \vec{q}_0; \end{cases}$$

2) $\tilde{g}(\sigma(Q)) \neq 0$ и $g = \tilde{g} \cdot g_0$ в некоторой окрестности точки $\sigma(Q)$, где $g_0(\vec{x}, y) = (\vec{a}, \vec{x}) + by - b$, если π – гиперплоскость $(\vec{a}, \vec{q}) = b$, и

$$g_0(\vec{x}, y) = 2(\vec{q}_0, \vec{x}) + (|\vec{q}_0|^2 - R^2 - 1)y - (|\vec{q}_0|^2 - R^2 + 1),$$

если π – гиперсфера радиуса $R > 0$ с центром \vec{q}_0 .

Остается заметить, что $\sigma^*(g_0)(\vec{q}) = 2f_0(\vec{q})/(|\vec{q}|^2 + 1)$. Лемма 3.2.2 доказана.

Рассмотрим произвольное гладкое подмногообразие M в \mathbb{R}^k . Его стереографический образ $\sigma(M)$ является гладким подмногообразием в \mathbb{R}^{k+1} . Это подмногообразие, очевидно, слабо выпукло в строгом смысле. Если многообразие M несферическое, то многообразие $\sigma(M)$ неплоское.

3.2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Образом множества особых опорных гиперсфер и гиперплоскостей подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^k$ при вложении $\tilde{\sigma}$ является множество особых опорных гиперплоскостей подмногообразия $\sigma(M) \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Более того, если π – опорная гиперсфера или опорная гиперплоскость типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ многообразия M , то $\tilde{\sigma}(\pi)$ – опорная гиперплоскость типа \mathcal{A} многообразия $\sigma(M)$.

Это утверждение является очевидным следствием леммы 3.2.2 и того факта, что вложении $\tilde{\sigma}$ переводит опорные гиперсферы и опорные гиперплоскости многообразия M в опорные гиперплоскости многообразия $\sigma(M)$.

Теперь теоремы 3.1.5 и 3.1.9 следуют из теорем 2.2.5, 2.1.9 и предложения 2.2.4 при помощи предложения 3.2.3.

3.3 Топология множеств симметрий, конфликтных множеств и множеств средних точек гладких подмногообразий в \mathbb{R}^k

Множеством симметрий гладкого замкнутого подмногообразия M в евклидовом пространстве \mathbb{R}^k называется замыкание множества центров гиперсфер, которые касаются M в двух различных точках. Это множество является сложным особым подмножеством в объемлющем пространстве \mathbb{R}^k .

Множество симметрий, а также различные его подмножества – конфликтные множества, множества средних точек и пр., встречаются в компьютерном моделировании и других прикладных задачах (см. например, [63], [66], [67], [98]). Мы рассмотрим здесь топологию некоторых из них.

3.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множеством внешне-опорных (внутренне-опорных) симметрий* многообразия M называется замыкание $\mathcal{C}_{ext}(M)$ ($\mathcal{C}_{int}(M)$, соответственно) в \mathbb{R}^k множества центров внешне-опорных (внутренне-опорных) гиперсфер, которые касаются M в двух различных точках.

Множества опорных симметрий многообразия M являются подмножествами его множества симметрий. Если многообразию M несферическое, то множества $\mathcal{C}_{ext}(M)$ и $\mathcal{C}_{int}(M)$ не пересекаются.

3.3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть M – гладкое замкнутое несферическое подмногообразие в \mathbb{R}^k . Тогда множество $\mathcal{C}_{ext}(M)$ компактно, если и только если одна из связных компонент многообразия M является строго выпуклой гиперповерхностью, а все остальные компоненты лежат внутри компактной области в \mathbb{R}^k , ограниченной этой гиперповерхностью.*

Аналогичное утверждение справедливо и для множества $\mathcal{C}_{int}(M)$. Более того, если $M = M_0 \cup (M \setminus M_0)$, где M_0 – гладкая замкнутая строго выпуклая гиперповерхность, а $M \setminus M_0$ лежит внутри компактной области в \mathbb{R}^k , ограниченной гиперповерхностью M_0 , то $\mathcal{C}_{int}(M) = \mathcal{C}_{int}(M_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\mathcal{C}_{ext}(M)$ (или $\mathcal{C}_{int}(M)$) компактно тогда и только тогда, когда многообразию M не имеет особых опорных гиперплоскостей. Множество всех опорных гиперплоскостей такого многообразия диффеоморфно S^{k-1} , а отображение $S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$, сопоставляющее опорной гиперплоскости точку касания с M , является гладким вложением. Образ этого вложения и есть искомая строго выпуклая связная компонента многообразия M . Предложение 3.3.2 доказано.

Множества опорных симметрий многообразия M являются, вообще говоря, особыми гиперповерхностями в \mathbb{R}^k .

3.3.3. ТЕОРЕМА ([9],[16]). *Пусть M – гладкое замкнутое несферическое подмногообразие в \mathbb{R}^k . Предположим, что $k \leq 6$ или размерность каждой связной*

компоненты многообразия M не превышает 1. Тогда для многообразия M общего положения справедливы следующие утверждения.

1) Множества $\mathcal{C}_{ext}(M)$ и $\mathcal{C}_{int}(M)$ состоят из центров опорных гиперсфер типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$, где $\text{codim } \mathcal{A} \leq k + 1$.

2) Если q – центр внешне-опорной (внутренне-опорной) гиперсферы типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ многообразия M , то росток гиперповерхности $\mathcal{C}_{ext}(M)$ ($\mathcal{C}_{int}(M)$), соотвественно) в точке q диффеоморфен ростку из утверждения 2 теоремы 1.1.4.

Пусть Σ – любое из множеств $\mathcal{C}_{ext}(M)$, $\mathcal{C}_{int}(M)$.

3.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество Σ имеет особенность типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ в данной точке $q \in \mathbb{R}^k$, если росток (Σ, q) диффеоморфен ростку из утверждения 2 теоремы 1.1.4. Числа $\text{codim } \mathcal{A}$ и $\text{deg } \mathcal{A}$ называются *коразмерностью* и *степенью* этой особенности, соответственно.

Обозначим через \mathcal{A}_Σ множество особенностей типа \mathcal{A} множества Σ . Для подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^k$ общего положения множество \mathcal{A}_Σ является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A} - 1$ в \mathbb{R}^k (незамкнутым и несвязным, вообще говоря). Оно называется *многообразием особенностей типа \mathcal{A}* множества Σ и состоит из центров внешне-опорных (внутренне-опорных) гиперсфер типа \mathcal{A} многообразия M , если $\Sigma = \mathcal{C}_{ext}(M)$ ($\Sigma = \mathcal{C}_{int}(M)$), соответственно).

Предположим, что многообразие M имеет лишь опорные гиперсферы типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0\}$. Тогда для многообразия M общего положения разбиение множества Σ на связные компоненты многообразий вида \mathcal{A}_Σ , является минимальной C^∞ -стратификацией Уитни.

3.3.5. ТЕОРЕМА. Пусть M – гладкое замкнутое подмногообразие в \mathbb{R}^k , где $k \leq 6$. Предположим, что одна из связных компонент многообразия M является строго выпуклой гиперповерхностью, а все остальные компоненты лежат внутри компактной области в \mathbb{R}^k , ограниченной этой гиперповерхностью. Тогда для многообразия M общего положения справедливы утверждения 1 – 5 теоремы 1.1.6 в каждом из следующих двух случаев:

- 1) $\Sigma = \mathcal{C}_{ext}(M)$ и $\chi_0 = (-1)^k [1 - \chi(M)]$;
- 2) $\Sigma = \mathcal{C}_{int}(M)$ и $\chi_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\mathcal{C}_{ext}(M)$ ($\mathcal{C}_{int}(M)$) является множеством Максвелла глобальных минимумов (максимумов, соответственно) семейства

$$F(x, \lambda) = |x - \lambda|^2$$

функций от $x \in M$, зависящих от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^k$ (см. [9]). Для подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^k$ общего положения это семейство является общим семейством функций в смысле теоремы 1.1.4.

Пусть M_0 – та связная компонента многообразия M , которая ограничивает компактную область в \mathbb{R}^k , содержащую внутри себя все остальные его компоненты. Тогда множества $\mathcal{C}_{ext}(M)$ и $\mathcal{C}_{int}(M)$ компактны (предложение 3.3.2), а многообразие $(A_1)_F$ неособых глобальных минимумов (максимумов) семейства $F(x, \lambda)$ гомотопически эквивалентно многообразию M (M_0 , соответственно). Последнее доказывается аналогично предложению 2.2.4 (M является строгим деформационным ретрактом многообразия $(A_1)_F$ в случае минимумов, и M_0 – в случае максимумов).

Остается воспользоваться теоремой 1.2.1 при $\Lambda = \mathbb{R}^k$ и $\chi_F(A_1) = \chi(M)$, если $\Sigma = \mathcal{C}_{ext}(M)$, и $\chi_F(A_1) = \chi(S^{k-1})$, если $\Sigma = \mathcal{C}_{int}(M)$. Теорема 3.3.5 доказана.

Зафиксируем теперь произвольную связную компоненту U дополнения $\mathbb{R}^k \setminus M$ к несферическому подмногообразию M в \mathbb{R}^k . Объединение связных компонент многообразия M , лежащих строго внутри замыкания \bar{U} области U обозначим через M_U .

Пусть $\Sigma(U)$ – множество особых опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M , лежащих в \bar{U} . Множество $\Sigma(U)$ является связной компонентой множества всех особых опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M .

3.3.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Связность множества $\Sigma(U)$ следует из теоремы 3.1.5.

Особенности типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ множества всех особых опорных гиперсфер и гиперплоскостей многообразия M в точках из $\Sigma(U)$ называются также *особенностями типа \mathcal{A}* множества $\Sigma(U)$.

3.3.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множеством средних точек* области U называется множество $\mathcal{C}(U)$ точек в U , которые являются центрами особых внешне-опорных гиперсфер многообразия M . Это множество называют также *средней осью* или *конфликтным множеством*.

Множество $\mathcal{C}(U)$ является подмножеством множества $\mathcal{C}_{ext}(M)$ внешне-опорных симметрий многообразия M . Если область U ограничена, то множество ее средних точек является компактной связной компонентой множества $\mathcal{C}_{ext}(M)$. Особенности типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{odd} \setminus \{0, A_1\}$ множества $\mathcal{C}_{ext}(M)$ в точках из $\mathcal{C}(U)$ называются *особенностями типа \mathcal{A}* множества $\mathcal{C}(U)$.

3.3.8. ТЕОРЕМА. *Пусть M – гладкое замкнутое подмногообразие в \mathbb{R}^k , где $k \leq 6$. Предположим, что дополнение $\mathbb{R}^k \setminus M$ несвязно и U – одна из его связных компонент. Тогда для многообразия M общего положения справедливы утверждения 1 – 5 теоремы 1.1.6, в которых:*

- 1) *если U ограничена, то $\Sigma = \mathcal{C}(U)$ и $\chi_0 = \chi(\bar{U}) - (-1)^k \chi(M_U)$;*
- 2) *если U неограничена, то $\Sigma = \Sigma(U)$ и $\chi_0 = \chi(\bar{U}) - (-1)^k \chi(M_U) + (-1)^k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение этой теоремы доказывается аналогично теореме 3.3.5. А именно, множество $\mathcal{C}(U)$ является множеством Максвелла глобаль-

ных минимумов семейства

$$F(x, \lambda) = |x - \lambda|^2$$

функций от $x \in M$, зависящих от параметра $\lambda \in \Lambda = \overline{U} \setminus \partial\overline{U}$, где $\partial\overline{U}$ – край области \overline{U} (\overline{U} – гладкое многообразие с краем, причем $\partial\overline{U}$ состоит из связных компонент многообразия M). Многообразие $(A_1)_F$ неособых глобальных минимумов этого семейства гомотопически эквивалентно несвязному объединению многообразий M_U и $\partial\overline{U}$. Поэтому первое утверждение теоремы 3.3.8 следует из теоремы 1.2.1 и того факта, что

$$\begin{aligned} \chi_0 &= (-1)^k [\chi(\Lambda) - \chi_F(A_1)] = (-1)^k [\chi(\overline{U}) - \chi(M_U) - \chi(\partial\overline{U})] \\ &= (-1)^k [(-1)^k \chi(\overline{U}) - \chi(M_U)] = \chi(\overline{U}) - (-1)^k \chi(M_U). \end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы 3.3.8 сводится к первому. Действительно, рассмотрим инверсию

$$\mathcal{I} : \mathbb{R}^k \setminus \{Q\} \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{Q\}$$

пространства \mathbb{R}^k относительно фиксированной гиперсферы малого радиуса с центром в некоторой точке $Q \in \mathbb{R}^k \setminus (\overline{U} \cup M)$.

Легко видеть, что множество $\mathcal{U} = \mathcal{I}(U) \cup \{Q\}$ является ограниченной связной компонентой дополнения $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{M}$ к многообразию $\mathcal{M} = \mathcal{I}(M)$. Для подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^k$ общего положения многообразия $\mathcal{A}_{\Sigma(U)}$, $\mathcal{A}_{\Sigma(\mathcal{U})}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ особенностей типа \mathcal{A} множеств $\Sigma(U)$, $\Sigma(\mathcal{U})$, $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ диффеоморфны для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0, A_1\}$. Остается лишь заметить, что многообразии $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ диффеоморфно многообразию M_U , а

$$\chi(\overline{\mathcal{U}}) = \chi(\mathcal{I}(\overline{U})) + (-1)^k = \chi(\overline{U}) + (-1)^k.$$

Теорема 3.3.8 доказана.

3.3.9. ПРИМЕР. Пусть M – связная замкнутая (гладко) вложенная кривая общего положения на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . Тогда из теоремы 3.3.8 следует, что для каждой связной компоненты U дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus M$ число C окружностей кривизны кривой M , лежащих в замыкании \overline{U} , связано с числом T окружностей, касающихся M в трех точках и также лежащих в \overline{U} , равенством

$$C - T = 2. \tag{3.9}$$

3.3.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Впервые формулу (3.9) получил Бозе [62] при условии выпуклости кривой M . В работе Хаупта [70] эта формула была доказана для всех связных замкнутых вложенных кривых общего положения на плоскости. Теорема 3.3.8 распространяет эти результаты на случай несвязных кривых (с возможным добавлением конечного числа точек, лежащих вне кривой), а также является их многомерным обобщением.

Глава 4

Контактная геометрия пространственных кривых

В этой главе рассматриваются некоторые известные задачи контактной геометрии пространственных кривых. В частности, мы обобщаем теорему Фридмана о тройных касательных плоскостях кривой в \mathbb{R}^3 на произвольные кривые в $\mathbb{R}P^n$, доказываем теорему о четырех точках уплощения слабо выпуклой кривой в \mathbb{R}^3 (обобщение классической теоремы Махопадхайя о четырех вершинах плоской кривой) и находим новые инварианты допустимых по Арнольду гомотопий кривой в $\mathbb{R}P^3$. Используя результаты главы 3, мы получаем многомерные обобщения классической формулы Бозе (на случай выпуклых кривых в четномерном пространстве и кривых выпуклых по Барнеру в нечетномерном пространстве).

Изложенные ниже результаты опубликованы в работах [39], [40], [46], [48], [54], [91], [93], [94], [96].

1 Многомерное обобщение теоремы Фридмана о тройных касательных плоскостях кривой в \mathbb{R}^3

Сначала мы напомним некоторые важные определения и факты, которые будут использоваться на протяжении всей этой главы. В конце первого параграфа мы обобщим теорему Фридмана [65] и результаты работы [59] на кривые в многомерном проективном пространстве.

1.1 Точки уплощения пространственной кривой

Кривой в n -мерном вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$ мы всегда будем называть гладкое (если не оговорено противное) собственное отображение

$$\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad \gamma : t \mapsto \gamma(t),$$

гладкого одномерного многообразия \mathcal{E} в $\mathbb{R}P^n$. Образ этого отображения мы также будем называть кривой в $\mathbb{R}P^n$.

Пространство \mathcal{W} всех кривых в $\mathbb{R}P^n$ снабдим C^∞ -топологией Уитни. Мы будем говорить, что данное утверждение справедливо для кривой *общего положения*, если существует открытое всюду плотное подмножество в пространстве \mathcal{W} такое, что указанное утверждение имеет место для всех кривых из этого подмножества.

Кривая γ называется *замкнутой* (*связной*, *ориентированной*, *параметризованной*), если многообразие \mathcal{E} замкнуто (связно, ориентировано, параметризовано, соответственно). Если отображение γ является иммерсией (вложением), то соответствующая кривая называется *иммерсированной* (*вложенной*). Вложенную кривую мы будем отождествлять с самим многообразием \mathcal{E} .

Рассмотрим произвольную точку $t \in \mathcal{E}$. Гиперплоскость π в $\mathbb{R}P^n$ называется *соприкасающейся гиперплоскостью* кривой γ в точке t , если кратность, с которой кривая γ пересекает гиперплоскость π в этой точке, не меньше n .

Любая кривая имеет по меньшей мере одну соприкасающуюся гиперплоскость в каждой своей точке. Точки, в которых соприкасающаяся гиперплоскость не единственна, называются *точками вырождения*. Кривая без точек вырождения называется *невыврожденной*.

1.1.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Кривая общего положения в $\mathbb{R}P^n$ невырождена. Она иммерсирована при $n = 2$ и вложена при $n > 2$. Замкнутая кривая общего положения пересекает любую гиперплоскость в конечном числе точек (с учетом кратностей).

1.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка кривой в $\mathbb{R}P^n$ называется *точкой уплощения*, если кратность, с которой кривая пересекает в этой точке свою соприкасающуюся гиперплоскость, строго больше n .

1.1.3. ПРИМЕР. Кривая в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 невырождена тогда и только тогда, когда она иммерсирована, а ее кривизна всюду отлична от нуля. Точки уплощения такой кривой являются нулями ее кручения. Кривая может не иметь точек уплощения. Таковой является, например, достаточно плотная равномерная замкнутая обмотка стандартного тора в \mathbb{R}^3 .

Множество соприкасающихся гиперплоскостей невырожденной кривой γ является кривой в двойственном пространстве $\mathbb{R}P^{n*}$. Эта кривая называется *двойственной* и обозначается через γ^* . Двойственная кривая иммерсирована всюду кроме точек, являющихся соприкасающимися гиперплоскостями исходной кривой в точках ее уплощения. Эти гиперплоскости являются особыми точками двойственной кривой.

1.1.4. ПРИМЕР. Соприкасающаяся плоскость в точке уплощения кривой общего положения в $\mathbb{R}P^3$ является точкой полукубического возврата двойственной кривой. В подходящих аффинных координатах a, b, c в двойственном пространстве $\mathbb{R}P^{3*}$ росток двойственной кривой в особой точке задается формулами

$$x = t^2, \quad y = t^3 + o(t^3), \quad z = t^4 + o(t^4).$$

Важным классом кривых без точек уплощения являются выпуклые.

1.1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривая в $\mathbb{R}P^n$ называется *выпуклой*, если она пересекает любую гиперплоскость не более, чем в n точках с учетом кратностей.

Выпуклые кривые вложены, невырождены и не имеют точек уплощения. Замкнутая выпуклая кривая связна, причем в четномерном пространстве она аффинна, а в нечетномерном – нестягиваема (т.е. представляет нетривиальный элемент фундаментальной группы пространства $\mathbb{R}P^n$). Кривая, двойственная к выпуклой, – выпукла (см. [57]).

1.1.6. ПРИМЕР. Кривая в \mathbb{R}^{2k} , заданная формулами

$$x_1 = \cos t, \quad y_1 = \sin t, \quad \dots \quad x_k = \cos kt, \quad y_k = \sin kt, \quad (t \bmod 2\pi)$$

является выпуклой. Кривая в $\mathbb{R}P^{2k+1}$

$$(\cos t : \sin t : \cos 3t : \sin 3t : \dots : \cos(2k+1)t : \sin(2k+1)t), \quad (t \bmod \pi)$$

(заданная в однородных координатах) также выпукла.

1.2 Фронт касательных гиперплоскостей кривой

Если кривая $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ иммерсирована в $\mathbb{R}P^n$, то в каждой своей точке t она имеет *касательную*. Это проективная прямая (в $\mathbb{R}P^n$), которую определяет образ

первой производной γ_{*t} кривой. Всякая гиперплоскость в $\mathbb{R}P^n$, содержащая эту прямую, называется *касательной гиперплоскостью* кривой γ в точке t .

Касательные гиперплоскости кривой γ классифицируются по ненулевым элементам полугруппы \mathbb{A}_+ (свободной абелевой полугруппы по сложению, порожденной символами A_1, A_2, \dots). А именно, пусть π – касательная гиперплоскость кривой γ . Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq 0$ полугруппы \mathbb{A}_+ .

1.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперплоскость π называется *касательной гиперплоскостью типа \mathcal{A}* , если

- 1) она касается γ ровно в p попарно различных точках, являющихся вершинами $(p-1)$ -мерного симплекса;
- 2) эти точки можно упорядочить так, что кратность касания π с γ в i -й точке равна μ_i .

Число $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p$ называется *коразмерностью касания* с кривой касательной гиперплоскости типа \mathcal{A} . Число $\text{deg } \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p$ называется *степенью* этого касания.

1.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Касательные гиперплоскости типов pA_1 обычно называют *p -касательными* гиперплоскостями.

Касательные гиперплоскости кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$ являются касательными гиперплоскостями типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$, где $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$ (см. [36], а также [55]). Множество \mathcal{F}_γ всех касательных гиперплоскостей такой кривой является устойчивым волновым фронтом коранга ≤ 1 в двойственном пространстве $\mathbb{R}P^{n*}$. Особенности типа \mathcal{A} этого фронта взаимно однозначно определяются касательными гиперплоскостями типа \mathcal{A} кривой γ . Если кривая γ замкнута, то число ее касательных гиперплоскостей любого типа \mathcal{A} такого, что $\text{codim } \mathcal{A} = n$, конечно.

1.2.3. ПРИМЕР. Двойственная кривая γ^* является замыканием многообразия особенностей типа A_{n-1} фронта \mathcal{F}_γ . Точки уплощения кривой γ взаимно однозначно соответствуют особенностям типа A_n .

1.2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Фронт \mathcal{F}_γ касательных гиперплоскостей замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$ является множеством критических значений устойчивого гладкого отображения f коранга ≤ 1 гладкого замкнутого n -мерного многообразия в пространство $\mathbb{R}P^{n*}$. Отображение f имеет мультиособенность типа $\mathcal{A} + kA_0$, $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+$, $k \geq 0$, в точке $\pi \in \mathbb{R}P^{n*}$ тогда и только тогда, когда π – касательная гиперплоскость кривой γ , имеющая тип \mathcal{A} и ровно k точек трансверсального пересечения с γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество M контактных элементов (π, y) гиперплоскостей π в $\mathbb{R}P^n$ в точках $y = \gamma(t)$. Это множество является гладким замкну-

тым n -мерным подмногообразием в $PT^*(\mathbb{R}P^n)$. Искомым отображением $f : M \rightarrow \mathbb{R}P^{n*}$ является, очевидно, сужение лежандрова расслоения

$$\vartheta : PT^*(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \mathbb{R}P^{n*}, \quad \vartheta : (\pi, y) \mapsto \pi$$

на многообразии M . Предложение 1.2.4 доказано.

1.3 О четности числа n -касательных гиперплоскостей замкнутой кривой в $\mathbb{R}P^n$

В 1980 году Фридман [65] доказал, что если связная замкнутая кривая γ общего положения в \mathbb{R}^3 не имеет точек уплощения, то число T ее тройных касательных плоскостей четно. Позднее в работе [59] этот результат был обобщен на случай кривых в \mathbb{R}^3 , имеющих точки уплощения.

А именно, пусть N – общее число точек, в которых кривая γ трансверсально пересекает свои соприкасающиеся плоскости в точках уплощения. Тогда $T \equiv N/2 \pmod{2}$. Ниже дано обобщение этой формулы и теоремы Фридмана для любых замкнутых кривых общего положения в нечетномерном пространстве $\mathbb{R}P^n$.

Рассмотрим произвольную замкнутую кривую γ в $\mathbb{R}P^n$. Через $\theta(\gamma)$ обозначим число ее нестягиваемых компонент. Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_+ \setminus \{0\}$ такого, что $\text{codim } \mathcal{A} = n$, введем следующие обозначения:

$\chi_\gamma(\mathcal{A})$ – число всех касательных гиперплоскостей кривой γ , имеющих тип \mathcal{A} ;

$\widehat{\chi}_\gamma(\mathcal{A})$ – число касательных гиперплоскостей типа \mathcal{A} , у каждой из которых число точек трансверсального пересечения с γ сравнимо с $\deg \mathcal{A} + \theta(\gamma)$ по модулю 4.

1.3.1. ТЕОРЕМА. *Для любой замкнутой кривой γ общего положения в пространстве $\mathbb{R}P^n$ нечетной размерности $n \geq 3$,*

$$\chi_\gamma(nA_1) \equiv \widehat{\chi}_\gamma(A_3 + (n-3)A_1) \pmod{2}. \quad (4.1)$$

В частности, если кривая γ не имеет касательных гиперплоскостей типа $A_3 + (n-3)A_1$, то число ее n -касательных гиперплоскостей четно.

Пусть, например, $n = 3$. Тогда из теоремы 1.3.1 получаем

1.3.2. СЛЕДСТВИЕ. *Для любой замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^3$,*

$$T \equiv \frac{N + \theta(\gamma)C}{2} \pmod{2}, \quad (4.2)$$

где T – число ее тройных касательных плоскостей, C – число точек уплощения, а N – общее число точек, в которых γ трансверсально пересекает свои соприкасающиеся плоскости в точках уплощения. В частности, если кривая γ не имеет точек уплощения, то число ее тройных касательных плоскостей четно.

Действительно, число $[N + \theta(\gamma)C]/2$ сравнимо по модулю 2 с числом \tilde{C} точек уплощения кривой γ , удовлетворяющих следующему условию: если π – соприкасающаяся плоскость кривой в такой точке, то $[k + \theta(\gamma)]/2 \equiv 1 \pmod{2}$, где k – число точек трансверсального пересечения γ с π . Число \tilde{C} сравнимо по модулю 2 с числом $\widehat{\chi}_\gamma(A_3)$, поскольку число C всех точек уплощения кривой γ четно. Поэтому формула (4.2) следует из формулы (4.1).

1.3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. В [65] Фридман высказал гипотезу о том, что если связная замкнутая кривая общего положения в \mathbb{R}^n , $n > 3$ не имеет точек уплощения, то число ее n -касательных гиперплоскостей четно. Мне не удалось обнаружить контрпример к этой гипотезе в литературе. Но формула (4.1) показывает, что такой контрпример весьма вероятен.

Наряду с (4.1) формула (4.2) имеет много других многомерных обобщений. Например, такое.

1.3.4. ТЕОРЕМА. *Для любой замкнутой кривой γ общего положения в пространстве $\mathbb{R}P^n$ нечетной размерности $n \geq 3$,*

$$\chi_\gamma(2A_{(n-1)/2} + A_1) \equiv \widehat{\chi}_\gamma(A_n) \pmod{2}. \quad (4.3)$$

В частности, если кривая γ не имеет точек уплощения, то число ее касательных гиперплоскостей типа $2A_{(n-1)/2} + A_1$ четно.

Все эти результаты следуют из одной общей формулы, которая описывает глобальные свойства проективных кривых.

1.3.5. ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathcal{A} = k_1A_{\mu_1} + \dots + k_pA_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$, где μ_1, \dots, μ_p попарно различны и $\text{codim } \mathcal{A} = n-1$. Тогда для любой замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$*

$$[\#(A_1|\mathcal{A}) + 1]\chi_\gamma(\mathcal{A} + A_1) \equiv \sum_{k_i > 1} [\#(A_{2\mu_i+1}|\mathcal{A}) + 1]\widehat{\chi}_\gamma(\mathcal{A} - 2A_{\mu_i} + A_{2\mu_i+1}) \pmod{2},$$

где $\#(A_\mu|\mathcal{A})$ – число слагаемых в \mathcal{A} , равных A_μ .

Это утверждение вытекает из теоремы 5.4.2 и замечания 5.4.3 главы 1, а также из предложения 1.2.4 выше (для отображения f из предложения 1.2.4 максимум d_f числа точек в полном прообразе $f^{-1}(\pi)$ по всем $\pi \in \mathbb{R}P^{n*}$ сравним с $\theta(\gamma)$ по модулю 2). Формулы (4.1) и (4.3) следуют из теоремы 1.3.5 в случае нечетного n при $\mathcal{A} = (n-1)A_1$ и $\mathcal{A} = 2A_{(n-1)/2}$, соответственно.

1.3.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1.3.5 не дает каких-либо ограничений на четность числа n -касательных гиперплоскостей замкнутой кривой γ общего положения в n -мерном пространстве $\mathbb{R}P^n$. Более того, из формулы (1.27) в главе 1 следует, что

при любом $n > 2$ имеет место соотношение:

$$\widehat{\chi}_\gamma((n-1)A_1) = \frac{n}{2} \chi_\gamma(nA_1) + \widehat{\chi}_\gamma(A_2 + (n-2)A_1) + \frac{1}{2} \widehat{\chi}_\gamma(A_3 + (n-3)A_1). \quad (4.4)$$

Здесь $\widehat{\chi}_\gamma((n-1)A_1)$ – число односвязных компонент кривой в $\mathbb{R}P^{n*}$, образованной касательными гиперплоскостями π исходной кривой γ , которые имеют тип $(n-1)A_1$ и удовлетворяют следующему условию: если k – число точек трансверсального пересечения γ с π , то $k \equiv 2n + 2 + \theta(\gamma) \pmod{4}$. Из формулы (4.4) видно, что при четном n четность числа $\chi_\gamma(nA_1)$ зависит не только от четности чисел касательных гиперплоскостей кривой с коразмерностью касания n .

В заключении этого параграфа мы приведем еще одно следствие теоремы 1.3.5.

1.3.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_+$, где μ_1, \dots, μ_p попарно различны, $\mu_1 > 1, \dots, \mu_p > 1$ и $\text{codim } \mathcal{A} = n - 1$. Тогда у любой замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$, где $n \neq 2$, число касательных гиперплоскостей типа $\mathcal{A} + A_1$ четно.

Например, рассмотрим особые точки двойственной кривой γ^* . Они называются *особыми* соприкасающимися гиперплоскостями исходной кривой γ . Множество особых соприкасающихся гиперплоскостей замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$ состоит из касательных гиперплоскостей типов A_n и $A_{n-1} + A_1$. Поскольку $\chi_\gamma(A_n) \equiv (n+1)\theta(\gamma) \pmod{2}$, то из следствия 1.3.7 получаем:

1.3.8. СЛЕДСТВИЕ. Для любого $n \geq 3$ число особых соприкасающихся гиперплоскостей замкнутой кривой γ общего положения в $\mathbb{R}P^n$ сравнимо с $(n+1)\theta(\gamma)$ по модулю 2.

2 Теорема о четырех точках уплощения слабо выпуклой кривой в \mathbb{R}^3

Вершинами иммерсированной кривой на евклидовой плоскости называются точки экстремумов ее кривизны. В 1909 году индийский математик Махопадхайя доказал знаменитую теорему о четырех вершинах плоской кривой (см. [84]): *всякая вложенная замкнутая кривая на евклидовой плоскости имеет не менее четырех геометрически различных вершин.*

Строго говоря Махопадхайя доказал свою теорему (которая теперь называется классической) только для выпуклых кривых. Но впоследствии выяснилось, что его теорема справедлива и в невыпуклом случае. В частности, для кривых общего положения теорема о четырех точках уплощения следует из формулы Бозе-Хаупта (3.9) (на основании того факта, что если окружность кривизны плоской кривой в данной точке t является опорной, то t – вершина этой кривой).

С тех пор не прекращаются попытки получить многомерные (а также контактные, симплектические) обобщения теоремы о четырех вершинах (см., например, задачи 1988-11, 1993-8 из сборника [14] и доказательство Пушкаря-Чеканова [35] некоторых гипотез Арнольда о четырех вершинах). Одно из таких обобщений мы докажем в этом параграфе. Речь пойдет об оценке числа точек уплощения слабо выпуклой кривой в \mathbb{R}^3 (т.е. кривой, лежащей на границе своей выпуклой оболочки; произвольные слабо выпуклые подмногообразия в \mathbb{R}^n рассматривались в разделе 2.2 главы 3).

2.1 Формулировка результата

В 1912 году Кнезер [77] доказал следующую лемму: *при стереографической проекции, вершины плоской кривой переходят в точки уплощения ее образа в пространстве.* Отсюда следует, что всякая вложенная замкнутая кривая на сфере в трехмерном евклидовом пространстве имеет не менее четырех точек уплощения.

2.1.1. ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [43] выяснилось, что лемма Кнезера – это проявление общей связи особенностей огибающей семейства нормалей к гладкому подмногообразию в \mathbb{R}^n с особенностями фронта касательных гиперплоскостей его стереографического образа в \mathbb{R}^{n+1} .

За время, прошедшее после работы Кнезера, теорема о четырех точках уплощения была доказана для более широких классов кривых в \mathbb{R}^3 . В частности, для (вложенных) кривых на строго выпуклых поверхностях ([82]); для кривых, через каждую пару точек которой (с учетом кратностей) проходит плоскость, нигде более не пересекающая кривую ([60]); для слабо выпуклых кривых, пересекающих любую

плоскость в конечном числе точек, а любую прямую – не более, чем в двух точках ([61]); для слабо выпуклых кривых общего положения ([86]).

Наконец в 1992 году автор настоящей работы доказал теорему о четырех точках уплощения слабо выпуклой кривой в \mathbb{R}^3 при самых слабых предположениях.

2.1.2. ТЕОРЕМА. *Всякая C^3 -вложенная связная замкнутая слабо выпуклая кривая со всюду ненулевой кривизной в \mathbb{R}^3 имеет не менее четырех (геометрически различных) точек уплощения.*

Все упомянутые выше версии теоремы о четырех точках уплощения следуют из теоремы 2.1.2. Теорема Махонадхайя также следует из теоремы 2.1.2 (при помощи леммы Кнезера; заметим, что кривизна кривой, вложенной в строго выпуклую поверхность в \mathbb{R}^3 , всюду отлична от нуля).

2.1.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Условие всюду ненулевой кривизны кривой является необходимым в теореме 2.1.2. Действительно, рассмотрим семейство $\gamma_\lambda : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\lambda \in [0, 1]$, кривых в \mathbb{R}^3 , заданных формулами

$$x = \cos(t - \lambda \sin t), \quad y = \sin(t - \lambda \sin t), \quad z = \sin t \quad (t \bmod 2\pi).$$

Кривая γ_λ вложена и слабо выпукла для любого из указанных λ . Последнее следует из того, что кривая лежит на поверхности кругового цилиндра (с осью z и радиусом 1). Если $\lambda \neq 1$, то кривая γ_λ пересекает образующие этого цилиндра под ненулевым углом и, поэтому, всюду имеет ненулевую кривизну. При $\lambda = 1$ кривизна кривой обращается в нуль в единственной точке $(1, 0, 0)$.

Непосредственные вычисления показывают, что для любого $0 < \lambda < 1$ кривая γ_λ имеет ровно четыре геометрически различные точки уплощения. Когда $\lambda \rightarrow 1 - 0$, две из них сливаются с точкой $(1, 0, 0)$. При $\lambda = 1$ на кривой остаются только три (геометрически различные) точки уплощения.

2.1.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 2.1.2 следует, что фронт касательных плоскостей замкнутой слабо выпуклой кривой общего положения в \mathbb{R}^3 имеет не менее четырех ласточкиных хвостов, линия самопересечения фронта – не менее четырех концов, а двойственная кривая – не менее четырех точек возврата.

Я думаю, что теорема 2.1.2 имеет следующее многомерное обобщение.

2.1.5. ГИПОТЕЗА. *Пусть связная замкнутая невырожденная кривая C^{2k+1} -вложенная в \mathbb{R}^{2k+1} удовлетворяет следующему условию: через любые k ее точек проходит по меньшей мере одна опорная гиперплоскость. Тогда эта кривая имеет не менее $(2k + 2)$ -х геометрически различных точек уплощения.*

2.1.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема о четырех точках уплощения доказана и для некоторых классов пространственных кривых, не являющихся слабо выпуклыми. Подроб-

ный обзор и сравнение всех полученных результатов имеется в [102] и [103] (см. также [71] и [104]).

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2.1.2. Она является следствием более сильного утверждения о количестве контактных элементов *опорных* соприкасающихся плоскостей слабо выпуклой кривой в точках уплощения.

2.1.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Опорная плоскость может соприкасаться с гладкой кривой только в точках уплощения.

Пусть γ – ориентированная кривая, C^3 -иммерсированная в ориентированное пространство \mathbb{R}^3 . Предположим, что кривизна этой кривой всюду отлична от нуля и зафиксируем параметризацию кривой, согласованную с ее ориентацией. Тогда векторы скорости и ускорения кривой γ ориентируют контактные элементы ее соприкасающихся плоскостей в точках соприкосновения с кривой. Эта ориентация вместе с ориентацией объемлющего пространства индуцирует коориентацию указанных контактных элементов. Такая коориентация не зависит от параметризации кривой (если только эта параметризация согласована с ориентацией кривой).

Предположим, теперь что кривая γ неплоская.

2.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Контактный элемент опорной соприкасающейся плоскости кривой γ в точке уплощения называется *положительным* (*отрицательным*), если кривая лежит в положительном (отрицательном) замкнутом полупространстве, определенном этим контактным элементом.

При смене только одной из ориентаций (кривой или объемлющего пространства) контактный элемент меняет знак на противоположный.

2.1.9. ТЕОРЕМА. *Рассмотрим C^3 -вложенную связную замкнутую слабо выпуклую кривую со всюду ненулевой кривизной в \mathbb{R}^3 . Предположим, что она имеет конечно число точек уплощения. Тогда существует не менее четырех попарно различных контактных элементов опорных соприкасающихся плоскостей этой кривой в точках уплощения. А именно, не менее двух положительных и не менее двух отрицательных.*

Теорема 2.1.9 доказана в разделе 2.3. Теорема 2.1.2 следует из теоремы 2.1.9.

2.1.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Некоторые оценки числа точек уплощения слабо выпуклой кривой, имеющей точки нулевой кривизны (и даже кривой с особенностями), приведены в [87], [88].

2.2 Вспомогательные утверждения

Для доказательства теоремы 2.1.9 нам потребуются некоторые (простые) факты о кривых в трехмерном пространстве. Мы будем предполагать здесь, что объемлющее пространство евклидово, а все кривые C^3 -параметризованные.

2.2.1. ЛЕММА. Пусть кривая $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, иммерсированная в \mathbb{R}^3 , имеет ненулевую кривизну и ненулевое кручение в данной точке t_0 . Тогда она не имеет общих касательных плоскостей ни в каких двух своих точках $t_1 \neq t_2$, близких к t_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольные две точки t_1, t_2 , близкие к t_0 . По формуле Тейлора

$$\gamma(t_2) = \gamma(t_1) + \gamma'(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\gamma''(t_1)(t_2 - t_1)^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(t_1)(t_2 - t_1)^3 + o((t_2 - t_1)^4).$$

Поэтому смешанное произведение

$$(\gamma'(t_2), \gamma'(t_1), \gamma(t_2) - \gamma(t_1))$$

векторов скорости $\gamma'(t_2), \gamma'(t_1)$ и приращения $\gamma(t_2) - \gamma(t_1)$ равно

$$\frac{1}{12}(\gamma'(t_1), \gamma''(t_1), \gamma'''(t_1))(t_2 - t_1)^4 + o((t_2 - t_1)^4).$$

Это выражение отлично от нуля для всех $t_1 \neq t_2$, достаточно близких к t_0 , если

$$(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)) \neq 0.$$

Лемма 2.2.1 доказана.

2.2.2. ЛЕММА. Пусть кривая $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, иммерсированная в \mathbb{R}^3 , имеет ненулевую кривизну и ненулевое кручение в данной точке t_0 . Предположим, что на этой кривой выделено конечное множество точек, не лежащих на ее касательной в точке t_0 . Тогда для любого $t \neq t_0$, достаточно близкого к t_0 , опорные плоскости кривой γ , проходящие через точку $\gamma(t)$, не содержат выделенные точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так. Тогда для некоторой выделенной точки $P = \gamma(t_*)$ найдется последовательность $t_k, k = 1, 2, \dots$, попарно различных точек $t_k \neq t_0$, таких, что $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$ и для любого k точки $\gamma(t_k)$ и P принадлежат некоторой опорной плоскости π_k кривой γ .

Рассмотрим плоскость π_k . Она содержит касательную T_* кривой γ в точке t_* и касательную T_k в точке t_k . При этом точка P не лежит на касательной T_0 кривой γ в точке t_0 . Следовательно, существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = \pi$ (в многообразии всех плоскостей в \mathbb{R}^3). Этот предел является опорной плоскостью кривой γ , проходящей через точки $\gamma(t_0)$ и P .

Теперь воспользуемся тем, что кручение кривой γ в точке t_0 не равно нулю. Согласно лемме 2.2.1, из этого условия следует, что начиная с некоторого номера k_0 все плоскости π_k попарно различны, а точки $\gamma(t_k)$ не лежат в плоскости π . В частности, $\gamma(t_k) \notin T_*$ для любого $k \geq k_0$. Но это противоречит тому, что через точку P может проходить не более двух различных опорных плоскостей, имеющих с кривой γ общие точки, не лежащие на касательной T_* . Лемма 2.2.2 доказана.

Следующее утверждение очевидно.

2.2.3. ЛЕММА. Пусть кривая $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, иммерсированная в \mathbb{R}^3 , имеет ненулевую кривизну в данной точке t_0 . Предположим, что в пространстве выделено конечное множество точек. Тогда для любого $t \neq t_0$, достаточно близкого к t_0 , касательная кривой γ в точке t не проходит через выделенные точки.

2.2.4. ЛЕММА. Пусть слабо выпуклая кривая $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, вложенная в \mathbb{R}^3 , имеет ненулевую кривизну и ненулевое кручение в данной точке t_0 . Тогда касательная кривой γ в точке t_0 может пересекать кривую в другой точке с ненулевой кривизной и ненулевым кручением только под нулевым углом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим напротив, что касательная кривой γ в точке t_0 пересекает кривую в некоторой точке $P \neq \gamma(t_0)$ с ненулевой кривизной и ненулевым кручением под ненулевым углом. Тогда существует и притом единственная плоскость π в \mathbb{R}^3 , которая касается кривой γ в точках P и $\gamma(t_0)$ одновременно. Поскольку через каждую точку слабо выпуклой кривой проходит опорная плоскость, а любая опорная плоскость, проходящая через точку $\gamma(t_0)$, проходит и через точку P , то плоскость π опорная.

Выберем в \mathbb{R}^3 аффинную систему координат x, y, z с началом в точке $O = \gamma(t_0)$ так, что росток кривой γ в точке $t_0 = 0$ задается формулами

$$x = t, \quad y = t^2 + o(t^2), \quad z = t^3 + o(t^3), \quad (4.5)$$

плоскость π определяется уравнением $y = 0$, а точка P имеет координаты $(1, 0, 0)$. Тогда на кривой γ найдутся точки $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, близкие к P и такие, что $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ и $z_1 z_2 < 0$.

Рассмотрим тетраэдр OPP_1P_2 . Его грани OPP_1 , OPP_2 , OP_1P_2 задаются уравнениями

$$y - \frac{y_1}{z_1}z = 0, \quad y - \frac{y_2}{z_2}z = 0, \quad y - \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 z_2 - x_2 z_1}x - \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 z_2 - x_2 z_1}z = 0.$$

При подстановке формул 4.5 в левые части этих уравнений получим, соответственно:

$$t^2 + o(t^2), \quad t^2 + o(t^2), \quad -t \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 z_2 - x_2 z_1} + o(t).$$

Легко видеть, что для всех достаточно малых $t > 0$ первые два из этих трех выражений положительны, а третье отрицательно. Следовательно, соответствующие точки кривой γ лежат строго внутри тетраэдра OPP_1P_2 , что противоречит слабой выпуклости рассматриваемой кривой. Лемма 2.2.4 доказана.

2.2.5. ЛЕММА. Пусть замкнутая кривая $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, вложенная в \mathbb{R}^3 , имеет всюду ненулевую кривизну. Тогда у нее может быть лишь конечное число точек, касательные в которых касаются кривой γ в двух или более геометрически различных точках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим напротив, что найдется последовательность $t_k, k = 1, 2, \dots$, попарно различных точек таких, что для любого k касательная T_k кривой γ в точке t_k касается кривой и в некоторой другой точке $\tilde{t}_k \neq t_k$. Тогда, перейдя при необходимости к подпоследовательностям, найдем точки t_0 и \tilde{t}_0 такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{t}_k = \tilde{t}_0$. При этом существует предел $T_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k$, являющийся касательной кривой γ в точках t_0 и \tilde{t}_0 .

Легко видеть, что $\tilde{t}_0 \neq t_0$. Действительно, если бы эти точки совпадали, то для всех достаточно больших k разность векторов скорости в точках t_k и \tilde{t}_k при равномерном движении по кривой была бы равна нулю. Следовательно, было бы равно нулю ускорение в точке t_0 . Но это противоречит тому, что кривизна кривой в этой точке не равна нулю.

По той же причине прямые T_k и T_0 не коллинеарны при всех достаточно больших k . Поэтому для каждого такого k определена плоскость π_k в \mathbb{R}^3 , проходящая через прямую T_0 параллельно прямой T_k . Последовательность этих плоскостей имеет, очевидно, предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = \pi$, являющийся соприкасающейся плоскостью кривой γ в точках t_0 и \tilde{t}_0 .

Теперь рассмотрим ортогональную проекцию пространства \mathbb{R}^3 на плоскость π . Ростки проекции кривой γ в точках t_0 и \tilde{t}_0 являются ростками графиков строго выпуклых функций. По построению проекция каждой из прямых $T_0, T_k, k = 1, 2, \dots$, является общей касательной этих ростков. Но это противоречит тому, что график строго выпуклой функции на плоскости является единственной огибающей семейства своих касательных. Лемма 2.2.5 доказана.

2.2.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть вложенная замкнутая слабо выпуклая кривая со всюду ненулевой кривизной в \mathbb{R}^3 имеет конечное число точек уплощения. Тогда она может иметь лишь конечное число точек, касательные в которых имеют с кривой не менее двух геометрически различных общих точек.

Это утверждение является очевидным следствием лемм 2.2.3, 2.2.4 и 2.2.5.

2.3 Доказательство теоремы 2.1.9

Пусть $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – связная замкнутая слабо выпуклая ориентированная кривая, C^3 -вложенная в ориентированное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . Зафиксируем параметризацию $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ этой кривой, согласованную с ее ориентацией.

Сначала мы напомним некоторые понятия, которыми будем здесь пользоваться. Отрезок $[PQ] \subset \mathbb{R}^3$, соединяющий две произвольные геометрически различные точки P и Q кривой γ называется *хордой* (с концами P и Q), если он не имеет с кривой других общих точек. Хорда, лежащая на границе выпуклой оболочки кривой, целиком лежит на некоторой опорной плоскости этой кривой.

Точки P и Q разбивают кривую γ на две (открытые) *дуги*. Их замыкания называются *замкнутыми дугами*. Точки P, Q называются *концами* этих дуг. Длиной любой дуги называется длина ее замыкания. Система $\mathcal{D}_k, k = 1, 2, \dots$, замкнутых дуг кривой γ называется *стягиваемой*, если она вложенная (т.е. каждая следующая дуга лежит в предыдущей), а предел длин дуг \mathcal{D}_k равен 0 при $k \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что кривая γ имеет всюду ненулевую кривизну и конечное число точек уплощения. Тогда она неплоская, а граница Γ ее выпуклой оболочки гомеоморфна двумерной сфере. Гомеоморфизмом служит сужение на Γ проекции

$$h : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow S^2$$

пространства \mathbb{R}^3 без некоторой внутренней точки O выпуклой оболочки кривой γ на сферу S^2 достаточно большого радиуса с центром в этой точке посредством лучей, выходящих из центра сферы (см. [1]).

Рассмотрим проекцию $h(\gamma)$ кривой γ . Она представляет собой кривую C^3 -вложенную в S^2 . Действительно, кривая γ слабо выпукла. Поэтому через каждую ее точку t проходит по меньшей мере одна опорная плоскость. Эта плоскость содержит касательную кривой γ в точке t , но не проходит через точку O . Следовательно, $h_{*\gamma(t)}(\gamma'(t)) \neq 0$ для любого t , где $h_{*x} : T_x(\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}) \rightarrow T_{h(x)}S^2$ – производная проекции h в точке $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.

Таким образом, кривая $h(\gamma)$ разбивает сферу S^2 на две замкнутые области с C^3 -гладким краем. Эти области определяют разбиение поверхности Γ на две замкнутые части Γ_1, Γ_2 , гомеоморфные двумерным дискам:

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \gamma.$$

Рассмотрим, например, поверхность Γ_1 .

2.3.1. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{D}_k, k = 1, 2, \dots$, – стягиваемая система замкнутых дуг кривой γ . Предположим, что для любого k концы дуги \mathcal{D}_k определяют хорду на поверхности Γ_1 . Тогда

- 1) пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}_k$ является точкой уплощения $\gamma(t_0)$ кривой γ ;
- 2) соприкасающаяся плоскость кривой в этой точке является опорной;
- 3) вектор $h_*(\gamma''(t_0))$ задает внутреннюю ориентацию края $h(\gamma)$ области $h(\Gamma_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По принципу Кантора пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}_k$ не пусто и состоит ровно из одной точки $\gamma(t_0)$ нашей кривой. Покажем, что $\gamma(t_0)$ – точка уплощения.

Действительно, для любого k существует опорная плоскость π_k , проходящая через концы дуги \mathcal{D}_k . Так как кривизна кривой $\gamma(t)$ не равна нулю при $t = t_0$, а рассматриваемая система дуг стягивается к $\gamma(t_0)$, то для любого достаточно большого k плоскость π_k – единственная опорная плоскость, проходящая через концы дуги \mathcal{D}_k .

Предел последовательности плоскостей π_k при $k \rightarrow \infty$ (в многообразии всех плоскостей в \mathbb{R}^3) существует и является соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке t_0 . Эта соприкасающаяся плоскость, очевидно, опорная.

Следовательно, $\gamma(t_0)$ – точка уплощения, а вектор $h_{*\gamma(t)}(\gamma''(t_0))$ не равен нулю. При этом, если k достаточно велико, то ориентация кривой $h(\gamma)$ (на сфере S^2), задаваемая вектором $h_{*\gamma(t)}(\gamma''(t_0))$, совпадает с ее ориентацией вектором $h_{*\gamma(t)}(e_k)$, где e_k – орт вектора, идущего из точки $\gamma(t_0)$ в середину хорды, определяемой концами дуги \mathcal{D}_k . Лемма 2.3.1 доказана.

Следующее утверждение очевидно.

2.3.2. ЛЕММА. *Контактные элементы $(\pi_1, \gamma(t_1))$, $(\pi_2, \gamma(t_2))$ опорных соприкасающихся плоскостей π_1, π_2 кривой γ в точках уплощения t_1, t_2 имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда векторы $h_*(\gamma''(t_1))$ и $h_*(\gamma''(t_2))$ определяют одну и ту же ориентацию кривой $h(\gamma)$ на сфере S^2 .*

Пусть \mathcal{B} – множество, состоящее из точек уплощения кривой γ , а также из точек, в которых касательная имеет с кривой не менее двух геометрически различных общих точек. В силу предложения 2.2.6, множество \mathcal{B} конечно.

2.3.3. ЛЕММА. *Каждая точка кривой γ , не принадлежащая множеству \mathcal{B} , является концом по меньшей мере двух (различных) хорд, одна из которых целиком лежит на поверхности Γ_1 , а другая – на Γ_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \gamma \setminus \mathcal{B}$ и T – касательная кривой γ в точке P . Через π обозначим плоскость в \mathbb{R}^3 , проходящую через точку O и прямую T .

Рассмотрим проективную прямую, состоящую из плоскостей, касающихся кривой γ в точке P . Опорные плоскости образуют на этой прямой непустое замкнутое односвязное подмножество.

Пусть π_1 и π_2 – граничные точки этого подмножества (возможно $\pi_1 = \pi_2$). Поскольку $P \notin \mathcal{B}$, то π_1 и π_2 – опорные плоскости, проходящие через некоторые точки $Q, R \in \gamma \setminus \{P\}$, лежащие по разные стороны от плоскости π . Согласно лемме 2.2.1

можно считать, что Q и R – ближайšie к P точки кривой γ , лежащие на прямых PQ и PR , соответственно.

Рассмотрим хорды $[PQ]$ и $[PR]$. Каждая из них лежит на Γ , причем целиком принадлежит лишь одной из поверхностей Γ_1, Γ_2 . Покажем, что хорды $[PQ]$ и $[PR]$ лежат на разных поверхностях Γ_1, Γ_2 .

Действительно, прямые PQ, PR и T не проходят через точку O . Следовательно, их проекции $h([PQ]), h([PR])$ и $\overline{h(T)}$ (замыкание проекции $h(T)$) являются геодезическими на сфере S^2 . Поскольку точки Q и R лежат по разные стороны от плоскости π , то геодезические $h([PQ])$ и $h([PR])$ трансверсальны геодезической $\overline{h(T)}$ и лежат от нее по разные стороны.

Но кривая $h(\gamma)$ касается геодезической $\overline{h(T)}$ в точке $h(P)$. Следовательно, геодезические $h([PQ])$ и $h([PR])$ лежат в замыканиях разных связных компонент дополнения $S^2 \setminus h(\gamma)$. Лемма 2.3.3 доказана.

Зафиксируем произвольную точку $P \in \gamma \setminus \mathcal{B}$. Согласно лемме 2.3.3 существуют точки $Q, R \in \gamma \setminus \{P\}$ такие, что $[PQ] \subset \Gamma_1, [PR] \subset \Gamma_2$ ($Q \neq R$). В силу леммы 2.2.2 можно считать, что точка P выбрана так, что $Q, R \notin \mathcal{B}$.

Пусть \mathcal{D}_{PQ}^1 и \mathcal{D}_{QP}^1 (\mathcal{D}_{PR}^2 и \mathcal{D}_{RP}^2) – замыкания дуг кривой γ , полученных из нее выбрасыванием точек P и Q (точек P и R , соответственно).

2.3.4. ЛЕММА. *Каждая из дуг \mathcal{D}_{PQ}^1 и \mathcal{D}_{QP}^1 (\mathcal{D}_{PR}^2 и \mathcal{D}_{RP}^2) содержит стягиваемую систему замкнутых дуг, концы которых не принадлежат множеству \mathcal{B} и определяют систему хорд, лежащих на поверхности Γ_1 (Γ_2 , соответственно).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем, например, дугу $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_{PQ}^1$ и разделим ее на три замкнутые дуги равной длины. По лемме 2.3.3 (а также в силу леммы 2.2.2) на средней из трех полученных дуг найдется точка $P_1 \notin \mathcal{B}$, соединяющаяся с некоторой точкой $Q_1 \in \gamma \setminus \mathcal{B}$ хордой, лежащей на поверхности Γ_1 .

Легко видеть, что точку Q_1 можно выбрать на дуге \mathcal{D}_0 . В самом деле, если $Q_1 \notin \mathcal{D}_0$, то хорды $[PQ]$ и $[P_1Q_1]$ пересекаются, а значит, точки P, Q, P_1, Q_1 лежат на одной опорной плоскости. Следовательно, в этом случае в качестве точки Q_1 можно взять любую из точек P, Q .

Обозначим через $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_0$ замкнутую дугу с концами в точках P_1, Q_1 и повторим описанную процедуру с дугой \mathcal{D}_1 . Тогда по индукции получим вложенную систему замкнутых дуг, концы которых определяют систему хорд на поверхности Γ_1 . Эта система стягиваемая, поскольку длина каждой следующей дуги не превосходит $2/3$ от длины предыдущей. Лемма 2.3.4 доказана.

Из лемм 2.3.4, 2.3.1 и 2.3.2 следует, что каждая из дуг $\mathcal{D}_{PQ}^1, \mathcal{D}_{QP}^1, \mathcal{D}_{PR}^2$ и \mathcal{D}_{RP}^2 содержит по меньшей мере одну точку уплощения

$$C_1^1 \in \mathcal{D}_{PQ}^1, \quad C_2^1 \in \mathcal{D}_{QP}^1, \quad C_1^2 \in \mathcal{D}_{PR}^2, \quad C_2^2 \in \mathcal{D}_{RP}^2.$$

Соприкасающиеся плоскости $\pi_1^1, \pi_2^1, \pi_1^2, \pi_2^2$ кривой γ в точках $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2$ (соответственно) являются опорными. Знаки контактных элементов (π_1^1, C_1^1) и (π_2^1, C_2^1) совпадают. Контактные элементы (π_1^2, C_1^2) и (π_2^2, C_2^2) также имеют одинаковые знаки. Эти знаки противоположны знаку элементов (π_1^1, C_1^1) и (π_2^1, C_2^1) .

Остается лишь заметить, что точки $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2$ попарно различны. Это следует из того, что $P, Q, R \neq \mathcal{B}$, а контактный элемент опорной соприкасающейся плоскости в точке уплощения неплоской кривой не может быть одновременно положительным и отрицательным. Теорема 2.1.9 доказана.

2.4 Дискретный вариант теоремы о четырех точках уплощения

Ломаной в \mathbb{R}^3 называется непрерывная локально простая кривая, состоящая из конечного числа отрезков. Эти отрезки называются *звеньями* ломаной, а их концы *вершинами*.

Пусть A, B, C, D, E – пять последовательных вершин ломаной.

2.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вершина C называется вершиной *уплощения* ломаной, если существует плоскость, проходящая через вершины B, C и D такая, что обе вершины A и E лежат в одном из двух замкнутых полупространств, определенных этой плоскостью.

Все вершины ломаной, лежащей в плоскости, являются вершинами уплощения. Ломаная, состоящая из большого числа звеньев равной длины и аппроксимирующая достаточно плотную равномерную замкнутую обмотку стандартного тора, не имеет вершин уплощения.

Как и в случае гладких кривых, *выпуклой оболочкой* ломаной называется пересечение всех замкнутых полупространств, ее содержащих. Плоскость, проходящая через одну или несколько вершин ломаной называется *опорной*, если ломаная лежит в одном из двух замкнутых полупространств, определенных этой плоскостью.

2.4.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Выпуклая оболочка ломаной, не лежащей в плоскости, является выпуклым многогранником, вершинами которого служат вершины ломаной.

Ломаная называется *слабо выпуклой*, если она лежит на границе своей выпуклой оболочки. Через каждое звено слабо выпуклой ломаной проходит по меньшей мере одна опорная плоскость.

2.4.3. ТЕОРЕМА. *Всякая связная замкнутая слабо выпуклая ломаная без самопересечений и с более, чем тремя звеньями в \mathbb{R}^3 , имеет не менее четырех вершин уплощения.*

Это утверждение является следствием более сильного утверждения о количестве опорных вершин ломаной.

Пусть A, B, C – три последовательные вершины ломаной.

2.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вершина B называется *опорной*, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, а плоскость ABC является опорной.

Опорные вершины ломаной являются, очевидно, ее вершинами уплощения.

Рассмотрим ориентированную ломаную в ориентированном пространстве \mathbb{R}^3 . Зафиксируем на ней любые три последовательные вершины A, B, C , не лежащие на одной прямой. Они являются вершинами невырожденного треугольника, ориентированного обходом вершин в соответствии с ориентацией ломаной. Эта ориентация вместе с ориентацией объемлющего пространства индуцирует коориентацию плоскости ABC .

Предположим, что рассматриваемая ломаная является неплоской, а вершина B опорной.

2.4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вершина B называется *положительной* (*отрицательной*), если ломаная лежит в положительном (отрицательном) замкнутом полупространстве, определенном плоскостью ABC .

При смене только одной из ориентаций (ломаной или объемлющего пространства) опорная вершина меняет знак на противоположный.

2.4.6. ТЕОРЕМА. *Всякая неплоская связная замкнутая слабо выпуклая ориентированная ломаная без самопересечений в \mathbb{R}^3 имеет не менее двух положительных и не менее двух отрицательных опорных вершин.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.9. Оно подробно изложено в работе [93] и, поэтому, мы его здесь не приводим. Отметим только, что из теоремы 2.4.6 при помощи стереографической проекции получаются некоторые новые (ранее неизвестные) свойства многоугольников на плоскости. Подробности см. в работах [46] и [93].

3 Решение задачи Арнольда о допустимых гомотопиях кривой $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos 3t$

В этом параграфе найдены новые инварианты допустимых по Арнольду гомотопий кривых в $\mathbb{R}P^3$. При помощи одного из этих инвариантов мы решаем задачу 1998-6 из сборника [14].

3.1 Допустимые (по Арнольду) гомотопии кривых в $\mathbb{R}P^3$

В связи с теоремой 2.1.2 о четырех точках уплощения пространственной кривой возникает естественный вопрос (см. [11] или задачу 1994-6 из сборника [14]): до насколько больших деформаций кривой сохраняются четыре точки уплощения. Один из подходов к решению этой задачи предложен В. И. Арнольдом в [13]. Этот подход основан на методах контактной геометрии.

Рассмотрим компактный волновой фронт общего положения в $\mathbb{R}P^3$. Это особая поверхность с ребрами возврата, ласточкиными хвостами и трансверсальными самопересечениями (см. рис. 0.2). Объединение ребер возврата и вершин ласточкиных хвостов называется *линией возврата* фронта. Эта кривая не имеет самопересечений, но имеет точки возврата в вершинах ласточкиных хвостов.

Замыкание множества точек самопересечения фронта представляет собой объединение кривых, которые могут иметь лишь точки возврата, общие двойные или тройные самопересечения и концевые точки в вершинах ласточкиных хвостов. Эти кривые называются *двойными линиями* фронта. Вершины ласточкиных хвостов образуют *связанную пару*, если они являются концевыми точками некоторой двойной линии фронта.

Рассмотрим теперь произвольную связную замкнутую кривую $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ общего положения в $\mathbb{R}P^3$. Множество \mathcal{F}_γ касательных плоскостей этой кривой представляет собой устойчивый компактный фронт коранга ≤ 1 в двойственном пространстве $\mathbb{R}P^{3*}$. Линия возврата этого фронта является двойственной кривой γ^* . Точки уплощения кривой γ взаимно однозначно соответствуют вершинам ласточкиных хвостов фронта \mathcal{F}_γ (т.е. точкам возврата кривой γ^*). Гладкие точки двойных линий этого фронта являются двойными касательными плоскостями кривой γ (которые касаются ее общим образом в двух различных точках).

3.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две точки уплощения кривой γ образуют *связанную пару*, если соответствующие вершины ласточкиных хвостов фронта \mathcal{F}_γ касательных плоскостей этой кривой образуют связанную пару.

Ориентируем кривую γ и объемлющее пространство $\mathbb{R}P^3$. Росток кривой в точке

уплощения определяется формулами

$$x = t, \quad y = t^2 + o(t^2), \quad z = t^4 + o(t^4),$$

в подходящей системе аффинных координат x, y, z . Точка уплощения называется *положительной* (*отрицательной*), если эта система координат ориентирует объемлющее пространство положительно (отрицательно).

Число связанных пар точек уплощения, имеющих один и тот же знак, не зависит от выбора ориентаций. Это число называется *штурмовостью* кривой. Согласно [13], штурмовость является инвариантом так называемых допустимых гомотопий кривой.

3.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Регулярная гомотопия кривой γ называется *допустимой*, если она определяет общее однопараметрическое семейство кривых, в котором каждая кривая не имеет

- 1) самопересечений (т.е. фронт ее касательных плоскостей не имеет самокасаний);
- 2) точек вырождения (т.е. двойственная кривая неприводима);
- 3) касаний с гладкой частью развертки своих касательных (т.е. ребра возврата фронта касательных плоскостей кривой не касаются его гладкой части);
- 4) касательных плоскостей, соприкасающихся с кривой в двух различных точках (т.е. двойственная кривая не имеет самопересечений).

В процессе допустимых гомотопий число точек уплощения кривой не может стать меньше удвоенной штурмовости. Но штурмовость может быть равна нулю.

Рассмотрим, например, кривую

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \cos 3t, \quad (t \bmod 2\pi) \tag{4.6}$$

в \mathbb{R}^3 . Множество особых точек фронта ее касательных плоскостей (линия возврата и самопересечения) изображено на рис. 4.1 (стр. 195; подробности см. в разделе 3.6).

Кривые общего положения, достаточно близкие к кривой (4.6), имеют 6 точек уплощения. Некоторые из них имеют нулевую штурмовость. В. И. Арнольд поставил следующий вопрос (см. [14], задача 1998-6): *можно ли уничтожить допустимыми гомотопиями все шесть точек уплощения таких кривых?*

Мы даем ниже отрицательный ответ на этот вопрос.

3.1.3. ТЕОРЕМА. *Число точек уплощения любой кривой общего положения, достаточно близкой к кривой (4.6), не может обратиться в нуль в процессе допустимых гомотопий.*

Для доказательства, мы определяем новый инвариант допустимых гомотопий пространственных кривых – число замкнутых двойных линий фронта. Кроме того, мы строим инвариант, обобщающий штурмовость кривой. Это некоторая весовая хордовая диаграмма. В ней число хорд, пересекающих нечетное число других хорд, равно штурмовости кривой.

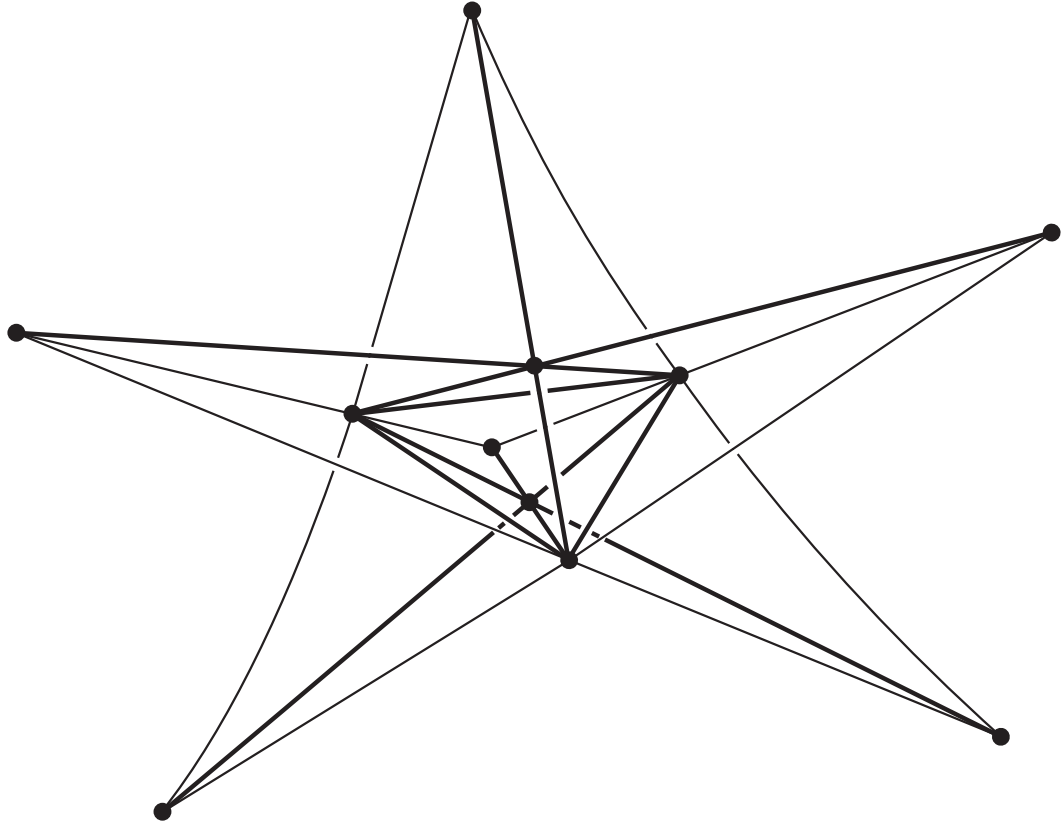


Рис. 4.1: Множество особых точек фронта касательных плоскостей кривой (4.6).

3.2 Замкнутые двойные линии фронта

Пусть γ – связная замкнутая кривая общего положения в $\mathbb{R}P^3$ и ζ – двойная линия фронта \mathcal{F}_γ ее касательных плоскостей. Ориентируем двойственное пространство $\mathbb{R}P^{3*}$, двойственную кривую γ^* и линию ζ . Точка возврата π кривой ζ называется *положительной* (*отрицательной*), если следующий набор трех векторов в $T_\pi(\mathbb{R}P^{3*})$ положительно (отрицательно) ориентирован:

- 1) касательный вектор к кривой γ^* в точке π ;
- 2) направляющий вектор односторонней полукасательной к линии ζ в точке π ;
- 3) вектор в касательной плоскости к гладкой части фронта \mathcal{F}_γ в точке π , указывающий направление отклонения ветви ζ , выходящей из π , от прямой, касающейся кривой ζ в точке π .

3.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Абсолютная величина разности между числом положительных и числом отрицательных точек возврата на линии ζ называется *весом* этой линии.

Вес линии ζ не зависит от выбора ориентаций.

3.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Если линия ζ не замкнута, а ее концы соответствуют точкам уплощения кривой γ противоположных знаков, то вес линии ζ может быть определен со знаком. Действительно, ориентации пространства $\mathbb{R}P^{3*}$ и кривой γ^* индуцируют ориентации пространства $\mathbb{R}P^3$ и кривой γ и определяют естественную ориентацию линии ζ : из конца, отвечающего отрицательной точке уплощения кривой γ , в конец, отвечающий положительной точке уплощения. Если зафиксировать такую ориентацию линии ζ , то разность между числом положительных и числом отрицательных точек возврата на ζ не будет зависеть от выбора ориентаций пространства $\mathbb{R}P^{3*}$ и кривой γ^* .

3.2.3. ТЕОРЕМА. *Неупорядоченный набор весов замкнутых двойных линий фронта касательных плоскостей связной замкнутой кривой общего положения в $\mathbb{R}P^3$ является инвариантом допустимых гомотопий. В частности, число этих линий не меняется при таких гомотопиях.*

Доказательство приведено в разделе 3.4.

3.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две связные замкнутые кривые, вложенные в $\mathbb{R}P^3$, называются *изотопными*, если они гомотопны в пространстве вложенных кривых.

Допустимые гомотопии сохраняют изотопический класс кривой.

3.2.5. ТЕОРЕМА. *Пусть связная замкнутая кривая общего положения в $\mathbb{R}P^3$ изотопна аффинной. Тогда фронт ее касательных плоскостей имеет двойные линии (т.е. кривая имеет двойные касательные плоскости).*

Если кривая аффинна (не пересекает некоторую плоскость), то это очевидно. Действительно, замкнутая кривая общего положения в \mathbb{R}^3 имеет опорные плоскости, касающиеся ее в двух различных точках. Доказательство в общем случае приведено в разделе 3.5.

3.2.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Если кривая в $\mathbb{R}P^3$ не изотопна аффинной, то фронт ее касательных плоскостей может не иметь двойных линий. Например, выпуклая кривая

$$(\cos t : \sin t : \cos 3t : \sin 3t), \quad (t \bmod \pi)$$

пересекает любую плоскость не более, чем в трех точках (с учетом кратностей). Эта кривая нестягиваема. Кривая

$$(\cos t : \sin t : \cos 2t : \sin 2t), \quad (t \bmod 2\pi)$$

стягиваема, но также не имеет двойных касательных плоскостей. Мы покажем в разделе 3.5, что она не изотопна аффинной (см. замечание 3.5.7).

Из теорем 3.2.3 и 3.2.5 получаем:

3.2.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть связная замкнутая кривая общего положения в $\mathbb{R}P^3$ изотопна аффинной, а фронт ее касательных плоскостей не имеет замкнутых двойных линий. Тогда эта кривая, как и любая другая кривая, полученная из нее допустимыми гомотопиями, имеет точки уплощения.

Рассмотрим теперь кривую (4.6). Она аффинна.

3.2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Фронт касательных плоскостей любой кривой общего положения, достаточно близкой к (4.6), не имеет замкнутых двойных линий.

Доказательство приведено в разделе 3.6. Из предложения 3.2.8 и следствия 3.2.7 вытекает теорема 3.1.3.

3.3 Диаграмма главных уплощений кривой

Рассмотрим связную замкнутую кривую $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ общего положения в $\mathbb{R}P^3$ и фронт \mathcal{F}_γ ее касательных плоскостей в $\mathbb{R}P^{3*}$.

3.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Весом связанной пары точек уплощения кривой γ называется вес двойной линии фронта \mathcal{F}_γ , которая связывает соответствующие вершины ласточкиных хвостов.

Две связанные пары точек уплощения *перемежаются*, если при обходе вокруг кривой точка уплощения одной связанной пары следует после точки уплощения другой. Точки уплощения перемежающихся связанных пар называются *основными* точками уплощения кривой.

3.3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Связанная пара точек уплощения кривой называется *неглавной*, если ее вес равен 2, а точки этой пары разбивают кривую на две открытые дуги, одна из которых не имеет основных точек уплощения. Все остальные связанные пары называются *главными*.

Кривая γ определяет весовую хордовую диаграмму D_γ неупорядоченных пар точек на S^1 , являющихся главными связанными парами точек уплощения и снабженных весами этих пар. Две такие диаграммы *эквивалентны*, если одна из них может быть переведена в другую диффеоморфизмом S^1 , сохраняющим ориентацию.

3.3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс эквивалентности диаграммы D_γ называется *диаграммой главных уплощений* кривой γ .

3.3.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Штурмовость кривой равна числу связанных пар точек уплощения, которые перемежаются с нечетным числом других связанных пар, т.е. числу хорд диаграммы главных уплощений, которые пересекают нечетное число других хорд. В частности, штурмовость кривой не превосходит числа всех хорд диаграммы

главных уплощений, т.е. не превосходит числа главных связанных пар точек уплощения.

3.3.5. ТЕОРЕМА. *Диаграмма главных уплощений связной замкнутой кривой общего положения в $\mathbb{R}P^3$ является инвариантом допустимых гомотопий. В частности, число главных связанных пар точек уплощения кривой не меняется при таких гомотопиях.*

Доказательство приведено в разделе 3.4.

3.3.6. СЛЕДСТВИЕ. *В процессе допустимых гомотопий число точек уплощения связной замкнутой кривой общего положения в $\mathbb{R}P^3$ не может стать меньше удвоенного числа главных связанных пар точек уплощения исходной кривой.*

Рассмотрим кривую (4.6). Она находится не в общем положении, поскольку имеет три пары точек, в которых соприкасающиеся плоскости совпадают.

3.3.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Диаграмма главных уплощений любой кривой γ общего положения, достаточно близкой к (4.6), имеет один из следующих двух типов:*

1) *пустая диаграмма (без хорд; кривая γ имеет три неглавные связанные пары точек уплощения; для каждой пары, двойная линия фронта \mathcal{F}_γ , связывающая соответствующие вершины ласточкиных хвостов, имеет две точки возврата одного и того же знака);*

2) *непустая диаграмма, имеющая две пересекающиеся хорды веса 0 (кривая γ имеет две перемежающиеся и одну неглавную связанные пары точек уплощения; двойная линия фронта \mathcal{F}_γ , связывающая вершины ласточкиных хвостов, которые соответствуют неглавной паре, имеет две точки возврата одного и того же знака; двойная линия фронта \mathcal{F}_γ , связывающая вершины ласточкиных хвостов, соответствующие любой главной паре имеет две точки возврата противоположных знаков).*

Доказательство приведено в разделе 3.6. Из предложения 3.3.7 и следствия 3.3.6 получаем

3.3.8. СЛЕДСТВИЕ. *Число точек уплощения любой кривой общего положения, достаточно близкой к (4.6) и имеющей непустую диаграмму главных уплощений, не может стать меньше четырех в процессе допустимых гомотопий.*

3.4 Доказательство теорем 3.2.3 и 3.3.5

Рассмотрим допустимую гомотопию связной замкнутой кривой общего положения в $\mathbb{R}P^3$. Она определяет деформацию фронта касательных плоскостей этой кривой. Перестройки фронта, которые могут происходить при такой деформации, перечислены в [13]. А именно:

A_4 : рождение или смерть связанной пары вершин ласточкиных хвостов на линии возврата фронта, которые близки друг к другу вдоль этой линии (двойная линия фронта, которая их связывает, имеет две точки возврата одного и того же знака);

$A_3 + A_1$: прохождение гладкой части фронта через вершину ласточкиного хвоста (на двойной линии фронта появляется или исчезает пара точек возврата противоположных знаков);

$A_2 + 2A_1$: прохождение ребра возврата через двойную линию фронта;

$4A_1$: прохождение гладкой части фронта через точку его тройного самопересечения;

$2A_1 \parallel A_1$: касание двойной линии фронта с гладкой частью фронта.

Перестройки $A_3 + A_1$, $A_2 + 2A_1$, $4A_1$ и $2A_1 \parallel A_1$ не меняют число двойных линий фронта, их типы (замкнутая или незамкнутая) и веса. Перестройка A_4 изменяет число двойных линий фронта, которые связывают вершины ласточкиных хвостов, соответствующие неглавным связанным парам точек уплощения кривой.

Теоремы 3.2.3 и 3.3.5 доказаны.

3.5 Доказательство теоремы 3.2.5

Сначала мы опишем изотопический инвариант стягиваемых кривых в трехмерном проективном пространстве. Построение этого инварианта осуществляется по стандартной схеме теории узлов, изложенной в [19].

Пусть Ω – пространство связных замкнутых стягиваемых параметризованных кривых $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^3$, $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ в ориентированном пространстве $\mathbb{R}P^3$. Рассмотрим особую гиперповерхность $\Upsilon \subset \Omega$, образованную кривыми γ такими, что $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ для некоторых $t_1, t_2 \in S^1$, $t_1 \neq t_2$, а каждая из замкнутых частей, на которые точки t_1, t_2 делят окружность S^1 , отображается в замкнутую нестягиваемую кривую (класса C^0) в $\mathbb{R}P^3$. Через Υ_0 обозначим гладкую часть гиперповерхности Υ .

Пусть две кривые $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega \setminus \Upsilon$ соединены путем γ_λ , $\lambda \in [0, 1]$ общего положения в пространстве Ω . Этот путь может пересекать гиперповерхность Υ только в точках Υ_0 , причем трансверсальным образом. Такие пересечения мы будем называть *перестройками проективности* кривой в семействе γ_λ . Каждой перестройке проективности можно сопоставить знак как обычной перестройке двойного самопересечения кривой в трехмерном пространстве.

А именно, рассмотрим произвольную кривую $\gamma_{\lambda_0} \in \Upsilon_0$ с точкой самопересечения $\gamma_{\lambda_0}(t_1) = \gamma_{\lambda_0}(t_2)$, $t_1 \neq t_2$. Выберем аффинную карту $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}P^3$, содержащую эту точку. Тогда для каждого $\lambda \neq \lambda_0$, достаточно близкого к λ_0 , определен базис E_λ в \mathbb{R}^3 , образованный векторами скорости $\gamma'_\lambda(t_1), \gamma'_\lambda(t_2)$ кривой γ_λ и вектором, идущим

из точки $\gamma_\lambda(t_1)$ в точку $\gamma_\lambda(t_2)$. Перестройка кривой γ_λ в момент $\lambda = \lambda_0$ называется *положительной* (*отрицательной*), если базис E_λ положительно (отрицательно) ориентирован при $\lambda > \lambda_0$.

Коориентируем гладкую часть Υ_0 гиперповерхности Υ ростками путей $(\gamma_\lambda, \lambda_0)$ с положительной перестройкой проективности при $\lambda = \lambda_0$.

3.5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебраическое число перестроек проективности кривой γ общего положения при общем стягивании этой кривой в точку называется *коэффициентом проективности* кривой γ .

При изменении ориентации объемлющего пространства коэффициент проективности меняет знак на противоположный. Выбор параметризации кривой не влияет на ее коэффициент проективности.

3.5.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Коэффициент проективности связной замкнутой стягиваемой кривой общего положения в ориентированном пространстве $\mathbb{R}P^3$ не зависит от способа ее стягивания, т.е. является инвариантом кривой. В частности, коэффициент проективности не меняется при изотопиях кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что коэффициент проективности кривой не меняется при непрерывной деформации стягивающего пути.

Действительно, определенная выше коориентация гладкой части гиперповерхности Υ естественным образом продолжается до коориентации локально неприводимых компонент этой гиперповерхности в точках трансверсального самопересечения. Поэтому необходимо убедиться лишь в том, что коориентации гладких частей гиперповерхности Υ согласованы вблизи единственного страта коразмерности 1, не сводящегося к само пересечениям – страта, отвечающего общему самокасанию кривой. Но последнее очевидно: любая достаточно малая петля общего положения, обходящая указанный страт в его двумерной трансверсали, пересекает Υ_0 ровно два раза, причем в противоположных направлениях.

Остается проверить, что алгебраическое число $I(\gamma_\lambda)$ точек, в которых (произвольный) замкнутый путь γ_λ общего положения в пространстве Ω пересекает гладкую часть гиперповерхности Υ , равно 0. Для этого рассмотрим путь $\tilde{\gamma}_\lambda$, состоящий из односточечных кривых

$$\tilde{\gamma}_\lambda : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^3, \tilde{\gamma}_\lambda : t \mapsto \gamma_\lambda(t_0),$$

определенных значениями кривых γ_λ в фиксированной точке t_0 окружности S^1 . Так как никакая односточечная кривая в $\mathbb{R}P^3$ не принадлежит гиперповерхности Υ , то $I(\tilde{\gamma}_\lambda) = 0$. Следовательно, $I(\gamma_\lambda) = I(\tilde{\gamma}_\lambda) = 0$, поскольку пути γ_λ и $\tilde{\gamma}_\lambda$ гомотопны. Предложение 3.5.2 доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 3.2.5. Оно основано на вычислении коэффициента проективности стягиваемой кривой без двойных касательных плоскостей.

Пусть $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ – связная замкнутая кривая общего положения в $\mathbb{R}P^3$.

3.5.3. ЛЕММА. *Предположим, что кривая γ не имеет двойных касательных плоскостей. Тогда найдутся проективная прямая \mathcal{L} в $\mathbb{R}P^3$ и целое положительное N такие, что любая плоскость, проходящая через \mathcal{L} , пересекает γ только трансверсально, причем ровно в N геометрически различных точках.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку t_0 кривой γ и рассмотрим касательную T кривой в этой точке. Кривая γ и множество плоскостей, проходящих через прямую T , компактны (последнее является проективной прямой в $\mathbb{R}P^{3*}$). Поскольку кривая γ не имеет двойных касательных плоскостей, то для любой открытой дуги \mathcal{D} кривой γ , содержащей точку t_0 , найдется окрестность U прямой T в пространстве всех прямых в $\mathbb{R}P^3$ такая, что плоскости, проходящие через прямые из U , трансверсальны γ вне \mathcal{D} .

Покажем, что любая окрестность U содержит такую прямую, что плоскости, проходящие через нее, трансверсальны γ в точках любой наперед заданной достаточно малой дуги \mathcal{D} . Для этого выберем аффинную систему координат x, y, z в $\mathbb{R}P^3$ с началом в точке $O = \gamma(t_0)$ так, что росток кривой γ в точке $t_0 = 0$ имеет параметризацию

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2 + o(t^2), \quad z(t) = t^3 + o(t^3),$$

где $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В этой системе координат прямая T задается уравнениями $y = z = 0$.

Рассмотрим семейство прямых \mathcal{L}_δ , $\delta \in \mathbb{R}$, в $\mathbb{R}P^3$, заданных уравнениями

$$y = \delta, \quad z = 4\delta x.$$

Прямая \mathcal{L}_δ близка к T , если δ близко к 0. Любая плоскость, проходящая через \mathcal{L}_δ , определяется уравнением $a(z - 4\delta x) + b(y - \delta) = 0$ для некоторых a, b таких, что $a^2 + b^2 \neq 0$. Эта плоскость касается кривой γ в точке $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, если и только если

$$\det \begin{pmatrix} z'(t) - 4\delta & y'(t) \\ z(t) - 4\delta t & y(t) - \delta \end{pmatrix} = 0.$$

Но этот определитель равен $t^4 f(t) + \delta t^2 g(t) + 4\delta^2$, где функции $f(t)$ и $g(t)$ положительны для всех $t \in \mathcal{D} = (-\varepsilon, \varepsilon)$, если ε достаточно мало. Следовательно, плоскости, проходящие через прямую \mathcal{L}_δ , трансверсальны кривой γ в точках дуги \mathcal{D} для любого $\delta > 0$. Лемма 3.5.3 доказана.

3.5.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Если кривая γ стягиваема (нестягиваема), то число N в лемме 3.5.3 четное (нечетное, соответственно).

3.5.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Связные замкнутые кривые в $\mathbb{R}P^3$ без двойных касательных плоскостей обобщают понятие выпуклой кривой. Действительно, для каждой

такой кривой существует целое положительное N такое, что кривая пересекает любую плоскость общего положения в N или $N + 2$ точках. Для обычных выпуклых кривых $N = 1$.

3.5.6. ЛЕММА. Пусть кривая γ стягиваема и не имеет двойных касательных плоскостей. Тогда ее коэффициент проективности не равен 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим касательную развертку T_γ кривой γ (объединение всех ее касательных). Эта поверхность является образом гладкого отображения двумерного тора в $\mathbb{R}P^3$. Она не имеет самопересечений, но имеет особенности в точках γ . А именно, кривая γ является ребром возврата развертки T_γ .

Пусть $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}P^3$ проективная прямая из леммы 3.5.3. Тогда существует целое положительное k такое, что любая плоскость, проходящая через \mathcal{L} , пересекает кривую γ только трансверсально, причем ровно в $2k$ геометрически различных точках. Пересечение такой плоскости с разверткой T_γ является связной замкнутой кривой без самопересечений. Эта кривая аффинна (не пересекает прямую \mathcal{L}) и имеет точки возврата в точках кривой γ .

Зафиксируем произвольную плоскость π , проходящую через прямую \mathcal{L} , и обозначим через ω кривую $\pi \cap T_\gamma$. Когда точка пересечения касательной T кривой γ с плоскостью π пробегает кривую ω , точка касания T с γ совершает ровно $2k$ оборотов вокруг прямой \mathcal{L} .

Следовательно, если в $\mathbb{R}P^3$ выбрать однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ так, что плоскость π задается уравнением $x_3 = 0$, прямая \mathcal{L} — уравнениями $x_2 = x_3 = 0$, то развертка T_γ будет гомеоморфна тору

$$(\cos \varphi : \sin \varphi : \cos \psi : \sin \psi) \quad (\varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod \pi).$$

Кривая γ изотопна обмотке α_k этого тора, при которой каждому повороту вокруг прямой \mathcal{L} на угол $\Delta\psi = \pi$ отвечает поворот на угол $\Delta\varphi = \pi + \pi/k$ вокруг прямой $x_0 = x_1 = 0$. Легко видеть, что с точностью до проективного преобразования, сохраняющего π и \mathcal{L} кривая α_k задается формулами

$$(\cos(k+1)t : \sin(k+1)t : \cos kt : \sin kt) \quad (t \bmod 2\pi).$$

Пусть A, B, C любые три последовательные точки пересечения кривой α_k с плоскостью $x_3 = 0$ ($C = A$, если $k = 1$). Тогда кривая α_k гомотопна кривой β , полученной из α_k заменой ее дуги ABC дугой ABC окружности $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2, x_3 = 0$. Такая гомотопия может быть осуществлена последовательностью $2k - 1$ перестроек простого двойного самопересечения, содержащей ровно k перестроек проективности одного знака.

Заметим, что кривая β изотопна кривой α_{k-1} . Поэтому можно повторить указанную процедуру k раз и получить аффинную кривую α_0 . Эта гомотопия будет

содержать ровно $k + (k - 1) + \dots + 1 = k(k + 1)/2$ перестроек проективности одного и того же знака. Следовательно, коэффициент проективности кривой γ равен $k(k + 1)/2$, т.е. отличен от нуля. Лемма 3.5.6 доказана.

Теорема 3.2.5 следует из леммы 3.5.6, предложения 3.5.2 и того факта, что коэффициент проективности аффинной кривой равен 0.

3.5.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 3.5.6 следует, что если связная замкнутая стягиваемая кривая общего положения в $\mathbb{R}P^3$ не имеет двойных касательных плоскостей, то она изотопна кривой α_k для некоторого целого положительного k . Кривые $\alpha_k, k = 1, 2, \dots$ не изотопны аффинной и не имеют двойных касательных плоскостей. Кривые α_k с различными номерами k не изотопны.

3.6 Доказательство предложений 3.2.8 и 3.3.7

Рассмотрим кривую γ_0 в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$, заданную формулами (4.6). Она имеет строго выпуклую проекцию на плоскость $z = 0$. Следовательно, любая плоскость, соприкасающаяся с кривой γ_0 или касающаяся ее по меньшей мере в двух различных точках, трансверсальна прямой $x = y = 0$ и определяется уравнением $z = ax + by + c$.

Возьмем коэффициенты (a, b, c) в качестве аффинных координат в двойственном пространстве \mathbb{R}^{3*} и проведем некоторые вычисления. Для простоты мы зафиксируем в исходном пространстве \mathbb{R}^3 стандартную евклидову структуру.

3.6.1. ЛЕММА. Для любых двух точек t_1 и t_2 кривой γ_0 смешанное произведение

$$(\gamma'_0(t_2), \gamma'_0(t_1), \gamma_0(t_2) - \gamma_0(t_1))$$

векторов скорости $\gamma'_0(t_2), \gamma'_0(t_1)$ и приращения $\gamma_0(t_2) - \gamma_0(t_1)$ равно

$$32 \left(\sin \frac{t_2 - t_1}{2} \right)^4 \cos \frac{t_2 - t_1}{2} \sin \frac{3}{2}(t_2 + t_1).$$

Из леммы 3.6.1 следует, что любые две точки t_1, t_2 (взяты с учетом кратностей), в которых кривая γ_0 имеет общую касательную плоскость, удовлетворяют одному из следующих четырех уравнений (mod 2π):

$$t_2 + t_1 = \frac{2\pi k}{3} \quad (k = 0, 1, 2) \quad \text{и} \quad t_2 - t_1 = \pi.$$

3.6.2. ЛЕММА. Множество плоскостей, касающихся кривой γ_0 по меньшей мере в двух точках (взяты с учетом кратностей), является объединением следующих четырех кривых в \mathbb{R}^{3*} :

$$\xi_k : \begin{cases} a = 3(-1)^k \cos \frac{\pi k}{3} (4 \cos^2 t - 1) \\ b = 3(-1)^k \sin \frac{\pi k}{3} (4 \cos^2 t - 1) \\ c = -8(-1)^k \cos^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi], \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\eta : \begin{cases} a = 2 \cos 2t - \cos 4t \\ b = -2 \sin 2t - \sin 4t, \quad (t \bmod \pi). \\ c = 0 \end{cases}$$

Кривые ξ_1, ξ_2, ξ_3 и η плоские. А именно, кривая ξ_k лежит в вертикальной плоскости $a \sin \frac{\pi k}{3} = b \cos \frac{\pi k}{3}$, а η лежит в горизонтальной плоскости $c = 0$.

Рассмотрим фронт $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{3*}$ касательных плоскостей кривой γ_0 .

3.6.3. ЛЕММА. *Каждая кривая $\xi_k, k = 0, 1, 2$, является частью полукубической параболы с точкой возврата*

$$C_k = \left(3(-1)^{k+1} \cos \frac{\pi k}{3}, 3(-1)^{k+1} \sin \frac{\pi k}{3}, 0 \right).$$

Ее концевые точки

$$W_k^m = \left(9(-1)^k \cos \frac{\pi k}{3}, 9(-1)^k \sin \frac{\pi k}{3}, 8(-1)^{m+1} \right), \quad m = 0, 1,$$

являются вершинами ласточкиных хвостов фронта \mathcal{F} . Кривая η является гипоциклоидой с тремя точками возврата C_0, C_1, C_2 .

Заметим, что кривые ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют две общие точки $T_0 = (0, 0, -1)$ и $T_1 = (0, 0, 1)$. Эти точки являются точками тройного самопересечения фронта \mathcal{F} . Объединение кривых ξ_1, ξ_2, ξ_3 и η изображено на рис. 4.2 (стр. 205; для простоты, мы изображаем точки возврата ненулевыми углами).

3.6.4. ЛЕММА. *Соприкасающаяся плоскость кривой γ_0 в точке t имеет следующие координаты в \mathbb{R}^{3*} :*

$$a = 6 \cos 2t + 3 \cos 4t, b = 3 \sin 4t - 6 \sin 2t, c = -8 \cos 3t.$$

Формулы леммы 3.6.4 определяют параметризацию кривой γ_0^* , двойственной к γ_0 .

3.6.5. ЛЕММА. *Кривая γ_0^* является замкнутой кривой с шестью точками возврата $W_k^m, k \in \{0, 1, 2\}, m \in \{0, 1\}$, и тремя точками самопересечения C_0, C_1, C_2 . Каждая точка C_k является точкой пересечения двух ветвей кривой γ_0^* , причем каждая ветвь трансверсально пересекает в этой точке плоскость $c = 0$ и соприкасающуюся плоскость к другой ветви.*

Кривая γ_0^* изображена на рис. 4.3 (см. стр. 206). Мы будем предполагать, что она ориентирована порядком своих точек возврата:

$$W_0^0 \rightarrow W_1^1 \rightarrow W_2^0 \rightarrow W_0^1 \rightarrow W_1^0 \rightarrow W_2^1 \rightarrow W_0^0.$$

3.6.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Рис. 4.1 (стр. 195) получен совмещением рисунков 4.2 и 4.3.

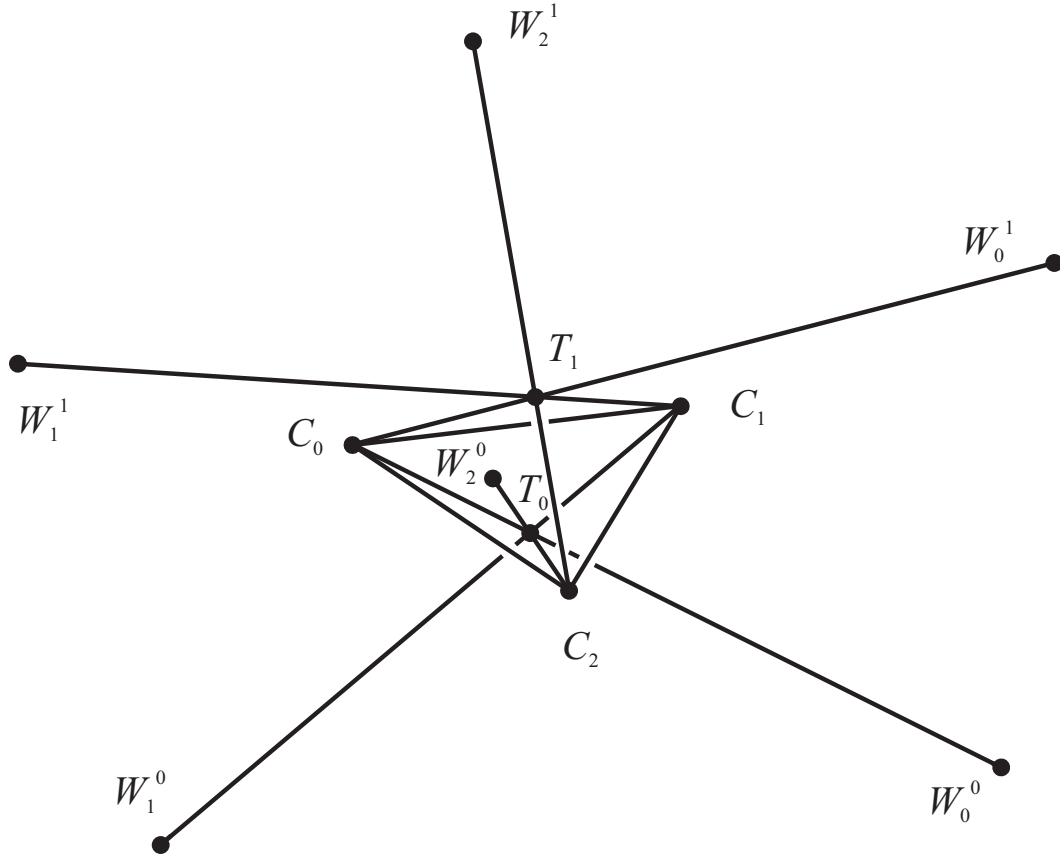


Рис. 4.2: Двойные линии фронта касательных плоскостей кривой (4.6).

Рассмотрим ростки фронта \mathcal{F} в точках C_0, C_1, C_2 . В силу лемм 3.6.2 и 3.6.5, они диффеоморфны ростку в нуле множества

$$\{y^2 = x^3\} \cup \{z^2 = x^3\}$$

(росток фронта \mathcal{F} в точке C_2 изображен на рис. 4.4; стр. 207). При малой общей деформации кривой γ_0 , из каждой точки C_0, C_1, C_2 возникают две точки возврата двойных линий фронта касательных плоскостей новой кривой. При этом, двойная линия, входящая в точку возврата вдоль кривой η , выходит из нее вдоль одной из кривых ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Отсюда видно, что росток фронта \mathcal{F} в любой точке $C_k, k = 0, 1, 2$, может быть продеформирован двумя разными способами. Множество особых точек фронта касательных плоскостей любой кривой общего положения, достаточно близкой к γ_0 , может быть получено из объединения $S_{\mathcal{F}}$ кривых $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta$ и γ_0^* одной из 8 деформаций. Поскольку множество $S_{\mathcal{F}}$ инвариантно относительно отражения $(a, b, c) \rightarrow (a, b, -c)$ и вращений вокруг прямой $a = b = 0$ на углы кратные $2\pi/3$, то достаточно рассмотреть только две малые деформации фронта \mathcal{F} (они реализуются малыми деформациями кривой γ_0). А именно,

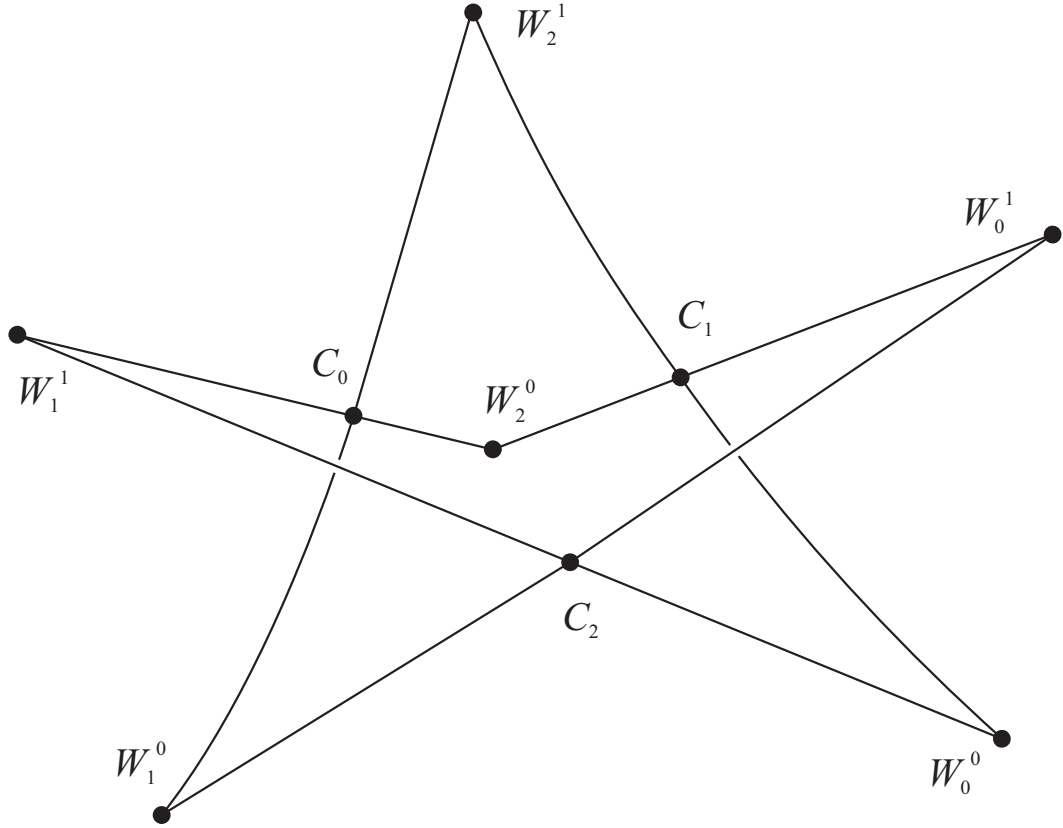


Рис. 4.3: Кривая γ_0^* , двойственная к кривой (4.6).

Θ_1 : точки пересечения ветвей $W_0^0W_1^1, W_2^0W_1^1, W_1^0W_2^1$ ($W_0^1W_1^0, W_2^1W_0^0, W_1^1W_2^0$) кривой γ_0^* с плоскостью $c = 0$ выходят из треугольника $C_0C_1C_2$ (входят внутрь этого треугольника, соответственно);

Θ_2 : точки пересечения ветвей $W_0^1W_1^0, W_2^0W_1^0, W_1^0W_2^1$ ($W_0^0W_1^1, W_2^1W_0^0, W_1^1W_2^0$) кривой γ_0^* с плоскостью $c = 0$ выходят из треугольника $C_0C_1C_2$ (входят внутрь этого треугольника, соответственно);

Фронт, полученный из фронта \mathcal{F} одной из этих двух деформаций, имеет следующие двойные линии:

$$\Theta_1 : \begin{cases} W_0^0 \xrightarrow{\xi_0} C_0^- \xrightarrow{\eta} C_1^- \xrightarrow{\xi_1} W_1^1 \\ W_1^0 \xrightarrow{\xi_1} \tilde{C}_1^- \xrightarrow{\eta} C_2^- \xrightarrow{\xi_2} W_2^1 \\ W_2^0 \xrightarrow{\xi_2} \tilde{C}_2^- \xrightarrow{\eta} \tilde{C}_0^- \xrightarrow{\xi_0} W_0^1 \end{cases}, \quad \Theta_2 : \begin{cases} W_0^0 \xrightarrow{\xi_0} C_0^- \xrightarrow{\eta} C_1^- \xrightarrow{\xi_1} W_1^1 \\ W_1^0 \xrightarrow{\xi_1} \tilde{C}_1^+ \xrightarrow{\eta} C_2^+ \xrightarrow{\xi_2} W_2^0 \\ W_2^1 \xrightarrow{\xi_2} \tilde{C}_2^+ \xrightarrow{\eta} \tilde{C}_0^- \xrightarrow{\xi_0} W_0^1 \end{cases}.$$

Здесь мы обозначаем близкие вершины ласточкиных хвостов исходного и продеформированного фронтов одними и теми же буквами; стрелка означает, что двойная линия идет вдоль кривой, указанной над этой стрелкой; точки возврата двойных линий, появившиеся из данной точки C_k , обозначаются через C_k^\pm и \tilde{C}_k^\pm , причем знак

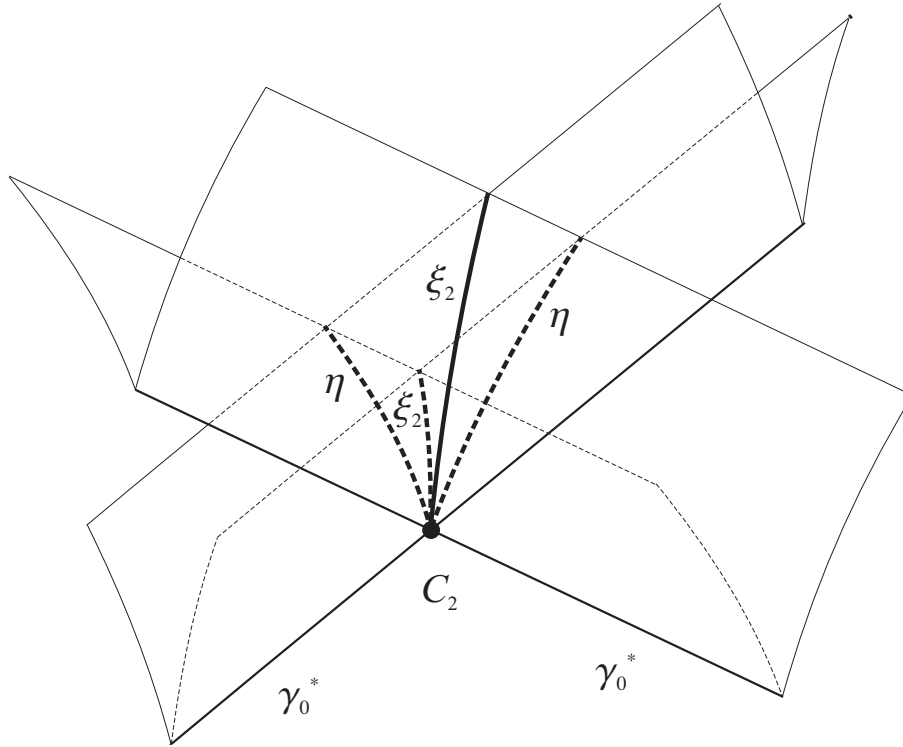


Рис. 4.4: Росток фронта касательных плоскостей кривой (4.6) в точке самопересечения C_2 двойственной кривой γ_0^* .

$+(-)$ означает, что данная точка возврата положительна (отрицательна) относительно ориентации двойной линии, указанной стрелками (ориентация пространства \mathbb{R}^{3*} задается координатами (a, b, c)).

Легко видеть, что:

1) фронты, полученные из фронта \mathcal{F} деформациями Θ_1, Θ_2 , не имеют замкнутых двойных линий; это доказывает предложение 3.2.8;

2) диаграммы главных уплощений кривых в \mathbb{R}^3 с фронтами, полученными из фронта \mathcal{F} деформациями Θ_1 и Θ_2 , являются диаграммами, описанными в пунктах 1 и 2 предложения 3.3.7, соответственно; таким образом, это предложение также доказано.

3.6.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Допустимые гомотопии кривой сохраняют гомотопический тип двойственной кривой (в пространстве замкнутых кривых в $\mathbb{R}P^{3*}$ без самопересечений, но с точками возврата). Если кривая общего положения γ , полученная допустимой гомотопией из кривой, достаточно близкой к γ_0 , имеет непустую диаграмму главных уплощений, то ее двойственная кривая незаузлена. Если же кривая γ имеет пустую диаграмму главных уплощений, то ее двойственная кривая изотопна трилистнику.

4 Обобщение классической формулы Бозе на кривые в многомерных пространствах

В конце главы 3 мы уже упоминали о замечательной формуле Бозе [62] для плоских кривых (см. замечание 3.3.10). Там же было получено многомерное обобщение этой формулы (теорема 3.3.8). Это обобщение основывалось на том, что кривая на плоскости является гиперповерхностью.

Однако формулу Бозе можно интерпретировать несколько иначе. А именно, пусть γ – замкнутая выпуклая кривая общего положения на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . Рассмотрим ее внешне-опорные окружности, т.е. касательные окружности, от которых кривая лежит с внешней стороны по отношению к центру окружности.

Пусть C – число внешне-опорных окружностей кривизны кривой γ . Через T обозначим число внешне-опорных окружностей, касающихся кривой γ в трех точках. Тогда

$$C - T = 2.$$

Аналогичное соотношение справедливо и для соответствующих чисел внутренне-опорных окружностей кривой γ .

Указанная трактовка формулы Бозе позволяет обобщать ее на кривые в многомерных пространствах. Именно этим обобщениям и посвящен данный параграф.

4.1 Особые опорные гиперсферы выпуклой кривой в \mathbb{R}^{2m}

Пусть γ – замкнутая кривая общего положения в евклидовом пространстве \mathbb{R}^k . Рассмотрим внешне-опорные гиперсферы типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ кривой γ . Они образуют гладкое подмногообразие \mathcal{A}_γ коразмерности $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p$ многообразия $V_s = G_{af}^s(k, k-1)$ всех гиперсфер и гиперплоскостей в \mathbb{R}^k (см. параграф 3 главы 3). Через $\chi_\gamma(\mathcal{A})$ обозначим эйлерову характеристику этого многообразия. Мы будем использовать также наше обычное сокращение:

$$\chi_\gamma(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p}) = \chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)},$$

где k_1, \dots, k_p неотрицательные целые числа, а μ_1, \dots, μ_p попарно различны.

4.1.1. ТЕОРЕМА. Пусть γ – замкнутая выпуклая кривая общего положения в четномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^k ($k \leq 16$). Тогда числа $\chi_\gamma(\mathcal{A})$ внешне-опорных гиперсфер типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ кривой γ таких, что $\text{codim } \mathcal{A} = k + 1$, связаны соотношением

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}}: \text{codim } \mathcal{A} = k+1} w(\mathcal{A}) \chi_\gamma(\mathcal{A}) = (1 + k/2) w(A_{k+1}), \quad (4.7)$$

где веса $w(\mathcal{A})$ определяются формулами (2.22). Формулы (4.7) для $k \leq 12$ получаются из формул таблицы 13 при $n = k + 1$ и $\chi_0 = 1$.

Аналогичное утверждение справедливо и для внутренне-опорных гиперсфер кривой γ . Доказательство теоремы 4.1.1 приведено в разделе 4.8.

4.1.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (4.7) при $k = 2$ дает формулу Бозе. Формула таблицы 13 при $n = 5$ и $\chi_0 = 2$, связывающая числа всех опорных гиперсфер (как внешне-опорных, так и внутренне-опорных), касающихся с коразмерностью 5 замкнутой выпуклой кривой общего положения в \mathbb{R}^4 , впервые была получена в [92]. Формулы (4.7) при $k \leq 8$ можно получить также из формул [28] для образующих групп когомологий комплекса, определенного классами особенностей функции минимуму на окружности (см. также [74]).

4.2 Кривые выпуклые по Барнеру в $\mathbb{R}P^n$

В середине прошлого века Барнер ввел очень важный класс пространственных кривых.

4.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривая в $\mathbb{R}P^n$ называется *выпуклой по Барнеру*, если через любые $n - 1$ ее точек (не обязательно геометрически различных) можно провести гиперплоскость, которая не пересекает кривую в других точках.

Кривые выпуклые по Барнеру вложены и невырождены. Замкнутая выпуклая по Барнеру кривая связна, причем в нечетномерном пространстве она аффинна, а в четномерном – нестягиваема.

4.2.2. ТЕОРЕМА ([60]). *Всякая замкнутая выпуклая по Барнеру кривая в $\mathbb{R}P^n$ имеет по меньшей мере $n + 1$ геометрически различных точек уплощения.*

Это утверждение объясняет важность класса кривых выпуклых по Барнеру. На сегодняшний день теорема 4.2.2 является единственным известным мне обобщением классической теоремы о четырех вершинах на кривые в многомерных пространствах.

Примером кривой выпуклой по Барнеру служит любая кривая, имеющая выпуклую проекцию на гиперплоскость из точки, находящейся вне кривой. Для таких кривых теорема 4.2.2 была доказана также в [57].

Выпуклые по Барнеру кривые образуют открытое подмножество в пространстве всех кривых в $\mathbb{R}P^n$. В 1996 году В. И. Арнольд поставил следующий вопрос: *каково соотношение класса кривых, имеющих выпуклую проекцию, с классом всех кривых выпуклых по Барнеру?*

Ответ на этот вопрос дает следующая

4.2.3. ТЕОРЕМА. В пространстве всех замкнутых кривых в $\mathbb{R}P^n$ имеется открытое непустое подмножество, состоящее из кривых, которые выпуклы по Барнеру, но не имеют выпуклых проекций ни на какую гиперплоскость.

Это утверждение подробно доказано в работе [94]. Мы не будем использовать в дальнейшем теорему 4.2.3 и, поэтому, не будем воспроизводить здесь ее доказательство. Мы лишь приведем примеры кривых, которые изучаются в [94].

4.2.4. ПРИМЕР. Рассмотрим семейство $\gamma_\lambda : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^{2m+1}$, $\lambda \in [0, 1)$, кривых в $\mathbb{R}P^{2m+1}$, заданных в однородных координатах $(x_0 : \dots : x_{2m+1})$ формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= [1 - \lambda \sin^2(m+1)t] \cos t, & x_2 &= [1 - \lambda \sin^2(m+1)t] \sin t, \\ x_3 &= \cos 2t, & x_4 &= \sin 2t, & \dots, & x_{2m-1} &= \cos mt, & x_{2m} &= \sin mt, \\ x_{2m+1} &= \sin[(m+1)t + (1 + (-1)^m)\frac{\pi}{4}], & & & & & & (t \bmod 2\pi). \end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{2} + \frac{(3m+1)!(10m^3 + 24m^2 + 15m + 2)}{4m!((m+2)!)^2}.$$

Тогда для любого $\lambda > \lambda_0$, достаточно близкого к λ_0 , кривая γ_λ , как и любая другая кривая, достаточно близкая к ней, выпукла по Барнеру, но не имеет выпуклых проекций ни на какую гиперплоскость в $\mathbb{R}P^{2m+1}$. Последовательность чисел λ_0 экспоненциально убывает ($\sim m/27^m$), когда m растет. Начало этой последовательности имеет вид:

$$\frac{1}{9}, \quad \frac{1}{228}, \quad \frac{1}{5597}, \quad \frac{4}{543545}, \quad \frac{2}{6613465}, \quad \frac{4}{323831081}, \quad \dots$$

4.2.5. ПРИМЕР. Рассмотрим семейство $\gamma_\lambda : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^{2m}$, $\lambda \in [0, 1)$, кривых в $\mathbb{R}P^{2m}$, заданных в однородных координатах $(x_1 : \dots : x_{2m+1})$ формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos t - \lambda \cos(4m+3)t, & x_2 &= \sin t - \lambda \sin(4m+3)t, \\ x_3 &= \cos 3t, & x_4 &= \sin 3t, & \dots, & x_{2m-1} &= \cos(2m-1)t, & x_{2m} &= \sin(2m-1)t, \\ x_{2m+1} &= \sin[(2m+1)t + (1 + (-1)^m)\frac{\pi}{4}], & & & & & & (t \bmod \pi). \end{aligned}$$

Пусть

$$\lambda_0 = \frac{2(2m+1)(m-1)!((m+1)!)^2}{(4m+3)(3m+1)!}.$$

Тогда для любого $\lambda > \lambda_0$, достаточно близкого к λ_0 , кривая γ_λ , как и любая другая кривая, достаточно близкая к ней, выпукла по Барнеру, но не имеет выпуклых проекций ни на какую гиперплоскость в $\mathbb{R}P^{2m}$. Последовательность чисел λ_0 также экспоненциально убывает ($\sim m/27^m$), когда m растет. Начало этой последовательности имеет вид:

$$\frac{1}{7}, \quad \frac{1}{154}, \quad \frac{1}{3375}, \quad \frac{1}{76076}, \quad \frac{1}{1758120}, \quad \frac{1}{41442192}, \quad \dots$$

4.3 Особые опорные гиперплоскости кривой выпуклой по Барнеру в \mathbb{R}^{2m+1}

Пусть γ – замкнутая кривая общего положения в \mathbb{R}^n . Рассмотрим опорные гиперплоскости типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ этой кривой. Они образуют гладкое подмногообразие \mathcal{A}_γ коразмерности $\text{codim } \mathcal{A} = \mu_1 + \dots + \mu_p$ в многообразии Грассмана $V = G_{\text{af}}(n, n-1)$ всех аффинных гиперплоскостей в \mathbb{R}^n (см. параграф 2 главы 3). Через $\chi_\gamma(\mathcal{A})$ обозначим эйлерову характеристику этого многообразия. Как всегда мы будем использовать следующее сокращение:

$$\chi_\gamma(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p}) = \chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)},$$

где k_1, \dots, k_p неотрицательные целые числа, а μ_1, \dots, μ_p попарно различны.

4.3.1. ТЕОРЕМА. *Пусть γ – замкнутая выпуклая по Барнеру кривая общего положения в нечетномерном пространстве \mathbb{R}^n ($n \leq 17$). Тогда числа $\chi_\gamma(\mathcal{A})$ опорных гиперплоскостей типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ кривой γ таковы, что $\text{codim } \mathcal{A} = n$, связаны соотношением*

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}}: \text{codim } \mathcal{A} = n} w(\mathcal{A}) \chi_\gamma(\mathcal{A}) = (n+1) w(A_n), \quad (4.8)$$

где веса $w(\mathcal{A})$ определяются формулами (2.22). Формулы (4.8) для $n \leq 13$ получаются из формул таблицы 13 при $\chi_0 = 2$.

Это утверждение следует из теоремы 2.1.9 главы 3. А именно, формула (4.8) является частным случаем формулы (3.6). Чтобы воспользоваться последней достаточно лишь убедиться в выполнении следующего условия: $\chi_\gamma(\mathcal{A}) = 0$ для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ такого, что $\deg \mathcal{A} = \text{codim } \mathcal{A} + p < n$. Проверка выполнения этого условия осуществлена ниже.

4.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (4.8) при $n = 3$ верна для более широкого класса кривых. А именно, она верна для любых связных замкнутых слабо выпуклых кривых общего положения в \mathbb{R}^3 ([86]; см. также [41, 42]).

Формула (4.8) при $n = 5$ впервые была получена в [92] для кривых, имеющих выпуклую проекцию на гиперплоскость.

4.4 Доказательство теоремы 4.3.1

Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ такой, что $\deg \mathcal{A} < n$. Через $\text{Ord}(\mathcal{A})$ обозначим число различных упорядоченных наборов, которые можно составить из чисел μ_1, \dots, μ_p (например, если $\mu_1 = \dots = \mu_p$, то $\text{Ord}(\mathcal{A}) = 1$).

Пусть $S^{1(p)}$ – многообразие неупорядоченных наборов p попарно различных точек на окружности S^1 . Рассмотрим многообразие $\mathcal{A}_\gamma \subset V$ опорных гиперплоскостей типа \mathcal{A} кривой γ и отображение

$$g : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow S^{1(p)},$$

сопоставляющее каждой гиперплоскости $\pi \in \mathcal{A}_\gamma$ неупорядоченный набор ее точек касания с кривой γ . Легко видеть, что g – гладкое отображение.

4.4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть γ – замкнутая выпуклая по Барнеру кривая общего положения в нечетномерном пространстве \mathbb{R}^n . Тогда отображение g является C^0 -расслоением многообразия \mathcal{A}_γ над $S^{1(p)}$. Слой этого расслоения состоит из $\text{Ord}(\mathcal{A})$ связанных компонент, каждая из которых гомеоморфна открытому $(n - \text{deg } \mathcal{A})$ -мерному диску.

4.4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Многообразие $S^{1(p)}$ неупорядоченных наборов p попарно различных точек на окружности S^1 гомотопически эквивалентно S^1 .

Из предложений 4.4.1 и 4.4.2 следует, что $\chi_\gamma(\mathcal{A}) = 0$. Это, в свою очередь, влечет теорему 4.3.1.

Предложение 4.4.1 доказано в разделе 4.6. Предложение 4.4.2 хорошо известно, но для полноты картины мы приведем его доказательство в разделе 4.7.

4.5 Вспомогательные утверждения

В этом разделе мы докажем три леммы необходимые для доказательства предложения 4.4.1. Но сначала напомним одно важное понятие.

4.5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соприкасающейся k -плоскостью параметризованной кривой $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ в \mathbb{R}^n в данной точке t называется аффинное подпространство, проходящее через точку $\gamma(t)$ и порожденное векторами $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)$.

Соприкасающаяся k -плоскость кривой не зависит от выбора параметризации этой кривой. Соприкасающиеся $(n - 1)$ -плоскости невырожденной кривой являются ее соприкасающимися гиперплоскостями.

Пусть $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma : t \mapsto \gamma(t)$ – замкнутая выпуклая по Барнеру кривая общего положения в нечетномерном пространстве \mathbb{R}^n . Рассмотрим элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ такой, что $\text{deg } \mathcal{A} < n$ и зафиксируем p произвольных попарно различных точек t_1, \dots, t_p кривой γ . Через \bar{t} обозначим неупорядоченный набор $\{t_1, \dots, t_p\} \in S^{1(p)}$ точек t_1, \dots, t_p .

4.5.2. ЛЕММА. Для любой перестановки τ чисел μ_1, \dots, μ_p существует опорная гиперплоскость типа \mathcal{A} кривой γ , касающаяся ее в точках t_1, \dots, t_p с кратностями $\tau(\mu_1), \dots, \tau(\mu_p)$, соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\deg \mathcal{A} = n - 1$, то это непосредственно следует из определения 4.2.1.

Пусть $\deg \mathcal{A} \leq n - 3$. Тогда для любой перестановки τ и для любой точки t_0 кривой γ , отличной от точек t_1, \dots, t_p , существует опорная гиперплоскость π типа $\mathcal{A} + A_{\mu_0}$, которая касается кривой γ в точках t_0, t_1, \dots, t_p с кратностями $\mu_0, \tau(\mu_1), \dots, \tau(\mu_p)$, соответственно, где $\mu_0 = n - \deg \mathcal{A} - 2$.

Зафиксируем перестановку τ и рассмотрим минимальное аффинное подпространство $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, содержащее соприкасающиеся $\tau(\mu_i)$ -плоскости кривой γ в точках t_i , $i = 1, \dots, p$. Точка t_0 не лежит в пространстве \mathcal{R} , так как для любой точки \tilde{t}_0 кривой γ , отличной от точек t_0, t_1, \dots, t_p , существует гиперплоскость, проходящая через \tilde{t}_0 , содержащая \mathcal{R} и пересекающая γ только в точках $\tilde{t}_0, t_1, \dots, t_p$.

Следовательно, можно перевести гиперплоскость π в искомую путем достаточно малого поворота вокруг пространства \mathcal{R} . Лемма 4.5.2 доказана.

4.5.3. ЛЕММА. *Полный прообраз $g^{-1}(\bar{t})$ имеет ровно $\text{Ord}(\mathcal{A})$ связных компонент. Каждая компонента является аффинным выпуклым ограниченным подмножеством в многообразии V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кратность касания гиперплоскости с кривой в данной точке может только уменьшиться при малом шевелении гиперплоскости. С другой стороны коразмерности касания с кривой γ всех опорных гиперплоскостей из многообразия \mathcal{A}_γ одинаковы. Следовательно, если две гиперплоскости из множества $g^{-1}(\bar{t})$ имеют разные кратности касания с γ по крайней мере в одной из точек t_1, \dots, t_p , то они не могут быть соединены непрерывным путем в $g^{-1}(\bar{t})$.

Теперь возьмем любые две различные опорные гиперплоскости π_1, π_2 типа \mathcal{A} кривой γ , проходящие через точки t_1, \dots, t_p . Предположим, что кратность касания любой из этих гиперплоскостей с γ в точке t_i равна μ_i для каждого $i = 1, \dots, p$.

Рассмотрим (проективную) прямую в многообразии V , состоящую из гиперплоскостей, проходящих через подпространство $\pi_1 \cap \pi_2$. Точки π_1, π_2 разделяют эту прямую на две замкнутые дуги. Одна из этих дуг содержит неопорные гиперплоскости (напомним, что кривая общего положения является неплоской). Другая состоит из опорных гиперплоскостей кривой γ .

Обозначим через $[\pi_1, \pi_2]$ вторую дугу и докажем, что она состоит из опорных гиперплоскостей типа $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$. В самом деле, пусть π — произвольная гиперплоскость из дуги $[\pi_1, \pi_2]$. Она касается кривой γ только в точках t_1, \dots, t_p . Более того, эта гиперплоскость содержит соприкасающиеся μ_i -плоскости кривой γ в точках t_i , $i = 1, \dots, p$, поскольку эти плоскости лежат в пересечении $\pi_1 \cap \pi_2$.

Зафиксируем точку t_i и рассмотрим вектор $v = \gamma^{(\mu_i+1)}(t_i)$. Вектор v ориентирует гиперплоскости π_1, π_2 , а также гиперплоскость π , если она трансверсальна v . Поскольку число $\mu_i + 1$ четное, то эта ориентация совпадает с естественной коори-

ентацией любой опорной гиперплоскости кривой γ замкнутым полу-пространством, содержащим γ . Следовательно, вектор v должен быть трансверсален любой гиперплоскости из дуги $[\pi_1, \pi_2]$.

Теперь лемма 4.5.3 следует из леммы 4.5.2 и того факта, что множество всех опорных гиперплоскостей кривой γ является компактным аффинным подмножеством в многообразии V .

4.5.4. ЛЕММА. Пусть k_1, \dots, k_p – неотрицательные целые числа и $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ – минимальное подпространство, содержащее соприкасающиеся k_i -плоскости кривой γ в точках t_i , $i = 1, \dots, p$. Тогда $\dim \mathcal{R} = c + p - 1$, если $c = \sum_{i=1}^p k_i < n - p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c = 0$, то $\dim \mathcal{R} = p - 1$, так как кривая γ выпукла по Барнеру. Предположим по индукции, что наше утверждение верно для любого неотрицательного целого $c = q < n - p - 1$ и докажем его для $c = q + 1$.

Действительно, поскольку $q + 1 > 0$, то существует $j \in \{1, \dots, p\}$ такое, что $k_j > 0$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathbb{R}^n$ минимальное подпространство, содержащее соприкасающиеся k_i -плоскости кривой γ в точках t_i , $i \in \{1, \dots, p\} \setminus j$, и соприкасающуюся $(k_j - 1)$ -плоскость в точке x_j . По предположению индукции, $\dim \tilde{\mathcal{R}} = q + p - 1$.

Рассмотрим вектор $\gamma^{(k_j)}(t_j)$. Он не может быть коллинеарен пространству $\tilde{\mathcal{R}}$. В самом деле, согласно определению 4.2.1 существует гиперплоскость, содержащая пространство $\tilde{\mathcal{R}}$ и проходящая через любую данную точку $t \neq t_i$, $i = 1, \dots, p$ кривой γ , так что кратность касания этой гиперплоскости с γ в точке t_j равна $k_j - 1$. Следовательно, $\dim \mathcal{R} = q + p$. Лемма 4.5.4 доказана.

4.6 Доказательство предложения 4.4.1

Пусть $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ – замкнутая выпуклая по Барнеру кривая общего положения в нечетномерном пространстве \mathbb{R}^n . Зафиксируем элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}}$ такой, что $\deg \mathcal{A} < n$, и перестановку τ чисел μ_1, \dots, μ_p .

Рассмотрим произвольную точку $\bar{t} = \{t_1, \dots, t_p\} \in S^{1(p)}$. Через $\mathcal{R}(\bar{t})$ обозначим минимальное подпространство в \mathbb{R}^n , содержащее соприкасающиеся $\tau(\mu_i)$ -плоскости кривой γ в точках t_i , $i = 1, \dots, p$. По лемме 4.5.4, $\dim \mathcal{R}(\bar{t}) = \deg \mathcal{A} - 1$.

Пусть π – опорная \mathcal{A} -плоскость кривой γ , содержащая пространство $\mathcal{R}(\bar{t})$. Тогда каждая гиперплоскость, достаточно близкая к π и содержащая $\mathcal{R}(\bar{t})$, также является опорной \mathcal{A} -плоскостью кривой γ (кривая замкнута). Следовательно, по лемме 4.5.3 замыкание (в многообразии V) любой из $\text{Ord}(\mathcal{A})$ связных компонент множества $g^{-1}(\bar{t})$ гомеоморфно замкнутому $(n - \deg \mathcal{A})$ -мерному диску.

Зафиксируем евклидову структуру и ориентацию в пространстве \mathbb{R}^n . Пространство $\mathcal{R}(\bar{t})$ гладко зависит от \bar{t} (для данной перестановки τ). Поэтому в достаточно

малой окрестности U любой заданной точки многообразия $S^{1(p)}$ можно определить следующие три вложения:

1)

$$\mathcal{R} : U \rightarrow G_{af}(n, \deg \mathcal{A} - 1), \quad \mathcal{R} : \bar{t} \mapsto \mathcal{R}(\bar{t}),$$

где $G_{af}(n, \deg \mathcal{A} - 1)$ – многообразие Грассмана $(\deg \mathcal{A} - 1)$ -мерных аффинных подпространств в \mathbb{R}^n ;

2)

$$\pi : U \rightarrow \mathcal{A}_\gamma, \quad \pi : \bar{t} \mapsto \pi(\bar{t}),$$

где $\pi(\bar{t})$ – некоторая опорная \mathcal{A} -плоскость кривой γ , содержащая пространство $\mathcal{R}(\bar{t})$;

3)

$$h : U \times S^{n-\deg \mathcal{A}-1} \rightarrow G_{af}^+(n, n-2), \quad h : (\bar{t}, s) \mapsto h(\bar{t}, s),$$

где $S^{n-\deg \mathcal{A}-1}$ – сфера размерности $(n - \deg \mathcal{A} - 1)$, $G_{af}^+(n, n-2)$ – многообразие Грассмана ориентированных $(n-2)$ -мерных аффинных подпространств в \mathbb{R}^n , а $h(\bar{t}, s)$ – некоторое подпространство в $\pi(\bar{t})$, содержащее $\mathcal{R}(\bar{t})$.

Обозначим через $\pi_\varphi(\bar{t}, s)$ гиперплоскость в \mathbb{R}^n , полученную вращением гиперплоскости $\pi(\bar{t})$ на угол φ вокруг пространства $h(\bar{t}, s)$. Для кривой γ общего положения любая гиперплоскость $\tilde{\pi}$ в \mathbb{R}^n , содержащая пространство $\mathcal{R}(\bar{t})$ и лежащая в множестве $\partial(\mathcal{A}_\gamma) = \overline{\mathcal{A}_\gamma} \setminus \mathcal{A}_\gamma$, имеет вид $\pi_\alpha(\bar{t}, s)$, где $h(\bar{t}, s)$ – ориентированное пересечение $\tilde{\pi} \cap \pi(\bar{t})$, а

$$\alpha = \alpha(\bar{t}, s) = \max\{\beta \in \mathbb{R} \mid \pi_\varphi(\bar{t}, s) \in \mathcal{A}_\gamma \quad \forall \varphi \in [0, \beta)\}.$$

Обратно, $\pi_{\alpha(\bar{t}, s)}(\bar{t}, s) \in \partial(\mathcal{A}_\gamma)$ для любых $\bar{t} \in U$ и $s \in S^{n-\deg \mathcal{A}-1}$.

Функция $\alpha = \alpha(\bar{t}, s)$ зависит непрерывно от (\bar{t}, s) , поскольку множество $\partial(\mathcal{A}_\gamma)$ замкнуто. Следовательно, для достаточно малой окрестности U каждая связная компонента $g^{-1}(U) \subset \mathcal{A}_\gamma$ гомеоморфна прямому произведению U и открытого $(n - \deg \mathcal{A})$ -мерного диска.

Предложение 4.4.1 доказано.

4.7 Доказательство предложения 4.4.2

Пусть S^1 – ориентированная окружность длины 2π и $p > 1$ (для $p = 1$ утверждение тривиально). Зафиксируем точку $t_0 \in S^1$ и рассмотрим произвольный неупорядоченный набор $\{t_1, \dots, t_p\} \in S^{1(p)}$ из p попарно различных точек на S^1 .

Каждая точка $t_i, i = 1, \dots, p$, задается углом α_i , отсчитываемым от точки t_0 и определенным с точностью до 2π . Углы $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ определяют правильный p -угольник

$$\Pi = \left\{ \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \alpha_i + \frac{2\pi}{p} k, \quad k = 0, 1, \dots, p-1 \right\}$$

на S^1 .

Этот p -угольник не зависит от выбора точки t_0 . Множество всех правильных p -угольников на S^1 изоморфно S^1 . Следовательно, корректно определено гладкое отображение

$$f : S^{1(p)} \rightarrow S^1, \quad f : \{t_1, \dots, t_p\} \mapsto \Pi(\{t_1, \dots, t_p\}).$$

Теперь возьмем произвольный правильный p -угольник Π на S^1 . Пусть одна из его вершин определяется углом α_0 . Тогда полный прообраз $f^{-1}(\Pi)$ этого p -угольника относительно отображения f состоит из точек $\{t_1, \dots, t_p\} \in S^{1(p)}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^p (\alpha_i - \alpha_0) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Легко видеть, что углы $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ и их индексацию можно выбрать так, что

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p < \alpha_1 + 2\pi,$$

а $\sum_{i=1}^p (\alpha_i - \alpha_0) = 0$. Этот выбор непрерывно зависит от набора $\{t_1, \dots, t_p\}$.

Пусть $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_0$ и $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$. Тогда множество $p^{-1}(\Pi)$ изоморфно открытому симплексу

$$\Delta = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p : \beta_2 > 0, \dots, \beta_p > 0, \sum_{i=2}^p \beta_i < 2\pi, \beta_1 = -\frac{1}{p} \sum_{i=2}^p (p-i+1)\beta_i \right\},$$

причем локально этот изоморфизм зависит от α_0 гладким образом.

Отсюда следует, что отображение f является локально-тривиальным расслоением над S^1 со слоем Δ . Поскольку слой этого расслоения стягиваем, то его тотальное пространство гомотопически эквивалентно базе.

Предложение 4.4.2 доказано.

4.8 Доказательство теоремы 4.1.1

Пусть $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ – замкнутая выпуклая кривая в четномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^k . Рассмотрим семейство

$$F(t, \lambda) = |\gamma(t) - \lambda|^2$$

функций от $t \in S^1$, зависящих от параметра $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

Для кривой γ общего положения функции $F(\cdot, \lambda)$ этого семейства имеют на S^1 глобальные минимумы только типов $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ с коразмерностью $\text{codim } \mathcal{A} \leq k + 1$. Если для данного λ функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет глобальный минимум типа \mathcal{A} , то множество точек $y \in \mathbb{R}^k$ таких, что

$$|y - \lambda|^2 = \min_{t \in S^1} F(t, \lambda), \tag{4.9}$$

является внешне-опорной гиперсферой типа \mathcal{A} кривой γ . Обратно, любая внешне-опорная гиперсфера кривой γ задается уравнением (4.9), где λ – ее центр.

Это наблюдение позволяет получить формулу (4.7) из теоремы 1.2.3 главы 3. Необходимо лишь проверить все указанные там условия. Проверка основана на нескольких простых фактах о выпуклых кривых.

4.8.1. ЛЕММА. *Кривая γ может иметь опорные гиперплоскости только типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$, где $\deg \mathcal{A} \leq k$. Более того, для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ такого, что $\deg \mathcal{A} \leq k$, и для любого упорядоченного набора p попарно различных точек t_1, \dots, t_p кривой γ существует опорная гиперплоскость π , которая пересекает γ только в этих точках, причем кратность касания π с γ в точке t_i равна μ_i для каждого $i = 1, \dots, p$.*

Первая часть этого утверждения непосредственно вытекает из определения выпуклости кривой. Вторая часть доказывается аналогично лемме 4.5.2.

4.8.2. ЛЕММА. *Существует $R_1 > 0$ такое, что никакая точка $\lambda \in \mathbb{R}^k$, находящаяся на расстоянии $|\lambda| \geq R_1$ от начала координат, не может быть центром опорной гиперсферы типа \mathcal{A} кривой γ ни при каком $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ таком, что $\deg \mathcal{A} > k$.*

Это следует из леммы 4.8.2 и замкнутости кривой γ . Следующее свойство также легко вытекает из определения выпуклости.

4.8.3. ЛЕММА. *Для любого набора $d \leq k$ точек кривой γ (взятых с учетом кратностей) размерность минимального аффинного подпространства в \mathbb{R}^k , содержащего точки этого набора, равна $d - 1$.*

Из леммы 4.8.3 следует, что через любые d точек кривой γ (с учетом кратностей), где $2 \leq d \leq k$, можно провести, и притом единственную, $(d - 2)$ -мерную (евклидову) сферу. Центр этой сферы гладко зависит от (упорядоченного) набора взятых точек и называется *центром* этого набора. Поскольку многообразие всех таких наборов компактно (d -мерный тор), то получаем следующее утверждение.

4.8.4. ЛЕММА. *Для любого $2 \leq d \leq k$ центры наборов d точек кривой γ (взятых с учетом кратностей) образуют компактное подмножество в \mathbb{R}^k . В частности, существует $R_2 > 0$ такое, что никакая точка $\lambda \in \mathbb{R}^k$, находящаяся на расстоянии $|\lambda| \geq R_2$ от начала координат, не может быть центром набора d точек кривой γ ни при каком из указанных d .*

Теперь приступим к проверке условий 1 – 7 теоремы 1.2.3 главы 3. При этом будем считать, что γ – (выпуклая) кривая общего положения, а пространство \mathbb{R}^k представляет собой гиперплоскость $y = 0$ в ориентированном пространстве \mathbb{R}^{k+1} с координатами $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$, y и началом внутри выпуклой оболочки кривой γ .

Пусть S^k – гиперсфера в \mathbb{R}^{k+1} , заданная уравнением $|\vec{x}|^2 + y^2 = 1$. Рассмотрим точку $\mathcal{N} \in S^k$ с координатами $(\vec{x}, y) = (0, 1)$ и стереографическую проекцию $\sigma : \mathbb{R}^k \rightarrow S^k$ с полюсом \mathcal{N} . Эта проекция отождествляет пространство \mathbb{R}^k с многообразием $\Lambda = S^k \setminus \{\mathcal{N}\}$. Она определяет естественное вложение $\tilde{\sigma}$ многообразия V_s всех гиперсфер и аффинных гиперплоскостей в \mathbb{R}^k в многообразие V всех (аффинных) гиперплоскостей в \mathbb{R}^{k+1} (см. раздел 3.2 главы 3). Образ $\sigma(\gamma)$ кривой γ является выпуклой по Барнеру кривой общего положения в \mathbb{R}^{k+1} . Если $\pi \subset \mathbb{R}^k$ – опорная гиперплоскость (гиперсфера) типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ кривой γ , то $\tilde{\sigma}(\pi) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ – опорная гиперплоскость типа \mathcal{A} кривой $\sigma(\gamma)$, проходящая (не проходящая, соответственно) через точку \mathcal{N} (предложение 3.2.3 главы 3).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $U_\varepsilon = \{(\vec{x}, y) \in S^k \mid y > 1 - \varepsilon\}$, $\partial(U_\varepsilon) = \overline{U_\varepsilon} \setminus U_\varepsilon$. Если $\varepsilon < 2$, то множество $S_\varepsilon = \sigma^{-1}(\partial(U_\varepsilon))$ является гиперсферой в \mathbb{R}^k радиуса $\sqrt{2/\varepsilon - 1}$ с центром в начале координат (лемма 3.2.1 главы 3). Гиперсферы в \mathbb{R}^k с центрами из S_ε переходят при отображении $\tilde{\sigma}$ в гиперплоскости в \mathbb{R}^{k+1} , касающиеся $(k-1)$ -мерной сферы, заданной уравнениями $(2/\varepsilon - 1)|\vec{x}|^2 = 1, y = 1$. Обозначим через ε_0 положительное число такое, что радиус гиперсферы S_{ε_0} равен максимуму чисел R_1 и R_2 из лемм 4.8.2 и 4.8.4.

УСЛОВИЯ 1 – 3. В нашем случае $\tilde{\Lambda} = S^k$. Множество U_ε является подходящей окрестностью точки \mathcal{N} в многообразии $\tilde{\Lambda}$ для любого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$.

УСЛОВИЕ 4. Для каждого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ такого, что $\deg \mathcal{A} \leq k$, многообразии \mathcal{A}_F глобальных минимумов типа \mathcal{A} семейства $F(t, \lambda)$ трансверсально S_ε для любого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Действительно, пусть $\lambda \in S_\varepsilon$ – центр опорной гиперсферы типа \mathcal{A} , касающейся кривой γ в точках t_1, \dots, t_p с кратностями μ_1, \dots, μ_p , соответственно. Рассмотрим множество \mathcal{L} центров всех гиперсфер в \mathbb{R}^k , касающихся кривой γ в этих точках с указанными кратностями. Оно является аффинным подпространством в \mathbb{R}^k размерности $k - \deg \mathcal{A} + 1$ (лемма 4.8.3). Если $\varepsilon < \varepsilon_0$, то пространство \mathcal{L} не лежит в касательной гиперплоскости к гиперсфере S_ε в точке λ , так как в \mathcal{L} лежит центр набора точек t_1, \dots, t_p , взятых с кратностями $\mu_1 + 1, \dots, \mu_p + 1$.

УСЛОВИЯ 5 – 7. Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ такой, что $\deg \mathcal{A} \leq k$, и рассмотрим многообразие $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$ опорных гиперплоскостей типа \mathcal{A} кривой $\sigma(\gamma)$. Через $S^{1(p)}$ обозначим многообразие неупорядоченных наборов p попарно различных точек на окружности S^1 .

Пусть $g : \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)} \rightarrow S^{1(p)}$ – отображение, сопоставляющее опорной гиперплоскости неупорядоченный набор ее точек касания с кривой. Поскольку кривая $\sigma(\gamma)$ выпукла по Барнеру, то отображение g является C^0 -расслоением многообразия $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$ над многообразием $S^{1(p)}$ (предложение 4.4.1).

Рассмотрим гиперплоскости в пространстве \mathbb{R}^{k+1} , проходящие через точку \mathcal{N} .

Они образуют гладкую гиперповерхность \mathcal{H}_0 (проективную гиперплоскость) в многообразии V .

4.8.5. ЛЕММА. *Пересечение $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$ является гладкой гиперповерхностью в многообразии $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$. Эйлера характеристика этой гиперповерхности равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.8.1 гиперповерхность \mathcal{H}_0 пересекает каждый слой расслоения g . Это пересечение всюду трансверсально, поскольку каждый набор из $\deg \mathcal{A}$ точек кривой γ (с учетом кратностей) имеет конечный центр (лемма 4.8.4). Следовательно, пересечение гиперповерхности \mathcal{H}_0 с каждым слоем расслоения g является аффинным выпуклым ограниченным $(k - \deg \mathcal{A})$ -мерным подмножеством в V (лемма 4.5.3). Остается воспользоваться предложением 4.4.2.

Заметим, что гиперповерхность $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)} \subset \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$ коориентируема. Коориентация задается касательными векторами к многообразию $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$, трансверсальными \mathcal{H}_0 и направленными в область $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}^+ \subset \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$, соответствующую (при отображении $\tilde{\sigma}$) внешне-опорным гиперсферам кривой γ .

4.8.6. ЛЕММА. *Эйлера характеристика многообразия $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}^+$ равна нулю.*

Действительно, отображение g индуцирует C^0 -расслоение многообразия $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}^+$ над многообразием $S^{1(p)}$. Поэтому лемма 4.8.6 также следует из предложения 4.4.2.

Рассмотрим произвольное положительное $\varepsilon < \varepsilon_0$. Через \mathcal{H}_ε обозначим множество гиперплоскостей в \mathbb{R}^{k+1} , касающихся сферы $(2/\varepsilon - 1)|\vec{x}|^2 = 1, y = 1$. Это множество является замкнутой гиперповерхностью в многообразии V . А именно, \mathcal{H}_ε – конус второго порядка, вершиной которого служит гиперплоскость $y = 1$. Поскольку гиперплоскость $y = 1$ не является опорной для кривой $\sigma(\gamma)$, а замыкание $\overline{\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}} \subset V$ многообразия $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$ компактно, то справедливо следующее утверждение.

4.8.7. ЛЕММА. *Существует положительное $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ пересечение $\mathcal{H}_\varepsilon \cap \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$ состоит из двух связных компонент. Каждая компонента является гладкой гиперповерхностью в многообразии $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$. Одна из них (и только одна) лежит в многообразии $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}^+$. Гиперповерхность $\mathcal{H} \cap \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)} \subset \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$ является строгим деформационным ретрактом объединения гиперповерхностей $\mathcal{H}_\varepsilon \cap \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}^+$ по всем $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$.*

Теперь рассмотрим многообразии $\mathcal{A}_F \subset \mathbb{R}^k$ глобальных минимумов типа \mathcal{A} семейства $F(t, \lambda)$. Стереографическая проекция σ индуцирует диффеоморфизм между пересечениями $\mathcal{A}_F \cap S_{\varepsilon_1}$ и $\mathcal{H}_{\varepsilon_1} \cap \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}^+$, а также диффеоморфизм между множествами

$$\mathcal{A}_F \setminus \sigma^{-1}(\overline{U_{\varepsilon_1}} \setminus \{\mathcal{N}\}) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}^+ \setminus \bigcup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]} (\mathcal{H}_\varepsilon \cap \mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}^+).$$

Следовательно, $\chi(\mathcal{A}_F \cap S_{\varepsilon_1}) = \chi(\mathcal{A}_F \setminus \sigma^{-1}(\overline{U_{\varepsilon_1}} \setminus \{\mathcal{N}\})) = 0$, в силу лемм 4.8.5 – 4.8.7.

Таким образом, семейство $F(t, \lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.3 главы 3, а значит, числа изолированных особенностей разных типов множества Максвелла его глобальных минимумов связаны соотношением (3.6). Теорема 4.1.1 доказана.

Глава 5

Таблицы соотношений между эйлеровыми характеристиками

1 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образа гладкого замкнутого многообразия M при устойчивом гладком отображении $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 в гладкое многообразие V бóльшей размерности в случае нечетного $l = n - m > 0$ и нечетного $n \leq 6l + 3$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n (при фиксированном l), в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 2l$	$4\chi_{(0)}^{(2)} = 2\chi_{(1)}^{(1)} + 12\chi_{(0)}^{(3)} - 4\chi_{(2)}^{(1)} - 10\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - 80\chi_{(0)}^{(5)}$ $+ 10\chi_{(3)}^{(1)} + 48\chi_{(2,0)}^{(1,2)} + 24\chi_{(1,0)}^{(2,1)} + 184\chi_{(1,0)}^{(1,4)} + 1344\chi_{(0)}^{(7)}$ $- 56\chi_{(4)}^{(1)} - 263\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - 185\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 123\chi_{(1)}^{(3)}$ $- 1280\chi_{(2,0)}^{(1,4)} - 838\chi_{(1,0)}^{(2,3)} - 5728\chi_{(1,0)}^{(1,6)} - 39168\chi_{(0)}^{(9)}$
$c = 3l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,1)} = \chi_{(2)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - 2\chi_{(3)}^{(1)} - 4\chi_{(2,0)}^{(1,2)} - \chi_{(1,0)}^{(2,1)} - 8\chi_{(1,0)}^{(1,4)}$ $+ 5\chi_{(4)}^{(1)} + 17\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 9\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} + 48\chi_{(2,0)}^{(1,4)}$ $+ 22\chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 96\chi_{(1,0)}^{(1,6)}$
$c = 4l$	$4\chi_{(0)}^{(4)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} + 20\chi_{(0)}^{(5)}$ $- \chi_{(3)}^{(1)} - 8\chi_{(2,0)}^{(1,2)} - 6\chi_{(1,0)}^{(2,1)} - 38\chi_{(1,0)}^{(1,4)} - 280\chi_{(0)}^{(7)}$ $+ 10\chi_{(4)}^{(1)} + 50\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 38\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 27\chi_{(1)}^{(3)} + 252\chi_{(2,0)}^{(1,4)}$ $+ 176\chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 1180\chi_{(1,0)}^{(1,6)} + 8064\chi_{(0)}^{(9)}$
$c = 4l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} = 2\chi_{(3)}^{(1)} + 4\chi_{(2,0)}^{(1,2)} - 4\chi_{(4)}^{(1)} - 8\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 16\chi_{(2,0)}^{(1,4)}$ $2\chi_{(1)}^{(2)} = \chi_{(3)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(2,1)} - 2\chi_{(4)}^{(1)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} - 4\chi_{(1,0)}^{(2,3)}$
$c = 5l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,3)} = \chi_{(2,0)}^{(1,2)} + \chi_{(1,0)}^{(2,1)} + 4\chi_{(1,0)}^{(1,4)}$ $- \chi_{(4)}^{(1)} - 5\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - 4\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 3\chi_{(1)}^{(3)}$ $- 16\chi_{(2,0)}^{(1,4)} - 11\chi_{(1,0)}^{(2,3)} - 40\chi_{(1,0)}^{(1,6)}$
$c = 5l + 3$	$\chi_{(3,0)}^{(1,1)} = \chi_{(4)}^{(1)} + 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)}$ $\chi_{(2,1)}^{(1,1)} = \chi_{(4)}^{(1)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)}$
$c = 6l$	$4\chi_{(0)}^{(6)} = 28\chi_{(0)}^{(7)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,4)}$ $- \chi_{(3,0)}^{(1,2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - \chi_{(1)}^{(3)} - 12\chi_{(2,0)}^{(1,4)}$ $- 10\chi_{(1,0)}^{(2,3)} - 82\chi_{(1,0)}^{(1,6)} - 672\chi_{(0)}^{(9)}$
$c = 6l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,3)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 8\chi_{(2,0)}^{(1,4)}$ $2\chi_{(1,0)}^{(2,2)} = \chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} + 6\chi_{(1,0)}^{(2,3)}$
$c = 7l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,5)} = \chi_{(2,0)}^{(1,4)} + \chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 6\chi_{(1,0)}^{(1,6)}$
$c = 8l$	$2\chi_{(0)}^{(8)} = \chi_{(1,0)}^{(1,6)} + 18\chi_{(0)}^{(9)}$

2 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образа гладкого замкнутого многообразия M при устойчивом гладком отображении $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 в гладкое многообразие V бóльшей размерности в случае четного $l = n - m > 0$ и нечетного $n \leq 7l + 3$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$ обозначается через $\chi^{(k_1, \dots, k_p)}_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n (при фиксированном l), в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = l$	$4\chi_{(0)}^{(1)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,1)} + \chi_{(3,0)}^{(1,1)} - \chi_{(2,1)}^{(1,1)} - \chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$c = 2l$	$4\chi_{(0)}^{(2)} = 2\chi_{(1)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - 2\chi_{(3)}^{(1)} + \chi_{(3,0)}^{(1,2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 3\chi_{(1)}^{(3)} + 2\chi_{(5)}^{(1)}$
$c = 3l$	$4\chi_{(0)}^{(3)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,3)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} - 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)}$ $+ \chi_{(3,0)}^{(1,3)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} - 3\chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$c = 3l + 2$	$2\chi_{(2)}^{(1)} = \chi_{(2,1)}^{(1,1)}$
$c = 4l$	$4\chi_{(0)}^{(4)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - \chi_{(3)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,4)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 3\chi_{(1)}^{(3)} + 5\chi_{(5)}^{(1)}$
$c = 4l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} = 2\chi_{(3)}^{(1)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 2\chi_{(5)}^{(1)}$ $2\chi_{(1)}^{(2)} = \chi_{(3)}^{(1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} - \chi_{(5)}^{(1)}$
$c = 5l$	$4\chi_{(0)}^{(5)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,3)} - \chi_{(3,0)}^{(1,1)} - \chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,5)}$ $- 2\chi_{(3,0)}^{(1,3)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} - 3\chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$c = 5l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,2)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + \chi_{(2,1)}^{(1,1)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)}$ $2\chi_{(1,0)}^{(2,1)} = \chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 3\chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$c = 5l + 4$	$\chi_{(4)}^{(1)} = 0$
$c = 6l$	$4\chi_{(0)}^{(6)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,4)} - \chi_{(3,0)}^{(1,2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - \chi_{(1)}^{(3)} + 2\chi_{(5)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,6)}$
$c = 6l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,3)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} - 2\chi_{(5)}^{(1)}$ $2\chi_{(1,0)}^{(2,2)} = \chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} - 3\chi_{(5)}^{(1)}$
$c = 6l + 4$	$\chi_{(4,0)}^{(1,1)} = \chi_{(5)}^{(1)}$ $\chi_{(3,1)}^{(1,1)} = \chi_{(5)}^{(1)}$ $2\chi_{(2)}^{(2)} = \chi_{(5)}^{(1)}$
$c = 7l$	$4\chi_{(0)}^{(7)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,5)} - \chi_{(3,0)}^{(1,3)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} - \chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$c = 7l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,4)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,3)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)}$ $2\chi_{(1,0)}^{(2,3)} = \chi_{(3,0)}^{(1,3)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} + 3\chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$c = 8l$	$2\chi_{(0)}^{(8)} = \chi_{(1,0)}^{(1,6)}$

3 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образа гладкого замкнутого многообразия M при устойчивом гладком отображении $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 в гладкое многообразие V бóльшей размерности в случае нечетного $l = n - m > 0$ и четного $n \leq 6l + 2$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n (при фиксированном l), в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = l$	$4\chi_{(0)}^{(1)} = 8\chi_{(0)}^{(2)} - 2\chi_{(1,0)}^{(1,1)} - 32\chi_{(0)}^{(4)}$ $+ 14\chi_{(2,0)}^{(1,1)} + 4\chi_{(1)}^{(2)} + 44\chi_{(1,0)}^{(1,3)} + 384\chi_{(0)}^{(6)}$ $- 51\chi_{(3,0)}^{(1,1)} - 37\chi_{(2,1)}^{(1,1)} - 272\chi_{(2,0)}^{(1,3)} - 164\chi_{(1,0)}^{(2,2)}$ $- 1184\chi_{(1,0)}^{(1,5)} - 8704\chi_{(0)}^{(8)}$
$c = 2l + 1$	$2\chi_{(1)}^{(1)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,1)} - 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1)}^{(2)} - 4\chi_{(1,0)}^{(1,3)}$ $+ 5\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 3\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 16\chi_{(2,0)}^{(1,3)} + 4\chi_{(1,0)}^{(2,2)} + 32\chi_{(1,0)}^{(1,5)}$
$c = 3l$	$2\chi_{(0)}^{(3)} = \chi_{(1,0)}^{(1,1)} + 8\chi_{(0)}^{(4)} - 3\chi_{(2,0)}^{(1,1)} - 2\chi_{(1)}^{(2)} - 11\chi_{(1,0)}^{(1,3)} - 80\chi_{(0)}^{(6)}$ $+ 13\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 9\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 61\chi_{(2,0)}^{(1,3)} + 38\chi_{(1,0)}^{(2,2)}$ $+ 260\chi_{(1,0)}^{(1,5)} + 1792\chi_{(0)}^{(8)}$
$c = 3l + 2$	$2\chi_{(2)}^{(1)} = 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + \chi_{(2,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(2,0)}^{(1,3)}$
$c = 4l + 1$	$2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} = 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1)}^{(2)} + 6\chi_{(1,0)}^{(1,3)}$ $- 7\chi_{(3,0)}^{(1,1)} - 5\chi_{(2,1)}^{(1,1)} - 18\chi_{(2,0)}^{(1,3)} - 10\chi_{(1,0)}^{(2,2)} - 40\chi_{(1,0)}^{(1,5)}$
$c = 4l + 3$	$\chi_{(3)}^{(1)} = \chi_{(3,0)}^{(1,1)}$
$c = 5l$	$4\chi_{(0)}^{(5)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,3)} + 24\chi_{(0)}^{(6)}$ $- \chi_{(3,0)}^{(1,1)} - \chi_{(2,1)}^{(1,1)} - 10\chi_{(2,0)}^{(1,3)} - 8\chi_{(1,0)}^{(2,2)} - 58\chi_{(1,0)}^{(1,5)} - 448\chi_{(0)}^{(8)}$
$c = 5l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,2)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + \chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 6\chi_{(2,0)}^{(1,3)}$ $2\chi_{(1,0)}^{(2,1)} = \chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 4\chi_{(1,0)}^{(2,2)}$
$c = 6l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,4)} = \chi_{(2,0)}^{(1,3)} + \chi_{(1,0)}^{(2,2)} + 5\chi_{(1,0)}^{(1,5)}$
$c = 7l$	$2\chi_{(0)}^{(7)} = \chi_{(1,0)}^{(1,5)} + 16\chi_{(0)}^{(8)}$

4 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образа гладкого замкнутого многообразия M при устойчивом гладком отображении $f : M^m \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 в гладкое многообразие V бóльшей размерности в случае четного $l = n - m > 0$ и четного $n \leq 7l + 4$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n (при фиксированном l), в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 2l + 1$	$\chi_{(1)}^{(1)} = \chi_{(1)}^{(2)}$
$c = 3l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,1)} = \chi_{(2)}^{(1)} + \chi_{(1,0)}^{(2,1)} - \chi_{(4)}^{(1)} - \chi_{(2,1)}^{(1,2)}$
$c = 4l + 1$	$2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} = 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1)}^{(2)} + 2\chi_{(1,0)}^{(2,2)} - 2\chi_{(4,0)}^{(1,1)} - 3\chi_{(3,1)}^{(1,1)} - 2\chi_{(2)}^{(2)}$
$c = 4l + 3$	$2\chi_{(3)}^{(1)} = \chi_{(3,1)}^{(1,1)}$
$c = 5l + 1$	$2\chi_{(1,0)}^{(1,3)} = 2\chi_{(2,0)}^{(1,2)} + 2\chi_{(1,0)}^{(2,1)} - 2\chi_{(4)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(2,3)} - 2\chi_{(4,0)}^{(1,2)} - 3\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)} - 2\chi_{(2,0)}^{(2,1)} - 4\chi_{(2,1)}^{(1,2)}$
$c = 5l + 3$	$2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} = 2\chi_{(4)}^{(1)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)}$ $\chi_{(2,1)}^{(1,1)} = \chi_{(4)}^{(1)} + \chi_{(2,1)}^{(1,2)}$
$c = 6l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,4)} = \chi_{(2,0)}^{(1,3)} + \chi_{(1,0)}^{(2,2)} - \chi_{(4,0)}^{(1,1)} - \chi_{(3,1)}^{(1,1)} - \chi_{(2)}^{(2)} + \chi_{(1,0)}^{(2,4)}$
$c = 6l + 3$	$2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} = 2\chi_{(4,0)}^{(1,1)} + \chi_{(3,1)}^{(1,1)}$ $\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} = \chi_{(4,0)}^{(1,1)} + \chi_{(3,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(2)}^{(2)}$ $2\chi_{(1)}^{(3)} = \chi_{(3,1)}^{(1,1)}$
$c = 6l + 5$	$\chi_{(5)}^{(1)} = 0$
$c = 7l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,5)} = \chi_{(1,0)}^{(2,3)} + \chi_{(2,0)}^{(1,4)} - \chi_{(4,0)}^{(1,2)} - \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)} - \chi_{(2,0)}^{(2,1)} - \chi_{(2,1)}^{(1,2)}$
$c = 7l + 3$	$2\chi_{(3,0)}^{(1,3)} = 2\chi_{(4,0)}^{(1,2)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)}$ $\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} = \chi_{(4,0)}^{(1,2)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(2,0)}^{(2,1)} + \chi_{(2,1)}^{(1,2)}$ $2\chi_{(1,0)}^{(3,1)} = \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,2)}$
$c = 8l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,6)} = \chi_{(2,0)}^{(1,5)} + \chi_{(1,0)}^{(2,4)}$

5 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивого гладкого отображения $f : M^n \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 гладкого замкнутого многообразия M нечетной размерности $n \leq 5$ в гладком многообразии V той же размерности. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Во всех формулах, k – произвольное целое неотрицательное число. Мы полагаем, что $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p, 0)}^{(k_1, \dots, k_p, r)} = 0$, если $r < 0$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n , в которой впервые появляются соответствующие соотношения. Формула для $\chi_{(0)}^{(k)}$ при $k = 0$ справедлива, если многообразии V замкнуто.

$c = 0$	$ \begin{aligned} 4\chi_{(0)}^{(k)} = & 2\chi_{(1,0)}^{(1,k-2)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,k)} \\ & - \chi_{(1,0)}^{(3,k-6)} - 3\chi_{(1,0)}^{(3,k-4)} - 3\chi_{(1,0)}^{(3,k-2)} - \chi_{(1,0)}^{(3,k)} \\ & - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,k-5)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,k-3)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,k-1)} \\ & - \chi_{(3,0)}^{(1,k-4)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,k-2)} + \chi_{(3,0)}^{(1,k)} \\ & + 2\chi_{(1,0)}^{(5,k-10)} + 10\chi_{(1,0)}^{(5,k-8)} + 20\chi_{(1,0)}^{(5,k-6)} \\ & + 20\chi_{(1,0)}^{(5,k-4)} + 10\chi_{(1,0)}^{(5,k-2)} + 2\chi_{(1,0)}^{(5,k)} \\ & + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-9)} + 8\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-7)} + 12\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-5)} \\ & + 8\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-3)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-1)} \\ & + 2\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-8)} + 6\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-6)} + 6\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-4)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-2)} \\ & + 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-8)} + 7\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-6)} + 8\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-4)} + 3\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-2)} \\ & + 2\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-7)} + 5\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-5)} + 3\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-3)} \\ & + 2\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-7)} + 6\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-5)} + 5\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-3)} + \chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-1)} \\ & + 2\chi_{(5,0)}^{(1,k-6)} + 5\chi_{(5,0)}^{(1,k-4)} + 2\chi_{(5,0)}^{(1,k-2)} + \chi_{(5,0)}^{(1,k)} \end{aligned} $
---------	---

(продолжение на следующей странице)

$c = 2$	$4\chi_{(1,0)}^{(2,k)} = 6\chi_{(1,0)}^{(3,k-2)} + 6\chi_{(1,0)}^{(3,k)} + 4\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,k-1)} + 2\chi_{(3,0)}^{(1,k)}$ $- 10\chi_{(1,0)}^{(5,k-6)} - 30\chi_{(1,0)}^{(5,k-4)} - 30\chi_{(1,0)}^{(5,k-2)} - 10\chi_{(1,0)}^{(5,k)}$ $- 9\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-5)} - 18\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-3)} - 9\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-1)}$ $- 8\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-4)} - 8\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-2)}$ $- 8\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-4)} - 12\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-2)} - 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k)}$ $- 7\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-3)} - 3\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-1)}$ $- 7\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-3)} - 7\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-1)}$ $- 6\chi_{(5,0)}^{(1,k-2)} - 2\chi_{(5,0)}^{(1,k)}$
	$4\chi_{(2,0)}^{(1,k)} = 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,k-2)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,k)} + 4\chi_{(3,0)}^{(1,k-1)}$ $- \chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-6)} - 3\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-4)} - 3\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k)}$ $- 2\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-5)} - 4\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-3)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-1)}$ $- 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-5)} - 4\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-3)} - 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-1)}$ $- 3\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-4)} - 4\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-2)} + \chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k)}$ $- 3\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-4)} - 4\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-2)} - \chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k)}$ $- 4\chi_{(5,0)}^{(1,k-3)} - 4\chi_{(5,0)}^{(1,k-1)}$
$c = 4$	$2\chi_{(1,0)}^{(4,k)} = 5\chi_{(1,0)}^{(5,k-2)} + 5\chi_{(1,0)}^{(5,k)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-1)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k)}$
	$2\chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k)} = 3\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k-2)} + 3\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k)} + 4\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-1)}$ $+ 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-1)} + \chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k)} + 2\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k)}$
	$2\chi_{(2,0)}^{(2,k)} = \chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k-2)} + \chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k)} + 2\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-1)} + \chi_{(5,0)}^{(1,k)}$
	$\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k)} = \chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k-2)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k)} + \chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k-1)}$ $+ \chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-1)} + \chi_{(5,0)}^{(1,k)}$
	$2\chi_{(4,0)}^{(1,k)} = \chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k-2)} + \chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k)} + 2\chi_{(5,0)}^{(1,k-1)}$

6 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий мультиособенностей устойчивого гладкого отображения $f : M^n \rightarrow V^n$ коранга ≤ 1 гладкого замкнутого многообразия M четной размерности $n \leq 6$ в гладкое многообразие V той же размерности. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Во всех формулах, k – произвольное целое неотрицательное число. Мы полагаем, что $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p, 0)}^{(k_1, \dots, k_p, r)} = 0$, если $r < 0$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n , в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 1$	$ \begin{aligned} 4\chi_{(1,0)}^{(1,k)} &= 4\chi_{(1,0)}^{(2,k-2)} + 4\chi_{(1,0)}^{(2,k)} + 4\chi_{(2,0)}^{(1,k-1)} \\ &\quad - 4\chi_{(1,0)}^{(4,k-6)} - 12\chi_{(1,0)}^{(4,k-4)} - 12\chi_{(1,0)}^{(4,k-2)} - 4\chi_{(1,0)}^{(4,k)} \\ &\quad - 4\chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k-5)} - 8\chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k-3)} - 4\chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k-1)} \\ &\quad - 4\chi_{(2,0)}^{(2,k-4)} - 4\chi_{(2,0)}^{(2,k-2)} - 4\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k-4)} - 6\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k-2)} \\ &\quad - 4\chi_{(4,0)}^{(1,k-3)} - 4\chi_{(4,0)}^{(1,k-1)} \\ &\quad + 12\chi_{(1,0)}^{(6,k-10)} + 60\chi_{(1,0)}^{(6,k-8)} + 120\chi_{(1,0)}^{(6,k-6)} \\ &\quad + 120\chi_{(1,0)}^{(6,k-4)} + 60\chi_{(1,0)}^{(6,k-2)} + 12\chi_{(1,0)}^{(6,k)} \\ &\quad + 12\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-9)} + 48\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-7)} + 72\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-5)} \\ &\quad + 48\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-3)} + 12\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-1)} \\ &\quad + 12\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-8)} + 36\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-6)} + 36\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-4)} + 12\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-2)} \\ &\quad + 12\chi_{(2,0)}^{(3,k-7)} + 24\chi_{(2,0)}^{(3,k-5)} + 12\chi_{(2,0)}^{(3,k-3)} \\ &\quad + 12\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-8)} + 41\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-6)} + 48\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-4)} \\ &\quad + 21\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-2)} + 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k)} \\ &\quad + 12\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-7)} + 29\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-5)} \\ &\quad + 19\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-3)} + 2\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-1)} \\ &\quad + 12\chi_{(3,0)}^{(2,k-6)} + 22\chi_{(3,0)}^{(2,k-4)} + 6\chi_{(3,0)}^{(2,k-2)} \\ &\quad + 12\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-7)} + 34\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-5)} + 30\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-3)} + 8\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-1)} \\ &\quad + 12\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-6)} + 22\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-4)} + 8\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-2)} \\ &\quad + 12\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-6)} + 27\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-4)} + 15\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-2)} + 2\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)} \\ &\quad + 12\chi_{(6,0)}^{(1,k-5)} + 20\chi_{(6,0)}^{(1,k-3)} + 4\chi_{(6,0)}^{(1,k-1)} \end{aligned} $
---------	--

(продолжение на следующей странице)

$c = 3$	$ \begin{aligned} 4\chi_{(1,0)}^{(3,k)} &= 8\chi_{(1,0)}^{(4,k-2)} + 8\chi_{(1,0)}^{(4,k)} + 4\chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k-1)} + 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k)} \\ &\quad - 20\chi_{(1,0)}^{(6,k-6)} - 60\chi_{(1,0)}^{(6,k-4)} - 60\chi_{(1,0)}^{(6,k-2)} - 20\chi_{(1,0)}^{(6,k)} \\ &\quad - 16\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-5)} - 32\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-3)} - 16\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-1)} \\ &\quad - 12\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-4)} - 12\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-2)} - 8\chi_{(2,0)}^{(3,k-3)} \\ &\quad - 13\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-4)} - 20\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-2)} - 5\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k)} \\ &\quad - 9\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-3)} - 5\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-1)} \\ &\quad - 6\chi_{(3,0)}^{(2,k-2)} - 2\chi_{(3,0)}^{(2,k)} \\ &\quad - 10\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-3)} - 10\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-1)} - 6\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-2)} \\ &\quad - 7\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-2)} - 3\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)} - 4\chi_{(6,0)}^{(1,k-1)} \end{aligned} $
	$ \begin{aligned} 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,k)} &= 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k-2)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,2,k)} + 4\chi_{(2,0)}^{(2,k-1)} + 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k-1)} + 2\chi_{(4,0)}^{(1,k)} \\ &\quad - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-6)} - 6\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-4)} - 6\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-2)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k)} \\ &\quad - 4\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-5)} - 8\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-3)} - 4\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-1)} \\ &\quad - 6\chi_{(2,0)}^{(3,k-4)} - 6\chi_{(2,0)}^{(3,k-2)} \\ &\quad - 3\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-5)} - 6\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-3)} - 3\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-1)} \\ &\quad - 5\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-4)} - 6\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-2)} \\ &\quad - 6\chi_{(3,0)}^{(2,k-3)} - 2\chi_{(3,0)}^{(2,k-1)} \\ &\quad - 4\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-4)} - 6\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-2)} - 2\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k)} \\ &\quad - 6\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-3)} - 4\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-1)} \\ &\quad - 5\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-3)} - 5\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-1)} \\ &\quad - 6\chi_{(6,0)}^{(1,k-2)} - 2\chi_{(6,0)}^{(1,k)} \end{aligned} $
	$ \begin{aligned} 4\chi_{(3,0)}^{(1,k)} &= 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k-2)} + 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,1,k)} + 4\chi_{(4,0)}^{(1,k-1)} \\ &\quad - \chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-6)} - 3\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-4)} - 3\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-2)} - \chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k)} \\ &\quad - \chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-5)} - 2\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-3)} - \chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-1)} \\ &\quad - 2\chi_{(3,0)}^{(2,k-4)} - 4\chi_{(3,0)}^{(2,k-2)} + 2\chi_{(3,0)}^{(2,k)} \\ &\quad - 2\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-5)} - 4\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-3)} - 2\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-1)} \\ &\quad - 2\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-4)} - 2\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-2)} \\ &\quad - 3\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-4)} - 4\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-2)} - \chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)} \\ &\quad - 4\chi_{(6,0)}^{(1,k-3)} - 4\chi_{(6,0)}^{(1,k-1)} \end{aligned} $

(продолжение на следующей странице)

$c = 5$	$2\chi_{(1,0)}^{(5,k)} = 6\chi_{(1,0)}^{(6,k-2)} + 6\chi_{(1,0)}^{(6,k)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-1)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k)}$
	$2\chi_{(2,1,0)}^{(1,3,k)} = 4\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k-2)} + 4\chi_{(2,1,0)}^{(1,4,k)} + 4\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-1)}$ $+ 2\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-1)} + \chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k)} + 2\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k)}$
	$2\chi_{(2,1,0)}^{(2,1,k)} = 2\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k-2)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(2,2,k)} + 6\chi_{(2,0)}^{(3,k-1)}$ $+ 2\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-1)} + 2\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k)} + \chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)}$
	$2\chi_{(3,1,0)}^{(1,2,k)} = 3\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k-2)} + 3\chi_{(3,1,0)}^{(1,3,k)} + 2\chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-1)}$ $+ 2\chi_{(3,0)}^{(2,k)} + 2\chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-1)} + 2\chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)}$
	$2\chi_{(3,2,0)}^{(1,1,k)} = \chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k-2)} + \chi_{(3,2,1,0)}^{(1,1,1,k)} + 4\chi_{(3,0)}^{(2,k-1)}$ $+ 2\chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-1)} + 2\chi_{(6,0)}^{(1,k)}$
	$\chi_{(4,1,0)}^{(1,1,k)} = \chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k-2)} + \chi_{(4,1,0)}^{(1,2,k)} + \chi_{(4,2,0)}^{(1,1,k-1)}$ $+ \chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-1)} + \chi_{(6,0)}^{(1,k)}$
	$2\chi_{(5,0)}^{(1,k)} = \chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k-2)} + \chi_{(5,1,0)}^{(1,1,k)} + 2\chi_{(6,0)}^{(1,k-1)}$

7 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей устойчивого компактного фронта \mathcal{F} коранга ≤ 1 в гладком многообразии нечетной размерности $n \leq 7$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_{\mathcal{F}}$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n , в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 2$	$2\chi_{(1)}^{(2)} = 6\chi_{(1)}^{(3)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + \chi_{(3)}^{(1)}$ $- 40\chi_{(1)}^{(5)} - 18\chi_{(2,1)}^{(1,3)} - 8\chi_{(2,1)}^{(2,1)}$ $- 11\chi_{(3,1)}^{(1,2)} - 5\chi_{(3,2)}^{(1,1)} - 7\chi_{(4,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(5)}^{(1)}$ $+ 672\chi_{(1)}^{(7)} + 320\chi_{(2,1)}^{(1,5)} + 152\chi_{(2,1)}^{(2,3)} + 72\chi_{(2,1)}^{(3,1)} + 204\chi_{(3,1)}^{(1,4)}$ $+ 97\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} + 46\chi_{(3,2)}^{(1,2)} + 62\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 129\chi_{(4,1)}^{(1,3)} + 61\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)}$ $+ 39\chi_{(4,3)}^{(1,1)} + 81\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + 38\chi_{(5,2)}^{(1,1)} + 50\chi_{(6,1)}^{(1,1)} + 31\chi_{(7)}^{(1)}$
	$2\chi_{(2)}^{(1)} = 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(3)}^{(1)}$ $- 4\chi_{(2,1)}^{(1,3)} - 4\chi_{(2,1)}^{(2,1)} - 4\chi_{(3,1)}^{(1,2)} - 3\chi_{(3,2)}^{(1,1)} - 4\chi_{(4,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(5)}^{(1)}$ $+ 32\chi_{(2,1)}^{(1,5)} + 32\chi_{(2,1)}^{(2,3)} + 24\chi_{(2,1)}^{(3,1)} + 32\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + 26\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)}$ $+ 18\chi_{(3,2)}^{(1,2)} + 20\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 32\chi_{(4,1)}^{(1,3)} + 23\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} + 17\chi_{(4,3)}^{(1,1)}$ $+ 28\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + 19\chi_{(5,2)}^{(1,1)} + 23\chi_{(6,1)}^{(1,1)} + 18\chi_{(7)}^{(1)}$
$c = 4$	$4\chi_{(1)}^{(4)} = 20\chi_{(1)}^{(5)} + 4\chi_{(2,1)}^{(1,3)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,2)}$ $- 280\chi_{(1)}^{(7)} - 100\chi_{(2,1)}^{(1,5)} - 32\chi_{(2,1)}^{(2,3)} - 8\chi_{(2,1)}^{(3,1)} - 58\chi_{(3,1)}^{(1,4)} - 18\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)}$ $- 4\chi_{(3,2)}^{(1,2)} - 10\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 26\chi_{(4,1)}^{(1,3)} - 6\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} - 3\chi_{(4,3)}^{(1,1)} - 12\chi_{(5,1)}^{(1,2)}$ $- 2\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 4\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - \chi_{(7)}^{(1)}$
	$2\chi_{(2,1)}^{(1,2)} = 6\chi_{(2,1)}^{(1,3)} + 4\chi_{(2,1)}^{(2,1)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,2)} + \chi_{(3,2)}^{(1,1)} + 2\chi_{(4,1)}^{(1,1)}$ $- 40\chi_{(2,1)}^{(1,5)} - 36\chi_{(2,1)}^{(2,3)} - 24\chi_{(2,1)}^{(3,1)} - 24\chi_{(3,1)}^{(1,4)} - 21\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)}$ $- 14\chi_{(3,2)}^{(1,2)} - 12\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 24\chi_{(4,1)}^{(1,3)} - 17\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} - 9\chi_{(4,3)}^{(1,1)}$ $- 16\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 10\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 11\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 6\chi_{(7)}^{(1)}$
	$2\chi_{(2)}^{(2)} = 2\chi_{(2,1)}^{(2,1)} + 2\chi_{(3,2)}^{(1,1)} + \chi_{(5)}^{(1)}$ $- 4\chi_{(2,1)}^{(2,3)} - 6\chi_{(2,1)}^{(3,1)} - 4\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} - 5\chi_{(3,2)}^{(1,2)} - 4\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 4\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)}$ $- 4\chi_{(4,3)}^{(1,1)} - 2\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 5\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 3\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(7)}^{(1)}$
	$\chi_{(3,1)}^{(1,1)} = 2\chi_{(3,1)}^{(1,2)} + \chi_{(3,2)}^{(1,1)} + \chi_{(4,1)}^{(1,1)} + \chi_{(5)}^{(1)}$ $- 8\chi_{(3,1)}^{(1,4)} - 4\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} - 2\chi_{(3,2)}^{(1,2)} - 5\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 6\chi_{(4,1)}^{(1,3)} - 3\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)}$ $- 4\chi_{(4,3)}^{(1,1)} - 6\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 3\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 5\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(7)}^{(1)}$
	$2\chi_{(4)}^{(1)} = 2\chi_{(4,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(5)}^{(1)}$ $- 4\chi_{(4,1)}^{(1,3)} - 2\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} - \chi_{(4,3)}^{(1,1)} - 4\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 2\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 4\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(7)}^{(1)}$
	$2\chi_{(4)}^{(1)} = 2\chi_{(4,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(5)}^{(1)}$ $- 4\chi_{(4,1)}^{(1,3)} - 2\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} - \chi_{(4,3)}^{(1,1)} - 4\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 2\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 4\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(7)}^{(1)}$

(продолжение на следующей странице)

$c = 6$	$2\chi(6) = 14\chi(7) + 2\chi(2,1^{1,5}) + \chi(3,1^{1,4})$
	$2\chi(2,1^{1,4}) = 10\chi(2,1^{1,5}) + 4\chi(2,1^{2,3}) + 2\chi(3,1^{1,4}) + \chi(3,2,1^{1,2}) + 2\chi(4,1^{1,3})$
	$2\chi(2,1^{2,2}) = 6\chi(2,1^{2,3}) + 6\chi(2,1^{3,1}) + 2\chi(3,2,1^{1,1,2}) + \chi(3,2^{1,2}) + 2\chi(4,2,1^{1,1}) + \chi(5,1^{1,2})$
	$2\chi(2^3) = 2\chi(2,1^{3,1}) + 2\chi(3,2^{1,2}) + \chi(5,2^{1,1})$
	$\chi(3,1^{1,3}) = 4\chi(3,1^{1,4}) + \chi(3,2,1^{1,1,2}) + \chi(3,1^{2,1}) + \chi(4,1^{1,3}) + \chi(5,1^{1,2})$
	$\chi(3,2,1^{1,1,1}) = 2\chi(3,2,1^{1,1,2}) + 2\chi(3,2^{1,2}) + 2\chi(3,1^{2,1})$ $\quad + \chi(4,2,1^{1,1,1}) + \chi(4,3^{1,1}) + \chi(5,2^{1,1}) + \chi(6,1^{1,1})$
	$2\chi(3^2) = 2\chi(3,1^{2,1}) + 2\chi(4,3^{1,1}) + \chi(7)$
	$2\chi(4,1^{1,2}) = 6\chi(4,1^{1,3}) + 2\chi(4,2,1^{1,1,1}) + \chi(4,3^{1,1}) + 2\chi(5,1^{1,2}) + 2\chi(6,1^{1,1})$
	$\chi(4,2^{1,1}) = \chi(4,2,1^{1,1,1}) + \chi(4,3^{1,1}) + \chi(5,2^{1,1}) + \chi(7)$
	$\chi(5,1^{1,1}) = 2\chi(5,1^{1,2}) + \chi(5,2^{1,1}) + \chi(6,1^{1,1}) + \chi(7)$
	$\chi(6) = \chi(6,1^{1,1}) + \chi(7)$

8 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей устойчивого компактного фронта \mathcal{F} коранга ≤ 1 в гладком многообразии четной размерности $n \leq 6$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_{\mathcal{F}}$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n , в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 1$	$2\chi_{(1)}^{(1)} = 4\chi_{(1)}^{(2)} + 2\chi_{(2)}^{(1)}$ $- 16\chi_{(1)}^{(4)} - 8\chi_{(2,1)}^{(1,2)} - 4\chi_{(2)}^{(2)} - 5\chi_{(3,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(4)}^{(1)}$ $+ 192\chi_{(1)}^{(6)} + 96\chi_{(2,1)}^{(1,4)} + 48\chi_{(2,1)}^{(2,2)} + 24\chi_{(2)}^{(3)} + 62\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + 31\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)}$ $+ 20\chi_{(3)}^{(2)} + 42\chi_{(4,1)}^{(1,2)} + 21\chi_{(4,2)}^{(1,1)} + 28\chi_{(5,1)}^{(1,1)} + 18\chi_{(6)}^{(1)}$
$c = 3$	$2\chi_{(1)}^{(3)} = 8\chi_{(1)}^{(4)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,2)} + \chi_{(3,1)}^{(1,1)}$ $- 80\chi_{(1)}^{(6)} - 32\chi_{(2,1)}^{(1,4)} - 12\chi_{(2,1)}^{(2,2)} - 4\chi_{(2)}^{(3)} - 19\chi_{(3,1)}^{(1,3)} - 7\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)}$ $- 4\chi_{(3)}^{(2)} - 10\chi_{(4,1)}^{(1,2)} - 3\chi_{(4,2)}^{(1,1)} - 5\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - 2\chi_{(6)}^{(1)}$
	$2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} = 4\chi_{(2,1)}^{(1,2)} + 4\chi_{(2)}^{(2)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(4)}^{(1)}$ $- 16\chi_{(2,1)}^{(1,4)} - 16\chi_{(2,1)}^{(2,2)} - 12\chi_{(2)}^{(3)} - 12\chi_{(3,1)}^{(1,3)} - 11\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} - 8\chi_{(3)}^{(2)}$ $- 12\chi_{(4,1)}^{(1,2)} - 10\chi_{(4,2)}^{(1,1)} - 10\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - 8\chi_{(6)}^{(1)}$
	$\chi_{(3)}^{(1)} = \chi_{(3,1)}^{(1,1)} + \chi_{(4)}^{(1)}$ $- 2\chi_{(3,1)}^{(1,3)} - \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} - \chi_{(3)}^{(2)} - 2\chi_{(4,1)}^{(1,2)} - \chi_{(4,2)}^{(1,1)} - 2\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - 2\chi_{(6)}^{(1)}$
$c = 5$	$2\chi_{(1)}^{(5)} = 12\chi_{(1)}^{(6)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,4)} + \chi_{(3,1)}^{(1,3)}$
	$2\chi_{(2,1)}^{(1,3)} = 8\chi_{(2,1)}^{(1,4)} + 4\chi_{(2,1)}^{(2,2)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(4,1)}^{(1,2)}$
	$2\chi_{(2,1)}^{(2,1)} = 4\chi_{(2,1)}^{(2,2)} + 6\chi_{(2)}^{(3)} + 2\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(4,2)}^{(1,1)} + \chi_{(5,1)}^{(1,1)}$
	$\chi_{(3,1)}^{(1,2)} = 3\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} + \chi_{(3)}^{(2)} + \chi_{(4,1)}^{(1,2)} + \chi_{(5,1)}^{(1,1)}$
	$\chi_{(3,2)}^{(1,1)} = \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(3)}^{(2)} + \chi_{(4,2)}^{(1,1)} + \chi_{(6)}^{(1)}$
	$\chi_{(4,1)}^{(1,1)} = 2\chi_{(4,1)}^{(1,2)} + \chi_{(4,2)}^{(1,1)} + \chi_{(5,1)}^{(1,1)} + \chi_{(6)}^{(1)}$
	$\chi_{(5)}^{(1)} = \chi_{(5,1)}^{(1,1)} + \chi_{(6)}^{(1)}$

9 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей края Γ гиперболической связной компоненты дополнения к устойчивому компактному фронту коранга ≤ 1 в гладком многообразии нечетной размерности $n \leq 7$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_{\Gamma}$ обозначается через $\chi^{(k_1, \dots, k_p)}_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}$. Число $c + 1$ определяет минимальную размерность n , в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 2$	$8\chi_{(1)}^{(2)} = 12\chi_{(1)}^{(3)} + 8\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 4\chi_{(3)}^{(1)}$ $- 20\chi_{(1)}^{(5)} - 18\chi_{(2,1)}^{(1,3)} - 16\chi_{(2,1)}^{(2,1)}$ $- 16\chi_{(3,1)}^{(1,2)} - 14\chi_{(3,2)}^{(1,1)} - 14\chi_{(4,1)}^{(1,1)} - 12\chi_{(5)}^{(1)}$ $+ 84\chi_{(1)}^{(7)} + 80\chi_{(2,1)}^{(1,5)} + 76\chi_{(2,1)}^{(2,3)} + 72\chi_{(2,1)}^{(3,1)} + 76\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + 66\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)}$ $+ 62\chi_{(3,2)}^{(1,2)} + 56\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 72\chi_{(4,1)}^{(1,3)} + 62\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} + 61\chi_{(4,3)}^{(1,1)}$ $+ 68\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + 64\chi_{(5,2)}^{(1,1)} + 58\chi_{(6,1)}^{(1,1)} + 60\chi_{(7)}^{(1)}$
	$8\chi_{(2)}^{(1)} = 4\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 8\chi_{(3)}^{(1)}$ $- 2\chi_{(2,1)}^{(1,3)} - 4\chi_{(2,1)}^{(2,1)} - 4\chi_{(3,1)}^{(1,2)} - 6\chi_{(3,2)}^{(1,1)} - 6\chi_{(4,1)}^{(1,1)} - 8\chi_{(5)}^{(1)}$ $+ 4\chi_{(2,1)}^{(1,5)} + 8\chi_{(2,1)}^{(2,3)} + 12\chi_{(2,1)}^{(3,1)} + 8\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + 10\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} + 14\chi_{(3,2)}^{(1,2)}$ $+ 12\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 12\chi_{(4,1)}^{(1,3)} + 14\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} + 19\chi_{(4,3)}^{(1,1)} + 16\chi_{(5,1)}^{(1,2)}$ $+ 20\chi_{(5,2)}^{(1,1)} + 18\chi_{(6,1)}^{(1,1)} + 24\chi_{(7)}^{(1)}$
$c = 4$	$4\chi_{(1)}^{(4)} = 10\chi_{(1)}^{(5)} + 4\chi_{(2,1)}^{(1,3)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,2)}$ $- 35\chi_{(1)}^{(7)} - 25\chi_{(2,1)}^{(1,5)} - 16\chi_{(2,1)}^{(2,3)} - 8\chi_{(2,1)}^{(3,1)} - 19\chi_{(3,1)}^{(1,4)} - 11\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)}$ $- 4\chi_{(3,2)}^{(1,2)} - 7\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 13\chi_{(4,1)}^{(1,3)} - 6\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} - 3\chi_{(4,3)}^{(1,1)} - 8\chi_{(5,1)}^{(1,2)}$ $- 2\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 4\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - \chi_{(7)}^{(1)}$
	$4\chi_{(2,1)}^{(1,2)} = 6\chi_{(2,1)}^{(1,3)} + 8\chi_{(2,1)}^{(2,1)} + 4\chi_{(3,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(3,2)}^{(1,1)} + 4\chi_{(4,1)}^{(1,1)}$ $- 10\chi_{(2,1)}^{(1,5)} - 18\chi_{(2,1)}^{(2,3)} - 24\chi_{(2,1)}^{(3,1)} - 12\chi_{(3,1)}^{(1,4)} - 16\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)}$ $- 20\chi_{(3,2)}^{(1,2)} - 12\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 15\chi_{(4,1)}^{(1,3)} - 17\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} - 14\chi_{(4,3)}^{(1,1)}$ $- 16\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 18\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 13\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 12\chi_{(7)}^{(1)}$
	$4\chi_{(2)}^{(2)} = 2\chi_{(2,1)}^{(2,1)} + 4\chi_{(3,2)}^{(1,1)} + 2\chi_{(5)}^{(1)}$ $- \chi_{(2,1)}^{(2,3)} - 3\chi_{(2,1)}^{(3,1)} - 2\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} - 5\chi_{(3,2)}^{(1,2)} - 4\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 3\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)}$ $- 6\chi_{(4,3)}^{(1,1)} - \chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 5\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 3\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 6\chi_{(7)}^{(1)}$
	$2\chi_{(3,1)}^{(1,1)} = 2\chi_{(3,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(3,2)}^{(1,1)} + 2\chi_{(4,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(5)}^{(1)}$ $- 2\chi_{(3,1)}^{(1,4)} - 2\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} - 2\chi_{(3,2)}^{(1,2)} - 4\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 3\chi_{(4,1)}^{(1,3)} - 3\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)}$ $- 5\chi_{(4,3)}^{(1,1)} - 4\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 4\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 5\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 6\chi_{(7)}^{(1)}$
	$4\chi_{(4)}^{(1)} = 2\chi_{(4,1)}^{(1,1)} + 4\chi_{(5)}^{(1)}$ $- \chi_{(4,1)}^{(1,3)} - \chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} - \chi_{(4,3)}^{(1,1)} - 2\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - 2\chi_{(5,2)}^{(1,1)} - 3\chi_{(6,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(7)}^{(1)}$

(продолжение на следующей странице)

$c = 6$	$2\chi_{(1)}^{(6)} = 7\chi_{(1)}^{(7)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,5)} + \chi_{(3,1)}^{(1,4)}$
	$2\chi_{(2,1)}^{(1,4)} = 5\chi_{(2,1)}^{(1,5)} + 4\chi_{(2,1)}^{(2,3)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} + 2\chi_{(4,1)}^{(1,3)}$
	$2\chi_{(2,1)}^{(2,2)} = 3\chi_{(2,1)}^{(2,3)} + 6\chi_{(2,1)}^{(3,1)} + 2\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} + \chi_{(3,2)}^{(1,2)} + 2\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} + \chi_{(5,1)}^{(1,2)}$
	$2\chi_{(2)}^{(3)} = \chi_{(2,1)}^{(3,1)} + 2\chi_{(3,2)}^{(1,2)} + \chi_{(5,2)}^{(1,1)}$
	$\chi_{(3,1)}^{(1,3)} = 2\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} + \chi_{(3,1)}^{(2,1)} + \chi_{(4,1)}^{(1,3)} + \chi_{(5,1)}^{(1,2)}$
	$\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} = \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,2)} + 2\chi_{(3,2)}^{(1,2)} + 2\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + \chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} + \chi_{(4,3)}^{(1,1)} + \chi_{(5,2)}^{(1,1)} + \chi_{(6,1)}^{(1,1)}$
	$2\chi_{(3)}^{(2)} = \chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 2\chi_{(4,3)}^{(1,1)} + \chi_{(7)}^{(1)}$
	$2\chi_{(4,1)}^{(1,2)} = 3\chi_{(4,1)}^{(1,3)} + 2\chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} + \chi_{(4,3)}^{(1,1)} + 2\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(6,1)}^{(1,1)}$
	$2\chi_{(4,2)}^{(1,1)} = \chi_{(4,2,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(4,3)}^{(1,1)} + 2\chi_{(5,2)}^{(1,1)} + 2\chi_{(7)}^{(1)}$
	$\chi_{(5,1)}^{(1,1)} = \chi_{(5,1)}^{(1,2)} + \chi_{(5,2)}^{(1,1)} + \chi_{(6,1)}^{(1,1)} + \chi_{(7)}^{(1)}$
	$2\chi_{(6)}^{(1)} = 2\chi_{(7)}^{(1)} + \chi_{(6,1)}^{(1,1)}$

10 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей края Γ гиперболической связной компоненты дополнения к устойчивому компактно-му фронту коранга ≤ 1 в гладком многообразии четной размерности $n \leq 6$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_{\Gamma}$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Число $c+1$ определяет минимальную размерность n , в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 1$	$4\chi_{(1)}^{(1)} = 4\chi_{(1)}^{(2)} + 4\chi_{(2)}^{(1)}$ $- 4\chi_{(1)}^{(4)} - 4\chi_{(2,1)}^{(1,2)} - 4\chi_{(2)}^{(2)} - 4\chi_{(3,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(4)}^{(1)}$ $+ 12\chi_{(1)}^{(6)} + 12\chi_{(2,1)}^{(1,4)} + 12\chi_{(2,1)}^{(2,2)} + 12\chi_{(2)}^{(3)} + 12\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + 11\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)}$ $+ 8\chi_{(3)}^{(2)} + 12\chi_{(4,1)}^{(1,2)} + 10\chi_{(4,2)}^{(1,1)} + 12\chi_{(5,1)}^{(1,1)} + 10\chi_{(6)}^{(1)}$
$c = 3$	$4\chi_{(1)}^{(3)} = 8\chi_{(1)}^{(4)} + 4\chi_{(2,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,1)}$ $- 20\chi_{(1)}^{(6)} - 16\chi_{(2,1)}^{(1,4)} - 12\chi_{(2,1)}^{(2,2)} - 8\chi_{(2)}^{(3)} - 13\chi_{(3,1)}^{(1,3)} - 9\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)}$ $- 6\chi_{(3)}^{(2)} - 10\chi_{(4,1)}^{(1,2)} - 6\chi_{(4,2)}^{(1,1)} - 7\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(6)}^{(1)}$
	$4\chi_{(2,1)}^{(1,1)} = 4\chi_{(2,1)}^{(1,2)} + 8\chi_{(2)}^{(2)} + 4\chi_{(3,1)}^{(1,1)} + 4\chi_{(4)}^{(1)}$ $- 4\chi_{(2,1)}^{(1,4)} - 8\chi_{(2,1)}^{(2,2)} - 12\chi_{(2)}^{(3)} - 6\chi_{(3,1)}^{(1,3)} - 9\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} - 8\chi_{(3)}^{(2)}$ $- 8\chi_{(4,1)}^{(1,2)} - 10\chi_{(4,2)}^{(1,1)} - 10\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - 10\chi_{(6)}^{(1)}$
	$4\chi_{(3)}^{(1)} = 2\chi_{(3,1)}^{(1,1)} + 4\chi_{(4)}^{(1)}$ $- \chi_{(3,1)}^{(1,3)} - \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} - 2\chi_{(3)}^{(2)} - 2\chi_{(4,1)}^{(1,2)} - 2\chi_{(4,2)}^{(1,1)} - 3\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(6)}^{(1)}$
$c = 5$	$2\chi_{(1)}^{(5)} = 6\chi_{(1)}^{(6)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,4)} + \chi_{(3,1)}^{(1,3)}$
	$2\chi_{(2,1)}^{(1,3)} = 4\chi_{(2,1)}^{(1,4)} + 4\chi_{(2,1)}^{(2,2)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(4,1)}^{(1,2)}$
	$2\chi_{(2,1)}^{(2,1)} = 2\chi_{(2,1)}^{(2,2)} + 6\chi_{(2)}^{(3)} + 2\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(4,2)}^{(1,1)} + \chi_{(5,1)}^{(1,1)}$
	$2\chi_{(3,1)}^{(1,2)} = 3\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + 2\chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(3)}^{(2)} + 2\chi_{(4,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(5,1)}^{(1,1)}$
	$2\chi_{(3,2)}^{(1,1)} = \chi_{(3,2,1)}^{(1,1,1)} + 4\chi_{(3)}^{(2)} + 2\chi_{(4,2)}^{(1,1)} + 2\chi_{(6)}^{(1)}$
	$\chi_{(4,1)}^{(1,1)} = \chi_{(4,1)}^{(1,2)} + \chi_{(4,2)}^{(1,1)} + \chi_{(5,1)}^{(1,1)} + \chi_{(6)}^{(1)}$
	$2\chi_{(5)}^{(1)} = \chi_{(5,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(6)}^{(1)}$

11 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей края Γ эллиптической связной компоненты дополнения к устойчивому компактному фронту коранга ≤ 1 в гладком многообразии нечетной размерности $n \leq 11$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_{\Gamma}$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Число $c+1$ определяет минимальную размерность n , в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 2$	$ \begin{aligned} 2\chi_{(1)}^{(2)} &= 3\chi_{(1)}^{(3)} + \chi_{(3)}^{(1)} - 5\chi_{(1)}^{(5)} - \chi_{(3,1)}^{(1,2)} - \chi_{(5)}^{(1)} \\ &+ 21\chi_{(1)}^{(7)} + 5\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + \chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 3\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + \chi_{(7)}^{(1)} \\ &- 153\chi_{(1)}^{(9)} - 41\chi_{(3,1)}^{(1,6)} - 11\chi_{(3,1)}^{(2,3)} - 3\chi_{(3)}^{(3)} \\ &- 19\chi_{(5,1)}^{(1,4)} - 5\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} - 7\chi_{(7,1)}^{(1,2)} - 3\chi_{(9)}^{(1)} \\ &+ 1705\chi_{(1)}^{(11)} + 489\chi_{(3,1)}^{(1,8)} + 141\chi_{(3,1)}^{(2,5)} + 41\chi_{(3,1)}^{(3,2)} + 207\chi_{(5,1)}^{(1,6)} \\ &+ 59\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} + 17\chi_{(5,3)}^{(1,2)} + 25\chi_{(5,1)}^{(2,1)} + 81\chi_{(7,1)}^{(1,4)} \\ &+ 23\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} + 33\chi_{(9,1)}^{(1,2)} + 13\chi_{(11)}^{(1)} \end{aligned} $
$c = 4$	$ \begin{aligned} 4\chi_{(1)}^{(4)} &= 10\chi_{(1)}^{(5)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,2)} - 35\chi_{(1)}^{(7)} - 9\chi_{(3,1)}^{(1,4)} - 3\chi_{(3,1)}^{(2,1)} - 4\chi_{(5,1)}^{(1,2)} - \chi_{(7)}^{(1)} \\ &+ 252\chi_{(1)}^{(9)} + 70\chi_{(3,1)}^{(1,6)} + 20\chi_{(3,1)}^{(2,3)} + 6\chi_{(3)}^{(3)} + 31\chi_{(5,1)}^{(1,4)} \\ &+ 9\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} + 12\chi_{(7,1)}^{(1,2)} + 5\chi_{(9)}^{(1)} \\ &- 2805\chi_{(1)}^{(11)} - 819\chi_{(3,1)}^{(1,8)} - 241\chi_{(3,1)}^{(2,5)} - 71\chi_{(3,1)}^{(3,2)} - 346\chi_{(5,1)}^{(1,6)} \\ &- 102\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} - 30\chi_{(5,3)}^{(1,2)} - 43\chi_{(5,1)}^{(2,1)} - 137\chi_{(7,1)}^{(1,4)} \\ &- 41\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} - 56\chi_{(9,1)}^{(1,2)} - 23\chi_{(11)}^{(1)} \end{aligned} $
	$ \begin{aligned} \chi_{(3,1)}^{(1,1)} &= \chi_{(3,1)}^{(1,2)} + \chi_{(5)}^{(1)} - \chi_{(3,1)}^{(1,4)} - \chi_{(5,1)}^{(1,2)} - \chi_{(7)}^{(1)} \\ &+ 3\chi_{(3,1)}^{(1,6)} + \chi_{(3,1)}^{(2,3)} + 3\chi_{(5,1)}^{(1,4)} + \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(7,1)}^{(1,2)} + \chi_{(9)}^{(1)} \\ &- 17\chi_{(3,1)}^{(1,8)} - 8\chi_{(3,1)}^{(2,5)} - 3\chi_{(3,1)}^{(3,2)} - 17\chi_{(5,1)}^{(1,6)} - 6\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} - 2\chi_{(5,3)}^{(1,2)} \\ &- 4\chi_{(5,1)}^{(2,1)} - 11\chi_{(7,1)}^{(1,4)} - 3\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} - 6\chi_{(9,1)}^{(1,2)} - 3\chi_{(11)}^{(1)} \end{aligned} $

(продолжение на следующей странице)

$c = 6$	$4\chi_{(1)}^{(6)} = 14\chi_{(1)}^{(7)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,4)}$ $- 84\chi_{(1)}^{(9)} - 20\chi_{(3,1)}^{(1,6)} - 5\chi_{(3,1)}^{(2,3)} - \chi_{(3)}^{(3)} - 6\chi_{(5,1)}^{(1,4)} - \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} - \chi_{(7,1)}^{(1,2)}$ $+ 924\chi_{(1)}^{(11)} + 252\chi_{(3,1)}^{(1,8)} + 70\chi_{(3,1)}^{(2,5)} + 20\chi_{(3,1)}^{(3,2)} + 92\chi_{(5,1)}^{(1,6)} + 25\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)}$ $+ 7\chi_{(5,3)}^{(1,2)} + 8\chi_{(5,1)}^{(2,1)} + 30\chi_{(7,1)}^{(1,4)} + 8\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} + 9\chi_{(9,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(11)}^{(1)}$
	$4\chi_{(3,1)}^{(1,3)} = 8\chi_{(3,1)}^{(1,4)} + 4\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 4\chi_{(5,1)}^{(1,2)}$ $- 20\chi_{(3,1)}^{(1,6)} - 10\chi_{(3,1)}^{(2,3)} - 6\chi_{(3)}^{(3)} - 16\chi_{(5,1)}^{(1,4)} - 8\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)}$ $- 10\chi_{(7,1)}^{(1,2)} - 4\chi_{(9)}^{(1)}$ $+ 112\chi_{(3,1)}^{(1,8)} + 60\chi_{(3,1)}^{(2,5)} + 24\chi_{(3,1)}^{(3,2)} + 100\chi_{(5,1)}^{(1,6)} + 43\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)}$ $+ 16\chi_{(5,3)}^{(1,2)} + 26\chi_{(5,1)}^{(2,1)} + 64\chi_{(7,1)}^{(1,4)} + 25\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)}$ $+ 36\chi_{(9,1)}^{(1,2)} + 20\chi_{(11)}^{(1)}$
	$4\chi_{(3)}^{(2)} = 2\chi_{(3,1)}^{(2,1)} + 2\chi_{(7)}^{(1)} - \chi_{(3,1)}^{(2,3)} + 3\chi_{(3)}^{(3)} - \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} - \chi_{(7,1)}^{(1,2)} - 2\chi_{(9)}^{(1)}$ $+ 2\chi_{(3,1)}^{(2,5)} + 2\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} + \chi_{(5,3)}^{(1,2)} + 2\chi_{(5,1)}^{(2,1)} + 2\chi_{(7,1)}^{(1,4)} + \chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)}$ $+ 3\chi_{(9,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(11)}^{(1)}$
	$2\chi_{(5,1)}^{(1,1)} = 2\chi_{(5,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(7)}^{(1)} - 2\chi_{(5,1)}^{(1,4)} - 2\chi_{(7,1)}^{(1,2)} - 2\chi_{(9)}^{(1)}$ $+ 6\chi_{(5,1)}^{(1,6)} + \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} + 2\chi_{(5,1)}^{(2,1)} + 6\chi_{(7,1)}^{(1,4)} + \chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)}$ $+ 4\chi_{(9,1)}^{(1,2)} + 2\chi_{(11)}^{(1)}$
	$4\chi_{(1)}^{(8)} = 18\chi_{(1)}^{(9)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,6)}$ $- 165\chi_{(1)}^{(11)} - 35\chi_{(3,1)}^{(1,8)} - 7\chi_{(3,1)}^{(2,5)} - \chi_{(3,1)}^{(3,2)} - 8\chi_{(5,1)}^{(1,6)}$ $- \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} - \chi_{(7,1)}^{(1,4)}$
$c = 8$	$2\chi_{(3,1)}^{(1,5)} = 6\chi_{(3,1)}^{(1,6)} + 2\chi_{(3,1)}^{(2,3)} + 2\chi_{(5,1)}^{(1,4)}$ $- 28\chi_{(3,1)}^{(1,8)} - 14\chi_{(3,1)}^{(2,5)} - 6\chi_{(3,1)}^{(3,2)} - 18\chi_{(5,1)}^{(1,6)} - 7\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)}$ $- 2\chi_{(5,3)}^{(1,2)} - 2\chi_{(5,1)}^{(2,1)} - 8\chi_{(7,1)}^{(1,4)} - 2\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} - 2\chi_{(9,1)}^{(1,2)}$
	$4\chi_{(3,1)}^{(2,2)} = 6\chi_{(3,1)}^{(2,3)} + 6\chi_{(3)}^{(3)} + 4\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(7,1)}^{(1,2)}$ $- 10\chi_{(3,1)}^{(2,5)} - 6\chi_{(3,1)}^{(3,2)} - 9\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} - 8\chi_{(5,3)}^{(1,2)}$ $- 8\chi_{(5,1)}^{(2,1)} - 6\chi_{(7,1)}^{(1,4)} - 9\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} - 8\chi_{(9,1)}^{(1,2)} - 6\chi_{(11)}^{(1)}$
	$4\chi_{(5,1)}^{(1,3)} = 8\chi_{(5,1)}^{(1,4)} + 2\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} + 4\chi_{(7,1)}^{(1,2)}$ $- 20\chi_{(5,1)}^{(1,6)} - 5\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} - 2\chi_{(5,3)}^{(1,2)} - 6\chi_{(5,1)}^{(2,1)} - 16\chi_{(7,1)}^{(1,4)}$ $- 5\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} - 10\chi_{(9,1)}^{(1,2)} - 4\chi_{(11)}^{(1)}$
	$4\chi_{(5,3)}^{(1,1)} = 2\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} + 4\chi_{(9)}^{(1)}$ $- \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} + 2\chi_{(5,3)}^{(1,2)} - 2\chi_{(5,1)}^{(2,1)} - \chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} - 2\chi_{(9,1)}^{(1,2)} - 4\chi_{(11)}^{(1)}$
	$\chi_{(7,1)}^{(1,1)} = \chi_{(7,1)}^{(1,2)} + \chi_{(9)}^{(1)} - \chi_{(7,1)}^{(1,4)} - \chi_{(9,1)}^{(1,2)} - \chi_{(11)}^{(1)}$
	$\chi_{(7,1)}^{(1,1)} = \chi_{(7,1)}^{(1,2)} + \chi_{(9)}^{(1)} - \chi_{(7,1)}^{(1,4)} - \chi_{(9,1)}^{(1,2)} - \chi_{(11)}^{(1)}$

(продолжение на следующей странице)

$c = 10$	$2\chi_{(1)}^{(10)} = 11\chi_{(1)}^{(11)} + \chi_{(3,1)}^{(1,8)}$
	$\chi_{(3,1)}^{(1,7)} = 4\chi_{(3,1)}^{(1,8)} + \chi_{(3,1)}^{(2,5)} + \chi_{(5,1)}^{(1,6)}$
	$2\chi_{(3,1)}^{(2,4)} = 5\chi_{(3,1)}^{(2,5)} + 3\chi_{(3,1)}^{(3,2)} + 2\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} + \chi_{(7,1)}^{(1,4)}$
	$2\chi_{(3,1)}^{(3,1)} = 2\chi_{(3,1)}^{(3,2)} + 2\chi_{(5,3)}^{(1,2)} + \chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)}$
	$2\chi_{(5,1)}^{(1,5)} = 6\chi_{(5,1)}^{(1,6)} + \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} + 2\chi_{(7,1)}^{(1,4)}$
	$2\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} = 3\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,3)} + 2\chi_{(5,3)}^{(1,2)} + 4\chi_{(5,1)}^{(2,1)} + 2\chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(9,1)}^{(1,2)}$
	$2\chi_{(5)}^{(2)} = \chi_{(5,1)}^{(2,1)} + \chi_{(11)}^{(1)}$
	$2\chi_{(7,1)}^{(1,3)} = 4\chi_{(7,1)}^{(1,4)} + \chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(9,1)}^{(1,2)}$
	$2\chi_{(7,3)}^{(1,1)} = \chi_{(7,3,1)}^{(1,1,1)} + 2\chi_{(11)}^{(1)}$
	$\chi_{(9,1)}^{(1,1)} = \chi_{(9,1)}^{(1,2)} + \chi_{(11)}^{(1)}$

12 Таблица

Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей края Γ эллиптической связной компоненты дополнения к устойчивому компактному фронту коранга ≤ 1 в гладком многообразии четной размерности $n \leq 10$. Эйлерова характеристика многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_{\Gamma}$ обозначается через $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$. Число $c+1$ определяет минимальную размерность n , в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

$c = 1$	$4\chi_{(1)}^{(1)} = 4\chi_{(1)}^{(2)} - 4\chi_{(1)}^{(4)} + 12\chi_{(1)}^{(6)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + 2\chi_{(5,1)}^{(1,1)}$ $- 68\chi_{(1)}^{(8)} - 16\chi_{(3,1)}^{(1,5)} - 4\chi_{(3,1)}^{(2,2)} - 8\chi_{(5,1)}^{(1,3)} - 2\chi_{(5,3)}^{(1,1)} - 2\chi_{(7,1)}^{(1,1)}$ $+ 620\chi_{(1)}^{(10)} + 167\chi_{(3,1)}^{(1,7)} + 46\chi_{(3,1)}^{(2,4)} + 13\chi_{(3,1)}^{(3,1)} + 71\chi_{(5,1)}^{(1,5)}$ $+ 19\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} + 8\chi_{(5)}^{(2)} + 26\chi_{(7,1)}^{(1,3)} + 7\chi_{(7,3)}^{(1,1)} + 11\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
$c = 3$	$8\chi_{(1)}^{(3)} = 16\chi_{(1)}^{(4)} + 4\chi_{(3,1)}^{(1,1)} - 40\chi_{(1)}^{(6)} - 10\chi_{(3,1)}^{(1,3)} - 4\chi_{(3)}^{(2)} - 6\chi_{(5,1)}^{(1,1)}$ $+ 224\chi_{(1)}^{(8)} + 60\chi_{(3,1)}^{(1,5)} + 16\chi_{(3,1)}^{(2,2)} + 30\chi_{(5,1)}^{(1,3)} + 8\chi_{(5,3)}^{(1,1)} + 12\chi_{(7,1)}^{(1,1)}$ $- 2040\chi_{(1)}^{(10)} - 581\chi_{(3,1)}^{(1,7)} - 166\chi_{(3,1)}^{(2,4)} - 47\chi_{(3,1)}^{(3,1)} - 257\chi_{(5,1)}^{(1,5)}$ $- 73\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} - 32\chi_{(5)}^{(2)} - 102\chi_{(7,1)}^{(1,3)} - 29\chi_{(7,3)}^{(1,1)} - 43\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
	$8\chi_{(3)}^{(1)} = 4\chi_{(3,1)}^{(1,1)} - 2\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + 4\chi_{(3)}^{(2)} - 2\chi_{(5,1)}^{(1,1)}$ $+ 4\chi_{(3,1)}^{(1,5)} + 4\chi_{(5,1)}^{(1,3)} + 2\chi_{(5,3)}^{(1,1)} + 2\chi_{(7,1)}^{(1,1)}$ $- 17\chi_{(3,1)}^{(1,7)} - 6\chi_{(3,1)}^{(2,4)} - 3\chi_{(3,1)}^{(3,1)} - 17\chi_{(5,1)}^{(1,5)} - 5\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} - 4\chi_{(5)}^{(2)}$ $- 10\chi_{(7,1)}^{(1,3)} - \chi_{(7,3)}^{(1,1)} - 5\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
$c = 5$	$4\chi_{(1)}^{(5)} = 12\chi_{(1)}^{(6)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,3)}$ $- 56\chi_{(1)}^{(8)} - 14\chi_{(3,1)}^{(1,5)} - 4\chi_{(3,1)}^{(2,2)} - 5\chi_{(5,1)}^{(1,3)} - \chi_{(5,3)}^{(1,1)} - \chi_{(7,1)}^{(1,1)}$ $+ 504\chi_{(1)}^{(10)} + 140\chi_{(3,1)}^{(1,7)} + 40\chi_{(3,1)}^{(2,4)} + 12\chi_{(3,1)}^{(3,1)} + 56\chi_{(5,1)}^{(1,5)}$ $+ 16\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} + 6\chi_{(5)}^{(2)} + 20\chi_{(7,1)}^{(1,3)} + 6\chi_{(7,3)}^{(1,1)} + 7\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
	$4\chi_{(3,1)}^{(1,2)} = 6\chi_{(3,1)}^{(1,3)} + 4\chi_{(3)}^{(2)} + 4\chi_{(5,1)}^{(1,1)}$ $- 10\chi_{(3,1)}^{(1,5)} - 4\chi_{(3,1)}^{(2,2)} - 9\chi_{(5,1)}^{(1,3)} - 5\chi_{(5,3)}^{(1,1)} - 7\chi_{(7,1)}^{(1,1)}$ $+ 42\chi_{(3,1)}^{(1,7)} + 20\chi_{(3,1)}^{(2,4)} + 6\chi_{(3,1)}^{(3,1)} + 40\chi_{(5,1)}^{(1,5)} + 16\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} + 10\chi_{(5)}^{(2)}$ $+ 27\chi_{(7,1)}^{(1,3)} + 9\chi_{(7,3)}^{(1,1)} + 16\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
	$4\chi_{(5)}^{(1)} = 2\chi_{(5,1)}^{(1,1)} - \chi_{(5,1)}^{(1,3)} + \chi_{(5,3)}^{(1,1)} - \chi_{(7,1)}^{(1,1)}$ $+ 2\chi_{(5,1)}^{(1,5)} + 2\chi_{(5)}^{(2)} + 2\chi_{(7,1)}^{(1,3)} + \chi_{(9,1)}^{(1,1)}$

(продолжение на следующей странице)

$c = 7$	$4\chi_{(1)}^{(7)} = 16\chi_{(3,1)}^{(8)} + 2\chi_{(3,1)}^{(1,5)}$ $- 120\chi_{(1)}^{(10)} - 27\chi_{(3,1)}^{(1,7)} - 6\chi_{(3,1)}^{(2,4)} - \chi_{(3,1)}^{(3,1)} - 7\chi_{(5,1)}^{(1,5)}$ $- \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} - \chi_{(7,1)}^{(1,3)}$
	$4\chi_{(3,1)}^{(1,4)} = 10\chi_{(3,1)}^{(1,5)} + 4\chi_{(3,1)}^{(2,2)} + 4\chi_{(5,1)}^{(1,3)}$ $- 35\chi_{(3,1)}^{(1,7)} - 18\chi_{(3,1)}^{(2,4)} - 9\chi_{(3,1)}^{(3,1)} - 25\chi_{(5,1)}^{(1,5)} - 11\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)}$ $- 4\chi_{(5)}^{(2)} - 13\chi_{(7,1)}^{(1,3)} - 4\chi_{(7,3)}^{(1,1)} - 4\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
	$4\chi_{(3,1)}^{(2,1)} = 4\chi_{(3,1)}^{(2,2)} + 4\chi_{(5,3)}^{(1,1)} + 2\chi_{(7,1)}^{(1,1)}$ $- 4\chi_{(3,1)}^{(2,4)} - 4\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} - 4\chi_{(5)}^{(2)} - 3\chi_{(7,1)}^{(1,3)} - 5\chi_{(7,3)}^{(1,1)} - 5\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
	$4\chi_{(5,1)}^{(1,2)} = 6\chi_{(5,1)}^{(1,3)} + 2\chi_{(5,3)}^{(1,1)} + 4\chi_{(7,1)}^{(1,1)}$ $- 10\chi_{(5,1)}^{(1,5)} - 2\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} - 4\chi_{(5)}^{(2)} - 9\chi_{(7,1)}^{(1,3)} - 3\chi_{(7,3)}^{(1,1)} - 7\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
	$4\chi_{(7)}^{(1)} = 2\chi_{(7,1)}^{(1,1)} - \chi_{(7,1)}^{(1,3)} + \chi_{(7,3)}^{(1,1)} - \chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
$c = 9$	$2\chi_{(1)}^{(9)} = 10\chi_{(1)}^{(10)} + \chi_{(3,1)}^{(1,7)}$
	$2\chi_{(3,1)}^{(1,6)} = 7\chi_{(3,1)}^{(1,7)} + 2\chi_{(3,1)}^{(2,4)} + 2\chi_{(5,1)}^{(1,5)}$
	$2\chi_{(3,1)}^{(2,3)} = 4\chi_{(3,1)}^{(2,4)} + 3\chi_{(3,1)}^{(3,1)} + 2\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} + \chi_{(7,1)}^{(1,3)}$
	$2\chi_{(3)}^{(3)} = \chi_{(3,1)}^{(3,1)} + \chi_{(7,3)}^{(1,1)}$
	$2\chi_{(5,1)}^{(1,4)} = 5\chi_{(5,1)}^{(1,5)} + \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} + 2\chi_{(7,1)}^{(1,3)}$
	$\chi_{(5,3,1)}^{(1,1,1)} = \chi_{(5,3,1)}^{(1,1,2)} + 2\chi_{(5)}^{(2)} + \chi_{(7,3)}^{(1,1)} + \chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
	$2\chi_{(7,1)}^{(1,2)} = 3\chi_{(7,1)}^{(1,3)} + \chi_{(7,3)}^{(1,1)} + 2\chi_{(9,1)}^{(1,1)}$
	$2\chi_{(9)}^{(1)} = \chi_{(9,1)}^{(1,1)}$

13 Таблица

Соотношения между числами изолированных особенностей края Γ эллиптической связной компоненты дополнения к устойчивому компактному фронту коранга ≤ 1 в гладком многообразии нечетной размерности n , при условии, что многообразия \mathcal{A}_Γ особенностей всех типов $\mathcal{A} = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \mathbb{A}_{\text{odd}} \setminus \{0\}$ края Γ со степенью $\text{deg } \mathcal{A} = \nu_1 + \dots + \nu_r + r < n$, имеют нулевые эйлеровы характеристики. Количество изолированных особенностей типа $k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p}$ гиперповерхности Γ обозначается через $\chi^{(k_1, \dots, k_p)}_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}$. Число χ_0 равно эйлеровой характеристике края Γ .

$n = 1$	$\chi^{(1)}_1 = \chi_0$
$n = 3$	$\chi^{(1)}_3 - \chi^{(3)}_1 = 2\chi_0$
$n = 5$	$2\chi^{(1)}_5 - \chi^{(1,2)}_{(3,1)} + \chi^{(5)}_1 = 6\chi_0$
$n = 7$	$5\chi^{(1)}_7 - 2\chi^{(1,2)}_{(5,1)} - \chi^{(2,1)}_{(3,1)} + \chi^{(1,4)}_{(3,1)} - \chi^{(7)}_1 = 20\chi_0$
$n = 9$	$14\chi^{(1)}_9 - 5\chi^{(1,2)}_{(7,1)} - 2\chi^{(1,1,1)}_{(5,3,1)} + 2\chi^{(1,4)}_{(5,1)}$ $- \chi^{(3)}_3 + \chi^{(2,3)}_{(3,1)} - \chi^{(1,6)}_{(3,1)} + \chi^{(9)}_1 = 70\chi_0$
$n = 11$	$42\chi^{(1)}_{11} - 14\chi^{(1,2)}_{(9,1)} - 5\chi^{(1,1,1)}_{(7,3,1)} + 5\chi^{(1,4)}_{(7,1)} - 4\chi^{(2,1)}_{(5,1)} - 2\chi^{(1,2)}_{(5,3)}$ $+ 2\chi^{(1,1,3)}_{(5,3,1)} - 2\chi^{(1,6)}_{(5,1)} + \chi^{(3,2)}_{(3,1)} - \chi^{(2,5)}_{(3,1)} + \chi^{(1,8)}_{(3,1)} - \chi^{(11)}_1 = 252\chi_0$
$n = 13$	$132\chi^{(1)}_{13} - 42\chi^{(1,2)}_{(11,1)} - 14\chi^{(1,1,1)}_{(9,3,1)} + 14\chi^{(1,4)}_{(9,1)} - 10\chi^{(1,1,1)}_{(7,5,1)} - 5\chi^{(1,2)}_{(7,3)}$ $+ 5\chi^{(1,1,3)}_{(7,3,1)} - 5\chi^{(1,6)}_{(7,1)} - 4\chi^{(2,1)}_{(5,3)} + 4\chi^{(2,3)}_{(5,1)} + 2\chi^{(1,2,2)}_{(5,3,1)} - 2\chi^{(1,1,5)}_{(5,3,1)}$ $+ 2\chi^{(1,8)}_{(5,1)} + \chi^{(4,1)}_{(3,1)} - \chi^{(3,4)}_{(3,1)} + \chi^{(2,7)}_{(3,1)} - \chi^{(1,10)}_{(3,1)} + \chi^{(13)}_1 = 924\chi_0$

Литература

- [1] Александров А. Д. *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
- [2] Арнольд В. И. *Критические точки гладких функций и их нормальные формы*. УМН **30** (1975), вып. 5, 3–65.
- [3] Арнольд В. И. *Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют*. УМН **33** (1978), вып. 5, 91–105.
- [4] Арнольд В. И. *Устойчивые колебания с гармонической по пространству и периодической по времени потенциальной энергией*. Прикладная математика и механика **43** (1979), вып. 2, 360–363.
- [5] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. *Особенности дифференцируемых отображений I*. М.: Наука, 1982.
- [6] Арнольд В. И. *Особенности систем лучей*. УМН **38** (1983), вып. 2, 77–147.
- [7] Арнольд В. И., *Гиперболические многочлены и отображения Вандермонда*. Функц. анализ и его прил. **20** (1986), вып. 2, 52–53.
- [8] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. *Особенности I*. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1988.
- [9] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. *Особенности II*. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 39. М.: ВИНТИ, 1989.
- [10] Арнольд В. И. *Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера*. УМН **47** (1992), вып. 1, 3–45.
- [11] Арнольд В. И. *Топологические проблемы теории распространения волн*. УМН **51** (1996), вып. 1, 3–50.

- [12] Арнольд В. И. *Особенности каустик и волновых фронтов*. М.: Фазис, 1996.
- [13] Арнольд В. И., *К лежандровой теории Штурма пространственных кривых*. Функц. анализ и его прил. **32** (1998), вып. 2, 1–7.
- [14] Арнольд В. И. *Задачи Арнольда*. М.: Фазис, 2000.
- [15] Богаевский И. А. *Особенности выпуклых оболочек трехмерных гиперповерхностей*. Труды МИРАН им. В. А. Стеклова **221** (1998), 81–100.
- [16] Брызгалова Л. Н. *О функциях максимума семейства функций, зависящих от параметров*. Функц. анализ и его прил. **12** (1978), вып. 1, 66–67.
- [17] Вайнштейн А. Д., Шапиро Б.З. *Особенности границы области гиперболичности*. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 33. М.: ВИНТИ, 1988, 193–214.
- [18] Варченко А. Н. *Перестройки выпуклых оболочек и фазовые переходы в термодинамике*. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 33. М.: ВИНТИ, 1988, 157–191.
- [19] Васильев В. А., *Топология дополнений к дискриминантам*. М.: Фазис, 1997.
- [20] Васильев В. А. *Лагранжевы и лежандровы характеристические классы*. М.: МЦНМО, 2000.
- [21] Виро О. Я. *Об интегральном исчислении, основанном на эйлеровой характеристике*. Л.: ЛОМИ, 1986.
- [22] Голубицкий М., Гийемин В. *Устойчивые отображения и их особенности*. М.: Мир, 1977.
- [23] Горески М., Макферсон Р. *Стратифицированная теория Морса*. М.: Мир, 1991.
- [24] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика*. М.: Мир, 1998.
- [25] Закалюкин В. М. *Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий*. Функц. анализ и его прил. **11** (1977), вып. 3, 76–77.
- [26] Закалюкин В. М. *Особенности лагранжевых и лежандровых отображений*. Дисс.... канд. физ.-матем. наук., МГУ, Москва, 1977.
- [27] Казарян М. Э. *Характеристические классы лагранжевых и лежандровых особенностей*. УМН **50** (1995), вып. 4, 45–70.

- [28] Казарян М. Э. *Относительная теория Морса одномерных расслоений и циклические гомологии*. Функц. анализ и его прил. **31** (1997), вып. 1, 20–31.
- [29] Казарян М. Э. *Характеристические классы в теории особенностей*. Дисс.... докт. физ.-матем. наук., МИРАН им. В. А. Стеклова, Москва, 2003.
- [30] Казарян М. Э. *Мультиособенности, кобордизмы и исчислительная геометрия*. УМН **58** (2003), вып. 4, 29–88.
- [31] Ландо С. К. *Лекции о производящих функциях*. М.: МЦНМО, 2002.
- [32] Мазер Дж. *Стратификации и отображения*. УМН **27** (1972), вып. 5, 85–118.
- [33] Матов В. И. *Области эллиптичности общих семейств однородных многочленов и функции экстремума*. Функц. анализ и его прил. **19** (1985), вып. 2, 26–36.
- [34] Оре О. *Теория графов*. М.: Наука, 1968.
- [35] Пушкарь П. Е., Чеканов Ю. В. *Комбинаторика фронтов лежандровых зацеплений и 4-гипотезы Арнольда*. УМН **60** (2005), вып. 1, 99–154.
- [36] Седых В. Д. *Строение выпуклой оболочки пространственной кривой*. Труды сем. им. Петровского **6** (1981), 239–256.
- [37] Седых В. Д. *Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерности 1 и 2*. Матем. сб. **119** (1982), №2, 233–247.
- [38] Седых В. Д. *Особенности выпуклых оболочек*. Сиб. матем. журн. **24** (1983), №3, 158–175.
- [39] Седых В. Д. *Двойные касательные плоскости к пространственной кривой*. Сиб. матем. журн. **30** (1989), №1, 209–211.
- [40] Седых В. Д. *Теорема о четырех вершинах выпуклой пространственной кривой*. Функц. анализ и его прил. **26** (1992), вып. 1, 35–41.
- [41] Седых В. Д. *Инварианты выпуклых многообразий*. Докл. РАН, **326** (1992), №6, 948–952.
- [42] Седых В. Д. *Инварианты строго выпуклых многообразий*. Функц. анализ и его прил. **27** (1993), вып. 3, 67–75.
- [43] Седых В. Д. *Связь лагранжевых особенностей с лежандровыми при стереографической проекции*. Матем. сб. **185** (1994), №12, 123–130.

- [44] Седых В. Д. *Строгая выпуклость выпуклого многообразия общего положения*. Труды МИРАН им. В. А. Стеклова **209** (1995), 200–219.
- [45] Седых В. Д. *Инварианты неровных многообразий*. Функц. анализ и его прил. **29** (1995), вып. 3, 41–50.
- [46] Седых В. Д. *Теорема о четырех опорных вершинах ломаной*. Функц. анализ и его прил. **30** (1996), вып. 3, 88–90.
- [47] Седых В. Д. *Склеивка ласточкина хвоста и зонтика Уитни в четырехмерной управляемой системе*. Труды ГАНГ им. И.М.Губкина, М.: Нефть и газ, 1997, 58–68.
- [48] Седых В. Д. *Некоторые инварианты допустимых гомотопий пространственных кривых*. Функц. анализ и его прил. **35** (2001), вып. 4, 54–66.
- [49] Седых В. Д. *Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения*. Докл. РАН **383** (2002), №6, 735–739.
- [50] Седых В. Д. *Разрешение особенностей коранга 1 фронта общего положения*. Функц. анализ и его прил. **37** (2003), вып. 2, 52–64.
- [51] Седых В. Д. *О топологии образа устойчивого гладкого отображения с особенностями коранга 1*. Докл. РАН **395** (2004), №4, 459–463.
- [52] Седых В. Д. *О топологии устойчивых особенностей коранга 1 на крае связной компоненты дополнения к фронту*. Матем. сб. **195** (2004), №8, 91–130.
- [53] Седых В. Д. *Полная система линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения*. Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 73–78.
- [54] Седых В. Д. *Особенности коранга 1 устойчивых гладких отображений и особые касательные гиперплоскости пространственной кривой*. Матем. заметки **78** (2005), вып. 3, 413–427.
- [55] Щербак О. П. *Проективно двойственные пространственные кривые и лежандровы особенности*. Труды Тбилисского унив., **232/233** (1982), 280–336.
- [56] Arnold V. I. *Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications*. Adv. Sov. Math. **21** (1994), 33–91.
- [57] Arnold V. I. *On the number of flattening points of space curves*. Amer. Math. Soc. Transl. (2), Providence, RI, **171** (1996), 11–22.

- [58] Banchoff Th. *Triple points of projections of smoothly immersed surfces*. Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974), №3, 402–406.
- [59] Banchoff Th., Gaffney T., McCrory C. *Counting tritangent planes of space curves*. Topology **24** (1985), №1, 15–23.
- [60] Barner M. *Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegeebenen bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1956), 196–215.
- [61] Bisztriczky T. *Inflectional convex space curves*. Can. J. Math. **36** (1984), 537–549.
- [62] Bose R. C. *On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed convex oval*. Math. Zeitsch. **35** 1932, 16–24.
- [63] Bruce J. W., Giblin P. J., Gibson C. G. *Symmetry sets*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **101** (1985), 163–186.
- [64] Colley S. J. *Enumerating stationary multiple-points*. Adv. in Math. **66** (1987), №2, 149–170.
- [65] Freedman M. H. *Planes triply tangent to curves with nonvanishing torsion*. Topology **19** (1980), №1, 1–8.
- [66] Giblin P. J. *Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions*. The Mathematics of Surfaces IX, Roberto Cipolla and Ralph Martin (eds.), Springer-Verlag 2000, 306–321.
- [67] Giblin P. J., Kimia B. B. *On the local form and Transitions of Symmetry Sets, Medial Axes, and Shocks*. Int. J. Computer Vision **54** (2003), 143–157.
- [68] Goryunov V. V., Mond D. *Vanishing cohomology of singularities of mappings*. Compositio Math. **89** (1993), №1, 45–80.
- [69] Goryunov V. *Semi-simplicial resolutions and homology of images and discriminants of mappings*. Proc. London Math. Soc. **70** (1995), №3, 363–385.
- [70] Haupt O. *Verallgemeinerung eines Satzes von R. C. Bose über die Anzahl der Schmiegekreise eines Ovals, die vom Oval umschlossen werden oder das Oval umschließen*. J. Reine Angew. Math. **239/240** (1969), 339–352.
- [71] Heil E. *A four-vertex theorem for space curves*. Math. Pannon. **10** (1999), №1, 123–132.

- [72] Izumiya S., Marar W. L. *The Euler characteristic of a generic wave front in a 3-manifold*. Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), №4, 1347–1350.
- [73] Izumiya S., Marar W. L. *On topologically stable singular surfaces in a 3-manifold*. J. Geom. **52** (1995), 108–119.
- [74] Kazarian M. E. *The Chern-Euler number of circle bundle via singularity theory*. Math. Scand. **82** (1998), 207–236.
- [75] Kleiman S. L. *Multiple-point formulas I: Iteration*. Acta math. **147** (1981), №1-2, 13–49.
- [76] Kleiman S. L., Lipman J., Ulrich B. *The multiple-point schemes of a finite curvilinear map of codimension one*. Ark. Mat. **34** (1996), №2, 285–326.
- [77] Kneser A. *Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euclidischen Geometrie*. Festschrift H. Weber 70, Leipzig, 1912, 170–180.
- [78] Levine H. I. *The singularities, S_1^q* . Illinois J. Math **8** (1964), 152–168.
- [79] Lojasiewicz S. *Ensembles semi-analitiques*. Bure sur Yvette, IHES, 1965.
- [80] Marar W. L., Mond D. *Multiple-point schemes for corank 1 maps*. J. London Math. Soc.(2) **39** (1989), №3, 553–567.
- [81] McCrory C., Parusiński A. *Algebraically constructible functions*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup.(4) **30** (1997), №4, 527–552.
- [82] Mohrmann H. *Die minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals*. Sitz. Ber. kgl. Bayerischen Akad. Wiss. Math. Phys., Kl., 1917, 1–3.
- [83] Morin B. *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I Math. **260** (1965), 5662–5665.
- [84] Mukhopadhyaya S. *New Methods in the Geometry of a Plane Arc - I, Cyclic and Sextactic points*. Bull. Calcutta Math. Soc. **1** (1909), 31–37.
- [85] Romero Fuster M. C. *Sphere stratifications and the Gauss map*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, **95** (1983), 115–136.
- [86] Romero Fuster M. C. *Convexly generic curves in \mathbb{R}^3* . Geom. Dedicata, **28** (1988), 7–29.

- [87] Romero Fuster M. C. and Sedykh V. D. *On the number of singularities, zero curvature points and vertices of a simple convex space curve.* J. Geom. **52** (1995), 168–172.
- [88] Romero Fuster M. C. and Sedykh V. D. *A lower estimate for the number of zero-torsion points of a space curve.* Beiträge Algebra Geom. **38** (1997), №1, 183–192.
- [89] Saeki O. *Topology of singular fibers of differentiable maps.* Lecture Notes in Math. **1854** (2004).
- [90] Sedykh V. D. *Some invariants of convex manifolds.* Mat. Contemp. **5** (1993), 187–198.
- [91] Sedykh V. D. *Four vertices of a convex space curve.* Bull. London Math. Soc. **26** (1994), №119, 177–180.
- [92] Sedykh V. D. *Invariants of submanifolds in Euclidean space,* in: Arnold-Gelfand Mathematical Seminars. Geometry and Singularity Theory (V. I. Arnold, I. M. Gelfand, M. Smirnov, and V. S. Retakh, eds.) Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1997, 389–395.
- [93] Sedykh V. D. *Discrete versions of the four-vertex theorem.* Amer. Math. Soc. Transl. (2), Providence, RI, **180** (1997), 197–207.
- [94] Sedykh V. D. *On some classes of curves in a projective space.* Banach Center Publ. **50** (1999), 237–266.
- [95] Sedykh V. D. *On the topology of singularities of Maxwell sets.* Mosc. Math. J. **3** (2003), №3, 1097–1112.
- [96] Sedykh V. D. *On the topology of singularities of the set of supporting hyperplanes of a smooth submanifold in an affine space.* J. London Math. Soc. (2) **71** (2005), №1, 259–272.
- [97] Sedykh V. D. *The topology of corank 1 multi-singularities of stable smooth mappings of equidimensional manifolds,* C. R. Acad. Sci. Paris. Sér I Math. **340** (2005), №6, 441–444.
- [98] Siersma D. *Properties of conflict sets in the plane.* Banach Center Publ. **50** (1999), 267–276.
- [99] Szücs A. *Cobordism of maps with simplest singularities,* in: Topology Symposium, Siegen. Lect. Notes in Math. **788** (1980), 223–244.

- [100] Szücs A. *Multiple points of singular maps*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **100** (1986), 331–346.
- [101] Thom R. *Les singularités des applications différentiables*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1955–1956), 43–87.
- [102] Umehara M. *A unified approach to the four vertex theorems*. I. Amer. Math. Soc. Transl. (2), Providence, RI, **190** (1999), 185–228.
- [103] Umehara M. and Thorbergsson G. *A unified approach to the four vertex theorems*. II. Amer. Math. Soc. Transl. (2), Providence, RI, **190** (1999), 229–252.
- [104] Uribe-Vargas R. *Four-vertex theorems in higher-dimensional spaces for a larger class of curves than the convex ones*. C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, **330** (2000), 1085–1090.
- [105] Wall C.T.C. *Stratified sets: a survey*. Lecture Notes in Math. **192** (1971), 133–140.