Доп. главы анализа. "Ленивый" конспект.

МА∀Т–М∃Х, 3 семестр, ПОМИ-группа, *Челкак Д.С.*

I. Расходящиеся ряды. Тауберовы теоремы.

0 Одно вычисление с расходящимся рядом.

Как известно,

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}, \qquad |x| < 1.$$

Решительно (или нерешительно?) выйдя за границы применимости этого тождества в обычном смысле, положим $x = e^{i\theta}$, где $\theta \in (-\pi, \pi)$. Итак, мы начинаем с равенства, которое, если встать на строгую точку зрения (а точнее на ту пока единственную строгую точку зрения, которая нам доступна из стандартного курса анализа), представляет собой полную бессмыслицу:

$$1 - e^{i\theta} + e^{2i\theta} - e^{3i\theta} + \ldots = \frac{1}{1+e^{i\theta}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \qquad |\theta| < \pi.$$

Переходя к вещественной части:

$$\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta - \ldots = \frac{1}{2}, \qquad |\theta| < \pi. \tag{0.1}$$

Интегрируя от 0 до ϕ:

$$\sin\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} + \frac{\sin 3\phi}{3} - \ldots = \frac{\phi}{2}.$$

Заметим, что это равенство вполне можно трактовать в классическом смысле[1] - ряд сходится по признаку Дирихле. Не задумываясь об обоснованиях законности, проинтегрируем еще раз - от 0 до θ:

$$(1-\cos\theta) - \frac{1-\cos 2\theta}{4} + \frac{1-\cos 3\theta}{9} - \ldots = \frac{\theta^2}{4}, \qquad |\theta| < \pi. \tag{0.2}$$

[1] Некоторое недоумение вызывает то, что левая часть периодична по ϕ, в то время, как правая - нет. Почему так? Дело в том, что надеяться придать какой-то строгий смысл равенству (0.1) при $\theta = \pm\pi$ нельзя - левая часть имеет сумму $-\infty$ в классическом смысле, поэтому и проинтегрировать через эту точку надеяться невозможно. А значит мы должны оставаться в промежутке $|\phi| < \pi$.

А теперь, чтобы окончательно избавиться от комплексов[2], подставим $\theta = \pi$. После тривиальных арифметических операций, получаем:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ну а отсюда уже легко[3] вытекает

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{0.3}$$

Заметим, что последние два равенства - вполне классические, ряды, суммы которых мы предъявляем (хотелось бы сказать "находимно мы прибережем этот глагол для строгих выводов), прекрасно сходятся в классическом смысле.

1 Определения. Сходимость по Чезаро. Сходимость по Абелю-Пуассону.

В этом параграфе мы будем чаще говорить о расширение понятия предела последовательности, а не о суммировании рядов (сумма ряда - это предел его частичных сумм).

Определение 1.1. *Пусть $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ - какая-нибудь последовательность. Мы будем говорить, что она имеет предел* **в смысле Чезаро***, равный b, и писать*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = b \quad (C),$$

если

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} b$$

в обычном смысле.

Упражнение 1.2. Пусть $s_{2k+1} = 1$, $s_{2k} = 0$. Проверьте, что $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2} \quad (C)$. Это утверждение можно воспринимать, как строгую версию равенства (0.1) для $\theta = 0$. Проверьте, что (0.1) верно для любого $\theta \in (-\pi, \pi)$, если его понимать в смысле сходимости частичных сумм ряда по Чезаро.

---

[2]Вообще-то, такой сильный образ неуместен - если бы мы научились обосновывать (0.2) при $|\theta| < \pi$, то, используя равномерную сходимость ряда в (0.2), легко бы могли (вполне строго!) перейти к пределу при $\theta \to \pi$.

[3]Пусть $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = a$ и $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots = b$. Тогда (в силу положительности всех членов ряда) ясно, что

$$a = b + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \ldots = b + \frac{a}{4},$$

то есть $a = \frac{4}{3}b$.

Эту конструкцию легко обобщить. Пусть нам дано семейство коэффициентов

$$\Gamma = (\gamma_{kn})_{k,n=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Будем говорить, что $\lim_{n\to\infty} s_n = b \ \ (\Gamma)$ (т.е. в смысле метода суммирования Γ), если для каждого k определено выражение $f_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{kn} s_n$ и $\lim_{k\to\infty} f_k = b$ в обычном смысле.

Замечание 1.3. Для метода Чезаро матрица коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix}.$$

Индекс k вполне может принимать и непрерывное множество значений, суть схемы от этого не меняется. В частности, второй метод, который мы будем рассматривать - метод Абеля-Пуассона - устроен именно так.

Определение 1.4. *Для $k \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$ положим $\gamma_{kn} = k^{n-1}\cdot(1-k)$. Будем говорить, что $\lim_{n\to\infty} s_n = b \ \ (AP)$ (**в смысле Абеля-Пуассона**), если*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{kn} s_n = (1-k) \sum_{n=1}^{+\infty} k^{n-1} s_n \underset{k\uparrow 1}{\to} b$$

в обычном смысле.

Замечание 1.5 (перевод на язык рядов). Мы будем говорить, что ряд суммируем в смысле Чезаро: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b \ \ (C)$, если $\lim_{n\to\infty} s_n = b \ \ (C)$, где $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, т.е.

$$\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{n} a_2 + \frac{n-2}{n} a_3 + \ldots + \frac{1}{n} a_n \underset{n\to\infty}{\to} b$$

в обычном смысле. Аналогично, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b \ \ (AP)$, если

$$(1-k) \sum_{n=1}^{+\infty} k^{n-1} s_n = a_1 + a_2 k + a_3 k^2 + \ldots \underset{k\uparrow 1}{\to} b.$$

Упражнение 1.6. Докажите, что радиусы сходимости рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n s_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n a_n$ совпадают, а значит приведенное выше преобразование корректно.

2 Регулярность методов суммирования.

Естественно, что нам бы хотелось не создавать кардинально новое понятие предела, а расширять уже имеющееся. Следующее определение естественно формализует это соображение.

Определение 2.1. *Будем говорить, что* Γ *- регулярный метод, если для каждой последовательности* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$*, имеющей (конечный!) предел* $\lim_{n\to\infty} s_n = b$ *в классическом смысле, верно также* $\lim_{n\to\infty} s_n = b \ \ (\Gamma)$.

Теорема 2.2. *Метод* Γ*, заданный семейством коэффициентов* $(\gamma_{kn})_{k,n=1}^{\infty}$ *регулярен, если и только если*
(i) $\gamma_{kn} \to 0$ *при* $k \to \infty$ *для каждого фиксированного* n*;*
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_{kn}| \leqslant H < +\infty$ *для всех* k*, где* H *не зависит от* k*;*
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{kn} \to 1$ *при* $k \to \infty$.

Замечание 2.3. С незначительными изменениями, теорема (вместе со своим доказательством) остается верной и в случае непрерывного параметра k.

Доказательство. " $\Leftarrow$ " : Во-первых, заметим, что из (ii) следует, что все ряды

$$t_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{kn} s_n$$

сходятся (и даже абсолютно) для произвольной ограниченной (в частности, для произвольной, имеющей конечный предел) последовательности $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Далее, предположим, что $|s_n - b| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Тогда

$$t_k = b\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{kn} + \sum_{k=1}^{N} \gamma_{kn}(s_n - b) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \gamma_{kn}(s_n - b) = I + II + III.$$

Ясно, что $|III| \leqslant H\varepsilon$. Из (i) и (iii) следует, что $I \to b$, $II \to 0$ при $k \to \infty$ (II - это конечная(!) сумма). Значит, для достаточно больших k верно $|t_k - b| < (H+1)\varepsilon$. То есть, из сходимости $s_n \to_{n\to\infty} b$ вытекает сходимость $t_k \to_{k\to\infty} b$, что и требовалось проверить.

" $\Rightarrow$ " : Для начала, покажем, что

$$H_k := \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_{kn}| < +\infty$$

для каждого k. Пусть это не так, и $H_k = +\infty$ для какого-то k. Построим такую последовательность $c_n \to_{n\to\infty} 0$, что ряд, определяющий t_k, расходится. А именно, пусть $0 = n_0 < n_1 < ... < n_r < ...$ - такая последовательность индексов, что

$$\sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} |\gamma_{kn}| \geqslant r$$

и

$$c_n = \frac{\operatorname{sign}\gamma_{kn}}{r}, \qquad n_r + 1 \leqslant n \leqslant n_{r+1}\,.$$

Тогда:

$$t_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{kn} c_n = \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{n=n_r+1}^{n_{r+1}} \frac{|\gamma_{kn}|}{r} \geqslant \sum_{r=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Итак, $H_k < +\infty$ для каждого k и наша задача - показать, что они равномерно (по k) ограничены (свойство (ii)). Заметим, что (i) и (iii) очевидны, если рассмотреть последовательности $s_m = 0$, $m \neq n$, $s_n = 1$ и $s_m = 1$, $m \geqslant 1$, соответственно.

Предположим противное, т.е. пусть $\sup_{k\geqslant 1} H_k = +\infty$. Построим индуктивно две последовательности $0 = n_0 < n_1 < ... < n_r < ...$ и $0 = k_0 < k_1 < ... < k_r < ...$ следующим образом: на r-ом шаге мы выбираем такое $k_r > k_{r-1}$, что

$$H_{k_r} \geqslant r^2 + 2r + 2$$

и (поскольку таких k_r должно быть бесконечно много, то можно еще что-нибудь попросить)

$$\sum_{n=1}^{n_{r-1}} |\gamma_{k_r n}| \leqslant 1$$

(такое k_r найдется, поскольку эта (конечная(!)) сумма стремится к 0 при $k_r \to +\infty$ в силу (i)). Теперь, используя конечность H_{k_r}, находим такое $n_r > n_{r-1}$, что

$$\sum_{n=n_r+1}^{+\infty} |\gamma_{k_r n}| \leqslant 1.$$

В частности, имеем

$$\sum_{n=n_{r-1}+1}^{n_r} |\gamma_{k_r n}| \geqslant r^2 + 2r.$$

Теперь пусть

$$c_n = \frac{\operatorname{sign}\gamma_{k_r n}}{r}, \qquad n_{r-1} + 1 \leqslant n \leqslant n_r.$$

Тогда $|c_n| \leqslant 1$, $c_n \to 0$ при $n \to \infty$, но

$$t_{k_r} = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{k_r n} c_n = \sum_{n=1}^{n_{r-1}} + \sum_{n=n_{r-1}+1}^{n_r} + \sum_{n=n_r+1}^{+\infty} \geqslant -1 + \frac{r^2 + 2r}{r} - 1 = r.$$

Таким образом, $t_{k_r} \to +\infty$, что и приводит у противоречию с регулярностью метода. $\square$

3 Положительные методы.

Утверждение 3.1. *Пусть* $\gamma_{kn} \geqslant 0$ *для всех* $k, n \geqslant 1$, $\gamma_{kn} \to_{k\to\infty} 0$ *для каждого фиксированного* n, $H_k = \sum_{n=1}^{+\infty} g_{kn} < +\infty$ *для каждого фиксированного* k *и, наконец,* $H_k \to_{k\to\infty} 1$. *Тогда для каждой неотрицательной последовательности* s_n *верно*

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n \leqslant \varliminf_{k\to\infty} t_k \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} t_k \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} s_n, \tag{3.1}$$

где $t_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_{kn} s_n$ *(мы считаем* $t_k = +\infty$*, если ряд расходится). При этом неравенства верны и в том случае, если какие-то из этих пределов суть* $+\infty$.

Замечание 3.2. Если все γ_{kn} неотрицательны, то $\sup \sum_{n=1}^{+\infty} |\gamma_{nk}| = \sup H_k < +\infty$ автоматически вытекает из $H_k < +\infty$ для каждого k и $H_k \to_{k\to\infty} 1$.

Доказательство. Повторяет доказательство достаточности в теореме 2.2 с незначительными вариациями. Пусть $\varliminf\limits_{n\to\infty} s_n = b < +\infty$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n > N$ верно $s_n > b - \varepsilon$. Заметим, что

$$t_k = (b-\varepsilon)\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_{kn} + \sum_{n=1}^{N}\gamma_{kn}(s_n - b + \varepsilon) + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\gamma_{kn}(s_n - b + \varepsilon) \geqslant$$

$$\geqslant (b-\varepsilon)\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_{kn} + \sum_{n=1}^{N}\gamma_{kn}(s_n - b + \varepsilon) \to b - \varepsilon, \quad k \to \infty.$$

Значит, $\varliminf\limits_{k\to\infty} t_k \geqslant b - \varepsilon$. Если $b = +\infty$, то надо заменить $b - \varepsilon$ на произвольное положительное число. Докажем последнее неравенство в (3.1) (среднее верно вообще всегда). Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} s_n = c < +\infty$ (если $c = +\infty$, то доказывать нечего). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $s_n < c + \varepsilon$ для всех $n > N$. Следовательно,

$$t_k = (c+\varepsilon)\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_{kn} + \sum_{n=1}^{N}\gamma_{kn}(s_n - c - \varepsilon) + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\gamma_{kn}(s_n - c - \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant (c+\varepsilon)\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_{kn} + \sum_{n=1}^{N}\gamma_{kn}(s_n - c - \varepsilon) \to c + \varepsilon, \quad k \to \infty,$$

т.е. $\varlimsup\limits_{k\to\infty} t_k \leqslant c + \varepsilon$. □

Замечание 3.3. В частности, из этого утверждения вытекает, что для положительного регулярного метода верно

$$s_n \to +\infty,\ n \to \infty \quad \Rightarrow \quad t_k \to +\infty,\ k \to \infty$$

(а, следовательно, то же самое верно и для $-\infty$). Это НЕ так, если не требовать положительности! Контрпример: $\gamma_{kn} = +2$, если $n = k$, $\gamma_{kn} = -1$, если $n = 2k$, и $\gamma_{kn} = 0$ во всех остальных случаях - тогда последовательность $s_n = n \to +\infty$ переходит в $t_k = 0$.

4 Метод Чезаро.

Начнем с простого замечания:

Замечание 4.1. Если последовательность s_n имеет предел по Чезаро (или ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем по Чезаро), то $s_n = o(n)$ (или $a_n = o(n)$, соответственно). В самом деле,

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n-1} \to 0, \quad n \to \infty,$$

а $a_n = s_n - s_{n-1}$.

Теорема 4.2 (теорема Фробениуса). *Метод Абеля-Пуассона сильнее метода Чезаро. То есть:*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = b \ \ (C) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = b \ \ (AP).$$

Доказательство. Нам необходимо вывести утверждение

$$\lim_{r\uparrow 1}(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} s_n = b$$

из того факта, что

$$A_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} \to b, \quad n \to \infty.$$

Заметим, что

$$(1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} s_n = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}(nA_n - (n-1)A_{n-1}) = (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} n A_n$$

Но это фактически утверждение о регулярности метода суммирования с коэффициентами $\gamma_{nr} = (1-r)^2 \cdot nr^{n-1}$, которое вытекает из теоремы 2.2. □

Теорема 4.3 (малая тауберова теорема). *Если* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b$ *в смысле Чезаро и* $a_n = o(n^{-1})$, *то* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b$ *и в обычном смысле.*

Доказательство. Так как суммируемость ряда по Чезаро означает

$$\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{n} a_2 + \ldots + \frac{1}{n} a_n \to b, \quad n \to \infty,$$

мы можем переформулировать теорему следующим образом:

$$na_n \to 0, \ n \to \infty \quad \overset{???}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{n} a_2 + \frac{2}{n} a_3 + \ldots + \frac{n-1}{n} a_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

что вытекает из регулярности метода Чезаро для последовательности $\{(n-1)a_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

5 Метод Абеля-Пуассона.

Наша ближайшая цель - доказать аналог теоремы 4.3 для метода Абеля-Пуассона (т.е. мы усиливаем результат, так как по теореме Фробениуса, из сходимости по Чезаро вытекает сходимость по Абелю). Чуть позже мы докажем еще более сильный результат, в котором o-оценка заменена на O-оценку, да к тому же одностороннюю.

Теорема 5.1 (теорема Таубера). *Если* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b$ (AP) *и* $a_n = o(n^{-1})$, *то* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b$ *и в обычном смысле.*

Доказательство. Нам надо доказать, что $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \to b$, $n \to \infty$. При этом, по определению метода суммирования (AP), верно

$$f(r) = \sum_{n\geqslant 1} a_n r^n = r \sum_{n\geqslant 1} a_n r^{n-1} \to b, \quad r \uparrow 1.$$

Заметим, что

$$s_N - f(r) = \sum_{n=1}^{N} (1-r^n) a_n - \sum_{n=N+1}^{+\infty} r^n a_n.$$

Тривиальное неравенство $1-r^n \leqslant n(1-r)$ дает

$$|s_N - f(r)| \leqslant (1-r) \sum_{n=1}^{N} |na_n| + \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |na_n| r^n$$

Введем обозначение $\delta_N = \max_{n>N} |na_n|$ (по условию, $\delta_N \downarrow 0$, $N \to \infty$). Тогда:

$$|s_N - f(r)| \leqslant N(1-r)\delta_0 + \frac{\delta_N}{N(1-r)}\,.$$

Оптимизируем теперь оценку по r, а именно возьмем такое r_N, что $N(1-r_N) = \sqrt{\delta_N/\delta_0}$ ($r_N \uparrow 1$, т.к. $\delta_N \downarrow 0$):

$$|s_N - f(r_N)| \leqslant 2\sqrt{\delta_0 \delta_N} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем утверждение теоремы. □

Теорема 5.2 (тауберова теорема Харди-Литтлвуда). *Если* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b$ (AP) *и* $a_n \leqslant Cn^{-1}$, *то* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b$ *и в обычном смысле.*

Доказательство. Введем класс функций

$$\Upsilon = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \lim_{r\uparrow 1} \sum_{n\geqslant 1} a_n f(r^n) = b \right\}$$

(в частности, мы требуем, чтобы ряд $\sum_{n\geqslant 1} a_n f(r^n)$ сходился при $r < 1$). Заметим, что
а) $x \in \Upsilon$ (определение суммируемости по (AP));
б) $x^k \in \Upsilon$ для любой степени $k \in \mathbb{N}$ (так как $\sum_{n\geqslant 1} a_n (r^n)^k = \sum_{n\geqslant 1} a_n (r^k)^n$ и $r^k \uparrow 1$);
в) $P(x) \in \Upsilon$ для любого многочлена $P \in \mathbb{R}[x]$, такого что $P(0) = 0$ (линейность Υ).

Положим

$$\xi(x) \equiv \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Нам надо доказать $\xi \in \Upsilon$, поскольку

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n \xi(r^n) = \sum_{n=1}^{[\log x / \log 2]} a_n.$$

Стратегия доказательства прозрачна - приблизим ξ многочленами (которые попадают в Υ) и докажем, что отсюда вытекает $\xi \in \Upsilon$. К сожалению, есть две сложности: а) функция ξ разрывна; б) a priori совершенно неясно, почему класс Υ замкнут относительно какого бы то ни было предельного перехода. Мы начнем с преодоления второй:

Лемма 5.3. *Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$, что (i) $P_1(0) = P_2(0) = 0$, $P_1(1) = P_2(1) = 1$; (ii) $P_1(x) \leqslant \xi(x) \leqslant P_2(x)$ для всех $x \in [0,1]$; (iii)*

$$\int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}\, dx < \varepsilon.$$

Тогда $\xi \in \Upsilon$.

Доказательство. Пусть $Q(x) \equiv (P_2(x) - P_1(x))/x(1-x)$ (заметим, что $Q \in \mathbb{R}[x]$). Легко видеть, что

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n \xi(r^n) - \sum_{n \geqslant 1} a_n P_1(r^n) = \sum_{n \geqslant 1} a_n (\xi(r^n) - P_1(r^n)) \leqslant C \sum_{n \geqslant 1} \frac{\xi(r^n) - P_1(r^n)}{n} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n \geqslant 1} \frac{P_2(r^n) - P_1(r^n)}{n} = C \sum_{n \geqslant 1} \frac{r^n(1-r^n)}{n} Q(r^n) \leqslant C \sum_{n \geqslant 1} r^n (1-r) \cdot Q(r^n)$$

и, аналогично,

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n P_2(r^n) - \sum_{n \geqslant 1} a_n \xi(r^n) \leqslant C \sum_{n \geqslant 1} r^n (1-r) \cdot Q(r^n).$$

В то же время[4],

$$\sum_{n \geqslant 1} r^n (1-r) \cdot Q(r^n) = r \sum_{n \geqslant 1} (r^{n-1} - r^n) \cdot Q(r^n) \underset{r \uparrow 1}{\to} \int_0^1 Q(x) dx < \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $r \uparrow 1$ и используя $P_1, P_2 \in \Upsilon$, получаем

$$b - \varepsilon \leqslant \underline{\lim}_{r \uparrow 1} \sum_{n \geqslant 1} a_n \xi(r^n) \leqslant \overline{\lim}_{r \uparrow 1} \sum_{n \geqslant 1} a_n \xi(r^n) \leqslant b + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора ε, это дает $\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n \geqslant 1} a_n \xi(r^n) = b$, т.е. $\xi \in \Upsilon$. $\square$

[4] Для многочленов это может быть проверено непосредственным вычислением, однако сходимость таких, бесконечных(!), интегральных сумм к интегралу, конечно, имеет место для любой (равномерно) непрерывной функции на $[0,1]$.

Теперь наша задача - научиться аппроксимировать ξ так, чтобы выполнялись все условия леммы. Рассмотрим функцию

$$\zeta(x) \equiv \frac{\xi(x) - x}{x(1-x)}$$

и будем ее аппроксимировать многочленами. К сожалению, у ζ есть разрыв в точке $\frac{1}{2}$, поэтому напрямую применить теорему[5] Вейерштрасса невозможно. Однако ясно, что существует такая *непрерывная* функция $\zeta_*(x) \leqslant \zeta(x)$, $x \in [0,1]$, что

$$\int_0^1 (\zeta(x) - \zeta_*(x))dx \leqslant \varepsilon.$$

Применяя теорему Вейерштрасса к $\zeta_* - \varepsilon$, можно найти такой многочлен $P_* \in \mathbb{R}[x]$, что $\zeta_* - 2\varepsilon \leqslant P_* \leqslant \zeta_*$. Тогда $P_* \leqslant \zeta$ и

$$\int_0^1 (\zeta(x) - P_*(x))dx \leqslant \int_0^1 (\zeta(x) - \zeta_*(x) + 2\varepsilon)dx \leqslant 3\varepsilon.$$

Аналогично можно построить такой многочлен $P^* \in \mathbb{R}[x]$, что $\zeta \leqslant P^*$ и

$$\int_0^1 (P^*(x) - \zeta(x))dx \leqslant 3\varepsilon.$$

Полагая теперь $P_1(x) := x + x(1-x)P_*(x)$, $P_2(x) := x + x(1-x)P^*(x)$, получаем требуемое приближение функции $\xi(x)$:

$$P_1 \leqslant \xi \leqslant P_2, \qquad \int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}\, dx = \int_0^1 (P^*(x) - P_*(x))dx \leqslant 6\varepsilon,$$

после чего применение леммы дает $\xi \in \Upsilon$. $\square$

[5] Для каждой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P(x)$, что $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

II. Гамма, бэта, дзэта и прочее.

Предварительное замечание: мы *определяем* функции e^w и $\log(1+w)$ для комплексных значений w равенствами:

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{6} + \ldots, \quad w \in \mathbb{C},$$

$$\log(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \ldots, \quad |w| < 1.$$

При таком подходе *надо проверить*, что $e^{\log(1+w)} = 1 + w$, $|w| < 1$. Мы не будем останавливаться на этом моменте подробно, ограничившись следующим замечанием: данное тождество верно для вещественных значений x, а значит получающийся в левой части степенной ряд совпадает с $1 + w$. Функция $\sin w$, $w \in \mathbb{C}$, определяется как

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} - \ldots.$$

1 Определение гамма-функции.

Определение 1.1. *Для $z \in \mathbb{C}$, таких что $\operatorname{Re} z > 0$, положим*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.1}$$

Замечание 1.2. Значение $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$ корректно определено для комплексных z и, кроме того,

$$|\Gamma(z)| \leqslant \int_0^{+\infty} |t^{z-1}| e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t} dt = \Gamma(\operatorname{Re} z) < +\infty, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

В частности, интеграл в (1.1) сходится.

Лемма 1.3. *i) Для $\operatorname{Re} z > 0$ верно тождество $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.*
ii) Для $\operatorname{Re} z > 0$ справедливо представление

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.2}$$

Замечание 1.4. Очевидное преимущество (1.2) по сравнению с (1.1) в том, что ряд равномерно сходится на любом компакте, не содержащем отрицательных целых точек, а интеграл сходится равномерно на любом ограниченном множестве.

Доказательство. i) Интегрирование по частям:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)\,.$$

ii) Легко видеть, что

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{z-1+n}}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}\,.$$

□

Определение 1.5. *Для $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ определим $\Gamma(z)$ по формуле (1.2).*

Лемма 1.6. *Основное тождество $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ справедливо при всех $z \neq 0, -1, \ldots$*

Замечание 1.7. Вообще-то $z\Gamma(z)$ и $\Gamma(z+1)$ суть две аналитические в $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ функции, поэтому из их совпадения при $\operatorname{Re} z > 0$ автоматически вытекает совпадение при всех z, однако мы еще не знаем ТФКП, чтобы так рассуждать.

Доказательство. Проверим "в лоб":

$$\Gamma(z+1) - z\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n+1)} - z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^z e^{-t}dt - z\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(z+n)} - z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} - t^z e^{-t}\Big|_1^{+\infty} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(z+n)}\Big(1 + \frac{z}{n}\Big) - 1 + \frac{1}{e} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{1}{e} = 0.$$

□

Теорема 1.8 (Формула Эйлера)**.** *Для всех $z \neq 0, -1, \ldots$ верно*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}\,.$$

Доказательство. Ясно, что если формула справедлива для какого-то z, то она автоматически выполняется и для $z-1$, поскольку мы можем воспользоваться основным тождеством:

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^z}{(z-1)z\ldots(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{z-1}}{(z-1)z\ldots(z+n-1)}\,.$$

Поэтому, достаточно рассматривать только $\operatorname{Re} z > 0$. Вычислим интеграл

$$I_n(z) := \int_0^n t^{z-1}\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n dt\,,$$

а потом оценим разность $e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n$. После замены переменной и многократного интегрирования по частям имеем

$$I_n(z) = n^z \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^n d\tau = n^z \cdot \frac{n}{z}\int_0^1 \tau^z(1-\tau)^{n-1}d\tau = \ldots = \frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}\,.$$

Таким образом, осталось доказать, что $I_n(z)\to\Gamma(z)$ при $n\to\infty$. Так как для всех $t\in\mathbb{R}$, $|t|\leqslant n$ верно $e^t\geqslant(1+\frac{t}{n})^n$, видим

$$0\leqslant e^{-t}-\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n = e^{-t}\left(1-e^t\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\right)\leqslant e^{-t}\left(1-\Big(1-\frac{t^2}{n^2}\Big)^n\right)\leqslant\frac{t^2e^{-t}}{n}\,.$$

Отсюда

$$\left|I_n(z)-\int_0^n t^{z-1}e^{-t}dt\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_0^n|t^{z+1}|e^{-t}dt\leqslant\frac{1}{n}\Gamma(\operatorname{Re}z+2)\to 0\,,\quad n\to\infty\,.$$

Наконец, $\int_n^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}\to 0$, поскольку интеграл сходится. $\square$

Следствие 1.9 (разложение $\mathbf{\Gamma(z)}$ в бесконечное произведение)**.** *Справедливо тождество*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{cz}\cdot z\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-\frac{z}{k}}\,,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\},\tag{1.3}$$

где $c=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n)=0.57\ldots$.

Замечание 1.10. (i) Так как

$$\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-\frac{z}{k}}=\Big(1+\frac{z}{k}\Big)\Big(1-\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}-\ldots\Big)=1+O\Big(\frac{1}{k^2}\Big),\quad k\to+\infty,$$

бесконечное произведение равномерно сходится на компактах. В частности, функция $\Gamma(z)$ не имеет нулей на комплексной плоскости.
(ii) В соответствии с (1.3), мы можем *доопределить* $1/\Gamma(z)$ нулем в точках $z=0,-1,-2,..$, и это будет непрерывное(!) продолжение.
(iii) Нетрудно заметить аналогию с основной теоремой алгебры - также, как в ОТА мы раскладываем многочлен на произведение линейных сомножителей, каждый из которых отвечает своему корню, в (1.3) мы раскладываем функцию $1/\Gamma(z)$ (заданную во всей комплексной плоскости) на произведение сомножителей, отвечающих ее корням. При этом регуляризующие множители $e^{-\frac{z}{k}}$ добавляются исключительно для того, чтобы обеспечить сходимость произведения.

Доказательство. Заметим, что

$$\left(\frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}\right)^{-1}=e^{-z\log n}\cdot z\prod_{k=1}^n\Big(1+\frac{z}{k}\Big)=e^{z(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n)}\cdot z\prod_{k=1}^n\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-\frac{z}{k}}\,.$$

Осталось применить формулу Эйлера. $\square$

2 Разложение sin(z) в бесконечное произведение.

Теорема 2.1. *Для всех $z \in \mathbb{C}$ справедливо разложение*

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big). \tag{2.1}$$

Замечание 2.2. Идеология этого разложения такая же, как и в (1.3) - мы раскладываем заданную в $\mathbb{C}$ функцию на линейные сомножители, отвечающие ее корням. При этом из-за симметрии корней мы не нуждаемся в регуляризующих множителях $e^{\pm\frac{z}{\pi n}}$.

Доказательство. Из формулы Муавра легко вывести, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо тождество

$$\sin(2n{+}1)w = \sin w \cdot P_n(\sin^2 w),$$

где многочлен $P_n \in \mathbb{R}[x]$ и $\deg P_n = n$. Угадаем вид P_n. Для каждого $k = 1, ..., n$ должно выполняться $P_n(\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}) = 0$. Следовательно,

$$P_n(x) = A\cdot\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\Big)$$

для некоторой константы $A \in \mathbb{R}$. Так как $\sin(2n{+}1)w \sim (2n{+}1)w \sim (2n{+}1)\sin w$, $w \to 0$, должно быть $A = P_n(0) = 2n{+}1$. Подставляя $z = (2n{+}1)w$, получаем тождество

$$\sin z = (2n{+}1)\sin\frac{z}{2n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right).$$

Теперь мы бы хотели перейти к пределу при $n \to +\infty$ (уже видно, что каждый из сомножителей сходится к соответствующему сомножителю в формуле (2.1)). Однако, это надо делать аккуратно. Для $m < n$ положим

$$U_n^{(m)} := (2n{+}1)\sin\frac{z}{2n+1}\cdot\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right), \qquad V_n^{(m)} := \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{z}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right).$$

Ясно, что

$$U_n^{(m)}V_n^{(m)} = \sin z \tag{2.2}$$

для всех n, m. Кроме того, существуют пределы

$$U_*^{(m)} = \lim_{n\to+\infty}U_n^{(m)} = z\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2k^2}\right), \qquad U_* = \lim_{m\to+\infty}U_*^{(m)} = z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2k^2}\right).$$

В силу (2.2), из этого вытекает существование пределов

$$V_*^{(m)} = \lim_{n\to+\infty}V_n^{(m)} = \frac{\sin z}{U_*^{(m)}}, \qquad V_* = \lim_{m\to+\infty}V_*^{(m)} = \frac{\sin z}{U_*}.$$

Наша цель - доказать, что $V_* = 1$. Для этого оценим $V_n^{(m)}$.

Не умаляя общности (все равно переходить к пределу), можно считать, что $m > |z|$. Функция $|\frac{\sin w}{w}|$ непрерывна в круге $\{w : |w| \leqslant \frac{1}{2}\}$, а значит достигает там максимума, который мы обозначим C_1 - это некоторая абсолютная константа. Таким образом,

$$\left|\sin^2 \frac{z}{2n+1}\right| \leqslant C_1 \cdot \frac{|z|^2}{(2n+1)^2}$$

С другой стороны, $\sin\phi \geqslant \frac{2}{\pi}\phi$ для $\phi \in [0, \frac{\phi}{2}]$, откуда

$$\left|\frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right| \leqslant \frac{4C_1}{\pi^2} \cdot \frac{|z|^2}{k^2}, \qquad k = m+1, ..., n.$$

Опять-таки, не умаляя общности будем считать, что m достаточно велико и правая часть не превосходит $\frac{1}{2}$. Функция $|\frac{\log(1-w)}{w}|$ непрерывна в круге $\{w : |w| \leqslant \frac{1}{2}\}$, а значит достигает там максимума C_2 - это еще одна абсолютная константа. Имеем

$$\left|\log\Big(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\Big)\right| \leqslant \frac{4C_1C_2}{\pi^2} \cdot \frac{|z|^2}{k^2}, \qquad k = m+1, ..., n.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем теперь такое m, что $\frac{4C_1C_2}{\pi^2}\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{k^2} < \varepsilon$. Тогда[6]:

$$|\log V_n^{(m)}| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} \log\Big(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\Big)\right| \leqslant \frac{4C_1C_2}{\pi^2} \cdot \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^2}{k^2} \leqslant \varepsilon$$

Переходя к пределу в этом неравенстве сначала по $n \to +\infty$, а потом по $m \to +\infty$, получаем $|\log V_*| \leqslant \varepsilon$. Устремляя, наконец, $\varepsilon \downarrow 0$, имеем $V_* = 1$. ☐

Следствие 2.3 (формула дополнения для **Γ**-функции)**.** *Верно тождество*

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Используя (1.3) и (2.1), легко находим

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = z\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{k^2}\Big) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

☐

Замечание 2.4. В частности, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Отсюда легко получить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,dt = \ [(t-\mu)^2 = 2\sigma^2 s]\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} s^{-\frac{1}{2}}e^{-s}ds = 1$$

(график подынтегральной функции – плотности распределения гауссовской случайной величины со средним μ и дисперсией σ – был раньше изображен на купюре в 10 немецких марок рядом с портретом Карла Фридриха Гаусса).

[6]В частности, все аргументы логарифмов находятся внутри круга $\{z = 1 + w, |w| < \frac{1}{2}\}$, где применение формулы $\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2$ законно без дополнительных комментариев.

3 Бэта-функция, формула Лежандра.

Определение 3.1. *Для* $z, w \in \mathbb{C}$*:* $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0$ *положим*

$$\mathrm{B}(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \tag{3.1}$$

Замечание 3.2. Интеграл сходится, поскольку $|t^{z-1}(1-t)^{w-1}| = t^{\operatorname{Re} z-1}(1-t)^{\operatorname{Re} w-1}$.

Теорема 3.3.

$$\mathrm{B}(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \qquad \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Заметим, что

$$G(z)G(w) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \cdot \int_0^{+\infty} s^{w-1}e^{-s}ds =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\left[\int_0^{+\infty} s^{z-1}e^{-s}ds\right]dt = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} t^{z-1}s^{w-1}e^{-t-s}ds\right]dt =$$

$$= [u=s+t] = \int_0^{+\infty}\left[\int_t^{+\infty} t^{z-1}(u-t)^{w-1}e^{-u}du\right]dt =$$

Поменяем[7](!) порядок интегрирования (область изменения переменных $0\leqslant t\leqslant u<+\infty$):

$$= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{t} t^{z-1}(u-t)^{w-1}e^{-u}dt\right]du = [t=uv] =$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{z+w-1}e^{-u}\left[\int_0^1 v^{z-1}(1-v)^{w-1}dv\right]du = \Gamma(z+w-1)\cdot B(z,w),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 3.4 (формула удвоения для $\mathbf{\Gamma(z)}$, она же формула Лежандра)**.**

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}), \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathrm{B}(z,z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt = 2\int_0^{1/2}(t-t^2)^{z-1}dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{4}-(\tfrac{1}{2}-t)^2)^{z-1}dt =$$

$$= [(\tfrac{1}{2}-t)^2 = \tfrac{1}{4}s] = 2^{1-2z}\int_0^1 (1-s)^{z-1}s^{-\frac{1}{2}}ds = 2^{1-2z}\mathrm{B}(z,\tfrac{1}{2}).$$

[7] Процедура изменения порядка интегрирования интуитивно ясна, поскольку интегралы - это пределы сумм, а суммы можно менять местами, однако этот факт (тем более для несобственных интегралов) необходимо(!!!) строго доказывать, чего мы, однако, здесь делать не будем - см. общий курс.

Выражая B-функцию через Γ, получаем

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{2^{1-2z}\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})},$$

что равносильно (3.3), так как $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. $\square$

Замечание 3.5. Формула удвоения является частным случаем теоремы Гаусса:

$$\Gamma(nz) = \frac{n^{nz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\,\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{n}\Big)\dots\Gamma\Big(z+\frac{n-1}{n}\Big),$$

справедливой при всех $n \in \mathbb{N}$ и $z \neq 0, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, \dots$

4 Формула Стирлинга. Главное слагаемое.

Лемма 4.1 (формула суммирования Эйлера-Маклорена)**.** *Пусть* $f \in C^1([a,b])$*,* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Тогда*

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) - \int_a^b f(t)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \left(\{t\}-\tfrac{1}{2}\right) f'(t)dt\,.$$

Доказательство. Легко видеть, что интегрирование по частям дает

$$\int_k^{k+1} f'(t)\left(\{t\}-\tfrac{1}{2}\right)dt = f(t)\left(\{t\}-\tfrac{1}{2}\right)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)dt\,.$$

Суммируя по k, получаем требуемое равенство. $\square$

Теорема 4.2 (формула Стирлинга)**.** *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *асимптотика*

$$\Gamma(z) = \exp\left[\Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z - z + \frac{1}{2}\,\log 2\pi + O(z^{-1})\right], \quad z \to \infty\,,$$

выполняется равномерно в угле $\arg z \in [-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$.

Замечание 4.3. i) Здесь $\log z = \log|z| + i\arg z$, и значение $\arg z$ выбирается так, что $|\arg z| < \pi-\varepsilon$. Используя тождество $e^{\log z} = z$, легко вывести стандартную формулу для производной $(\log z)' = z^{-1}$.
ii) Для $x \in \mathbb{R}_+$ при помощи несложного тождественного преобразования получаем

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \cdot \Big(\frac{x}{e}\Big)^x (1+O(x^{-1}))\,, \quad x \to +\infty\,.$$

Доказательство. Будем использовать формулу Эйлера (Теорема 1.8). Заметим, что

$$\frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} = \exp\left[-\sum_{k=0}^{n}\log(z+k) + \sum_{k=1}^{n}\log k + z\log n\right].$$

Лемма 4.1 дает

$$\sum_{k=0}^{n}\log(z+k) = \int_0^n \log(z+t)dt + \frac{\log z+\log(z+n)}{2} + \underbrace{\int_0^n \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt}_{I_n(z)} =$$

$$= t(\log t-1)\Big|_z^{z+n} + \frac{\log z+\log(z+n)}{2} + I_n(z) = (z+n+\tfrac{1}{2})\log(z+n) - (z-\tfrac{1}{2})\log z - n + I_n(z)\,.$$

Подставляя сюда $z=1$ и вычитая "лишнее" слагаемое $\log(n+1)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\log k = (n+\tfrac{1}{2})\log(n+1) - n + I_n(1)\,.$$

Значит,

$$-\sum_{k=0}^{n}\log(z+k)+\sum_{k=1}^{n}\log k+z\log n = (z-\tfrac{1}{2})\log z - z\log\frac{z+n}{n} - (n+\tfrac{1}{2})\log\frac{z+n}{n+1} - I_n(z)+I_n(1)\,.$$

Устремляя $n\to\infty$, получаем

$$\Gamma(z) = \exp\left[(z-\tfrac{1}{2})\log z - (z-1) - I(z) + I(1)\right],$$

где

$$I(z) = \int_0^{+\infty}\frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt$$

(несобственный интеграл сходится по признаку Дирихле). Интегрируя по частям, получаем

$$I(z) = \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(z+t)^2}\,, \qquad \varphi(t) := \int_0^t (\{s\}-\tfrac{1}{2})ds = \frac{1}{2}\{t\}(\{t\}-1)\,.$$

Так как $\varphi(t)$ - ограниченная функция, отсюда несложно получить оценку $I(z)=O(z^{-1})$ (равномерную в произвольном угле $\arg z\in[-\pi+\varepsilon,\pi+\varepsilon]$). Именно, если $z=x+iy$, то

$$|I(z)| \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{dt}{|z+t|^2} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x+t)^2+y^2} \leqslant \begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x+t)^2} = \frac{1}{x}, & x>0\,,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+y^2} = \frac{\pi}{|y|}, & |y|\neq 0\,.\end{cases}$$

Первая оценка работает в секторе $\arg z\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, а вторая - в оставшейся области.

Итак,

$$\Gamma(z) = \exp\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + A + O(z^{-1})\right], \quad z\to\infty,$$

и все что осталось - вычислить константу $A = 1 + I(1)$. Для $y \to +\infty$ рассмотрим тождество

$$\Gamma(iy)\Gamma(-iy) = -\frac{\Gamma(iy)\Gamma(1-iy)}{iy} = -\frac{\pi}{iy\sin\pi iy} = \frac{2\pi}{y(e^{\pi y} - e^{-\pi y})} =$$
$$= \exp\left[-\pi y - \log y + \log 2\pi + o(1)\right], \qquad y \to +\infty.$$

С другой стороны,

$$\Gamma(iy)\Gamma(-iy) = \exp\left[(iy-\tfrac{1}{2})\log iy + (-iy-\tfrac{1}{2})\log(-iy) + 2A + o(1)\right] =$$
$$= \exp\left[\left(iy-\tfrac{1}{2}\right)\left(\log y+\tfrac{\pi i}{2}\right) + \left(-iy-\tfrac{1}{2}\right)\left(\log y-\tfrac{\pi i}{2}\right) + 2A + o(1)\right] =$$
$$= \exp\left[-\pi y - \log y + 2A + o(1)\right], \qquad y \to +\infty.$$

Следовательно, $A = \frac{1}{2}\log 2\pi$, что и требовалось доказать. □

5 Числа и полиномы Бернулли.

Чтобы понять смысл конструкций, которыми мы будем заниматься в этом параграфе, вспомним тождество, полученное при доказательстве формулы Стирлинга:

$$\Gamma(z) = \exp\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi - I(z)\right],$$

где

$$I(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{z+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{(z+t)^2}\,dt = O(z^{-1}), \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2}\{t\}(\{t\} - \frac{1}{2}).$$

Предположим, мы хотим уточнять асимптотику $\Gamma(z)$, или, что то же самое, асимптотику интеграла $I(z)$. Естественная идея – еще раз проинтегрировать по частям. Однако нам будет мешать то обстоятельство, что первообразная функция φ неограничена, поскольку $\int_0^1 \varphi(t)dt \neq 0$. Поэтому мы немного модифицируем φ. Именно, построим последовательность функций

$$\omega_0(t) = 1; \qquad \omega_1(t) = \{t\} - \frac{1}{2};$$

$$\omega_{k+1}(t) = \omega_{k+1}(\{t\}) : \ \ \omega'_{k+1}(t) = \omega_k(t),\ t \in (0,1), \ \ \int_0^1 \omega_{k+1}(t)dt = 0.$$

Первые несколько функций $\omega_k(t)$ будут иметь вид:

$$\omega_2(t) = \frac{\{t\}^2}{2} - \frac{\{t\}}{2} + \frac{1}{12}; \qquad \omega_3(t) = \frac{\{t\}^3}{6} - \frac{\{t\}^2}{4} + \frac{\{t\}}{12};$$

$$\omega_4(t) = \frac{\{t\}^4}{24} - \frac{\{t\}^3}{12} + \frac{\{t\}^2}{24} - \frac{1}{720}; \qquad \dots$$

Ясно, что ω_k является полиномом степени k от $\{t\}$ со старшим коэффициентом $\frac{1}{k!}$.

Определение 5.1. *Полиномом Бернулли $B_k(t)$ называется такой полином степени k со старшим коэффициентом 1, что $\omega_k(t) = \frac{1}{k!}\,B_k(\{t\})$. Числом Бернулли B_k называется значение этого полинома при $t=0$, т.е. $B_k = B_k(0)$.*

Замечание 5.2. . (i) Таким образом, $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$,...
(ii) Кажется, что числа Бернулли убывают или хотя бы ограничены, однако это не так.

Лемма 5.3. *Справедливо неравенство $|\omega_k(t)| \leqslant \frac{1}{2^k}$. В частности, $|B_k| \leqslant \frac{k!}{2^k}$.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать неравенство для $t \in [0,1]$. По определению функции ω_{k+1} имеем

$$\omega_{k+1}(t) = \int_0^t \omega_k(s)ds - \int_0^1 \left[\int_0^t \omega_k(s)ds\right] dt. \tag{5.1}$$

Поменяем порядок интегрирования во втором интеграле (область изменения переменных $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$):

$$\int_0^1 \left[\int_0^t \omega_k(s)ds\right] dt = \int_0^1 \left[\int_s^1 \omega_k(s)dt\right] ds = \int_0^1 (1-s)\omega_k(s)ds.$$

Обозначая характеристическую функцию промежутка $[0,t]$ через $\chi_{[0,t]}$, получаем

$$\omega_{k+1}(t) = \int_0^1 (\chi_{[0,t]}(s) - 1 + s)\omega_k(s)ds = \int_0^1 (\chi_{[0,t]}(s) - \tfrac{1}{2} - t + s)\omega_k(s)ds,$$

поскольку $\int_0^1 \omega_k(s)ds = 0$. Заметим теперь, что $\max_{s\in[0,1]} |\chi_{[0,t]}(s) - \frac{1}{2} - t + s| = \frac{1}{2}$, откуда сразу вытекает неравенство

$$\max_{t\in[0,1]} |\omega_{k+1}(t)| \leqslant \frac{1}{2} \max_{s\in[0,1]} |\omega_k(s)|.$$

Тривиальная индукция завершает доказательство. □

Наша ближайшая цель - найти производящую функцию для полиномов Бернулли.

Лемма 5.4. *Для $t \in [0,1)$ и $z : |z| < 2$ справедливо тождество*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\, z^n = \frac{te^{zt}}{e^t - 1}.$$

Доказательство. Отметим, что ряд сходится в силу леммы 5.3, так как $\frac{B_n(t)}{n!} = \omega_n(t)$ для $t \in [0,1)$. Положим

$$G(t,z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n(t) z^n.$$

Поскольку $\omega'_{n+1}(t) = \omega_n(t)$, получаем

$$G'_t(t,z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_{n-1}(t) z^n = zG(t,z).$$

Следовательно, $G(t,z) = e^{tz}G(0,z)$. С другой стороны,

$$1 = \int_0^1 G(t,z) = G(0,z) \cdot \frac{e^t - 1}{t}\,,$$

так как $\int_0^1 \omega_k(t)dt = 0$ для всех $k \geqslant 1$. □

Следствие 5.5. *Для $z : |z| < 2$ верно тождество*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Доказательство. Очевидно, так как $B_n = B_n(0)$ по определению. □

Зная производящую функцию, можно получать разнообразные тождества.

Утверждение 5.6. *(i) $B_{2s+1} = 0$ для всех $s \geqslant 1$.*
(ii)

$$B_n(t) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j B_{n-j} t^j\,, \quad n \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Доказательство. (i) Заметим, что для $z : |z| < 2$ верно

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n - B_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = z\Big(\frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} \cdot \frac{e^{-z} + 1}{e^{-z} - 1}.$$

Последнее равенство (т.е. четность функции) и дает требуемый результат.
(ii) Для $t \in [0,1)$ и $z : |z| < 2$ имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\, z^n = \frac{te^{zt}}{e^t - 1} = e^{zt} \cdot \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!}\, z^j \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!}\, z^k.$$

Приравнивая коэффициенты при z^n, получаем

$$\frac{B_n(t)}{n!} = \sum_{j+k=n,\ j,k\geqslant 0} \frac{t^j}{j!} \cdot \frac{B_k}{k!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{B_{n-j}}{j!(n-j)!}\, t^j,$$

что и требовалось доказать (поскольку это равенство многочленов, оно автоматически верно для всех t, если верно для $t \in [0,1)$). □

Утверждение 5.7 (одно из реккурентных тождеств для чисел Бернулли)**.**

$$B_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(n+1)C_n^j}{j+2} \cdot B_{n-j}, \qquad n \geqslant 0.$$

Доказательство. По определению (см. (5.1))

$$\frac{B_{n+1}}{(n+1)!} = \omega_{n+1}(0) = -\int_0^1 \left[\int_0^t \omega_n(s)ds\right] = -\int_0^1 (1-s)\omega_n(s)ds = \int_0^1 s\omega_n(s)ds,$$

так как $\int_0^1 \omega_n(s)ds = 0$. Другими словами,

$$\frac{B_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}\int_0^1 sB_n(s)ds.$$

Подставляя сюда выражение (5.2) для полинома $B_n(s)$ и интегрируя, получаем

$$B_{n+1} = (n+1)\sum_{j=0}^{n} \frac{C_n^j B_{n-j}}{j+2},$$

что и требовалось доказать. □

6 Разложение $\operatorname{ctg} z$ в сумму простейших дробей, ряд Тейлора для $\operatorname{tg} z$ и значения $\zeta(2k)$.

Утверждение 6.1. *Для $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ верно*

$$\operatorname{ctg} z = \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - \pi n}. \tag{6.1}$$

Замечание 6.2. (i) По определению

$$\text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-\pi n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-\pi n} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - \pi^2 n^2}\,.$$

(ii) Смысл (6.1) таков: если у нас есть рациональная функция (частное двух многочленов), то она всегда может быть разложена в сумму простейших дробей – именно так мы вычисляем интегралы от рациональных функций. Здесь мы имеем дело с существенно более содержательной функцией $\operatorname{ctg} z$, но характер разложения абсолютно такой же!

Доказательство. ????????? □

Определение 6.3 (дзэта-функция Римана)**.** *Для $s > 1$ положим*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Значения $\zeta(2k)$ в четных положительных числах тесно связаны с разложением функции $\operatorname{tg} z$ в окрестности нуля и с числами Бернулли.

Лемма 6.4.

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot (2^{2k+2}-1)}{\pi^{2k+2}} \zeta(2k+2) \cdot z^{2k+1}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}. \tag{6.2}$$

Замечание 6.5. Ясно, что значения $\zeta(2k+2)$ ограничены, поэтому ряд сходится.

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi}{2} - z\Big) = \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z - \pi n} = -\,\text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z + (n-\frac{1}{2})\pi} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z + (n-\frac{1}{2})\pi} - \frac{1}{z - (n-\frac{1}{2})\pi}\Big) = 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 - z^2}.$$

Разложим каждое слагаемое в ряд (напомним, что $|z| < \frac{\pi}{2}$):

$$\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 - z^2} = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2} + \frac{z^2}{(n-\frac{1}{2})^4\pi^4} + \frac{z^4}{(n-\frac{1}{2})^6\pi^6} + \dots$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} z = 2z \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(n-\frac{1}{2})^{2k+2}\pi^{2k+2}}.$$

Поменяем порядок суммирования (нетрудно проверить, что операция законна, так как есть абсолютная сходимость):

$$\operatorname{tg} z = 2z \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{2k+2}\pi^{2k+2}}\right] \cdot z^{2k}.$$

Осталось свести сумму обратных степеней нечетных натуральных чисел к ζ-функции. Ясно, что

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} + \frac{1}{2^s}\zeta(s).$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^{2k+2}} = 2^{2k+2} \sum_{n=1}^{+iy} \frac{1}{(2n-1)^{2k+2}} = (2^{2k+2}-1)\zeta(2k+2),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 6.6. Разложение (6.2) можно рассматривать в качестве источника информации о сумме обратных четных степеней натуральных чисел. Например, используя первые два слагаемых формулы Тейлора $\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}\, z^3 + o(z^3)$, $z \to 0$, получаем

$$1 = \frac{6}{\pi^2}\, \zeta(2); \qquad \frac{1}{3} = \frac{30}{\pi^4}\, \zeta(4),$$

то есть

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Список литературы

[1] Фихтенгольц, второй том.

[2] Олвер Ф. *Асимптотика и специальные функции.* "Наука 1990.
(Olver F.W.J., *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, 1974).

[3] Харди Г. *Расходящиеся ряды.* "Иностранная литература 1951.
(Hardy G.H., *Divergent Series*, Oxford, 1949.)