Набросок кратких заметок по 9 лекциям о рядах и преобразовании Фурье. Осень 2007, III курс, М$_\forall$ТМ$^\exists$Х.

0. Ряды Фурье. Наводящие соображения. Определение.

- Рассмотрим пространство $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением $< f, g >= \int_{-\pi,\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$. Рассмотрим функции

  $$e_n(x) = e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

  Легко проверить, что они попарно ортогональны, а значит $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – ортонормированная система.
- Более того, мы можем уйти от комплекснозначных функций, делая замену (повороты в двумерных подпространствах)

$$\left\{\frac{e_n}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e_{-n}}{\sqrt{2\pi}}\right\} \leftrightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e_n+e_{-n}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e_n+e_{-n}}{\sqrt{2}}\right\} \leftrightarrow \left\{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}.$$

- Мы ожидаем (подробнее позже), что по получившемуся базису можно раскладывать функции также, как и в конечномерных пространствах. Это мотивирует следующее

Определение 0.1. *Для $f \in L^1(-\pi,\pi)$ определим* **коэффициенты Фурье**

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx, \quad n \geqslant 0, \qquad\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx, \quad n \geqslant 1.$$

Формальный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}(a_n\cos nx + b_n \sin nx) \tag{0.1}$$

будем называть **рядом Фурье** *функции f.*

Замечание 0.2. (i) Мы определили ряд Фурье для функций из $L^1(-\pi,\pi)$ – пространства более широкого(!), чем $L^2(-\pi,\pi)$.
(ii) Мы будем изучать вопрос о поточечной сходимости ряда (0.1) к исходной функции $f(x)$. Ясно, что если $f(x) \equiv \cos nx$ (или $\sin nx$), то все коэффициенты Фурье, кроме одного, равны нулю, поэтому ряд состоит из одного слагаемого и, естественно, сходится. Значит (в силу линейности), для тригонометрических полиномов ряд превращается в конечную сумму и также сходится поточечно. Поэтому у нас есть надежда установить поточечную сходимость и для других "хороших" функций.
(iii) Так как сумма ряда Фурье (если она существует хоть в каком-нибудь смысле) является 2π-периодичной функцией, мы часто будем считать, что исходная функция $f \in L^1(-\pi,\pi)$ продолжена на всю прямую по периодичности $f(x+2\pi) \equiv f(x)$.

1. Лемма Римана-Лебега. Ядро Дирихле. Свертка периодических функций. Локальность свойства сходимости ряда Фурье в точке.

Лемма 1.1 (Риман-Лебег). *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \to 0, \quad \omega \to \pm\infty.$$

Доказательство. 1. $f = \chi_{[a,b)}$. 2. $f = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{[a_n,b_n)}$. 3. $f \in L^1(\mathbb{R})$. □

Следствие 1.2. *(i) Для* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *справедливо*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x dx \to 0, \quad \omega \to +\infty.$$

(ii) Для $f \in L^1(-\pi,\pi)$ *верно* $a_n, b_n \to 0$, $n \to \infty$.

Вычисление 1.3.

$$S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt,$$

где

$$D_N(y) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos ny = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$$

Функция $D_N(y)$ называется **ядром Дирихле** (заметим, что $D_N(y+2\pi) \equiv D_N(y)$).

Определение 1.4. Сверткой *двух периодических функций* $f(x) \equiv f(x+2\pi)$ *и* $g(x) \equiv g(x+2\pi)$ *называется функция*

$$(f * g)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1.5. (i) Легко видеть, что $f(t)g(x-t)$ измерима, как функция двух переменных, если f и g – измеримые функции.
(ii) В силу периодичности f и g, мы можем интегрировать по любому промежутку длины 2π:

$$(f * g)(x) = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)g(x-t)dt, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

(iii) Если $f * g$ определена, то она также периодична: $(f * g)(x+2\pi) \equiv (f * g)(x)$.

Лемма 1.6 (существование свертки). *Пусть* $f, g \in L^1(-\pi,\pi)$, $f(x) \equiv f(x+2\pi)$, $g(x) \equiv g(x+2\pi)$. *Тогда свертка* $(f*g)(x)$ *определена (т.е. интеграл сходится) для почти всех* $x \in (-\pi,\pi)$ *и* $f * g \in L^1(-\pi,\pi)$. *При этом* $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Доказательство. "$|f * g| \leqslant |f| * |g|$, $\| \, |f| * |g| \, \|_1 = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$". □

Замечание 1.7. Несложно видеть, что для $f, g \in L^1(-\pi,\pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f * g)(x)e^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}dy.$$

Упражнение 1.8. Вывести отсюда формулу, выражающую коэффициенты Фурье a_n, b_n свертки $f * g$ через коэффициенты Фурье функций f и g.

Утверждение 1.9 (локальность свойства сходимости ряда Фурье). *Пусть $f, \widetilde{f} \in L^1(-\pi, \pi)$, 2π-периодичны и пусть для некоторых $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$ верно*

$$f\big|_{(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)} \equiv \widetilde{f}\big|_{(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)}.$$

Тогда ряды Фурье функций f и $\widetilde{f}$ сходятся или не сходятся в точке x_0 одновременно. Если они сходятся, то к одной и той же сумме.

Доказательство. Очевидно

$$\frac{f(x_0-y) - \widetilde{f}(x_0-y)}{2\sin\frac{y}{2}} \in L^1(-\pi, \pi).$$

Теперь утверждение вытекает из вычисления 1.3 и леммы Римана-Лебега. $\square$

2. Сходимость ряда Фурье в точке при условии Дини.

Определение 2.1. *Функция f удовлетворяет условию Дини в точке x_0, если для некоторого $\delta_0 > 0$ справедливо*

$$\int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}\, dx < +\infty$$

Замечание 2.2. (i) Если $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$ (т.е. $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$), то это условие выполнено.
(ii) Это условие все еще выполнено, если

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{C}{|\log|x-x_0||^\beta}, \qquad \beta > 1.$$

(iii) Существует явный пример функции, удовлетворяющей аналогичной оценке с $\beta = 1$, для которой теорема о сходимости неверна. Таким образом, условие Дини довольно точное.

Теорема 2.3. *Пусть $f \in L^1(-\pi, \pi)$, $f(x+2\pi) \equiv f(x)$. Если в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функция f удовлетворяет условию Дини, то ряд Фурье в этой точке сходится к $f(x_0)$.*

Доказательство. $f(x) = (f(x) - f(x_0)) + f(x_0)$. Для константы(!) $f(x_0)$ ряд Фурье состоит из одного (первого) слагаемого и равен $f(x_0)$, частичные суммы для $f(x) - f(x_0)$ стремятся к нулю в силу леммы Римана-Лебега, так как

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\sin\frac{x-x_0}{2}} \in L^1(x_0 - \pi, x_0 + \pi).$$

$\square$

Добавление 2.4. *Пусть $f \in L^1(-\pi, \pi)$, $f(x+2\pi) \equiv f(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Если существуют два таких числа $a, b \in \mathbb{R}$ (например, $f(x_0 \pm 0)$), что для некоторого $\delta_0 > 0$*

$$\int_{x_0-\delta_0}^{x_0} \frac{|f(x) - a|}{|x - x_0|}\, dx, \ \int_{x_0}^{x_0+\delta_0} \frac{|f(x) - b|}{|x - x_0|}\, dx < +\infty,$$

то ряд Фурье в точке x_0 сходится к $\frac{1}{2}(a+b)$.

Доказательство. Так же, как раньше, ибо $\int_0^\pi D_N(y)dy = \int_{-\pi}^0 D_N(y)dy = \frac{1}{2}$. $\square$

Примеры 2.5. (i) Рассмотрим функцию $f(x) \equiv \operatorname{sign} x$, $|x| < \pi$, $f(x+2\pi) \equiv f(x)$. Легко видеть, что

$$a_n = 0, \qquad b_n = \begin{cases} 0, & n=2k, \\ \frac{4}{\pi n}, & n=2k+1. \end{cases}$$

Таким образом, ряд Фурье этой функции имеет вид

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Легко видеть, что первый максимум частичной суммы $S_{2N+1}(x)$ достигается в точке $x_N = \frac{\pi}{2(N+1)}$ и

$$S_{2N+1}(x_N) \underset{N\to\infty}{\to} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x}\, dx = 1.179... > 1.$$

Это явление называется **эффект Гиббса** (ясно, что такая же ситуация будет иметь место для любой гладкой функции со скачком в одной точке). Впервые (1848) обнаружен Уилбрейамом, позже (1898) был "популяризован" Гиббсом. Для первого минимума, второго максимума и т.д. также легко найти предельные $\neq 1$ значения.

(ii) $f(x) \equiv x^2$, $|x| \leqslant \pi$, $f(x+2\pi) \equiv f(x)$. Тогда

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \qquad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \qquad b_n = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} = x^2, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$ получаем суммы обратных квадратов.

3. Суммирование ряда Фурье по Чезаро. Ядро Фейера.

Определение 3.1. *Говорят, что последовательность* $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ **сходится к** A **в смысле Чезаро** *(*$S_N \underset{N\to\infty}{\overset{(C,1)}{\to}} A$*), если*

$$\sigma_N := \frac{S_0 + ... + S_{N-1}}{N} \underset{N\to\infty}{\to} A$$

в обычном смысле. Говорят, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(C,1)}{=} A$*, если* $S_N = a_0 + ... + a_N \underset{N\to\infty}{\overset{(C,1)}{\to}} A$.

Лемма 3.2 (регулярность метода Чезаро). *Если* $S_N \underset{N\to\infty}{\to} A$*, то* $S_N \underset{N\to\infty}{\overset{(C,1)}{\to}} A$.

Доказательство. $|\sigma_k - A| \leqslant \frac{1}{k}(|S_0 - A| + ... + |S_{N(\varepsilon)} - A| + |S_{N(\varepsilon)+1} - A| + ... + |S_{k-1} - A|)$. $\square$

Замечание 3.3. Обратно, конечно же, неверно: $(-1)^n \underset{n\to\infty}{\overset{(C,1)}{\to}} 0$.

Вычисление 3.4. Пусть $f\in L^1(-\pi,\pi)$, $f(x+2\pi)\equiv f(x)$. Тогда $S_N(x)=(f*D_N)(x)$, а значит

$$\sigma_N(x) = \frac{S_0(x) + ... + S_{N-1}(x)}{N} = (f * K_N)(x),$$

где

$$K_N(y) := \frac{D_0(y) + ... + D_{N-1}(y)}{N} = \frac{\sin^2 \frac{Ny}{2}}{2\pi N \sin^2 \frac{y}{2}}\,.$$

Функция $K_N(y)$ называется **ядром Фейера**.

Утверждение 3.5 (свойства $\mathbf{K_N(y)}$). *(i)* $K_N(y) \equiv K_N(-y) \equiv K_N(y+2\pi) \geqslant 0$.
(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(y)dy = 1$.
(iii) Для каждого $\delta > 0$ *верно* $\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} K_N(y)dy \underset{N\to\infty}{\to} 0$ *("фокусирующее свойство").*

Доказательство. (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)dy = 1$. (iii) $\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} K_N(y)dy \leqslant \frac{1}{N\sin^2\frac{\delta}{2}}$. □

Замечание 3.6. Вернемся к примеру $f(x) = \operatorname{sign} x$, $|x| < \pi$. Так как $K_N \geqslant 0$, имеем $|\sigma_N(x)| \leqslant 1$, то есть эффект Гиббса (как минимум в той форме, как он обсуждался раньше) для усредненных сумм $\sigma_N(x)$ отсутствует.

4. Аппроксимативные единицы в пространствах $L^p(\mathbb{T})$, $C(\mathbb{T})$.

Через $\mathbb{T}$ будем обозначать единичную окружность. Имеется естественное отождествление пространств $L^p(\mathbb{T})$ и $L^p(-\pi,\pi)$:

$$f \in L^p(\mathbb{T}) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} f \in L^p(-\pi,\pi), \\ f(x+2\pi) \equiv f(x). \end{cases}$$

Напомним, что для $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ у нас определена свертка $f * g \in L^1(\mathbb{T})$.

Определение 4.1. *Семейство функций* $\omega_h \in L^1(-\pi,\pi)$, $h \to 0$, *называется* **аппроксимативной единицей**, *если*
(i) $\omega_h \geqslant 0$, *(ii)* $\int_{-\pi}^{\pi} \omega_h(y)dy = 1$.
(iii) Для каждого $\delta > 0$ *верно* $\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} \omega_h(y)dy \underset{h\to 0}{\to} 0$

Примеры 4.2. (i) Ядра Фейера $\omega_{\frac{1}{N}}(y) = K_N(y)$.
(ii) $\omega_h(y) = \frac{1}{2h}\chi_{[-h,h]}(y)$. Свертка с такой аппроксимативной единицей устроена так:

$$(f * \omega_h)(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$$

и называется **усреднение по Стеклову**.
(iii) Пусть $\omega \in L^1(-\pi,\pi)$: $\omega \geqslant 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \omega(y)dy = 1$. Тогда

$$\omega_h(y) := \frac{1}{h} \cdot \omega\left(\frac{x}{h}\right) \cdot \chi_{[-\pi h,\pi h]}(y)$$

является аппроксимативной единицей. Если исходная функция ω принадлежала классу $C^\infty(\mathbb{T})$ и, скажем, имела носитель $\operatorname{supp}\omega \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (такую функцию легко построить явно), то $\omega_h \in C^\infty(\mathbb{T})$ при всех $h < 1$. Тогда *для любой* $f \in L^1(\mathbb{T})$ верно $f * \omega_h \in C^\infty(\mathbb{T})$, поскольку

$$(f * \omega_h)^{(k)}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\omega_h^{(k)}(x-t)dt.$$

Теорема 4.3. *Пусть ω_h - аппроксимативная единица. Тогда*
(i) Для любой $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$, выполняется $f * \omega_h \underset{h\to 0}{\overset{L^p(\mathbb{T})}{\to}} f$
(другими словами, $\|f * \omega_h - f\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} |(f * \omega_h)(x) - f(x)|^p dx \underset{h\to 0}{\to} 0$).
(ii) Для любой $f \in C(\mathbb{T})$ (т.е. $f \in C([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)$) выполняется $f * \omega_h \underset{h\to 0}{\overset{C(\mathbb{T})}{\to}} f$ (т.е. $f * \omega_h(x) \rightrightarrows f(x)$, $h \to 0$, $x \in [-\pi,\pi]$).

Лемма 4.4. *Для любой $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$, верно $f(\cdot + h) \underset{h\to 0}{\overset{L^p(\mathbb{T})}{\to}} f$*
(другими словами, $\|f(\cdot+h) - f\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \underset{h\to 0}{\to} 0$).

Доказательство. 1. $f = \chi_{[a,b)}$. 2. $f = \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_{[a_n,b_n)}$. 3. $f \in L^p(-\pi,\pi)$. □

Доказательство теоремы (i). Неравенство Гельдера для $(f(t)-f(x))(\omega_h(x-t))^{1/p}$ и $(\omega_h(x-t))^{1/q}$ дает

$$\|f * \omega_h - f\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-f(x))\omega_h(x-t)dt \right|^p dx$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-f(x)|^p \omega_h(x-t)dtdx = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)-f(x)|^p \omega_h(y)dxdy$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - y) - f\|_p^p \,\omega_h(y)dy = \int_{|y|\leqslant\delta} + \int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} = I + II.$$

Теперь $I \to 0$ при $\delta \to 0$ (равномерно(!) по h) в силу леммы и $\int_{-\pi}^{\pi}\omega_h(y)dy = 1$, а $II \to 0$ при $h \to 0$ и каждом фиксированном δ в силу $\|f(\cdot - y) - f\|_p^p \leqslant 2^p\|f\|_p^p$ и фокусирующего свойства аппроксимативной единицы. Так что по каждому $\varepsilon > 0$ мы можем сначала найти $\delta : |I| < \varepsilon$, а потом $h : |II| < \varepsilon$. □

Следствие 4.5. *Тригонометрические многочлены плотны в $L^p(-\pi,\pi)$*

Доказательство. Ядра Фейера $K_N(y)$ – аппроксимативная единица при $N \to \infty$, значит $\|\sigma_N(f) - f\|_p = \|f * K_N - f\|_p \to 0$, $n \to \infty$. Но $\sigma_n(f)$ – тригонометрический многочлен по своему определению. □

Доказательство теоремы (ii). Проверим на всякий случай, что $f * \omega_h \in C(\mathbb{T})$:

$$|(f * \omega_h)(x+u) - (f * \omega_h)(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u-y) - f(x-y)|\omega_h(y)dy \rightrightarrows 0, \quad u \to 0,$$

поскольку $f(x+u-y) - f(x-y) \rightrightarrows 0$, $u \to 0$ ($\mathbb{T}$ - компакт). Теперь доказываем также, как (i):

$$|(f * \omega_h)(x) - f(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|\omega_h(y)dy = \int_{|y|\leqslant\delta} + \int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} = I + II,$$

$I \to 0$ при $\delta \to 0$ (равномерно по h) из-за непрерывности f, а $II \to 0$ при $h \to 0$ для каждого фиксированного δ. □

Следствие 4.6. *(i) Тригонометрические многочлены плотны в $C(\mathbb{T})$.*
[ядра Фейера - аппроксимативная единица]
(ii) Пусть $f \in L^1(\mathbb{T})$ непрерывна в точке x_0. Тогда $(f * \omega_h)(x_0) \to f(x_0)$, $h \to 0$ В частности, $\sigma_n(f)(x_0) \to f(x_0)$, $n \to \infty$, если f непрерывна в x_0.
[см. доказательство теоремы]
(iii) Пусть $f \in L^1(\mathbb{T})$: $\exists f(x_0 \pm 0)$. Тогда $\sigma_n(f)(x_0) \to \frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$, $n \to \infty$.
[разобьем f в сумму скачка $\mathrm{const} \cdot \mathrm{sign}(x-x_0)$ и непрерывной в x_0 функции]
(iv) Пусть $f \in L^1(\mathbb{T})$ непрерывна в точке x_0 (или $\exists f(x_0 \pm 0)$). Тогда ряд Фурье в точке x_0 или сходится к $f(x_0)$ ($\frac{1}{2}(f(x_0-0) + f(x_0+0))$), или расходится.
[регулярность метода суммирования Чезаро]

Замечание 4.7. Вместо условия положительности $\omega_h \geqslant 0$ достаточно требовать $\int_{-\pi}^{\pi} |\omega_h(y)|dy \leqslant C < +\infty$, то есть равномерную (по h) ограниченность норм $\|\omega_h\|_1$. Однако это все равно не выполняется для ядер Дирихле $D_N(y)$.

5. Функции ограниченной вариации. Признак Жордана сходимости ряда Фурье.

Определение 5.1. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Тогда* **вариацией f на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$** *называется величина $\operatorname*{Var}_{[a,b]} f := \sup_{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.*

Лемма 5.2. *(i) Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ монотонна. Тогда $\operatorname*{Var}_{[a,b]} f = |f(b) - f(a)|$.*
(ii) $\operatorname*{Var}_{[a,b]} f < +\infty$, если и только если существуют возрастающие $f_{1,2}$: $f = f_1 - f_2$ (для $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ существуют возрастающие $f_{1,2,3,4}$: $f = (f_1-f_2) + i(f_3-f_4)$).

Доказательство. $f_1(x) := \operatorname*{Var}_{[a,x]} f$. □

Замечание 5.3. Пусть $Var_{[a,b]}f < +\infty$ и $x_0 \in [a,b]$. Тогда существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, поскольку это справедливо для монотонных функций.

Лемма 5.4. *Пусть $\operatorname*{Var}_{[a,b]} f < +\infty$. Тогда $\left|\int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx\right| = O\left(\frac{1}{\omega}\right)$, $\omega \to \pm\infty$.*

Доказательство. Например для $\int_a^b f(x)\cos\omega x dx$ и возрастающей f. Пусть x_k – нули $\cos\omega x$. Тогда $\int_a^b = \int_a^{x_1} + \left(\int_{x_1}^{x_2} + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n}\right) + \int_{x_n}^b$. Сумма в скобках - знакопеременная с монотонными слагаемыми, поэтому оценивается через последнее слагаемое. □

Теорема 5.5 (Харди-Ландау). *Пусть $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ и $\sum_{n=1}^\infty a_n \overset{(C,1)}{=} A$ (по Чезаро). Тогда $\sum_{n=1}^\infty a_n = A$ и в обычном смысле.*

Доказательство. $S_{n+1} + \ldots + S_{n+k} = (n+k)\sigma_{n+k} - n\sigma_n = kS_n + \sum_{j=1}^k (k+1-j)a_{n+j}$. Отсюда

$$S_n = \sigma_{n+k} + \frac{n}{k}(\sigma_{n+k}-\sigma_n) - \sum_{j=1}^k \frac{k+1-j}{k}\, a_{n+j}.$$

Теперь оцениваем a_{n+j} и оптимизируем по k ($\approx \sqrt{\varepsilon} \cdot n$). □

Следствие 5.6 (**признак Жордана сходимости ряда Фурье**). *Пусть* $f \in L^1(-\pi,\pi)$, $f(x+2\pi) \equiv f(x)$. *Пусть точка* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такова, что* $\operatorname*{Var}_{[x_0-\delta_0,x_0+\delta_0]} f < +\infty$ *для некоторого* $\delta_0 > 0$. *Тогда* $S_N(x_0) \to \frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$, $N \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что значения $f(x_0 \pm 0)$ существуют, так как вариация f на $[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]$ конечна. Заменим f на $f \cdot \chi_{[x_0-\delta_0,x_0+\delta_0]}$ (можно в силу локальности сходимости). Тогда $a_n, b_n = O(\frac{1}{n})$ по лемме и мы можем применить теорему Харди-Ландау. □

Следствие 5.7 (**Признак Дирихле**). *Пусть* $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *кусочно монотонна и имеет конечное число разрывов. Тогда ряд Фурье сходится к* $\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$ *во всех точках* $x_0 \in [-\pi,\pi]$.

Доказательство. В этом случае $\operatorname*{Var}_{[-\pi,\pi]} f < +\infty$. □

Замечание 5.8 (*Факты о поточечной сходимости рядов Фурье*).
(i) Существует функция из $L^1(-\pi,\pi)$, ряд Фурье которой расходится в каждой точке (Колмогоров).
(ii) Существует нетривиальный тригонометрический ряд, сходящийся к 0 почти всюду (Меньшов). Отметим, что если $a_n = b_n = 0$ для всех n и некоторой $f \in L^1(-\pi,\pi)$, то $f \equiv 0$, поскольку $\sigma_N(f) \equiv 0 \underset{N\to\infty}{\overset{L^1}{\to}} f$.
(iii) Теорема Карлесона (1966):
Для каждой $f \in L^2(-\pi,\pi)$ ряд Фурье сходится к $f(x)$ почти всюду.

6. Ортогональные системы и ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 6.1. $\sum_{n=1}^\infty x_n$, $x_n \in H$ *называется* **ортогональным рядом**, *если* $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ *для всех* $n \neq m$ *(то есть слагаемые попарно ортогональны).*

Замечание 6.2. Пример – обычный тригонометрический ряд Фурье в $L^2(-\pi,\pi)$.

Утверждение 6.3. *Пусть* $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *– ортогональный ряд. Тогда*
(i) Ряды $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *и* $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$ *сходятся или не сходятся одновременно.*
(ii) Пусть $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *– биекция. Тогда ряды* $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *и* $\sum_{n=1}^\infty x_{\omega(n)}$ *сходятся или не сходятся одновременно и если сходятся, то к одной и той же сумме.*

Доказательство. (i) $\left\|\sum_{n=m}^k x_n\right\|^2 = \sum_{n=m}^k \|x_n\|^2$, поэтому фундаментальность последовательности частичных сумм сохраняется.
(ii) $\left\langle \sum_{n=1}^\infty x_n - \sum_{n=1}^\infty x_{\omega(n)}, x_m \right\rangle = 0$ для каждого $m \geqslant 1$. □

Определение 6.4. *(i) Система* $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ *называется* **ортогональной**, *если* $e_n \neq 0$, $n \geqslant 1$ *и* $\langle e_n, e_m\rangle = 0$, $n \neq m$. *Система называется ортонормированной, если к тому же* $\|e_n\| = 1$, $n \geqslant 1$.
(ii) Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ *– ортогональная система. Для каждого* $x \in H$ *определим* **коэффициенты Фурье** $c_n := \dfrac{\langle x, e_n\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle}$ *и* **ряд Фурье** $\sum_{n=1}^\infty c_n e_n$.

Замечание 6.5. (i) Если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, то система $\left\{\dfrac{e_n}{\|e_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормирована. При этом ряды Фурье относительно обеих систем одинаковы.
(ii) Для ортонормированной системы $c_n = \langle x, e_n\rangle$.
(iii) $\langle x - c_n e_n, e_n\rangle = 0$.

Утверждение 6.6. *Пусть $S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$. Тогда*
(i) $x - S_N \perp L_N = \mathrm{span}(e_1, ..., e_N)$.
(ii) $\|x-S_N\| \leqslant \|x-y\|$ для всех $y \in L_N$ (S_N – наилучшее приближение к x в L_N).
(iii) $\|x\| \geqslant \|S_N\|$.

Доказательство. (ii) $\|x-y\|^2 = \|x-S_N\|^2 + \|S_N-y\|^2$. (iii) $\|x\|^2 = \|x-S_N\|^2 + \|S_N\|^2$. □

Следствие 6.7 (неравенство Бесселя). *Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогональная система, $x \in H$. Тогда*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2.$$

Доказательство. $\|S_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \|e_n\|^2$. □

Определение 6.8. *Пусть дана система векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве X. Она называется* **независимой**, *если $a_1e_1 + ... + a_Ne_N = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$ и* **полной**, *если $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N, \alpha_1, ..., \alpha_N : \|x - (a_1e_1 + ... + a_Ne_N)\| < \varepsilon$.*

Замечание 6.9. Очевидно, любая ортогональная система в гильбертовом пространстве независима.

Теорема 6.10. *Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогональная система в H. Следующие утверждения равносильны:*
(i) Для любого $x \in H$ верно $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ (в этом случае система называется **ортогональным базисом***).*
(ii) Для любых $x, y \in H$ верно

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\overline{c_n(y)}\|e_n\|^2.$$

(iii) Для каждого $x \in H$ верно

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2$$

(это равенство называется **равенством Парсеваля***).*
(iv) Если $x \in H$: $\langle x, e_n\rangle = 0$ для всех $n \geqslant 1$, то $x = 0$.
(v) Система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна.

Доказательство. Очевидно $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$; $(i) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iv)$. □

Замечание 6.11. Система $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна в $L^2(-\pi, \pi)$ и плотна (так как тригонометрические многочлены плотны). Таким образом, это ортогональный базис пространства $L^2(-\pi, \pi)$.

Следствие 6.12. *Пусть* $f \in L^2(-\pi,\pi)$. *Тогда*
(i) $f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$ *в* $L^2(-\pi,\pi)$ *(без всякого усреднения!).*
(ii) $\|f\|_2^2 = \pi\left(\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\right)$ *(равенство Парсеваля).*

Доказательство. Пункты (i) и (iii) теоремы. □

Примеры 6.13 (*Другие ортогональные системы.* **Ортогональные полиномы.**).

Пусть дан промежуток $I \subset \mathbb{R}$ и мера $d\mu$ на нем. Рассмотрим гильбертово пространство $H = L^2(I, d\mu)$. Пусть функции $1, x, ..., x^n, ...$ линейно независимы в $L^2(I, d\mu)$ (для этого достаточно, чтобы носитель меры $\operatorname{supp} d\mu$ содержал бесконечное число точек).

Лемма 6.14. *(i) Существует такая последовательность полиномов* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *что* $\deg P_n = n$ *и* $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ *для всех* $n \neq m$.
(ii) Если $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\widetilde{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *– две такие последовательности, то* $P_n(x) = c_n\widetilde{P}_n(x)$ *для некоторой последовательности констант* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. (i) Ортогонализация Грама-Шмидта. (ii) Индукция по n. □

(i) Многочлены Чебышева I-ого рода.

$$H = L^2\left((-1,1), \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right); \qquad P_n(x) := \cos(n \arccos x).$$

Ортогональность вытекает из ортогональности тригонометрической системы (замена $t = \arccos x$). Полнота: многочлены плотны в $C([-1,1])$ (теорема Вейерштрасса), а $C([-1,1])$ плотно в H.

(ii) Многочлены Лежандра.

$$H = L^2\,(-1,1)\,; \qquad P_n(x) := \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}.$$

Ортогональность: интегрирование по частям, полнота: из теоремы Вейерштрасса.

(iii) Многочлены Эрмита.

$$H = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx); \qquad H_n(x) := e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}.$$

Ортогональность: интегрирование по частям. Полноту докажем позже.

7. Интеграл Фурье. Простые свойства.

Наводящие соображения. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – "хорошая" функция. Рассмотрим сужение $f\big|_{[-T,T]}$, где T – большое число. Система $\{e^{i\frac{\pi n}{T}x}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ является ортогональной в $L^2(-T,T)$. Поэтому

$$f\big|_{[-T,T]} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{\pi n}{T}x}, \qquad c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-i\frac{\pi n}{T}x}dx.$$

Устремляя $T \to +\infty$ и вводя непрерывный параметр $t = \frac{\pi n}{T}$ можно (на уровне формальных манипуляций) увидеть в этой формуле аналог римановых сумм и прийти к следующему результату:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(t)e^{itx}dt, \qquad c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx.$$

Это и есть преобразование Фурье. Мы, однако, будем использовать другую нормировку.

Определение 7.1. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$. **Преобразованием Фурье** *функции* f *называется функция*

$$\widehat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Замечание 7.2. Наша ближайшая цель – формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)e^{itx}dt.$$

Утверждение 7.3 (простые свойства). *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Тогда*
(i) $|\widehat{f}(t)| \to 0$, $t \to \pm\infty$. *(ii)* $|\widehat{f}(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$.
(iii) Функция $\widehat{f}$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. (i) Лемма Римана-Лебега. (ii) очевидно. (iii)

$$|\widehat{f}(t+s) - \widehat{f}(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-isx} - 1|dx$$

и далее по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. □

Теорема 7.4. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$ *выполнено условие Дини: для некоторых чисел* $f(x_0 \pm 0)$ *и* $\delta_0 > 0$ *справедливо*

$$\int_{x_0-\delta_0}^{x_0} \frac{|f(x)-f(x_0-0)|}{|x-x_0|}\,dx, \ \int_{x_0}^{x_0+\delta_0} \frac{|f(x)-f(x_0+0)|}{|x-x_0|}\,dx < +\infty.$$

Тогда справедлива формула обращения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)e^{itx_0}dt := \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} \widehat{f}(t)e^{itx_0}dt = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Доказательство. (В принципе, не умаляя общности можно считать $x_0 = 0$.) Аналогично доказательству для рядов.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} \widehat{f}(t)e^{itx_0}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin A(x-x_0)}{\pi(x-x_0)}\,f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty}.$$

Далее каждый интеграл разбиваем на два: для $f(x) - f(x_0 \pm 0)$ и для константы $f(x_0 \pm 0)$ и используем интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin Ay}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$. Наконец

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}\,\sin A(x-x_0)dx = \int_{x_0}^{x_0+\delta_0} + \int_{x_0+\delta_0}^{+\infty},$$

первое слагаемое по лемме Римана-Лебега, а второе разбиваем назад на $f(x)$ и константу. Для $f(x)$ снова лемма Римана-Лебега, для константы – "хвост" интеграла Дирихле. □

Следствие 7.5 (локальность формулы обращения). *Пусть* $f, \widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$: $f\big|_{[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]} = \widetilde{f}\big|_{[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0]}$. *Тогда формула обращения в точке* x_0 *справедлива для функции* f *тогда и только тогда, когда она справедлива для* $\widetilde{f}$.

Доказательство. $f - \widetilde{f}$ удовлетворяет условию Дини в точке x_0. □

8. Свертка функций, заданных на прямой.

Определение 8.1. *Пусть* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. **Сверткой** f *и* g *называется функция*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt.$$

Замечание 8.2. В отличие от случая окружности, у нас нет "максимального" пространства, в котором было бы естественно определять свертку, поскольку теперь $L^p(\mathbb{R})$ *не является* подмножеством $L^1(\mathbb{R})$ при $p > 1$.

Теорема 8.3. *(i) Пусть* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Тогда свертка* $f*g$ *определена почти всюду,* $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.
(ii) Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. *Тогда* $f*g$ *определена почти всюду,* $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ *и* $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_1$.
(iii) Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда* $f * g$ *является равномерно непрерывной на* $\mathbb{R}$ *функцией и* $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Замечание 8.4. Эта теорема (кроме утверждения о непрерывности) является частными случаями неравенства Юнга: $\|f * g\|_s \leqslant \|f\|_p \cdot \|f\|_q$, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{s}$.

Доказательство. (i) смотри $L^1(\mathbb{T})$. (ii) неравенство Гельдера для $|f| \cdot |g|^{1/p}$ и $|g|^{1/q}$ (случаи $p = 1$ и $p = +\infty$ отдельно). (iii) Ограниченность из неравенства Гельдера, непрерывность:

$$|(f * g)(x + y) - (f * g)(x)| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g(\cdot + y) - g\|_q$$

(если $q = +\infty$, то аналогично через f). □

Определение 8.5. *Семейство функций* $\omega_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \to 0$, *называется* **аппроксимативной единицей**, *если*
(i) $\omega_h(x) \geqslant 0$; *(ii)* $\int_{\mathbb{R}} \omega_h(x) dx = 1$;
(iii) Для каждого $\delta > 0$ *выполняется* $\int_{\delta \leqslant |x|} \omega_h(x) dx \to 0$, $h \to 0$.

Теорема 8.6. *(i) Пусть* $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < +\infty$. *Тогда* $\|f * \omega_h - f\|_p \to 0$, $h \to 0$.
(ii) Пусть $f \in C_0(\mathbb{R})$ *(т.е.* $f \in C(\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{supp} f$ *компактен). Тогда* $(f * \omega_h)(x) \rightrightarrows f(x)$, $h \to 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Полностью повторяет случай свертки на окружности. □

Упражнение 8.7. Как мы видели,
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} e^{itx_0}\widehat{f}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin A(x-x_0)}{\pi(x-x_0)}\,dx=(f*D_A)(x_0),\qquad D_A(y)=\frac{\sin Ay}{\pi y}\,.$$
Как и для рядов, семейство функций $D_A(y)$, $A\to+\infty$ *не является* аппроксимативной единицей ($\int_{-\infty}^{+\infty}|D_A(y)|dy=+\infty$). Однако мы можем попробовать усреднения
$$K_A(y):=\frac{1}{A}\int_0^A D_a(y)da=\frac{1-cosAy}{\pi Ay^2}.$$
Проверьте, что $K_A(y)$, $A\to+\infty$ – аппроксимативная единица.

Следствие 8.8 (теорема единственности). *Пусть $f\in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}(t)\equiv 0$, $t\in\mathbb{R}$. Тогда $f=0$ (как функция из $L^1(\mathbb{R})$, то есть почти всюду).*

Доказательство. $\widehat{f}(t)\equiv 0$ дает $f*D_A=0$, а значит $f*K_A=0$, но K_A - аппроксимативная единица. □

Упражнение 8.9. Доказать признак Жордана для интегралов Фурье (действуя в точности аналогично доказательству для рядов, т.е. доказать аналог теоремы Харди-Ландау и т.п.).

Теорема 8.10 (алгебраические свойства свертки). *(i) $f*g$ – билинейная операция относительно f и g.*
(ii) $f*g=g*f$ (всегда, когда свертка определена).
(iii) $(f*g)*h=f*(g*h)$ (для определенности, пусть $f,g,h\in L^1(\mathbb{R})$).
(iv) Для $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ справедливо $\widehat{(f*g)}(t)=\sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(t)\cdot\widehat{g}(t)$.

Доказательство. (i),(ii) очевидно. (iii) следует из (iv) (альтернатива: руками).
(iv): как и в случае окружности, $e^{-ixt}=e^{-iyt}\cdot e^{-i(x-y)t}$. □

Замечание 8.11. Пусть ω_h – аппроксимативная единица. Мы знаем, что $\|f*\omega_h-f\|_1\to 0$, $h\to 0$. Значит, из-за (iv), должно быть $\widehat{\omega}_h(t)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ при каждом t. Это отвечает общему принципу – чем более сконцентрирована сама функция, тем более "расплывчато" ее преобразование Фурье.

9. Связь преобразования Фурье и дифференцирования. Класс Шварца.

Утверждение 9.1. *(i) Пусть $f\in C^1(\mathbb{R})$: $f,f'\in L^1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f'}(t)=it\widehat{f}(t)$.*
(ii) Пусть $f\in L^1(\mathbb{R})$: $x\cdot f\in L^1(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f}\in C^1(\mathbb{R})$ и $(\widehat{f})'(t)=-i\widetilde{xf}(t)$.

Доказательство. (i) Интегрирование по частям на промежутке $[-A,A]$. Подстановка стремится к нулю хотя бы по какой-то подпоследовательности $A_n\to+\infty$, поскольку $f\in L^1(\mathbb{R})$. (ii) По определению пишем разностное отношение и переходим к пределу (мажоранта из оценки $|e^{-isx}-1|\leqslant|sx|$). □

Определение 9.2. Классом Шварца быстроубывающих функций *называется множество*
$$\mathcal{S}=\left\{f\in\mathcal{S}:\forall n,m\geqslant 0\ p_{n,m}(f):=\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^n|f^{(m)}(x)|<+\infty\right\}.$$

Замечание 9.3. (i) В частности, $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S} \subset C^\infty(\mathbb{R})$. (ii) $\{p_{n,m}\}_{n,m=0}^{+\infty}$ является счетной системой полунорм в $\mathcal{S}$, поэтому $\mathcal{S}$ – метризуемое пространство. (iii) функция e^{-x^2} является примером элемента $\mathcal{S}$, не лежащего в C_0^∞.

Утверждение 9.4. *$\mathcal{S}$ - полное пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – фундаментальная последовательность в $\mathcal{S}$ (т.е. $p_{n,m}(f_k - f_l) \to_{k,l\to\infty} 0$ для всех n, m). Последовательности $\{x^n f_k^{(m)}(x)\}$ фундаментальны в $C(\mathbb{R})$, поэтому есть пределы $g_{n,m}(x) = x^n g_m(x)$. $g_m = g'_{m-1}$ из предельного перехода в $g_m(x) = g_m(0) + \int_0^x g'_{m-1}(t)dt$. □

Утверждение 9.5. *(i) $f \mapsto \widehat{f}$ непрерывно как отображение $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$.*
(ii) Обратное отображение $\widehat{f}(t) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\widehat{f}(t)dt$ также непрерывно $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Доказательство. (i) $p_{n,m}(\hat{f}) = \|t^n(\widetilde{f})^{(m)}\|_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|(x^m f)^{(n)}\|_1$ и эта величина оценивается через $p_{k,l}(f)$, $0 \leqslant k \leqslant m+2$, $0 \leqslant l \leqslant n$. (ii) $f(x) = (\hat{f}(-t))^\wedge$. □

10. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$.

Теорема 10.1. *Для $f, g \in \mathcal{S}$ верно*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}dt.$$

В частности, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ *.*

Доказательство. Применяем формулу обращения для g, потом меняем порядок интегрирования. □

Определение 10.2. *Преобразование Фурье $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ – это продолжение отображения $f \mapsto \widehat{f}$ по непрерывности (относительно $\|\cdot\|_2$).*

Замечание 10.3. Для $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ сейчас преобразование Фурье определено двумя разными способами – поточечно $\widehat{f}(t)$ и $\mathcal{F}$. Почему это одно и то же? Приблизим функцию f гладкой (т.е. C_0^∞) *одновременно в* L^1 *и* L^2 (сначала срежем, потом свернем с аппроксимативной единицей с компактным носителем). Поскольку для $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$ два определения совпадают, отсюда легко вывести противоречие.

Теорема 10.4 (Планшереля). *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда*
(i) $\widehat{f}(t) = \underset{A\to+\infty}{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} e^{-itx} f(x)dx$ (l.i.m. – это предел в L^2).
(ii) $f(x) = \underset{A\to+\infty}{l.i.m.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} e^{itx}\widehat{f}(t)dt$.
(iii) $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Замечание 10.5. f и $\widehat{f}$ суммируемы на $[-A, A]$, поскольку $L^2(-A, A) \subset L^1(-A, A)$.

Доказательство. (i) Вытекает из того, что $f \cdot \chi_{[-A,A]} \to f$, $A \to +\infty$, в $L^2(\mathbb{R})$. (ii) аналогично. (iii) верно для $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ плотно в $L^2(\mathbb{R})$ (мы это уже использовали). □

11. Разнообразные примеры, следствия и приложения.

Пример 11.1. *Преобразованием Фурье функции* $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0$ *есть* $\widehat{f}(t)=\sigma e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

Доказательство. Выделим полный квадрат в экспоненте, сдвинем контур интегрирования с $(-\infty+i\sigma^2, +\infty+i\sigma^2)$ на вещественную прямую. □

Пример 11.2. *Пусть* $f\in\mathcal{S}$: $\|f\|_2=1=\|\widehat{f}\|_2$. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2|f(x)|^2dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^2|\widehat{f}(t)|^2dt\geqslant\frac{1}{4}.$$

Замечание 11.3. Предельным переходом автоматически отсюда можно получить такое же неравенство для $f\in L^2$ (в крайне случае, слева будет равен $+\infty$).

Доказательство. $\int_{-\infty}^{+\infty}|\beta xf(x)-f'(x)|^2dx\geqslant 0$, поэтому $\beta^2M_1+M_2-\beta\geqslant 0$. □

Упражнение 11.4. Равенство достигается на функциях $\frac{c}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $|c|=1$ и только на них.

Следствие 11.5. *Для любых* $a,b\in\mathbb{R}$ *и* $f\in\mathcal{S}$: $\|f\|_2=1=\|\widehat{f}\|_2$ *верно*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a|^2|f(x)|^2dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|t-b|^2|\widehat{f}(t)|^2dt\geqslant\frac{1}{4}.$$

Пример 11.6 (*Полнота функций Эрмита*). *Функции Эрмита* $h_n(x):=H_n(t)e^{\frac{-x^2}{2}}$ *(это ортогональная система в* $L^2(\mathbb{R})$*) полны в* $L^2(\mathbb{R})$.

Замечание 11.7. В частности, следует полиномы Эрмита плотны в $L^2(\mathbb{R},e^{-x^2}dx)$.

Доказательство. Пусть $\langle h,h_n\rangle=0$. Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-itx)^k}{k!}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$. Переходя к пределу (мажоранта $|h(x)|e^{|tx|}e^{-\frac{x^2}{2}}$) получаем $(h(x)e^{-\frac{x^2}{2}})^\wedge\equiv 0$. □

Пример 11.8 (*Формула суммирования Пуассона*). *Пусть* $f\in\mathcal{S}$, $\tau>0$. *Тогда*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n\tau)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\tau}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}\left(m\cdot\frac{2\pi}{\tau}\right)$$

Замечание 11.9. Эта формула верна и при (естественных) менее обременительных ограничениях на f.

Доказательство. $F(x):=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(x+n\tau)$, $x\in[\frac{-\tau}{2},\frac{\tau}{2}]$. Раскладываем $F\in C^\infty$ в ряд Фурье на этом промежутке, в качестве коэффициентов возникают значения $\widehat{f}$. Подставляем $x=0$, получаем требуемую формулу. □

Упражнение 11.10. (i) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$ дает $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\pi^2n^2}{\sigma^2}}=\sigma\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi^2m^2\sigma^2}$.
(ii) Вычислить $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$, $a>0$. Перейти к пределу при $a\to 0$.

Пример 11.11 (*Теорема Котельникова*). *Пусть* $f\in\mathcal{S}$, $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset[-a,a]$. *Тогда* f *восстанавливается по набору своих значений* $f(\frac{\pi}{a}\cdot k)$, $k\in\mathbb{Z}$ *по формуле*

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{\pi k}{a}\right)\cdot\frac{\sin(ax-\pi k)}{ax-\pi k}.$$

Доказательство. В духе предыдущего доказательства, но у нас нет времени. (надо разложить $\widehat{f}$ в тригонометрический ряд на $[-a, a]$, в качестве коэффициентов возникнут $f(\frac{\pi}{a} \cdot k)$, пишем формулу обращения f через $\widehat{f}$ и интегрируем почленно). $\square$

Пример 11.12 (*Уравнение теплопроводности).* (не будем задаваться законностью тех или иных действий!) Пусть $u(t, x)$ – температура точки металлического стержня x в момент времени t. Из физики:

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

Делая преобразование Фурье по переменной x: $u(t, x) \mapsto \widehat{u}(t, y)$, приходим к

$$\widehat{u}_t = -a^2 y^2 \widehat{u}.$$

Таким образом, $\widehat{u}(t, y) = e^{-a^2 y^2 t} \widehat{u}(0, u)$. Так что если $u_0(x) = u(0, x)$, то

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} e^{-a^2 y^2 t} \widehat{u_0}(y) dy.$$

Упражнение 11.13. Выписать решение явно для $u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.