1 Построение фундаментальных решений

Рассматривается уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C},\ q(x) \in L^1_{\mathbb{C}}(0,1),\ y \in W_1^2(0,1)$

Пусть $q(x) = 0$, тогда решения это $\cos\sqrt{\lambda}x$ и $\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$. Эти решения определены при всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Лемма 1.

$$y'' + \lambda y = f \in L^1(0,1)$$

Тогда решения $C_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \cdot \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int\limits_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt$

Доказательство. Подставим и продифференцируем. □

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \Leftrightarrow y(x) = y(0)\cos\sqrt{\lambda}x + y'(0)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int\limits_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)y(t)dt$$

(посл. инт. - вольтерров оператор. Спектральный радиус вольт. равен 0 $\rightsquigarrow$ $I+$ вольт. – обратим.)

Определение. θ, φ – решения (1)

$$\theta(0) = 1 = \varphi'(0)$$

$$\theta'(0) = 0 = \varphi(0)$$

Замечание. На самом деле $\theta = \theta(x, \lambda, q)$.

Обозначение. Иногда будем обозначать $z = \sqrt{\lambda}$, а $|z|_1 = max\{1, |z|\}$

Лемма 2.

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(x),$$

где $\theta_0(x) = \cos\sqrt{\lambda}x,\ \theta_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)\theta_n(t)dt;$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x),$$

где $\varphi_0(x) = \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}},\ \varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)\varphi_n(t)dt.$

Ряды сходятся равномерно, если λ, q – ограничены. Их можно почленно дифференцировать.

$$|\theta - \sum_{n=0}^{k} \theta_k(x)| \leqslant \frac{e^{|\operatorname{Im} z|x + \frac{1}{|z|_1}\int_0^x |q(t)|dt}}{(k+1)!|z|_1^{k+1}} \cdot \left(\int_0^x |q(t)|dt\right)^{k+1}$$

$$\frac{1}{|z|_1}|\theta'(x) - \sum_{n=0}^{k} \theta'_n(x)| \leqslant \frac{e^{|\operatorname{Im} z|x + \frac{1}{|z|_1}\int_0^x |q(t)|dt}}{(k+1)!|z|_1^{k+1}} \cdot \left(\int_0^x |q(t)|dt\right)^{k+1}$$

$$|z_1|\left|\varphi(x)-\sum_{n=0}^{k}\varphi_n(x)\right|\leqslant\frac{e^{|\operatorname{Im} z|x+\frac{1}{|z|_1}\int_0^x|q(t)|dt}}{(k+1)!|z|_1^{k+1}}\cdot\left(\int_0^x|q(t)|dt\right)^{k+1}$$

$$\left|\varphi'(x)-\sum_{n=0}^{k}\varphi'_n(x)\right|\leqslant\frac{e^{|\operatorname{Im} z|x+\frac{1}{|z|_1}\int_0^x|q(t)|dt}}{(k+1)!|z|_1^{k+1}}\cdot\left(\int_0^x|q(t)|dt\right)^{k+1}$$

Доказательство.

$$\theta_n(x)=\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}\;q(t)\theta_{n-1}(t)dt=$$

$$=\underset{0\leqslant t_n\leqslant\ldots\leqslant t_1\leqslant x}{\int\!\cdots\!\int}\frac{\sin\left(z(x-t_1)\right)}{z}\cdot\frac{\sin\left(z(t_1-t_2)\right)}{z}\times\cdots\times\frac{\sin\left(z(t_{n-1}-t_n)\right)}{z}\cdot\cos\left(zt_n\right)\cdot q(t_1)\ldots q(t_n)dt_1\ldots dt_n$$

- $|\cos\left(zt\right)|\leqslant e^{|\operatorname{Im} z|t},$ так как $\theta\leqslant\dfrac{e^{|\operatorname{Im} z|t}}{|z|}$ по смыслу z большое.
- $\left|\dfrac{\sin\left(zt\right)}{|z|_1}\right|\leqslant\dfrac{e^{|\operatorname{Im} z|t}}{|z|_1},$ так как $=\left|\int_0^t\cos\left(zs\right)ds\right|\leqslant e^{|\operatorname{Im} z|t}$ по смыслу z маленькое.

Следовательно,

$$\theta_n(x)\leqslant\frac{e^{|\operatorname{Im} z|x}}{|z|_1^n}\underset{0\leqslant t_n\leqslant\ldots\leqslant t_1\leqslant x}{\int\!\cdots\!\int}|q(t_1)|\ldots|q(t_n)|\;dt_1\ldots dt_n$$

$$\underset{0\leqslant t_n\leqslant\ldots\leqslant t_1\leqslant x}{\int\!\cdots\!\int}|q(t_1)|\ldots|q(t_n)|\,dt_1\ldots dt_n=\frac{1}{n!}\underset{t_1,\ldots,t_n\in[0,x]}{\int\!\cdots\!\int}|q(t_1)|\ldots|q(t_n)|\,dt_1\ldots dt_n=\frac{1}{n!}\left(\int\limits_0^x|q(t)|dt\right)^n$$

Следовательно,

$$|\theta_n(x)|\leqslant e^{|\operatorname{Im} z|x}\frac{æ^n}{n!},\text{ где }æ=\frac{\int\limits_0^x|q(t)|\;dt}{|z|_1}$$

Отсюда равномерная сходимость ряда очевидна.

$$e^{|\operatorname{Im} z|x}\left(\frac{æ^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{æ^{k+2}}{(k+2)!}+\ldots\right)\leqslant e^{|\operatorname{Im} z|x}\frac{æ^{k+1}}{(k+1)!}\left(1+æ+\frac{æ^2}{2}+\frac{æ^3}{6}+\ldots\right)=\frac{æ^{k+1}}{(k+1)!}\,e^{|\operatorname{Im} z|x+æ},$$

где $æ=\dfrac{\int\limits_0^x|q(t)|\;dt}{|z|_1}$

Для $\varphi_n(x)$ аналогично.

$$\varphi'_n(x)=\int\limits_0^x\cos\sqrt{\lambda}(x-t)q(t)\varphi_{n-1}(t)dt=\ldots\rightsquigarrow$$

можно почленно дифф-ть (т.к. для произв. равном сх-ся). Далее аналогично.

$\square$

2 Спектр с точки зрения дифференциального уравнения

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Определение. λ – собственное значение задачи Дирихле тогда и только тогда, когда существует её нетривиальное решение.

Лемма 3. *λ – собственное значение $\Leftrightarrow W(\lambda) = 0$, где $W(\lambda) = W(\lambda, q) := -\varphi(1, \lambda, q)$ – целая функция $\lambda \in \mathbb{C}$*

Доказательство.

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = C\varphi(x) \quad (y = c_1\theta(x) + c_2\varphi(x), \;\; \text{но } y(0) = 0 \rightsquigarrow c_1 = 0)$$

Вопрос: обнуляется ли φ в 1? $W(\lambda)$ – целая функция, так как $\varphi_n(1, \lambda, q)$ – целая функция. Ряд из производных сходится равномерно $\rightsquigarrow$ φ – целая. □

Замечание.

$$(\dot{\cdot}) = \frac{d\,\cdot}{d\lambda}, \;\; (\,\cdot\,)' = \frac{d\,\cdot}{dx}$$

Определение. Вронскианом функций f и g называется выражение $fg' - f'g$. Обозначается $\{f, g\}$.

Замечание. $q = \overline{q} \Rightarrow \varphi(x, \overline{\lambda}) = \overline{\varphi(x, \lambda)}$

Утверждение 1. *Пусть $\overline{q} = q$, тогда*

1. λ_n – собственное значение $\Rightarrow \lambda_n \in \mathbb{R}$.

2. $\forall n \;\; \dot{W}(\lambda_n) \neq 0$, более того $\dot{\varphi}(1, \lambda_n)\varphi'(1, \lambda_n) = \int_0^1 \varphi^2(t, \lambda_n)\, dt$.

3. Собственных значений бесконечно много, и верно что $\lambda_n(q) = \pi^2 n^2 + O(1)$.

4. $W(\lambda) = W^0(\lambda) \prod\limits_{n\geqslant 1} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \lambda_n^0} = [\sin = \Pi] = -\prod\limits_{n\geqslant 1} \left(1 - \frac{\lambda}{\pi^2 n^2}\right) \prod\limits_{n\geqslant 1} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \pi^2 n^2} =$

[всё абс. сх-ся, т.е. можно так.] $= -\prod\limits_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_n - \lambda}{\pi^2 n^2}$, где $W^0(\lambda) = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$, $\lambda_n^0 = \pi^2 n^2$.

Доказательство.

1. $\{\varphi, \overline{\varphi}\}' = \varphi\overline{\varphi}'' - \varphi''\overline{\varphi} = \varphi(q - \overline{\lambda})\overline{\varphi} - (q - \lambda)\varphi\overline{\varphi} = (\lambda - \overline{\lambda})|\varphi|^2 \Rightarrow \{\varphi, \overline{\varphi}\}\big|_0^1 = (\lambda - \overline{\lambda})\int\limits_0^1 |\varphi(t)|^2\, dt = \{\varphi, \overline{\varphi}\}(1)$ Т.к. λ – с.ч., то по лемме $\varphi(1) = 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$

2.
$$-\varphi'' + q\varphi = \lambda\varphi \tag{2}$$

Домножим уравнение (2) на $\dot{\varphi}$. Получим:

$$-\varphi''\dot{\varphi} + q\varphi\dot{\varphi} = \lambda\varphi\dot{\varphi} \tag{3}$$

Продифференцируем уравнение (2) по λ и домножим на φ:

$$-(\dot{\varphi})''\varphi + q\dot{\varphi}\varphi = \lambda\dot{\varphi}\varphi + \varphi^2 \tag{4}$$

Вычтем из уравнения (4) уравнение (3):

$$\varphi^2 = \varphi''\dot{\varphi} - \varphi(\dot{\varphi})'' = \{\dot{\varphi}, \varphi\}'$$

Интегрируем от 0 до 1 по t, $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, пусть $\lambda = \lambda_n$ – собственное значение, $\rightsquigarrow \varphi(1, \lambda_n) = 0$, получаем

$$\int\limits_0^1 \varphi^2(t)\,dt = \{\dot{\varphi}, \varphi\}\Big|_0^1 = \left(\dot{\varphi}\varphi' - (\dot{\varphi})'\varphi\right)(1) = (\dot{\varphi}\varphi')(1, \lambda_n)$$

3. $W(\lambda) = -\varphi(1, \lambda, q) = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{|\lambda|}\right)$, при $\lambda \to \infty$.

Теорема (Руше). *Рассмотрим функции $f(z), g(z) : |g(z)| < |f(z)|$ при $z \in C = \partial D$. Тогда f и $f + g$ имеют одинаковое количество нулей в D.*

Замечание. $|z - \pi n| \geqslant \frac{\pi}{2} \quad \forall n \Rightarrow |\sin z| \asymp e^{|\operatorname{Im} z|}$.

$|\lambda| = \pi^2(N+1/2)^2$ По теореме Руше, если N достаточно большое, то $W(\lambda)$ имеет ровно N нулей в области $|\lambda| < \pi^2(N + 1/2)^2$, и ровно 1 ноль в области $|\sqrt{\lambda} - \pi n| < \pi/2$. Следовательно, $\sqrt{\lambda_n} = \pi n + O(1)$ при $n \to \infty$. Далее

$$0 = W(\lambda_n) = \frac{-\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-\sin\sqrt{\lambda_n}}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Тогда

$$\sin\sqrt{\lambda_n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ и, следовательно, } \sqrt{\lambda_n} = \pi n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

4. Обозначим $u(\lambda) := W^0(\lambda)\prod\limits_{n\geqslant 1}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-\lambda_n^0}$.

Нужно проверить следующее равенство:$W(\lambda) = u(\lambda)$. Заметим, что любой ноль функции W является также нулем функции u. Кроме того любой ноль функции W прост. Следовательно, $\frac{u(\lambda)}{W(\lambda)}$ – целая функция. Далее пусть $|\lambda| = \pi^2(N + 1/2)^2$. Тогда

$$\frac{u(\lambda)}{W(\lambda)} = \frac{W^0(\lambda)}{W(\lambda)}\prod_{n\geqslant 1}\frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \lambda_n^0} = O(1)\prod_{n\geqslant 1}\left(1 + \frac{\lambda_n^0 - \lambda_n}{\lambda - \lambda_n^0}\right) = O(1)\prod_{n\geqslant 1}\left(1 + \frac{O(1)}{\lambda - \lambda_n^0}\right)$$

Кроме того можно написать следующую оценку:

$$\left|\sum_{n\geqslant 1}\frac{O(1)}{\lambda - \lambda_n^0}\right| \leqslant O(1)\left(\frac{1}{(N+1/2)^2+1} + \frac{1}{(N+1/2)^2 - N^2} + \frac{1}{(N+1)^2 - (N+1/2)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(N+2)^2 - (N+1/2)^2} + \ldots\right) = O(1)\left(N \cdot O\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{(1/2)^2} + \frac{1}{(3/2)^2} + \frac{1}{(5/2)^2} + \ldots\right) =$$
$$= O(1)$$

Замечание. Слагаемое $N \cdot O\left(\frac{1}{N}\right)$ получается из оценки первых N слагаемых. Остальные слагаемые получаются из неравенства $a^2 - b^2 > (a-b)^2$ при $a, b > 0$.

Тогда произведение сходится равномерно.
Следовательно, по теореме Лиувилля $\frac{u(\lambda)}{W(\lambda)} \equiv C$. Пусть $\lambda \to -\infty$, тогда $\frac{u(\lambda)}{W(\lambda)} \to 1$.

□

3 Теорема единственности для симметричных потенциалов

В этой части будем предполагать, что p и q вещественны.

Теорема 1. *Пусть* $q, p \in L^1_{even}(0,1) := \{q \in L^1 : q(x) \equiv q(1-x)\}$, *тогда*

$$\forall n \ \lambda_n(q) = \lambda_n(p) \Rightarrow q \equiv p$$

Определение. $\chi(x) = \chi(x, \lambda, q)$ – решение (1): $\chi(1) = 0, \ \chi'(1) = -1$

Замечание.

1. $\chi(x, \lambda, q) = \varphi(1-x, \lambda, q^\sharp)$, где $q^\sharp(x) := q(1-x)$
2. $W(\lambda) = \{\varphi, \chi\}(\lambda)$. Эта величина не зависит от x, так как вронскиан двух решений является константой. Положим $x = 1$, тогда $(\varphi\chi' - \varphi'\chi)(1) = -\varphi(1)$

Лемма 4. *Пусть* $q \in L^1_{even}(0,1)$, *то есть* $q = q^\sharp$. *Тогда* $\chi(x, \lambda_n) = (-1)^{n-1}\varphi(x, \lambda)$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \lambda_n$, то есть λ это собственное число. Тогда $\chi(x, \lambda_n) = C \cdot \varphi(x, \lambda_n)$. Так как $q = q^\sharp$, то $\varphi(x, \lambda_n) = C\chi(x, \lambda_n)$, причём C та же константа, что и раньше. Следовательно, $C = \pm 1$.Из *утверждения* (1) *пункт* 2 следует, что $\operatorname{sign} \varphi'(1, \lambda_n) = \operatorname{sign} \dot{\varphi}(1, \lambda_n)$. При $\lambda \to -\infty$ получаем, что $\operatorname{sign} \varphi(1, \lambda_n) = \operatorname{sign} \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \operatorname{sign} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}} - e^{-i\sqrt{\lambda}}}{2i\sqrt{\lambda}} = 1$

//График: затухающие волны сверху с λ_1

Так как все нули простые, то $\operatorname{sign} \dot{\varphi}(1, \lambda_n) = (-1)^n$. $\chi(x, \lambda_n) = C \cdot \varphi(x, \lambda_n)$, следовательно $-1 = \chi'(1, \lambda_n) = C \cdot \varphi'(1, \lambda_n)$. Кроме того $\operatorname{sign} \varphi'(1, \lambda_n) = (-1)^n$. Тогда $C = (-1)^{n-1}$. □

Доказательство теоремы (1). Докажем, что $\begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}(q) = \begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}(p)$. Тогда фундаментальные решения будут совпадать, а тогда будут совпадать и сами уравнения.

$$\begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}(x, \lambda, q) \cdot \begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}^{-1}(x, \lambda, p) = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}(x, \lambda, q)\begin{pmatrix} \chi' & -\chi \\ -\varphi' & \varphi \end{pmatrix}(x, \lambda, p) =$$

$$= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \varphi(q)\chi'(p) - \chi(q)\varphi'(p) & -\varphi(q)\chi(p) + \chi(q)\varphi(p) \\ \varphi'(q)\chi'(p) - \chi'(q)\varphi'(p) & -\varphi'(q)\chi(p) + \chi'(q)\varphi(p) \end{pmatrix}$$

($W(\lambda, p) = W(\lambda, q)$ из *утв.* (1) *п.*4, $W = \{\varphi, \chi\}$) Обозначим эту матрицу $K(x, \lambda)$. Заметим, что любой элемент является целой функцией по λ. У W есть только простые нули, они одинаковы при p и q по условию. Нужно доказать, что все они являются корнями любого элемента.

$$\varphi(x, \lambda_n, q)\chi'(x, \lambda_n, p) = (-1)^{n-1}\varphi(x, \lambda_n, q)\varphi'(x, \lambda_n, p) = \chi(x, \lambda_n, q)\varphi'(x, \lambda_n, p)$$

Теперь $|\lambda| = \pi^2(N + 1/2)^2$.

$$K(x, \lambda) = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x}}{|\sqrt{\lambda}|}\ e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|(1-x)}\right) & O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{|\lambda|}\right) \\ O\left(e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}\right) & O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(1) & O(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}) \\ O(|\sqrt{\lambda}|) & O(1) \end{pmatrix}$$

По теореме Лиувилля эта величина константа, то есть $K(x, \lambda) = K(x)$. Пусть теперь $\lambda \to -\infty$. Тогда $O(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}) \to 0$.

$$\frac{\varphi(q)\chi'(p) - \varphi'(p)\chi(q)}{W} \to 1.$$

Здесь всё меняем на главные слагаемые. Тогда $K_{11} = 1, K_{22} = 1$. $\begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}(q) = K \cdot \begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}(p)$, но $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$. Следовательно $\varphi(q) = \varphi(p)\ \ \forall x, \lambda,\ \ p = \frac{\lambda\varphi + \varphi''}{\varphi}$. $\Rightarrow q = p$ $\square$

4 Спектр с точки зрения самосопряженных операторов.

Рассмотрим $Hy := -y'' + qy,\ x \in [0, 1],\ D(H) := \{y \in W_2^2(0, 1) | y(0) = y(1) = 0\}$, при этом пусть $q = \bar{q},\ q \in L^2(0, 1)$. Докажем, что H – самосопряженный (неограниченный) оператор.

Лемма 5. *H – самосопряженный оператор в $L^2(0, 1)$.*

Доказательство. Пусть $\psi, \eta \in L^2(0, 1) : (H\varphi, \psi) = (\varphi, \eta)\ \forall \varphi \in D(H)$, то есть $\psi \in D(H^*),\ \eta = H^*\psi$. Это эквивалентно тому, что $(-\varphi'', \psi) + (q\varphi, \psi) = (\varphi, \eta)$, и так как $q = \bar{q}$, получаем, что $(-\varphi'', \psi) = (\varphi, \eta - q\psi)$ (в частности для любого $\psi \in C_0^\infty$). Тогда по лемме Дюбуа-Раймонда $\psi \in W_1^2$, то есть вторая производная ψ лежит в L^1, при этом $-\psi'' = \eta - q\psi$. Заметим, что $\eta, q \in L^2,\ \psi \in C^\infty$, следовательно, $\psi \in W_2^2,\ H^*\psi = \eta = -\psi'' + q\psi$ Осталось проверить, что выполняются условия Дирихле. Пусть $\varphi \in D(H),\ \psi \in D(H^*) \subset W_2^2$. Тогда

$$0 = (H\varphi, \psi) - (\varphi, H^*\psi) = \int_0^1 (-\varphi''\psi + \varphi\psi'')(t)dt = (\varphi\psi' - \varphi'\psi)\big|_0^1 = -\varphi'(1)\psi(1) + \varphi'(0)\psi(0)$$

Это равенство выполняется для любого φ, следовательно, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $D(H^*) \subset D(H)\dots$

Замечание. Выражение $-\varphi''\psi + \varphi\psi''$ – это производная Вронскиана.

$\square$

Лемма 6. $\sigma(H) = \{\lambda_n(q)\}_{n=1}^\infty$

Замечание. Рассматривается задача

$$\begin{cases} -y'' + qy = \lambda y \\ y(0) = y(1) = 0\ . \end{cases}$$

При этом равенство $\lambda = \lambda_n$ эквивалентно тому, что существует нетривиальное решение.

Доказательство.

1. Пусть $\lambda = \lambda_n$. Проверим, что в таком случае $\lambda \in \sigma(H)$. Рассмотрим $(\lambda I - H)$. $(\lambda I - H)\varphi(\,\cdot\,, \lambda_n) = 0$, при этом $\varphi \in D(H)$ – решение рассматриваемой задачи. Тогда для $(\lambda I - H)$ не существует обратного.

2. Пусть $\lambda \neq \lambda_n$. Проверим, что $\lambda \in \rho(H)$, где ρ – это резольвентное множество. Построим обратный элемент явным образом. Обозначим $R_\lambda := (\lambda I - H)^{-1}$. Пусть $R_\lambda : \psi(y) \mapsto \int_0^1 K(x,y)\psi(y)dy$, где

$$K(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{W(\lambda)}\,\varphi(x)\chi(y), \ x \leqslant y \\ \frac{1}{W(\lambda)}\,\chi(x)\varphi(y), \ y \leqslant x\,. \end{cases}$$

Замечание. $K(x,y)$ – непрерывная функция. Кроме того ясно, что R_λ действует в области определения.

Надо проверить, что для любого $\psi \in L^2(0,1)$ выполнено равенство

$$(I\lambda - H)R_\lambda\psi = \psi\ .$$

Перепишем правую часть в другом виде:
$(I\lambda - H)R_\lambda\psi = (\frac{d^2}{dx^2} + (\lambda - q))\left(\frac{1}{W}\int_x^1 \varphi(x)\chi(y)\psi(y)dy + \frac{1}{W}\int_0^x \varphi(y)\chi(x)\psi(y)dy\right) =$
$= \frac{1}{W}\Big(-\varphi'(x)\chi(x)\psi(x) + \chi'(x)\varphi(x)\psi(x)\Big) = \psi(x)\ .$

□

Замечание.

1. Из спектральной теории следует, что $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

2. Для $\forall n \ \ \lambda_n$ – простое собственное значение, то есть не бывает двумерных собственных подпространств.

Определение.
ψ_n – собственная функция H, отвечающая $\lambda_n : \|\psi_n\|^2 = \int_0^1 \psi_n^2(t)dt = 1,\ \psi_n'(0) > 0$.

5 Нормирующие постоянные, общая теорема единственности.

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{, причем} \ \ \lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \ldots$$

Определение (нормирующий постоянной, вариант 1).
$\nu_n(q) := \ln\Big((-1)^n\varphi'(1,\lambda_n,q)\Big)$

Замечание.

1. Определение корректно в смысле знака.
Ранее было доказано, что $\operatorname{sign}\varphi'(1,\lambda_n) = \operatorname{sign}\dot\varphi(1,\lambda_n) = (-1)^n$.

2. Пусть $q = q^\sharp$, тогда $\nu_n(q) = 0 \ \ \forall n$.

3. $\nu_n(q) = \ln\left|\frac{\psi_n'(1)}{\psi_n'(0)}\right|$, так как $\varphi = C \cdot \psi_n$

Теорема 2. *Пусть* $q = \bar{q},\ p = \bar{p}\,;\ p\,,q \in L^1;\ \lambda_n(q) = \lambda_n(p),\ \nu_n(q) = \nu_n(p)\ \forall n$*. Тогда* $q = p\,$.

Доказательство. Аналогично симметричному случаю:
$\begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}(q) \cdot \begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}^{-1}(p) = \dfrac{1}{W}\begin{pmatrix} \varphi & \chi \\ \varphi' & \chi' \end{pmatrix}(q) \cdot \begin{pmatrix} \chi' & -\chi \\ -\varphi' & \varphi \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi(q)\chi'(p)-\chi(q)\varphi'(p)}{W} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$,
так как если $q = q^\sharp$, то функция целая $\rightsquigarrow$ т. Лиув. Надо понять, что на всех позициях у элементов нет особенности.
Заметим, что $\varphi'(1,\lambda_n) = (-1)^n e^{\nu_n},\ \chi'(1,\lambda_n) = -1$. Тогда $\varphi(x,\lambda_n,q) = (-1)^{n-1}e^{\nu_n(q)}\chi(x,\lambda_n,q)$, так как это решения одного уравнения с одинаковой задачей Коши. Так же $\varphi(x,\lambda_n,p) = (-1)^{n-1}e^{\nu_n(p)}\chi(x,\lambda_n,p)$. При этом $(-1)^{n-1}e^{\nu_n(q)} = (-1)^{n-1}e^{\nu_n(p)}$. Следовательно, у матрицы особенности нет. Больше мы нигде симметричностью не пользовались

□

Замечание. Позднее будет доказано, что $\{\nu_n\}$ можно задавать наперед.

Следствие. $\nu_n(q) = 0\ \forall n \geqslant 1$, *следовательно* $q = q^\sharp$.

Доказательство. $\nu_n(q^\sharp) = -\nu_n(q)$ (см. Замечание п.3). Кроме того $\lambda_n(q^\sharp) = \lambda_n(q)$. Тогда $q = q^\sharp$. □

Определение (нормирующей постоянной, вариант 2).

$$\alpha_n(q) := \|\varphi(\,\cdot\,,\lambda_n)\|_{L^2}^{-2} = \frac{1}{\int_0^1 \varphi^2(t,\lambda_n)dt}$$

Замечание.
$\varphi'(1,\lambda_n,q) = (-1)^n e^{\nu_n(q)}$; $\dot{\varphi}(1,\lambda_n,q) = -\dot{W}(\lambda_n)$ Зависит только от $\{\lambda_m, m \geqslant 1\}$.
Тогда $\varphi'(1,\lambda_n,q)\,\dot{\varphi}(1,\lambda_n,q) = \int_0^1 \varphi^2(t,\lambda_n,q)dt = \frac{1}{\alpha_n(q)}$.

Пусть $\lambda_n(q) = \lambda_n(p)\ \ \forall n$. Тогда $\nu_n(q) = \nu_n(p) \Leftrightarrow \alpha_n(p) = \alpha_n(q)$. В частности, для λ и α верна теорема единственности.

Мотивация α_n: пусть $\mathcal{H} := -\Delta + q(|x|)$, где $x \in B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$, Δ – оператор Лапласа. $D(\mathcal{H}) = \{u \in W_2^2(B) : u\big|_{S=\partial B} = 0\}$. Важно, что можно рассматривать значение в точке (теорема Соболева о вложении). $\mathcal{H}$ – самосопряженный оператор, если q – достаточно хороший потенциал. Доказательство этого почти такое же как и раньше, только интегрирование по частям теперь многомерное. Будем искать собственные функции: $u(x) = u(|x|)$ (вообще говоря, есть и другие). $r := |x|$, $-\Delta = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \dots$ Ищем

$$\begin{cases} -u'' - \frac{2}{r}u' + q(r)u = \lambda u \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим $y(r) := ru(r)$. Тогда уравнение (5) эквивалентно следующему уравнению

$$-\frac{y''(r)}{r} + q(r)\frac{y(r)}{r} = \lambda\frac{y(r)}{r}\ .$$

Кроме того $y(0) = y(1) = 0$.
Выясним, чему соответствует α в трехмерных терминах. Пусть $\Psi_n = \Psi_n(r)$, отвечает λ_n : $\iiint\limits_B \Psi_n^2 dr d\varphi d\theta = 1$. Проверим, что это одна и та же нормировка. $\iiint\limits_B \Psi_n^2 d\theta d\varphi dr = 4\pi\int_0^1 r^2\Psi^2(r)dr$. Так как $\psi_n(x) = C\cdot\varphi(1,\lambda_n)$, то $1 = \int_0^1(\dots)^2 = C^2\cdot\|\varphi(\,\cdot\,,\lambda_n)\|^2 = \frac{C^2}{\alpha_n}$, следовательно, $C = \sqrt{\alpha_n}$. Тогда $\Psi_n(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\psi_n'(0) = \sqrt{\frac{\alpha_n}{4\pi}} \rightsquigarrow \sqrt{4\pi}\cdot r\Psi_n(r) = \psi_n(r)$

6 Асимптотики спектральных данных.

Теперь будем предполагать, что $q \in L^2(0,1)$. Пусть $\|q\| < C$. $\lambda_n(q) = \pi^2 n^2 + O(1)$ равномерно по q. Тогда $\sqrt{\lambda_n} = \pi n + O(\frac{1}{n})$. Выпишем цепочку преобразований:
$0 = \varphi(1, \lambda_n, q) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 \left(\sin\sqrt{\lambda_n}(1-t) \cdot \sin\sqrt{\lambda_n} t q(t)\right) dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\right) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\pi n} + \frac{1}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \sin\pi n(1-t) \cdot \sin\pi n t \cdot q(t)\, dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{(-1)^n \sin(\sqrt{\lambda_n} - \pi n)}{\pi n} + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \sin^2(\pi n t) q(t)\, dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ Итого получаем:

$$\sqrt{\lambda_n} - \pi n = \frac{\int_0^1 \sin^2 \pi n t \cdot q(t)\, dt}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Следовательно, $\lambda_n(q) = \pi^2 n^2 + 2\int_0^1 \sin\pi n t \cdot q(t)\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \pi^2 n^2 + \widehat{q}^{(0)} - \widehat{q}^{(C_n)} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, где $\widehat{q}^{(0)} = \int_0^1 q(t)\, dt$, $\widehat{q}^{(C_n)} =< q, \cos 2\pi n t >$. Из выше сказанного вытекает следующая теорема:

Теорема 3. *Верна равномерная (при $\|q\| < C$) асимптотика*

$$\lambda_n(q) = \pi^2 n^2 + \widehat{q}^{(0)} - \widehat{q}^{(C_n)} + O\left(\frac{1}{n}\right) =: \pi^2 n^2 + \widehat{q}^{(0)} + \mu_n(q) .$$

В частности $\mu_n(q) \in l^2$ (так как если $q \in L^2$, то коэффициент Фурье...) При этом $\|\mu_n(q)\| \leqslant \widetilde{C}_q$ при $\|q\| < C$.

Уточнение: Из теоремы Руше следует, что $\sqrt{\lambda_n} = \pi n + O\left(1\right)$. Тогда $0 = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{\|q\|}{\lambda_n}\right) \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda_n}) = O\left(\frac{\|q\|}{n}\right) \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = \pi n + O\left(\frac{\|q\|}{n}\right)$.
$0 = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 \left(\sin\sqrt{\lambda_n}(1-t) \cdot \sin\sqrt{\lambda_n} t \cdot q(t)\right) dt + O\left(\frac{\|q\|^2}{\lambda_n^{3/2}}\right) \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda_n} = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1 \ldots dt + O\left(\frac{\|q\|^2}{n}\right) = (-1)^n \int_0^1 \left(\sin^2 \pi n t \cdot q(t)\right) dt + O\left(\frac{\|q\|^2}{n}\right) \Rightarrow \lambda_n(q) = \pi^2 n^2 + \widehat{q}^{(0)} - \widehat{q}^{(C_n)} + O\left(\frac{\|q\|^2}{n}\right)$
Для нормирующих постоянных $\nu_n(q)$:
Продифференцируем ряд для φ. Получим:
$\varphi'(1, \lambda_n, q) = \cos\sqrt{\lambda_n} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1 \left(\cos\sqrt{\lambda_n}(1-t) \cdot \sin\sqrt{\lambda_n} t \cdot q(t)\right) dt + O\left(\frac{\|q\|^2}{\lambda_n}\right) = \cos\left(\pi n + O\left(\frac{\|q\|}{n}\right)\right) + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \left(\cos\pi n(1-t) \cdot \sin\pi n t \cdot q(t)\right) dt + O\left(\frac{\|q\|^2}{n^2}\right) = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{2\pi n}\int_0^1 \left(\sin 2\pi n t \cdot q(t)\right) dt + O\left(\frac{\|q\|^2}{n^2}\right)$

Теорема 4. $\nu_n(q) = \frac{\widehat{q}^{(S_n)}}{2\pi n} + O\left(\frac{\|q\|^2}{n^2}\right)$, *причем оценка равномерная. В частности, $\{n \cdot \nu_n(q)\} \in l^2$.*

7 Промежуточные итоги.

$q \mapsto \left(\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty};\ \{\nu_n(q)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leftrightarrow \left(\widehat{q}^{(0)};\ \{\mu_n(q)\}_{n=1}^{\infty}; \{n\nu_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, где $\mu_n(q) = \lambda_n(q) - \pi^2 n^2 - \widehat{q}^{(0)}$.
Рассмотрим отображение $\Phi : q \mapsto \left(\widehat{q}^{(0)};\ \{\mu_n(q)\}_{n=1}^{\infty};\ \{n\nu_n(q)\}_{n=1}^{\infty}\right)$. Про это отображение уже известно, что

1. $\Phi : L^2 \to \mathbb{R} \times l^2 \times l^2$.
2. Φ – инъекция (по теореме единственности).
3. $\Phi = F + O(\|q\|^2)$, при $q \to 0$, где $F : q \mapsto \left(\widehat{q}^{(0)};\ \{-\widehat{q}^{(C_n)}\};\ \frac{1}{2\pi}\{\widehat{q}^{(S_n)}\}\right)$ (преобразование Фурье с какими-то коэффициентами).

Нужно доказать, что Φ – почти биекция.
$\Phi : q \mapsto \left(\int_0^1 q(t)\,dt;\ \{\mu_n(q)\}_{n=1}^\infty;\ \{n\nu_n(q)\}_{n=1}^\infty\right)$ – спектральные данные.
$F : L^2(0,1) \leftrightarrow \mathbb{R}\times l^2 \times l^2$ – биекция.
$\Phi = F + \Phi_1$

8 Непрерывность отображения Φ. Компактность Φ_1.

Лемма 7. *Пусть $q_m, q \in L^2$, $q_m \xrightarrow{w} q$. Тогда $\varphi(x,\lambda,q_m) \to \varphi(x,\lambda,q)$ равномерно по (x,λ) на ограниченных подмножествах $[0,1]\times\mathbb{C}$. Аналогичное утверждение верно и для производных, а именно: $\varphi'(x,\lambda,q_m) \to \varphi'(x,\lambda,q)$ равномерно по (x,λ) на ограниченных подмножествах $[0,1]\times\mathbb{C}$.*

Доказательство. $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x) = \int\limits_{0\leqslant t_n\leqslant\ldots\leqslant t_1\leqslant x}\!\!\cdots\!\!\int \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t_1))}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t_1-t_2))}{\sqrt{\lambda}}\times\cdots\times \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t_{n-1}-t_n))}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\sin(\sqrt{\lambda}t_n)}{\sqrt{\lambda}}\cdot q(t_1)\ldots q(t_n)dt_1\ldots dt_n$, так как $q_m(t_1)\ldots q_m(t_n) \xrightarrow{w} q(t_1)\ldots q(t_n)$, то $\varphi_n(x,\lambda,q_m)\to\varphi_n(x,\lambda,q)\ \ \forall n\geqslant 0$.
$q_m \xrightarrow{w} q \Rightarrow \|q_m\|\leqslant C$, но при $\|q_m\|\leqslant C$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n$ сходится равномерно. Следовательно, $\varphi(x,\lambda,q_m)\to\varphi(x,\lambda,q)$. Доказательство утверждения для производных аналогично. □

Лемма 8. *$q_m \xrightarrow{w} q \Rightarrow \lambda_n(q_m)\to\lambda_n(q)\ \forall n,\ \ \nu_n(q_m)\to\nu_n(q)\ \forall n.$*

Доказательство. $\varphi(1,\lambda_n(q),q) = 0$
$\varphi(1,\lambda,q_m) \overset{\lambda\in C_\varepsilon}{\rightrightarrows} \varphi(1,\lambda,q) \neq 0$, где $C_\varepsilon := \{\lambda :\ \ |\lambda-\lambda_n(q)| = \varepsilon\}$. Тогда по теореме Руше для достаточно больших m $\varphi(1,\cdot,q_m)$ имеет столько же нулей, сколько $\varphi(1,\cdot,q)$ внутри C_ε, то есть ровно один ноль. Но надо, чтобы это был именно n-й ноль. Следовательно, $|\lambda_n(q_m)-\lambda_n(q)|<\varepsilon$ для достаточно больших m.
До $\lambda_N(q)$ рассмотрим все круги сразу, а дальше - локализация $\rightsquigarrow \lambda_n(q_m)\to\lambda_n(q)$
$\nu_n(q_m) = \ln\Big((-1)^n\cdot\varphi'(1,\lambda_n(q_m),q_m))\Big)\to\nu_n(q)$. □

Теорема 5. *а) $q_m \xrightarrow{w} q$ в $L^2(0,1) \Rightarrow \Phi_1(q_m)\xrightarrow{s}\Phi_1(q)$ в $\mathbb{R}\times l^2\times l^2$.*

б) Φ – непрерывное отображение из $L^2(0,1)$ в $\mathbb{R}\times l^2\times l^2$.

Замечание. Первая компонента тождественно равна нулю, поэтому в формулировке теоремы пишем $\mathbb{R}$.

Доказательство теоремы.
(a) Обозначим временно $\alpha_n(q) := \lambda_n(q)-\pi^2n^2-\widehat{q}^{(0)}+\widehat{q}^{(C_n)}$, $\ \beta_n(q) := n\nu_n(q)-\frac{1}{2\pi}\widehat{q}^{(S_n)}$.
Тогда $\Phi_1 : q\mapsto\Big(0;\ \{\alpha_n(q)\}_{n=1}^\infty;\ \{\beta_n(q)\}_{n=1}^\infty\Big)$
$|\alpha_n(q)|,|\beta_n(q)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ – мажоранта, так как $\{q_m\}$ слабо сходится, а следовательно, ограничена. Более того, $\alpha_n(q_m)\to\alpha_n(q)$ и $\beta_n(q_m)\to\beta_n(q)$ поточечно $\forall n\geqslant 1$. Следовательно можно применять теорему Лебега о мажорируемой сходимости.
$\|\Phi_1(q_m)-\Phi_1(q)\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{N}\Big(|\alpha_n(q_m)-\alpha_n(q)|^2+|\beta_n(q_m)-\beta_n(q)|^2\Big)+\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\Big(\ldots\Big)$. Первое слагаемое $\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, второе $= \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{N^2}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right)$ равномерно по m.

Замечание. Сначала фиксировали N, а потом m. Фактически это доказательство теоремы Лебега.

Отсюда следует, что Φ_1 непрерывно, так как если слабо сходящиеся последовательности переводит в сильно сходящиеся, то сильно сходящиеся переводит в сильно сходящиеся. (б) Так как F – изометрия, то из того что Φ_1 непрерывно, следует, что Φ тоже непрерывно. $\square$

Определение. $f : X \to Y$, где X, Y – банаховы пространства, f – непрерывное отображение. f – компактно, если для любого ограниченного $\Omega \subset X$ множество $\overline{f(\Omega)}$ компактно.

Замечание. $\Phi_1 : L^2(0,1) \to \mathbb{R} \times l^2 \times l^2$ – компактно, так как из любой ограниченной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, а Φ_1 переводит любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{f(q_m)\}_{m=1}^{\infty}$. $q_m \in \Omega$ – огр., следовательно, существует $q_{m_k} \xrightarrow{w} q$. Тогда $f(q_{m_k}) \to f(q)$.

Теорема (Шаудера). *$f : \overline{B} \to \overline{B}$, где $\overline{B} := \{x : \ \|x\| \leqslant 1\}$ – непрерывное, компактное отображение. Тогда существует $x \in \overline{B} : f(x) = x$.*

9 Локальная сюръективность.

Теорема 6. *Существует $\delta > 0 : \Phi(L^2(0,1)) = \operatorname{Im}\Phi \supset B(0,\delta) \subset \mathbb{R} \times l^2 \times l^2$.*

Доказательство. $I + K = \mathcal{F}^{-1}\Phi : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, где $K := \mathcal{F}^{-1}\Phi_1$ – компактное отображение. $\|K(q)\| = O\left(\|q\|^2\right)$, так как $\mathcal{F}^{-1}$ – линейное и ограниченное отображение. Тогда существует $\delta > 0 : K(\overline{B(0,2\delta)}) \subset \overline{B(0,\delta)}$
Пусть $y \in \overline{B(0,\delta)}$. Надо проверить существует ли $x : (I+K)x = y \Leftrightarrow x = y - Kx =: K_y(x)$. Отображение $K_y : \overline{B(0,2\delta)} \to \overline{B(0,2\delta)}$ – компактно. Следовательно, по теореме Шаудера существует $x : x = K_y(x)$. $\square$

Д-во теоремы Шаудера:
Случай $\mathbb{R}^n$

Теорема (Борсука). *Не существует непрерывного отображения $f : \overline{B^n} \to S^{n-1}$ такого, что $f\big|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует отображение $F : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ такое, что $F(\varphi, t) := f(t\varphi)$, $F(\,\cdot\,, 0) = const$, $F(\,\cdot\,, 1) = id$. Что противоречит нестягиваемости сферы в точку. $\square$

Теорема (Брауэра). *Если отображение $f : B^n \to B^n$ – непрерывно, то существует $x \in B^n$ такой, что $f(x) = x$.*

Доказательство. Предположим, что такого x не существует. Тогда построим отображение $g : B^n \to S^{n-1}$. $g(x)$ = пересечение луча $[f(x), x)$ со сферой S^{n-1}. g – непрерывное отображение, так как $\mathbb{R}^n$ – гильбертово пространство. При этом $g\big|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$. Противоречие. $\square$

Общий случай:

Лемма 9. *Пусть $f : \overline{B} \to X$ – непрерывное компактное отображение. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ существует отображение $f_\varepsilon : X \to X$ такое, что*

а) $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon \ \ \forall x \in \overline{B}$, *б)* $\dim\big(\operatorname{Im} f_\varepsilon(x)\big) < +\infty$

Доказательство. $\overline{f(B)} \subset \bigcup\limits_{y\in f(B)} B(y,\varepsilon)$, следовательно $\overline{f(B)} \subset \bigcup\limits_{i=1} B(y_i,\varepsilon)$. Существует разбиение единицы, то есть на $\overline{f(B)}$ выполнено равенство: $1 = \sum\limits_{i=1}^{N} \psi_i(y)$, причем ψ_i – непрерывны по лемме Урысона, $\operatorname{supp}\psi_j \subset B(y_j,\varepsilon)\ \ \forall j,\ \psi_j \geqslant 0$.
$f_\varepsilon(x) := \sum\limits_{j=1}^{N} \psi_j(f(x))y_j$ – это линейная оболочка $\{y_j\}$, то есть $\mathcal{Lin}\,\{y_j\}$, таким образом пункт *б)* доказан. $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| = \|\sum\limits_{j=1}^{N} \psi_j(f(x))(f(x)-y_j)\| < \varepsilon$, так как если $\psi_j(f(x)) > 0$, то $\|f(x) - y_j\| < \varepsilon$. □

Доказательство теоремы Шаудера. В случае пространства $\mathbb{R}^n$ утверждение следует из теорем Борсука и Брауэра. Докажем общий случай.
Рассмотрим непрерывное компактное отображение $f : \overline{B} \to \overline{B}$ и отображение $f_\varepsilon : \overline{B} \to \overline{B} \cap N_\varepsilon$($\overline{B}$ – т.к. это выпуклая комб. точек шара), где N_ε - аффинное, $\dim N_\varepsilon < +\infty$.
В частности, $f_\varepsilon : \overline{B} \cap N_\varepsilon \to \overline{B} \cap N_\varepsilon$. Тогда по теореме Брауэра (заменяя шар на произвольное замкнутое выпуклое множество) существует $x_\varepsilon \in \overline{B} \cap N_\varepsilon$, такой что $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Тогда $\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| < \varepsilon$. Но при этом $f(x_\varepsilon) \in \overline{f(B)}$, а это компактное множество. Следовательно, существует $\varepsilon_k \searrow 0$, такая что $f(x_{\varepsilon_k}) \to x_*$. Тогда и $x_{\varepsilon_k} \to x_*$, а следовательно, так как f – непрерыное отображение, $f(x_{\varepsilon_k}) \to f(x_*)$, то есть $f(x_*) = x_*$. □

Замечание. Без условия о компактности отображения f теорема перестает быть верной.

Примеры.
Пусть $X := l^2$

1. Рассмотрим отображение $f : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots)$. $f : \overline{B} \to S \subset \overline{B}$. Предположим, что $f(x) = x$, где $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Тогда $x_1 = \sqrt{1-\|x\|^2}$, $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$, … Следовательно, $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ – противоречие.

2. (К т. Борсука) Отображение $g : \overline{B} \to S$, такое что $g\big|_S = id$. Пусть отображение f не имеет неподвижной точки(например, из предыд. примера). Тогда определим $g(x)$ как пересечение луча $[f(x), x)$ со сферой.
   Словом, это пример того,что сфера стягиваема по себе в точку.
   Отступление. $f \in L^2(0,1) \rightsquigarrow$ его срезка $f_t := \begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right), & x \in [0,t] \\ 1, & x \in [t,1]\ . \end{cases}$ $\|f\| = 1 \Rightarrow \|f_t\| = 1$. При этом f – непрерывно как по x, так и по t. (Т.е. это пример 2)

3. Рассмотрим отображение $h : l^2 \to l^2$. Обозначим $B_n := B\left(\frac{e_1}{n}, \frac{1}{4n^2}\right)$. Набор $\{B_n\}$ дизъюнктный. $h(x) : \begin{cases} x, & x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \\ g_n(x), & x \in \overline{B_n} \end{cases}$, где $g_n(x) := \frac{e_1}{n} + \frac{1}{4n^2}\, g\left(4n^2\left(x - \frac{e_1}{n}\right)\right)$.
   Таким образом, h – непрерывное отображение. При этом $h(x) = x + O\left(\|x\|^2\right),\ x \to 0$. Но образ не содержит окрестности нуля, так как не содержит B_n.

10 Схема доказательства локальной сюръективности.

Предположим, что верны две следующих теоремы:

Теорема 7. $\forall q \in L^2\ \forall n \geqslant 1\ \forall t \in \mathbb{R}\ \exists\, q_n^t \in L^2$:

$$\lambda_m(q_n^t) = \lambda_m(q), \forall m \geqslant 1$$

$$\nu_m(q_n^t) = \nu_m(q)\ \forall m \neq n$$

$$\nu_n(q_n^t) = \nu_n(q) + t.$$

Теорема 8. $\forall q \in L^2\ \forall n \geqslant 1\ \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_{n-1}(q) < \lambda_n(q) + t < \lambda_{n+1}(q)$ *(при $n = 1$ нет левого неравенства)* $\exists\, q_{n,t} \in L^2$:

$$\lambda_m(q_{n,t}) = \lambda_m(q)\ \forall m \neq n,$$

$$\lambda_n(q_{n,t}) = \lambda_n(q) + t,$$

$$\nu_m(q_{n,t}) = \nu_m(q)\ \forall m.$$

Тогда верна следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть* $S := \{\{\mu_n\} \in l^2 : \pi^2 + \mu_1 < 4\pi^2 + \mu_2 < 9\pi^2 + \mu_3 < \ldots\}$ *– открытое выпуклое множество. Тогда* $\Phi : L^2(0,1) \to \mathbb{R} \times S \times l^2$ *– сюръекция.*

Доказательство. Рассмотрим $\big(C^*;\ \{\mu_n^*\}_{n=1}^{\infty};\ \{n\nu_n^*\}_{n=1}^{\infty}\big) \in \mathbb{R} \times S \times l^2$. Из локальной сюръективности следует, что существует N, такое что $\big(0;\ \{0, \ldots, 0, \mu_{N+1}^*, \ldots\}; \{0, \ldots, 0(N+1)\nu_{N+1}^*, \ldots\}\big) \in \Phi(L^2(0,1))$, так как в образе лежит окрестность нуля, а такие тройки сходятся к нулю в $\mathbb{R} \times l^2 \times l^2$ сильно. Таким образом из асимптотики собственных чисел следует, что существует q_1 такое что

$$\int_0^1 q_1(t)\, dt = 0,$$

$$\lambda_n(q_1) = \pi^2 n^2, \text{ при } n = 1, \ldots, N$$

$$\lambda_n(q_1) = \pi^2 n^2 + \mu_n^*, \text{ при } n > N,$$

$$\nu_n(q_1) = 0, \text{ при } n = 1, \ldots, N,$$

$$\nu_n(q_1) = \nu_n^*, \text{ при } n > N\ .$$

Применяя теорему 7 достаточное количество раз, учитывая асимптотику собственных чисел, получим, что существует q_2, такое что

$$\int_0^1 q_2(t)\, dt = 0,$$

$$\lambda_n(q_2) = \pi^2 n^2, \text{ при } n = 1, \ldots, N$$

$$\lambda_n(q_2) = \pi^2 n^2 + \mu_n^*, \text{ при } n > N,$$

$$\nu_n(q_2) = \nu_n^*, \text{ при } n \geqslant 1\ .$$

Применяя теорему 8 достаточное количество раз (всё налево, затем направо, чтоб не "пересекалось"), получим, что существует q_3, такое что

$$\lambda_n(q_3) = \pi^2 n^2 + \mu_n^*\ \ \forall n \geqslant 1,$$

$$\nu_n(q_3) = \nu_n^*\ \ \forall n \geqslant 1\ .$$

Осталось только положить $q^* := q_3 + C^*$.

□

11 Добавление о неподвижной точке.

Теорема 10 (принцип Лере-Шаудера). *Пусть X – хаусдорфово локально выпуклое векторное пространство. Ω – выпуклый компакт в X. $f : \Omega \to \Omega$ – непрерывное отображение. Тогда f имеет неподвижную точку.*

Без доказательства. $\square$

Теорема 11 (частный случай принципа Лере-Шаудера). *Пусть $X := H$ – сепарабельное гильбертово пространство со слабой топологией. $\Omega = B(0,1)$ – компакт в $*$-слабой топологии. Пусть отображение $f : \Omega \to \Omega$, такое что если $x_n \xrightarrow{w} x$, то $f(x_n) \xrightarrow{w} f(x)$, то есть f непрерывно в слабой топологии. Тогда существует x, такой что $f(x) = x$.*

Замечание. Пусть $X = Y^*$.$*$-слабая топология в X: непрерывны все функционалы вида $x \mapsto (x, y) \quad \forall y \in Y$. Слабая топология в X: непрерывны все функционалы вида $x \mapsto (x, y) \ \ \forall y \in X^* = Y^{**} \supset Y$.

Доказательство. Рассмотрим ортогональный проектор $P_N : H \to \operatorname{span} < e_1, \ldots, e_N > =: E_N$. Рассмотрим отображение $P_N f\big|_{E_N} : \Omega \cap E_N \to \Omega \cap E_N$ – непрерывное в слабой ($\equiv$сильной) топологии, так как $\dim E_N < \infty$ Тогда по теореме Брауэра существует $x_N : P_N f(x_N) = x_N$. $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{N_k}\}$, такая что $x_{N_k} \xrightarrow{w} x$, следовательно $a_k := f(x_{N_k}) \xrightarrow{w} f(x)$. А так как $< P_{N_k} a_k, y >=< a_k, P_{N_k} y > \to < f(x), y >$, т.к. $a_k \xrightarrow{w} f(x)$, $P_{N_k} y \xrightarrow{s} y$, т.е. $P_{N_k} a_k \xrightarrow{w} f(x)$. Но $P_{N_k} a_k = x_{N_k}$. Таким образом

$$\left.\begin{array}{l} x_{N_k} \xrightarrow{w} x \\ x_{N_k} \xrightarrow{w} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x = f(x).$$

12 Преобразование Дарбу дифференциального уравнения второго порядка

Пусть $y = g_\mu(x)$ - ненулевое решение (1) (где $\lambda = \mu$).

$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + (q(x) - \mu) \qquad (\text{т.е. } Lg_\mu = 0)$$

$$A := g_\mu \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g_\mu} \cdot \right) \right) \qquad A^* := \frac{-1}{g_\mu} \left(\frac{d}{dx} \left(g_\mu \cdot \right) \right)$$

Тогда $A^* A = L$.

формальные выкладки:

$$A^* A f = -\frac{1}{g_\mu} \left(g_\mu^2 \left(\frac{f}{g_\mu} \right)' \right)' = -\frac{1}{g_\mu} \left(f' g_\mu - f g_\mu' \right)' = -\frac{1}{g_\mu} \left(f'' g_\mu - f g_\mu'' \right) = -f'' + f \frac{g_\mu''}{g_\mu} = -f'' + f(q - \mu)$$

$\square$

Пусть $A^*Af = Lf = (\lambda-\mu)f$, т.е. f – решение (1) для другого λ.
Тогда $AA^*Af = (\lambda-\mu)Af \rightsquigarrow AA^*(Af) = (\lambda-\mu)(Af)$. Но AA^* – тоже дифференциальный оператор.

$$AA^*f = -g_\mu\left(\frac{1}{g_\mu^2}(g_\mu f)'\right)' = -g_\mu\left(\frac{g'_\mu}{g_\mu^2}f+\frac{f'}{g_\mu}\right)' = -f''+f'\left(-\frac{g'_\mu}{g_\mu}-\left(\frac{1}{g_\mu}\right)'g_\mu\right)-g_\mu\left(\frac{g'_\mu}{g_\mu^2}\right)'f =$$

$$= -f''+f\left(-\frac{g''_\mu}{g_\mu}+\frac{2(g'_\mu)^2}{g_\mu^2}\right) = -f''+f\left(\frac{g''_\mu}{g_\mu}-2\frac{d^2}{dx^2}\ln g_\mu\right) = -f''+f\left(q-\mu-2\frac{d^2}{dx^2}\ln g_\mu\right)$$

Итак,

$$A^*A = L = -\frac{d^2}{dx^2}+(q-\mu),$$

$$AA^* = -\frac{d^2}{dx^2}+(q-\mu)-2\frac{d^2}{dx^2}\ln g_\mu$$

($\ln g_\mu$ определено везде, где $g_\mu \neq 0$, т.к. это просто сокращенная запись.)

Лемма 10 (Преобразование Дарбу). *Рассмотрим уравнение*

$$-y''+q(x)y = \lambda y. \tag{*}$$

Пусть g_μ – решение (*) для $\lambda=\mu$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y''+\left(q(x)-2\frac{d^2}{dx^2}\ln g_\mu(x)\right)y = \lambda y \tag{**}$$

(а) Если f – решение (*) для $\lambda \neq \mu$(но фиксированного), то функция

$$Af = g_\mu\left(\frac{f}{g_\mu}\right)' = -\frac{1}{g_\mu}\{f, g_\mu\}$$

является решением (**) для того же λ ((**) – это дифференциальное уравнение, которое требуется решить везде, где $g_\mu \neq 0$ или п.в., где $g_\mu \neq 0$ (если $q \in L^2$))

(б) Все функции вида $\frac{1}{g_\mu}\left(a+b\int g_\mu^2\right)$ – решение (**) для $\lambda=\mu$.

Доказательство. (а) Доказали.

(б)

$$A^*\left[\frac{1}{g_\mu}\left(a+b\int g_\mu^2(x)dx\right)\right] = -\frac{1}{g_\mu}\left(a+b\int g_\mu^2(x)dx\right)' = -bg_\mu$$

$\rightsquigarrow AA^*[\ldots] = 0$ (произв. от константы)

□

Лемма 11. *Пусть h_ν – решение (**) для $\lambda=\nu$.*

$$-y''+\left(q(x)-2\frac{d^2}{dx^2}\ln(g_\mu h_\nu)(x)\right)y = \lambda y \tag{***}$$

Если f – решение (*) для $\lambda \neq \mu,\nu$, то

$$\frac{1}{h_\nu}\left\{\frac{1}{g_\mu}\{f, g_\mu\}, h_\nu\right\}$$

– решение (***) для того же λ.

Доказательство. Непонятно только с непрерывностью. Ну и фиг с ней. Дважды применяем лемму (10) ($\ln \varphi\psi = \ln\varphi + \ln\psi$. Требуем лишь, чтобы $\neq 0$.) $\square$

Замечание.

$$\frac{1}{h_\nu}\Big\{\frac{1}{g_\mu}\{f, g_\mu\}, h_\nu\Big\} = \frac{1}{h_\nu}\Big\{f\frac{g'_\mu}{g_\mu} - f', h_\nu\Big\} = \left(f\frac{g'_\mu}{g_\mu} - f'\right)\frac{h'_\nu}{h_\nu} - \left(f\frac{g'_\mu}{g_\mu} - f'\right)' =$$

$$= (\mu-\lambda)f + \left(f\frac{g'_\mu}{g_\mu} - f'\right)\cdot\frac{d}{dx}\ln(g_\mu h_\nu)$$

Теорема 12 (Явное построение для теоремы (7)**).** *Пусть* $q \in L^2[0,1],\ n \geqslant 1,\ t \in \mathbb{R}$.

$$q_n^t(x) \ = q(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\eta_n^t(x,q),\ \textit{где}$$

$$\eta_n^t(x,q) \ = 1 + (e^t - 1)\int\limits_x^1 \psi_n^2(s,q)ds,$$

ψ_n – *n-я нормированная собственная функция.*

$$\Downarrow$$

$$\lambda_m(q_n^t) = \lambda_m(q)\ \forall m \geqslant 1,$$
$$\nu_m(q_n^t) = \nu_m(q)\ \forall m \neq n,\ \nu_n(q_n^t) = \nu_n(q) + t$$

Доказательство.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \qquad (*)$$

$g = \psi_n$ – решение (*) для $\lambda = \lambda_n(q) \overset{\text{лемма}(10)}{\rightsquigarrow} \dfrac{\eta_n^t}{\psi_n} = h$ – решение

$$-y'' + \left(q(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_n(x)\right)y = \lambda y \qquad (**)$$

для $\lambda = \lambda_n(q)$.
$\forall m \neq n \qquad f = \psi_m$ – решение (*) для $\lambda = \lambda_m(q) \neq \lambda_n(q)$.
По лемме (11) $\dfrac{1}{h}\Big\{h, \dfrac{1}{g}\{g,f\}\Big\}$ – решение

$$-y'' + \underbrace{\left(q(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_n(x)\frac{\eta_n^t}{\psi_n}\right)}_{q_n^t :=} y = \lambda y$$

Докажем, что это решение непрерывно и удовлетворяет граничным условиям(тогда $\forall\lambda_m$ новое уравнение имеет ненулевое решение, т.е. собственные значения там же)

$$\frac{1}{h}\Big\{h, \frac{1}{g}\{g,f\}\Big\} = \frac{1}{h}\Big\{h, f' - \frac{g'}{g}f\Big\} = \left(f' - f\frac{g'}{g}\right)' - \frac{h'}{h}\left(f' - \frac{g'}{g}f\right) =$$

$$= (\mu-\lambda)f - \left(f' - \frac{g'}{g}f\right)\left(\frac{g'}{g} + \frac{h'}{h}\right) = (\mu-\lambda)f - \frac{1}{g}\{g,f\}\left(\frac{g'}{g} + \frac{h'}{h}\right)$$

Тогда
$$\frac{1}{h}\Big\{h, \frac{1}{g}\{g,f\}\Big\} = (\lambda_m-\lambda_n)\psi_m - \frac{1}{\psi_n}\{\psi_n,\psi_m\}\frac{d}{dx}\ln\eta_n^t,$$
перспективные разрывы - от обнуления ψ_n. Итак,
$$\{\psi_n,\psi_m\}'' = \psi_n\psi_m'' - \psi_n''\psi_m = (\lambda_n-\lambda_m)\psi_n\psi_m \Rightarrow \{\psi_n,\psi_m\} = (\lambda_m-\lambda_n)\int\limits_x^1(\psi_n\psi_m)(s)ds$$
$$\frac{1}{\psi_n}\frac{d}{dx}\ln\eta_n^t = \frac{(\eta_n^t)'}{\psi_n\eta_n^t} = -(e^t-1)\psi_n\frac{1}{\eta_n^t}$$
Итого,
$$\widetilde{\psi_m}^{n,t} = \psi_m + \frac{(e^t-1)\psi_n}{\eta_n^t}\int\limits_x^1(\psi_n\psi_m)(s)ds\text{– решение уравнения } -y''+q_n^ty=\lambda_ny$$
Т.к. это решение везде, за исключением конечного числа точек, и функция непрерывно дифференцируема, то это решение всюду.
$$\widetilde{\psi_m}^{n,t}(0) = \widetilde{\psi_m}^{n,t}(1) = 0, \qquad \widetilde{\psi_m}^{n,t} \underset{x\to0}{\sim} \psi_m, \qquad \widetilde{\psi_m}^{n,t} \underset{x\to1}{\sim} \psi_m$$
Отсюда

1) λ_m осталось собственным числом

2) нормирующая постоянная не изменилась (ν_m)

А что происходит с λ_n? Строим $h = \frac{\eta_n^t}{\psi_n}$. $\frac{1}{h}$ – решение $-y''+q_n^t(x)y=\lambda_ny$ ((б) из леммы (10)).
$\widetilde{\psi_n} = \frac{\psi_n}{\eta_n^t}$ – удовлетворяет краевым условиям
$$\widetilde{\psi_n}(x) \underset{x\to1}{\sim} \psi_n(x), \qquad \widetilde{\psi_n} \underset{x\to0}{\sim} e^{-t}\psi_n(x)$$
Отсюда

1) λ_n осталось собственным числом

2) $\nu_n(q_n^t) = \ln\left|\frac{\widetilde{\psi_n}'(1)}{\widetilde{\psi_n}'(0)}\right| = \nu_n(q)+t$

Т.к. знаем асимптотику с.ч., то ничего нового появиться не могло. □

Замечание. а) Можно явно выписать результат нескольких таких преобразований
$$q\mapsto q-2\frac{d^2}{dx^2}\ln\det E(x,q),\text{ где } E(x,q)[i,j] = \delta_{i,j}+(e^{ti}-1)\int\limits_x^1(\psi_i\psi_j)(s)ds$$

б) $\int\limits_0^1\widetilde{\psi_m}^2(s)ds = 1, \quad \int\limits_0^1\widetilde{\psi_n}^2(s)ds = e^{-t/2}$ (вроде бы)

$q \in L^1, \quad \Phi : L^1 \to \dots \qquad \mathcal{F}^{-1}\Phi : L^1 \to L^1$

$\mathcal{F}^{-1}\Phi = Id + \mathcal{F}^{-1}\Phi$: если $q_n \xrightarrow[L^1]{w} q$, то $\Phi_1(q_n) \xrightarrow[l^2]{w} \Phi_1(q) \rightsquigarrow \mathcal{F}^{-1}\Phi_1(q_n) \to \mathcal{F}^{-1}\Phi_1(q)$в $L^2 \rightsquigarrow \mathcal{F}^{-1}\Phi_1(q_n) \xrightarrow[\text{в } L^1]{} \mathcal{F}^{-1}\Phi_1(q)$

Итак, хотим доказать теорему (8).

Определение. Пусть $\xi_{n,t}$ – решение задачи

$$\begin{cases} -\xi''_{n,t} + q\xi_{n,t} = (\lambda_n + t)\xi_{n,t} \\ \xi_{n,t}(0) = \dfrac{1}{\psi'_n(0)} \\ \xi_{n,t}(1) = \dfrac{1}{\psi'_n(1)} \end{cases}$$

$\lambda_n = \lambda_n(q)$, ψ_n – n-я собственная функция для q. $\quad \omega_{n,t} = \{\xi_{n,t}, \psi_n\}$ $(\omega_{n,t}(0) = \omega_{n,t}(1) = 1)$ (Кстати, при $t = 0$ некорректно определено, т.к. есть решение задачи Дирихле и его можно прибавлять.)

Лемма 12 (пока без доказательства). *Пусть* $t \neq 0 : \lambda_{n-1} < \lambda_n + t < \lambda_{n+1} \Rightarrow$

а) $\exists! \quad \xi_{n,t}$

б) $\omega_{n,t}(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]$

Доказательство теоремы (8). Рассмотрим (*); $g_\mu := \psi_n$ – решение при $\lambda = \lambda_n (=: \mu)$
$\xi_{n,t}$ – решение (*) для $\lambda = \lambda_n + t$.
Из всего этого следует, что $-\dfrac{1}{\psi_n}\{\psi_n, \xi_{n,t}\} \left(= \dfrac{\omega_{n,t}}{\psi_n} =: h_\nu \right)$ – решение (**) для $\lambda = \lambda_n + t =: \nu$.
Получается (***):

$$-y'' + \left(q - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\omega_{n,t} \right) y = \lambda y$$

(знаем, что $\omega_{n,t} > 0$, $q_{n,t} := q - 2\dfrac{d^2}{dx^2}\ln\omega_{n,t}$)
а) Что происходит с с.ч. номер n?
$\dfrac{\omega_n}{\psi_n} = h$ – решение (**) для $\lambda = \lambda_n + t \rightsquigarrow \dfrac{1}{h} = \dfrac{\psi_n}{\omega_{n,t}} =: \widetilde{\psi_n}$ – решение (***) для $\lambda = \lambda_n + t$.
Очевидно, что $\widetilde{\psi_n}(0) = 0 = \widetilde{\psi_n}(1)$.
$\widetilde{\psi_n}'(0) = \dfrac{\psi'_n(0)}{\omega_{n,t}(0)} = \psi'_n(0)$(всё остальное обнуляется) $\quad \widetilde{\psi_n}'(1) = \psi'_n(1) \rightsquigarrow \widetilde{\lambda_n} = \lambda_n + t,\ \widetilde{\nu_n} = \nu_n$
б) Что происходит с с.ч. номер $m \neq n$?
$f = \psi_m$ – решение (*) для $\lambda = \lambda_m \rightsquigarrow (\lambda_n - \lambda_m)\psi_m - \dfrac{1}{\psi_n}\{\psi_n, \psi_m\}\dfrac{d}{dx}\ln\omega_{n,t}$ – решение (***) для $\lambda = \lambda_m$. Но $\dfrac{d}{dx}\ln\omega_{n,t} = \dfrac{\omega'_{n,t}}{\omega_{n,t}} = \dfrac{t\xi_{n,t}\psi_n}{\omega_{n,t}}$ (явно считаем и пользуемся тем, что ξ, ψ – некие решения чего-то). Кроме того, $\{\psi_n, \psi_m\} = (\lambda_n - \lambda_m)\int\limits_0^x \psi_n\psi_m$.
Итого, $\widetilde{\psi_m} := \psi_m - \dfrac{t\xi_{n,t}}{\omega_{n,t}}\int\limits_0^x (\psi_n\psi_m)(s)ds$ – решение (***) для $\lambda = \lambda_m$
При $x \to 0 \quad \psi = O(x) \Rightarrow \widetilde{\psi_m}(x) = \psi_m(x) + \underset{x\to 0}{O}(x^3), \quad \widetilde{\psi_m}(x) = \psi_m(x) + \underset{x\to 1}{O}((1-x)^3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \widetilde{\psi_m}(0) = 0 = \widetilde{\psi_m}(1),\ \widetilde{\psi_m}'(0) = \psi'_m(0),\ \widetilde{\psi_m}'(1) = \psi'_m(1) \Rightarrow \widetilde{\lambda_m} = \lambda_m,\ \widetilde{\nu_m} = \nu_m$
Т.к. выполняется асимптотика, то это все с.ч. $\square$

Доказательство леммы (12). Вспомним про решения $\varphi, \theta:$
$\varphi(0) = 0 = \theta'(0),\ \varphi'(0) = 1 = \theta(0) \Rightarrow \xi_{n,t}(x) := (a\varphi + b\theta)(x; \lambda_n + t)$(ищем в таком виде)
$\dfrac{1}{\psi_n'(0)} =: \xi_{n,t}(0) = b \quad \dfrac{1}{\psi_n'(1)} =: \xi_{n,t}(1) = a\varphi(1, \lambda_n + t) + \dfrac{\theta(1, \lambda_n + t)}{\psi_n'(0)} \Rightarrow$
$a = \dfrac{\frac{1}{\psi_n'(0)}\theta(1, \lambda_n + t) - \frac{1}{\psi_n'(1)}}{W(\lambda_n + t)}$(т.к. $\varphi(1, \lambda_n + t) = -W(\lambda_n + t)$, $\lambda_n + t$ - не с.ч. по условию)
Если $t \neq 0,\ \lambda_n + t \neq \lambda_m$, то $\exists!\ \xi_{n,t}$ (похоже на альтернативу Фредгольма)
$a = \dfrac{\dots}{\dots}$ – числитель аналитичен по t, знаменатель аналитичен по t(простой корень в 0).
Докажем, что $\dfrac{\theta(1, \lambda_m)}{\psi_n'(0)} - \dfrac{1}{\psi_n'(1)} = 0.$

$$\frac{\theta(1, \lambda_m)}{\psi_n'(0)} - \frac{1}{\psi_n'(1)} = \frac{\theta(1)\psi_n'(1) - \theta(0)\psi_n'(0)}{\psi_n'(0)\psi_n'(1)} = \frac{\{\theta, \psi_n\}(1) - \{\theta, \psi_n\}(0)}{\psi_n'(0)\psi_n'(1)} = 0$$

(вронскиан двух решений одного уравнения $\equiv$ const) $\Rightarrow a(t)$ непр. при $t \to 0$
Итого, $\xi_{n,t}(x) = a(t)\varphi(x, \lambda_n + t) + \dfrac{1}{\psi_n'(0)}\theta(x, \lambda_n + t)$ – это непрерывная функция от $(x, t) \in [0, 1] \times (\lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_{n+1} - \lambda_n) \Rightarrow\ \omega_{n,t}$ такая же.
Но мы знаем: $\omega_{n,t}(0) = 1 = \omega_{n,t}(1)\ \forall\ t$

$$\omega_{n,0}(x) = \{\xi_{n,0}, \psi_n\} = \frac{1}{\psi_n'(0)}\{\theta, \psi_n\} = \frac{1}{\psi_n'(0)}\{\theta, \psi_n\}(0) = 1$$

($\xi_{n,0},\ \psi_n$ – решения одного дифф. уравнения (при $t = 0$), ψ_n пропорциональна φ).
Или по-другому: вронскиан не зависит от t ($t := 0$), но мы знаем его значение на концах $\rightsquigarrow \omega_{n,0}(x) \equiv 1$.
Хотим доказать, что $\omega > 0$.
Пусть $\exists x \in [0, 1],\ t > 0:\ \omega_{n,t}(x) \leq 0$.
$t^* := \inf\{t > 0 | \exists x \in [0, 1]:\ \omega_{n,t}(x) \leq 0\}\ \Rightarrow t^* > 0$ (ясно, т.к. в окрестности {t=0} ω равномерно непрерывна).
Аналогично $\exists x_* \in [0, 1] : \omega_{n,t_*}(x_*) \leq 0$.($x_*$ – точка минимума)
$\nexists x : \omega_{n,t^*}(x) < 0$(т.к. t^* – inf, пользуемся равномерной непрерывностью ω)(Но нулей бывает несколько. Ну и пусть.)
$\rightsquigarrow 0 = \omega_{n,t^*}'(x_*) = t_*\xi_{n,t_*}(x_*)\psi_n(x_*) \qquad 0 = \omega_{n,t^*}(x_*) = \xi_{n,t_*}(x_*)\psi_n'(x_*) - \xi_{n,t_*}'(x_*)\psi_n(x_*)$
Пусть $\psi_n(x_*) = 0 \Rightarrow \psi_n'(x_*) \neq 0 \Rightarrow \xi_{n,t_*}(x_*) = 0$
Пусть $\xi_{n,t_*}(x_*) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \psi_n(x_*) = 0$
Т.е. $\xi_{n,t_*}(x_*) = 0 = \psi_n(x_*) \qquad \psi_n'(x_*) \neq 0 \neq \xi_{n,t_*}'(x_*) \Rightarrow$ выражение $t_*\xi_{n,t_*}(x_*)\psi_n(x_*)$ локально сохраняет знак $\Rightarrow\ \omega_{n,t_*}'(x_*)$ локально сохраняет знак $\Rightarrow$ противоречие. $\square$

$$\Phi : q \mapsto \left(\int\limits_0^1 q(t)dt, \left\{h(q) - \lambda_n(q) - \int\limits_0^1 q(t)dt\right\}_1^\infty, \left\{n\nu_n(q)\right\}_1^\infty\right)$$

1. Теор. !-ти $\Rightarrow \Phi$ – инъекция.

2. Асимптотики $\Phi = \mathcal{F} + \Phi_1,\ \Phi_1 = \left(0, \left\{O\left(\dfrac{\|q\|^2}{n}\right)\right\}_1^\infty, \left\{O\left(\dfrac{\|q\|^2}{n}\right)\right\}_1^\infty\right)$

$$\Downarrow$$

2.1 $\Phi : L^2(0, 1) \to \mathbb{R} \times l^2 \times l^2$

2.2 $\exists \Phi'(0) = \mathcal{F}$

3. Слабая непрерывность (даже больше), т.е. $q_n \xrightarrow{w} q \Rightarrow \Phi(q_n) \xrightarrow{w} \Phi(q)$

4. $\left.\begin{smallmatrix} 2.2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right\} \Rightarrow$ локальная сюръективность

5. Преобразование Дарбу $\Rightarrow$

   5.1 можно $q \mapsto q_n^t : \ldots, \nu_n(q_n^t) = \nu_n(q) + t$

   5.2 можно $q \mapsto q_{n,t} : \ldots, \lambda_n(q_{n,t}) = \lambda_n(q) + t$

6. $\left.\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right\} \Rightarrow$ глобальная сюръективность $\Phi : L^2 \to \mathbb{R} \times \mathcal{S} \times l^2$,
   $\mathcal{S} := \Big\{ \{\mu_n\} \in l^2 : \pi^2 + \mu_1 < 4\pi^2 + \mu_2 < 9\pi^2 + \mu_3 < \ldots \Big\}$

13 Аналитические отображение банаховых пространств.

Не будем налагать условие комплексности на рассматриваемые пространства. Рассмотрим отображение $f : U \subset E \to F$, где E, F – банаховы пространства, U – открытое подмножество. $\square$

Определение. непрерывное отображение f называется дифференцируемым (по Фреше) в точке $x \in U$, если $\exists\, d_x f \in \mathscr{L}(E, F) : \|f(x+h) - f(x) - (d_x f)(h)\| = o(\|h\|)$, при $\|h\| \to 0$.

Определение. Отображение $f \in C^1(U; F)$, если f дифференцируемо в любой точке из множества U, и отображение $x \mapsto d_x f$ является непрерывным отображением $U \to \mathscr{L}(E, F)$.

Определение. Пусть f непрерывно. $(\delta_x f)(h) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon}$ – называется производной Гато.

Замечание. 1. Если существует производная по Фреше, то существует и производная по направлению.

2. Если $f \in C^1(U, F)$, то для $\forall x, h \ \ (\delta_x f)(h) = (d_x f)(h)$.

3. $f(x, y) := \sqrt[3]{x^3 + y^3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. В нуле по любому направлению существует производная. Но $(\delta_0 f)\left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{smallmatrix}\right) = \sqrt[3]{\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}$ – не линейный оператор.

Лемма 13. *Пусть* $\forall x \in U, h \in E$, f *– непрерывное отображение.*
Пусть $\exists\, (\delta_x f)(h), \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} (\delta_x f)(h)$. *Тогда* $f \in C^1(U, F)$.

Доказательство. Зафиксируем x. Докажем, что $(\delta_x f)(\,\cdot\,)$ – линейный оператор.
$(\delta_x f)(Ch) = C(\delta_x f)(h)$ – ясно. Докажем, что $(\delta_x f)(h+k) = (\delta_x f)(h) + (\delta_x f)(k)$.
$\frac{f(x+\varepsilon(h+k)) - f(x)}{\varepsilon} - \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} - \frac{f(x+\varepsilon k) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(f\big(x+\varepsilon(h+k)\big) - f(x+\varepsilon h) - f(x+\varepsilon k) + f(x) \Big) = \Big[x_\varepsilon := x + \frac{\varepsilon}{2}(h+k) \Big] = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\big[f\big(x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}(h+k)\big) - f(x_\varepsilon) \big] - \big[f\big(x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}(h-k)\big) - f(x_\varepsilon) \big] - \big[f\big(x_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}(k-h)\big) - f(x_\varepsilon) \big] + \big[f\big(x_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}(h+k)\big) - f(x_\varepsilon) \big] \Big) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ (группируем 1 и 4, 2 и 3) $\square$

Пусть E, F – комплексные банаховы пространства.

Определение. Функция $f : U \subset E \to F$ аналитична, если $f \in C^1_{\mathbb{C}}(U, F)$.

Определение. Функция f слабо аналитична, если для $\forall x \in U,\ h \in E,\ L \in F^*$ функция $z \mapsto Lf(x + zh) \in \mathbb{C}$ – аналитическая в окрестности нуля.

Замечание. Функция $z \mapsto Lf(x+zh)$ определена и аналитична в круге $\left\{z : |z| < \frac{\operatorname{dist}(x, \partial U)}{\|h\|}\right\}$.

Фиксируем z_0. Тогда $Lf(x + zh) = Lf(x + z_0 h + (z - z_0)h)$. Но так как это равенство выполняется для любого x, то имеет место аналитичность в окрестности точки z_0.

Лемма 14 (Формула Коши). *Пусть функция f непрерывна и слабо аналитична. Тогда $f(x + zh) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\rho|=r} \frac{f(x+\rho h)}{\rho - z}\, d\rho$, при $0 \leqslant |z| < r < \frac{\operatorname{dist}(x, \partial U)}{\|h\|}$.*

Доказательство. Для $\forall L \in F^*$ выполнено равенство: $Lf(x + zh) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\rho|=r} \frac{Lf(x+\rho h)}{\rho - z}\, d\rho = L\left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\rho|=r} \frac{f(x+\rho h)}{\rho - z}\, d\rho\right)$. □

Теорема 13. *Пусть $f : U \subset E \to F$, где E, F – комплексные банаховы пространства. Тогда эквивалентны два следующих утверждения:*

1. *f аналитична в U.*
2. *f слабо аналитична и локально ограничена, то есть для любой точки существует окрестность и некоторая константа C, такие что в этой окрестности $\|f\| \leqslant C$.*

Доказательство.

(1)⇒(2). Функция дифференцируемая по Фреше, непрерывна, следовательно, локально ограничена. Кроме того $z \mapsto x + zh \mapsto f(x + zh) \mapsto Lf(x + zh)$.(линейность, следовательно аналитичность)

(2)⇒(1). Рассмотрим $x \in U$. Существует такое $r > 0$, что $\sup\limits_{\|h\| \leqslant r} \|f(x + zh)\| \leqslant M$.

$|z| < 1$.

$\frac{Lf(x+zh) - Lf(x)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\rho|=1} \frac{1}{z}\left(\frac{1}{\rho - z} - \frac{1}{\rho}\right) Lf(x + \rho h)\, d\rho = L\left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\rho|=1} \frac{f(x+\rho h)}{(\rho - z)\rho})\, d\rho\right)$(обычн. ф-ла Коши). Следовательно, $\left\|\frac{Lf(x+zh) - Lf(x)}{z}\right\| \leqslant \|L\| \frac{M}{1 - |z|}$. Тогда, так как $|z| < 1,\ \|h\| \leqslant r$, выполнено $\|f(x + zh) - f(x)\| \leqslant \frac{\|z\|}{1 - \|z\|} M$. Следовательно, есть непрерывность, а вместе с тем и формула Коши. Тогда $f(x + zh) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\rho|=1} \frac{f(x+\rho h)}{\rho - z}\, d\rho$. Тогда, дифференцируя под знаком интеграла, получаем, что существует $(\delta_x f)(h) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{f(x+zh) - f(x)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\rho|=1} \frac{f(x+\rho h)}{\rho^2}\, d\rho$. Осталось показать, что предел равномерен. Пусть $\|y - x\| \leqslant \frac{r}{2},\ \|h\| \leqslant \frac{r}{2}$.
Тут он равномерно огр. M
$\frac{f(y+zh) - f(y)}{z} - (\delta_y f)(h) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\rho|=1} \left(\frac{1}{(\rho - z)\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right) f(x + \rho h)\, d\rho$. Следовательно, $\| \frac{f(y+zh) - f(y)}{z} - (\delta_y f)(h)\| \leqslant \frac{|z|}{1 - |z|} M$. Таким образом есть локальная равномерность.

□

Следствие. *Пусть функции $f_n : U \to F$ – аналитичные функции. Пусть $f_n \overset{U}{\rightrightarrows} f$. Тогда f – аналитическая функция.*

Доказательство. Ясно, что функция f будет локально ограничена и слабо аналитична, так как можно применить теорему Вейерштрасса для функций одной переменной. □

Теорема 14. *Пусть функция $f : U \subset E \to H$, где H – сепарабельное гильбертово пространство. $f = (f_1, f_2, \ldots)$, $f_k =< f, e_k >$, где $\{e_k\}$ – базис. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1. *Функция f аналитична.*
2. *Функция f локально ограничена. Функция f_n аналитична для $\forall n$.*
   Более того, $(d_x f)(h) = \Big((d_x f_1)(h), (d_x f_2)(h), \ldots\Big)$.

Пример (требование комплексности существенно). Пусть $f : \mathbb{R} \to H$, где H – вещественное, гильбертово пространство (l^2). $x \mapsto \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n := \frac{x}{1+n^2x^2}$. Аналитичность покоординатно в вещественном смысле очевидна. $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n^2 = x^2 \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{(1+n^2x^2)^2} = x^2 \sum\limits_{n=1}^{1/x^2} (\ldots) + \sum\limits_{n=1/x^2}^{+\infty} (\ldots) \leqslant 1 + x^2 \sum\limits_{n=1/x^2}^{+\infty} \frac{1}{(1+nx^2n)^2} \leqslant 1 + x^2 \sum\limits_{n=1/x^2}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)^2}$. $(n > \frac{1}{x^2})$. Но производная в нуле равна 1. $\frac{dx_n}{dx}\Big|_{x=0} = 1$. Но $(1, 1, \ldots) \notin l^2$.

Доказательство теоремы. 1. $\Rightarrow$ – ясно.

2. $\Leftarrow$ Проверим слабую аналитичность. Рассмотрим $L \in H^*$, $h \in E$. Докажем, что ф-я $z \mapsto Lf(x+zh)$ аналитична в окр-ти 0. По теореме Рисса $Lf(x+zh) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x+zh)\,\bar{l}_k$, где $\{l_k\}_1^{\infty} \in l^2$. Приблизим конечными суммами. Обозначим $L_n f := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\,\bar{l}_k$. Отображение $F_n : z \mapsto L_n f(x + zh)$ аналитично в окрестности точки $z = 0$. Необходимо доказать равномерную сходимость. Выберем радиус $r > 0$ такой, что $\|f(y)\| \leqslant M$, если $\|y - x\| \leqslant r$ – локальная ограниченность. Отображение F_n – аналитично в круге $|z| \leqslant \frac{1}{\|h\|}$. Кроме того $\|F_n - F\| \leqslant M \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} l_k^2 \to 0$ равномерно в шаре $\rightsquigarrow$ по теореме Вейерштрасса F аналит. Докажем формулу для производной: $< d_x f(h), e_k >= (d_x < f, e_k >)(h) = (d_x f_k)(h)$ (дифф-е сложной ф-ии).

□

Замечание. Из этого следует, что функция раскладывается в ряд Тейлора.

14 Теория возмущений простого собственного значения.

14.1 Конечные матрицы. Эвристические соображения.

Пусть A – $(n+1) \times (n+1)$-матрица такая, что $A = A^*$. Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A, причем λ_0 – простое собственное число, то есть не совпадает ни с каким другим собственным числом. Пусть $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ – собственные векторы матрицы A, причем $\|\psi_k\| = 1$. Пусть B – $(n+1) \times (n+1)$-матрица такая, что $B = B^*$. Рассмотрим матрицу

$A+\varepsilon B$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \to 0$. Собственные числа непрерывно зависят от коэффициентов матрицы, т.к. это корни хар-го многочлена. Пусть уже известно, что у матрицы $A+\varepsilon B$ есть собственное число $\lambda_0+\varepsilon\mu+o(\varepsilon)$ и собственный вектор $\psi_0+\varepsilon\xi+o(\varepsilon)$. Хотим найти μ и ξ.
$\|\psi_0+\varepsilon\xi+o(\varepsilon)\|=1$, следовательно $<\psi_0,\xi>=0$.
$(A+\varepsilon B)(\psi_o+\varepsilon\xi+o(\varepsilon))=(\lambda_0+\varepsilon\mu+o(\varepsilon))(\psi_0+\varepsilon\xi+o(\varepsilon))$. Тогда $B\psi_0+A\xi=\mu\psi_0+\lambda_0\xi$. Умножим скалярно на ψ_0, тогда получим, что $<B\psi_o,\psi_0>+<A\xi,\psi_o>=\mu+\lambda<\xi,\psi_0>=\mu$, так как $<\xi,A\psi_0>=\overline{\lambda_0}<\xi,\psi_0>=0$.
Итого: $\mu=<B\psi_0,\psi_0>$. Домножим теперь скалярно на ψ_k. Тогда получим, что $<B\psi_0,\psi_k>+<A\xi,\psi_k>=\lambda_0<\xi,\psi_k>$, так как $<A\xi,\psi_k>=<\xi,a\psi_k>=\overline{\lambda_k}<\xi,\psi_k>=\lambda_k<\xi,\psi_k>$.
Тогда $<\xi,\psi_k>=\frac{<B\psi_0,\psi_k>}{\lambda_0-\lambda_k}\ \ \forall k\geqslant 1$.
Следовательно $\xi=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{<B\psi_0,\psi_k>}{\lambda_0-\lambda_k}\psi_k$.

14.2 Конечные матрицы. Строгое доказательство.

Рассмотрим резольвенту $R(z):=(A-zI)^{-1},\ z\neq\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.
Нарисуем вокруг λ_0 окружность радиуса r, причем $r:|\lambda_k-\lambda_0|>r\ \ \forall k\geqslant 1$.
Рассмотрим $-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda_0-z|=r}R(z)\,dz$.
$A=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k<\cdot,\psi_k>\psi_k,\ \ (A-zI)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{<\cdot,\psi_k>}{\lambda_k-z}\psi_k$
Тогда $-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda_0-z|=r}R(z)\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda_0-z|=r}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{<\cdot,\psi_k>}{\lambda_k-z}\psi_k\right)dz=<\cdot,\psi_0>\psi_0$ – ортопроектор на ψ_0. Если $|\varepsilon|$ достаточно мал, то внутри круга $\{z:|\lambda_0-z|<r\}$ есть ровно одно собственное значение (непрерывность). $R_\varepsilon(z):=(A+\varepsilon B-zI)^{-1}$.
$R(z)-R_\varepsilon(z)=(A+\varepsilon B-zI)^{-1}((A+\varepsilon B-zI)-(A-zI))(A-zI)^{-1}=(A+\varepsilon B-zI)^{-1}\varepsilon B(A-zI)^{-1}=\varepsilon R(z)BR(z)+o(\varepsilon)$.
Пусть $P=<\cdot,\psi_0>\psi_0$, $P_\varepsilon=<\cdot,\psi_0^{(\varepsilon)}>\psi_0^{(\varepsilon)}$, где $\psi_0^{(\varepsilon)}$ – собственный вектор матрицы $A+\varepsilon B$. Следовательно, $P-P_\varepsilon=-\frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint\limits_{|z-\lambda_0|=r}R(z)BR(z)\,dz+o(\varepsilon)$.
Обозначим $Q:=\frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint\limits_{|z-\lambda_0|=r}R(z)BR(z)\,dz$. Тогда $P-P_\varepsilon=-\varepsilon Q+o(\varepsilon)$.
$P_\varepsilon=P+\varepsilon Q+o(\varepsilon)$. Пусть $\lambda^{(\varepsilon)}=\lambda_0+\mu$, где $\mu=o(1)$.
$(A+\varepsilon B)P_\varepsilon=\lambda^{(\varepsilon)}P_\varepsilon=(\lambda_0+\mu)P_\varepsilon\rightsquigarrow$
$AP+\varepsilon[BP+AQ]+o(\varepsilon)=\lambda_0P+\mu P+\varepsilon\lambda_0Q+o(\varepsilon)$. Сократим AP и λ_0P и умножим на P слева. Получим, что $\varepsilon PBP+o(\varepsilon)=\mu P+o(\varepsilon)$, следовательно, $P=<\cdot,\psi_0>\psi_0\Rightarrow$ $\mu=\varepsilon<B\psi_o,\psi_0>+o(\varepsilon)$.

Замечание. $(AP)^*=PA=\lambda_0P=(\lambda_0P)^*$

14.3 Неограниченные самосопряженные операторы.

Пусть оператор A такой, что $A=A^*:D(A)\to H$.

Теорема 15. *Пусть есть замкнутый контур $\Gamma\subset\mathbb{C}$, разделяющий спектр на две части (в частности $\Gamma\cap\sigma(A)=\varnothing$). $P:=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}R(z)\,dz,\ R(z):=(A-zI)^{-1},\ z\notin\sigma(A)\Rightarrow R(z)\in\mathscr{L}(H)$. Тогда:*

1. *$P:H\to H_1$ – ортопроектор. (для некоторого H_1)*

2. $D(A) \supset H_1,\ A: H_1 \to H_1,\ A\big|_{H_1} \in \mathscr{L}(H_1)$.

3. H_2 – *инвариантное подпространство:* $A : D(A) \cap H_2 \to H_2$

4. $A = A\big|_{H_1} \oplus A\big|_{H_2}$, *причем* $A\big|_{H_1} \in \mathscr{L}(H_1)$, $A\big|_{H_2}$: $D(A) \cap H_2 \to H_2$, *и оба слагаемых самосопряженные.*

Доказательство. R(z) – аналитическая функция аргумента $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Поэтому контур можно двигать в области аналтичности, и можно считать, что Γ – это окружность, симметричная относительно $\mathbb{R}$. Докажем теперь, что P – это ортопроектор, то есть надо доказать, что $P^2 = P$ и $P^* = P$.
Пусть Γ' – чуть большая окружность.
Тогда $P^2 = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\Gamma} R(z)\,dz \oint\limits_{\Gamma'} R(z')\,dz' = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oiint\limits_{\Gamma\times\Gamma'} R(z)R(z')\,dzdz' = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oiint\limits_{\Gamma\times\Gamma'} \frac{R(z)-R(z')}{z-z'}\,dzdz'$.
$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma'} \frac{R(z)}{z-z'}\,dz' = -\frac{1}{2\pi i} R(z) \oint\limits_{\Gamma'} \frac{dz'}{z-z'} = R(z)$
$-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{R(z')}{z-z'}\,dz = -\frac{1}{2\pi i} R(z') \oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-z'} = 0$. Следовательно, $P^2 = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} R(z)\,dz = P$. Докажем самосопряженность:
$P^* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} R(\bar{z})\,d\bar{z} = [w := \bar{z}] = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} R(w)\,dw = P$.

Продолжаем доказательство. Почему $H_1 \subset D(A)$? Рассмотрим

$$AP = -\frac{1}{2\pi i} A \oint\limits_{\Gamma} R(z)dz = [\text{ пусть }] = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} AR(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} A \oint\limits_{\Gamma} I + zR(z)dz$$

(т.к. $A = A - Iz + Iz$). $I + zR(z)$ равномерно ограничено при $z \in \Gamma$, т.к. Γ компактно.

Объясним, почему A можно внести:

$$\oint\limits_{\Gamma} R(z)dz \leftarrow A \sum_{k=1}^{N} R(z_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{N} AR(z_k)\Delta z_k \to \oint\limits_{\Gamma} R(z)dz$$

(т.к. и слева, и справа ограниченные операторы, и используем теорему о замкнутом графике, т.к. график с/с оператора замкнут)

т.к. $AP = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} AR(z)dz$, то $AP \in \mathscr{L}(H)$ (Если бы AP было задано не на H, то график не был бы замкнутым.) Отсюда $H_1 \subset D(A)$.

$\forall \varphi \in H_1 \subset D(A)$

$$A\varphi = AP\varphi = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} AR(z)\varphi dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} R(z)A\varphi dz = PA\varphi$$

Кроме того, $\forall \varphi \in H_1\ \forall \psi \in D(A) \cap H_2 \qquad (\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi) = 0$, т.к. $A\varphi \in H_1,\ \psi \in H_2$, отсюда $A\psi \in H_2$.

По определению можно поверить, что $A\big|_{H_2}$ – с/с. □

Добавление: $\sigma(A_1)$ лежит внутри Γ, $\quad \sigma(A_2)$ лежит снаружи Γ, $\quad (A_k := A\big|_{H_k},\ k = 1, 2)$

Доказательство. Надо доказать, что R_1 аналитично продолжается снаружи Γ, а R_2 – внутри.

Т.к. $A = A_1 \oplus A_2$, то R тоже по отдельности действует в H_1 и в H_2.

$R_1(z)\oplus 0 = R_1(z) =$ (в смысле, что $P(H_2)=0$) $= R(z)P = -\frac{1}{2\pi i}R(z)\oint\limits_\Gamma R(z')dz' =$ (пусть z' попадает в резольвентное множество) $= -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma R(z)R(z')dz' = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{R(z)-R(z')}{z-z'}dz' =$ (пусть z вне контура) $= -\frac{1}{2\pi i}R(z)\oint\limits_\Gamma \frac{dz'}{z-z'} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{R(z')dz'}{z-z'}$ – с $R(z)$ могут быть проблемы (а вдруг $z\in\sigma$), но спасает то, что $\oint\limits_\Gamma \frac{dz'}{z-z'}=0$, второе же слагаемое аналитично по z.

Отсюда $R(z)P$ аналитично вне Γ, значит $R(z_1)$ аналитично вне Γ, значит $\sigma(A_1)$ лежит внутри Γ

$0\oplus R_2(z) = R(z)(I-P) = R(z)-R(z)P = R(z) + \frac{1}{2\pi i}R(z)\oint\limits_\Gamma \frac{dz'}{z-z'} - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{R(z')dz'}{z-z'} =$ (через res) $= R(z)-R(z)-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{R(z')dz'}{z-z'}$, последнее слагаемое аналитично по z. □

Рассмотрим $A+\varepsilon B =: A_\varepsilon$
А почему простое с.ч. остаётся простым с.ч.?
Пусть A – с/с, B – огр., с/с (тогда $A+\varepsilon B$ с/с, $D(A+\varepsilon B)=D(A)$)
Пусть λ_0 – изолированное (в топологическом смысле), простое (ровно один с.в.) собственное значение. Окружим λ_0 малой окружностью.
Рассмотрим $P_\varepsilon := -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma R_\varepsilon(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma (A+\varepsilon B - zI)^{-1}dz$ – одномерный проектор (при $\varepsilon=0$).
P_ε непр. зависящий от ε проектор ($\rightsquigarrow$ $\dim\operatorname{Im}$ непр. зависит от ε) (Важно, что при малых ε Γ всё ещё остаётся в резольвентном множестве для A_ε)
$z\notin\sigma(A) \Rightarrow \|(A-z)\varphi\| \geqslant dist(z,\sigma(A))\cdot\|\varphi\|$ (Из спектрального представления $(A-z)$ – это умножение на $\lambda - z$, но $|\lambda-z| > dist(z,\sigma(A))$)
$\|(A+\varepsilon B - zI)\varphi\| \geqslant (dist(z,\sigma(A)) - \varepsilon\|B\|)\cdot\|\varphi\|$. Пусть $\varepsilon < \frac{dist(\Gamma,\ \sigma(A))}{\|B\|} \rightsquigarrow A+\varepsilon B - zI$ – инъекция. Плотен ли образ?
Т.к. $\sigma_\varepsilon\subset\mathbb{R}$, то плотность образа нас интересует лишь для $z\in\mathbb{R}\cap\Gamma$ (не важно)
$Im(A+\varepsilon B - zI) = Ker(A+\varepsilon B-\overline{z}I)^\perp = \{0\}^\perp = H$

$$P_\varepsilon - P_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma (R_\varepsilon(z)-R_0(z))dz =$$

$$= [(A+\varepsilon B - zI)^{-1}((A+\varepsilon B - zI - (A-zI))(A-zI)^{-1} = (A+\varepsilon B-zI)^{-1}\varepsilon B(A-zI)^{-1}] =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\varepsilon\oint\limits_\Gamma R_\varepsilon(z)BR_0(z)dz = \frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma R_0(z)BR_0(z)dz + O(\varepsilon^2) =: \varepsilon Q + O(\varepsilon^2)$$

$dim P_\varepsilon(H) = 1 \rightsquigarrow \exists\psi_\varepsilon : A_\varepsilon\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon \Leftrightarrow A_\varepsilon P_\varepsilon = \lambda_\varepsilon P_\varepsilon$
$A_\varepsilon P_\varepsilon = (A+\varepsilon B)(P_0+\varepsilon Q + O(\varepsilon^2))$
$\lambda_\varepsilon P_\varepsilon = (\lambda_0+\mu_\varepsilon)(P_0+\varepsilon Q+O(\varepsilon^2))$ отсюда $\varepsilon[BP_0+AQ]+O(\varepsilon^2) = \varepsilon\lambda_0 Q + \mu_\varepsilon(P_0+\varepsilon Q+O(\varepsilon^2)) + O(\varepsilon^2)$
Домножим слева на P_0 и учитываем, что $P_0A = \lambda_0P_0$ (т.к. P_0 действует в $R(P_0)$ и в $R(P_0)^\perp$, ну а в обоих частях это верно)

$\varepsilon P_0BP_0 = \mu_\varepsilon(P_0+\varepsilon P_0Q) + O(\varepsilon^2) \rightsquigarrow \mu_\varepsilon P_0 = \varepsilon P_0BP_0 + O(\varepsilon^2)$

Т.к. $P_0 = <\cdot\,,\psi_0>\psi_0$, то $\mu_\varepsilon = \varepsilon <B\psi_0\,,\psi_0> + O(\varepsilon^2)$

15 Градиенты фундаментальных решений по потенциалу. Градиенты спектральных данных.

Замечание. Надо сосчитать градиент температуры и идти по нему.

Пусть $F : q \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \mapsto F(q) \in \mathbb{C}$
Пусть $\exists d_q F \in \mathscr{L}(L^2_{\mathbb{C}}(0,1), \mathbb{C}) = (L^2_{\mathbb{C}}(0,1))^*$, тогда по теореме Рисса
$(d_qF)(v) = \int_0^1 v(t)\frac{\partial F}{\partial q(t)}dt = < v\,, \overline{\frac{\partial F}{\partial q}} >$
$-y'' + qy = \lambda y \qquad \theta(0,\lambda,q) = 1 = \varphi'(0,\lambda,q) \qquad \theta'(0,\lambda,q) = 0 = \varphi(0,\lambda,q)$

Лемма 15. *Пусть $f\,:\; -f'' + qf = \lambda f + h$, где $q, h \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\,, \lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $f(x) = f(0)\theta(x) + f'(0)\varphi(x) - \int\limits_0^x (\theta(t)\varphi(x) - \varphi(t)\theta(x))h(t)dt$*

Доказательство. Непосредственно вычисляем $f''(x) = f(0)\theta''(x)+f'(0)\varphi''(x)-\int\limits_0^x(\theta(t)\varphi''(x)-\varphi(t)\theta''(x))h(t)dt - \underbrace{(\theta(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\theta'(x))}_{=1}h(x)$. Ну и знаем, что θ, φ – решения соотв. уравнения. □

Хотим вычислить $\dfrac{\partial\theta(x,\lambda,q)}{\partial q(t)}$. $\quad (d_q\theta(x,\lambda,q))(v) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\theta(x,\lambda,q+zv)-\theta(x,\lambda,q)}{z}$
$\theta(x,\lambda,q), \varphi(x,\lambda,q), \theta'(x,\lambda,q), \varphi'(x,\lambda,q)$ – аналитические функции по $q \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ (т.к. $\theta = \sum\limits_k \theta_k, \theta_k$ – аналитична $\forall k$, т.к. интеграл – это предел интегральных сумм, ну а ряд сходится равномерно на компактах) Отсюда $d_q\theta(x,\lambda,q)$ – огр. опер.

$\widetilde{\theta}(x) := \theta(x,\lambda,q+zv) \quad \theta(x) := \theta(x,\lambda,q)$

$-\widetilde{\theta}'' + q\widetilde{\theta} = \lambda\theta - zv\widetilde{\theta} \underset{\text{лемма}}{\rightsquigarrow} \widetilde{\theta}(x) =$(начальные данные совпад. с начальными данными θ)
$= \theta(x) + \int\limits_0^x(\theta(t)\varphi(x) - \varphi(t)\theta(x))zv(t)\widetilde{\theta}(t)dt$

Утверждение 2. $\dfrac{\partial\theta(x,\lambda,q)}{\partial q(t)} = (\theta(t)\varphi(x) - \varphi(t)\theta(x))\theta(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$

$\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial q(t)} = (\theta(t)\varphi(x) - \varphi(t)\theta(x))\varphi(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$

$\dfrac{\partial\theta'(x)}{\partial q(t)} = (\theta(t)\varphi'(x) - \varphi(t)\theta'(x))\theta(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$

$\dfrac{\partial\varphi'(x)}{\partial q(t)} = (\theta(t)\varphi'(x) - \varphi(t)\theta'(x))\varphi(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$

(почти уже доказали)

Лемма 16. *(a) $\forall q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ $\forall n \geqslant 1$ $\exists r_n = r_n(q) > 0$: все $\lambda_n(q)\,, \nu_n(q)$ аналитически продолжаются в $B_{\mathbb{C}}(q, r_n) := \{p \in L^2_{\mathbb{C}} : \|p - q\| \leqslant r_n\}$*

(б) $\forall q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ $\exists r = r(q) > 0$: все $\lambda_n(q)\,, \nu_n(q)$ аналитически продолжаются в $B_{\mathbb{C}}(q,r)$

Доказательство. (a) Рассмотри окружность C_n (соотв. круг - D_n): $W(\lambda, q) = -\varphi(1,\lambda,q)$ имеет в $\overline{D_n}$ только один корень $(\lambda_n(q))$, и $\underline{\varphi'(1,\lambda,q)} \neq 0$ в $\overline{D_n} \rightsquigarrow \exists\, r_n : \forall p \in B_{\mathbb{C}}(q,r_n) \quad |\varphi(1,\lambda,p) - \varphi(1,\lambda,q)| < |\varphi(1,\lambda,q)|$ на C_n и $\varphi'(1,\lambda,q) \neq 0$ в $\overline{D_n}$ (т.к. от правой части берём минимум, а левая часть $\leqslant |\varphi'|\cdot|\ldots|) \rightsquigarrow$ по т. Руше ф-я $\varphi(1,\lambda,q)$ имеет ровно один корень в D_n (обозн. $\lambda_n(p)$). При этом

$$\lambda_n(p) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_n}\frac{\lambda\dot{\varphi}(1,\lambda\,p)}{\varphi(1,\lambda\,p)}d\lambda$$

(т.к. $f(\lambda) = \dot{f}(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n) + O((\lambda-\lambda_n)^2),\ \lambda \to \lambda_n \rightsquigarrow$ через вычеты ...)$\rightsquigarrow \lambda_n$ аналитичн.
$\nu_n(p) := \ln[(-1)^n\varphi'(1,\lambda_n(p),p)] \rightsquigarrow \nu_n$ аналит., как композиция аналит. ф-ий.

(б) $\varphi(1,\lambda,p) = \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\dfrac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|}\right) \qquad \varphi'(1,\lambda,p) = \cos\sqrt{\lambda} + O\left(\dfrac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|}\right)$, причём константы зависят только от $\|p\| \rightsquigarrow \exists\, N = N(\|q\|) : \forall n \geqslant N$ можно взять

$C_n = \{|\sqrt{\lambda} - \pi n| = \pi/4\},\ r_n := 1$

$r := min\{r_1, \dots, r_{N-1}, 1\}$

□

Утверждение 3. *Пусть $q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ (Можно и $\mathbb{C}$, но нас интересует лишь $\mathbb{R}$.) Тогда $\dfrac{\partial\lambda_n(q)}{\partial q(t)} = \psi_n^2(t,q)$ (ψ_n – n-я нормированная с. ф-я), $\dfrac{\partial\nu_n(q)}{\partial q(t)} = (\xi_n\psi_n)(t,q)$, где ξ_n ($\exists$ и !):*

$$\begin{cases} -\xi_n'' + q\xi_n = \lambda_n\xi_n \ (\textit{как и } \psi_n) \\ \{\xi_n, \psi_n\} = 1 \\ \int\limits_0^1 (\xi_n\psi_n)(t)dt = 0 \end{cases}$$

Доказательство. $\varphi(1,\lambda_n(q),q) \equiv 0 \rightsquigarrow 0 = d_q(\varphi(1,\lambda_n(q),q)) = \dot\varphi(1,\lambda_n(q),q)d_q\lambda_n(q) + (d_q\varphi)(1,\lambda_n(q),q)$ ($d_q\varphi$ – в смысле дифференциал по 3-му аргументу) $\rightsquigarrow$

$$\frac{\partial\lambda_n(q)}{\partial q(t)} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial q(t)}(1,\lambda_n(q),q)}{\dot\varphi(1,\lambda_n(q),q)} = -\frac{(\theta(t)\varphi(1) - \theta(1)\varphi(x))\varphi(t)}{\dot\varphi(1)} = \left[\varphi(1) = 0,\, \theta(1)\varphi'(1) = W = 1\right] =$$

$$= \frac{(\varphi(t))^2}{\varphi'(1)\dot\varphi(1)} = \frac{(\varphi(t))^2}{\|\varphi\|^2} = \psi_n^2(t)$$

Замечание. Ничего удивительного: (нестрого) Рассмотрим $Ay := -y'' + qy, \quad By := vy$

$$\lambda_n(A+\varepsilon B) - \lambda_n(A) = \varepsilon < B\psi_n,\, \psi_n > + \ldots = \varepsilon\int\limits_0^1 v(t)\psi_n^2(t)dt + \ldots$$

$$\frac{\partial\nu_n(q)}{\partial q(t)} = \frac{\partial\log[(-1)^n\varphi'(1,\lambda_n(q),q)]}{\partial q(t)} = \frac{1}{\varphi'(1)}\left[\dot\varphi'(1)\frac{\partial\lambda_n(q)}{\partial q(t)} + \frac{\partial\varphi'(1)}{\partial q(t)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(1)}\left[\dot\varphi'(1)\psi_n^2(t) + (-\theta'(1)\varphi(t) + \varphi'(1)\theta(t))\varphi(t)\right] = (\theta\varphi)(t) + c\varphi^2(t)$$

$\xi_n(t) := (\theta(t) + c\varphi(t))\|\varphi\|$

Действительно,

а) $\{\xi_n,\, \psi_n\} = \{\theta + c\varphi,\, \varphi\} = 1$ (т.к. $\psi = \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$)

б) ξ_n – решение, как лин. комбинация решений.

в) Заметим, что $\lambda_n(q+c) = \lambda_n(q) + c,\ \nu_n(q+c) = \nu_n(q)\ \forall c \in \mathbb{R}$

(для ν_n надо доказать, что $\ln[(-1)^n\varphi'(1,\lambda_n + c, q + c)] = \ln[(-1)^n\varphi'(1,\lambda_n,q)]$, но это решения одного уравнения: $-\varphi'' + (q+c)\varphi = (\lambda_n + c)\varphi$ и $-\varphi'' + q\varphi = \lambda_n\varphi$)

Т.к. $\nu_n(q+c) = \nu_n(q) \rightsquigarrow \int\limits_0^1 \dfrac{\partial\nu_n(q)}{\partial q(t)}dt = 0 \rightsquigarrow \int\limits_0^1 \xi_n\psi_n dt = 0$

□

16 Гладкость отображения Φ. Обратимость $d_q\Phi$.

$\Phi : q \mapsto (\widehat{q}^{\,(0)},\ \{\mu_n(q)\}_{n=1}^{+\infty},\ \{n\nu_n(q)\}_{n=1}^{+\infty}),\quad \mu_n(q) = \lambda_n(q) - \pi^2 n^2 - \widehat{q}^{\,(0)}$
$\Phi : L^2(0,1) \to \mathbb{R} \times l^2 \times l^2$

Утверждение 4. $\forall q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \quad \exists\, d_q\Phi \in \mathscr{L}(L^2, \mathbb{R} \times l^2 \times l^2)$

Доказательство. По лемме из предыдущего параграфа $\exists r > 0 : \Phi$ продолжается в $B_{\mathbb{C}}(q,r)$: все координаты $(\widehat{q}^{\,(0)},\ \mu_n(q)\,,\ n\nu_n(q))$ аналитичны. (Хотим доказать лок. огр. – дост. для глоб. аналитичности)
$\|\Phi(p)\|_{\mathbb{R}\times l^2\times l^2}$ огр. в $B_{\mathbb{C}}(q,r)$, потому что
$\lambda_n(p) = \pi^2 n^2 + \widehat{p}^{\,(0)} - \widehat{p}^{\,(C_n)} + O(\frac{1}{n})$, $\nu_n(p) = \frac{1}{2\pi n}\widehat{p}^{\,(S_n)} + O(\frac{1}{n^2})$
(дословно повторяем вещественное д-во)
$\rightsquigarrow \Phi : B_{\mathbb{C}}(q,r) \to \mathbb{C} \times l^2_{\mathbb{C}} \times l^2_{\mathbb{C}}$ – аналит. $\rightsquigarrow \exists d_q\Phi$ □

Замечание. Более того, $(d_q\Phi)(v) = (< v, 1 >= \widehat{v}^{\,(0)}\ ; \{< v, \psi_n^2 - 1 >\}_1^\infty\ ; \{n < v, \xi_n\psi_n >\}_1^\infty)$ (из теоремы об аналит. отобр. и утв. о градиентах)

Теорема 16. $\forall q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \quad \exists\,(d_q\Phi)^{-1}$ – *огран.*

Доказательство. Проверим:

а) $d_q\Phi$ – огран. обратимый + компактный (фредгольмов)

б) $\operatorname{Im} d_q\Phi$ плотен в $\mathbb{R} \times l^2 \times l^2$

(а) Рассмотрим $\Phi = \mathcal{F} + \Phi_1$, где $\mathcal{F} : q \mapsto \left(\widehat{q}^{\,(0)}\ ; \{-\widehat{q}^{\,(C_n)}\}_1^\infty\ ; \{\frac{1}{2\pi}\widehat{q}^{\,(S_n)}\}_1^\infty\right)$
$\Phi_1 = \Phi - \mathcal{F} = \left(0, \{O(\frac{1}{n})\}_1^\infty, \{O(\frac{1}{n})\}_1^\infty\right)$

Рассмотрим $l^2_\delta := \{\{c_n\}_1^\infty : \|c\|^2_{l^2_\delta} := \sum\limits_1^\infty n^{2\delta}|c_n|^2 < +\infty\},\ \delta > 0$

Тогда $Id : l^2_\delta \hookrightarrow l^2$ – компактный оператор. (т.к. $\widetilde{e}_n := \dfrac{1}{n^\delta}e_n$ – ОНБ в $l^2_\delta \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \sum\limits_{n=1}^\infty c_n\widetilde{e}_n \mapsto \sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{c_n}{n^\delta}\widetilde{e}_n\,,$ т.е. это оператор, который действует, как деление на n^δ (это диагональный оператор, у которого на диагонали положит с.ч., $\to 0 \rightsquigarrow$ он комп.))

Итак, $\Phi_1 : L_1 \to \mathbb{R} \times l^2_{1/4} \times l^2_{1/4}$.

Так же, как и раньше, доказывается, что $\exists d_q\Phi_1 \in \mathcal{L}(L^2, \mathbb{R} \times l^2_{1/4} \times l^2_{1/4}) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow d_q\Phi_1 : L_1 \to \mathbb{R}\times l^2 \times l^2$ – компактный оператор(огр. в пр-ве, кот. вклад. в комп.). Но $d_q\Phi = \mathcal{F} + d_q\Phi_1$, а $\mathcal{F}$ – огр. обратимый. Итак, доказали, что фредгольмов, осталось доказать, что образ плотен.

(б)

Лемма (коммутационные соотношения). $\forall n, m \geqslant 1$

$$< \psi_n^2,\ (\psi_m^2)' > = 0$$
$$< \xi_n\psi_n,\ (\xi_m\psi_m)' > = 0$$
$$< \psi_n^2,\ (\xi_m\psi_m)' >= - < (\psi_n^2)',\ \xi_m\psi_m > = -\frac{1}{2}\delta_{nm}$$

Пусть лемма доказана. $d_q\Phi$ есть умножение на 1 , $\{\psi_n^2 - 1\}_1^\infty$, $\{n\xi_n\psi_n\}_1^\infty$

Ясно, что эта система и система $\{1\ ,\{-2(\xi_m\psi_m)'\}_1^\infty\ ,\{\frac{1}{2m}(\psi_m^2)'\}_1^\infty\}$ – это биортогональные системы(лемма), а это базисы

$\rightsquigarrow (d_q\Phi)(1) = (1, \mathbf{0}, \mathbf{0}),\ (d_q\Phi)(-2(\xi_m\psi_m)') = (\mathbf{0}, e_m, \mathbf{0}),\ (d_q\Phi)(\frac{1}{2m}(\psi_m^2)') = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, e_m),$ т.е. образ плотен.

доказательство леммы. Докажем, например, $< \psi_n^2, (\xi_m\psi_m)' >=$ [инт. по частям] $= - < (\psi_n^2)', \xi_m\psi_m >= \frac{1}{2}(< \psi_n^2, (\xi_m\psi_m)' > - < (\psi_n^2)', \xi_m\psi_m >) =$

$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\psi_n\xi_m(\psi_n\psi_m' - \psi_n'\psi_m) + \psi_n\psi_m((psi_n\xi_m' - \psi_n'\xi_m))(t)dt =$

$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\psi_n\psi_m\{\psi_n,\, \psi_m\} + \psi_n\psi_m\{\psi_n,\, \xi_m\})(t)dt(*)$

$m = n \rightsquigarrow (*) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \psi_n^2(t)dt = -\frac{1}{2}$

$m \neq n \rightsquigarrow$ т.к. $\{\psi_n,\, \psi_m\}' = (\lambda_n - \lambda_m)\psi_n\psi_m, \quad \{\psi_n,\, \xi_m\}' = (\lambda_n - \lambda_m)\psi_n\xi_m$

$(*) = \dfrac{1}{2(\lambda_n - \lambda_m)}\int\limits_0^1 (\{\psi_n,\, \xi_m\}\{\psi_n,\, \psi_m\})'(t)dt = 0$ т.к. $\{\psi_n,\, \psi_m\}(0) = \{\psi_n,\, \psi_m\}(1) = 0$ $\square$

$\square$

17 Другие краевые условия

Воспоминание:
$H_D y := -y'' + qy (= \lambda y)$ на $(0, 1),\ y(0) = y(1) = 0$
$L^2(0, 1) \ni q \mapsto \lambda_n(q) = \pi^2 n^2 + \widehat{q}^{\,(0)} + \mu_n(q),\ n \geqslant 1$
Нормирующие постоянные $\nu_n(q) := \log[(-1)^n\varphi(1, \lambda_n(q), q)] = \log\left|\dfrac{\psi_n'(1, q)}{\psi_n'(0, q)}\right|$
Крутилось вокруг

$$q \mapsto (\widehat{q}^{\,(0)},\, \{\mu_n(q)\}_1^\infty,\, \{\nu_n(q)\}_1^\infty)$$
$$L^2(0, 1) \leftrightarrow \mathbb{R} \times S \times l_1^2 \text{ (биекция)}$$

$S \subset l^2,\ l_1^2$ – означает, что после домножения на n, $\in l^2$

На что можно заменить краевые условия, чтобы этот оператор был с/с? Делятся на 2 типа:

- Разделённые условия: $y'(0) - ay(0) = 0,\ y'(1) + by(1) = 0,\ a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (у нас было $a = b = \infty$)

- Обобщённые периодические условия:
$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1$

Задача 1 Проверить, что это с/с (или х.б. симметр.) расширение оператора $-y'' + qy$ на $C_0^\infty(0, 1)$ (если $q \in L^2(0, 1)$)

Задача 2^* Док-ть, что это все с/с расширения (проверить, что $n_- = n_+ = 2$)

Почему не будем об обобщ. период. усл-ях и почему там сложнее:

Пусть $a = d = 1,\ b = c = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} y(1) &= y(0) \\ y'(1) &= y'(0) \end{cases}$

Пусть $q = 0 \rightsquigarrow -y'' = \lambda y$.

Периодические решения на (0,1) – это $\cos 2\pi nx,\ n \geqslant 0, \quad \sin 2\pi nx,\ n \geqslant 1,$ т.е. спектр

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & < & 4\pi^2 & = & 4\pi^2 & < & 16\pi^2 & = & 16\pi^2 & < & \dots \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \lambda_0 & & \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \lambda_4 & & \end{array}$$

Т.е. кратные с.ч. могут быть, асимптотики сложнее и т.п., а потому думаем только о разделённых условиях.

Три случая: сколько из a, b равны ∞. Если оба – уже изучили (условия Дирихле)

Будем рассматривать

$$\begin{cases} -y'' + qy &= \lambda y \\ y'(0) - ay(0) &= 0 \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ y'(1) + by(1) &= 0 \end{cases}$$

(если одно равно ∞, то можно делать "так же", но мы не будем)

Пусть пока $a = b = 0$.

Замечание. $q \equiv 0 \rightsquigarrow \begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$ Решения: $\lambda_n = \pi^2 n^2,\ n \geqslant 0;\ \psi_0 \equiv 0,\ \psi_n(x) = \sqrt{2}\cos \pi nx$

Что такое с. значения?

Задача 3

а) σ_n – с.зн. задачи Неймана $\Leftrightarrow \theta'(1, \sigma_n, q) = 0$

б) $W(\lambda, q) := \theta'(1, \lambda, q) = -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \prod\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{\lambda - \sigma_n(q)}{\lambda - \pi^2 n^2}$ (целая по λ)

Как устроена асимптотика с.зн.?

Задача 4 $\sigma_n(q) = \pi^2 n^2 + \widehat{q}^{\,(0)} + \tau_n(q),\ n \geqslant 0,$ где $\tau_n(q) = \widehat{q}^{\,(C_n)} + O(\frac{1}{n}),$ в частности, $\{\tau_n(q)\}_0^\infty \in l^2$

Нормирующие постоянные.

Определение. $æ_n(q) := \log[(-1)^n \theta(1, \sigma_n, q)] = \log \left\| \dfrac{\psi_n(1, q)}{\psi_n(0, q)} \right\|$

Задача 5 Пусть $q, p : \sigma_n(q) = \sigma_n(p),\ æ_n(q) = æ_n(p)\ \forall n \geqslant 0 \Rightarrow q = p$

Подсказка: Рассмотреть $\begin{pmatrix} \theta & \eta \\ \theta' & \eta' \end{pmatrix}(q) \left[\begin{pmatrix} \theta & \eta \\ \theta' & \eta' \end{pmatrix}(p) \right]^{-1}$, где $\eta'(1) = 0,\ \eta(1) = 1$

Задача 6 $q = q^\sharp \Leftrightarrow æ_n(q) = 0\ \forall\ n \geqslant 0$

Однако, $\{\sigma_n(q)\}_0^\infty,\ \{æ_n(q)\}_0^\infty$ НЕ независимые параметры!

Утверждение 5. $\sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\dfrac{e^{\pm æ_n(q)}}{|\dot{W}(\sigma_n(q))|} - 2 \right) = -1$

Доказательство. Рассмотрим $f(\lambda) := \dfrac{\theta(1,\lambda,q)}{\theta'(1,\lambda,q)}$. Хотим асимптотику на ∞ и особенности с вычетами.

$$f(\lambda) = \frac{\cos\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^1 \sin\sqrt{\lambda}(1-t)\cos\sqrt{\lambda}tq(t)dt + O\left(\dfrac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|}\right)}{-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + \int\limits_0^1 \cos\sqrt{\lambda}(1-t)\cos\sqrt{\lambda}tq(t)dt + O\left(\dfrac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\sqrt{\lambda} + \frac{\widehat{q}^{(0)}}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda} + o\left(\dfrac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|}\right)}{-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + \frac{\widehat{q}^{(0)}}{2}\cos\sqrt{\lambda} + o\left(e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}\right)} = (*)$$

$o(\cdots)$ в числителе – л.Римана-Лебега. Считаем $|\lambda| = \pi^2(n+1/4)^2,\ n\to\infty$, чтобы не было проблем в знаменателе – $\sin$ и $\cos\neq 0$. Тогда:

$$(*) = \frac{\cos\sqrt{\lambda}}{-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1+\frac{\widehat{q}^{(0)}}{2\sqrt{\lambda}}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} + o\left(\dfrac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right)}{1-\frac{\widehat{q}^{(0)}}{2\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda} + o\left(\dfrac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right)} = \underbrace{-\frac{\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}_{f_0(\lambda):=}\left(1+\frac{\widehat{q}^{(0)}}{2\sqrt{\lambda}}(\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}+\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}) + o\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right)\right) =$$

$$= f_0(\lambda) - \frac{\widehat{q}^{(0)}}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{\widehat{q}^{(0)}}{2}(f_0(\lambda))^2 + o\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right)$$

А теперь вычеты: особенности $f(\lambda)$ – в $(\cdot)$ $\lambda = \sigma_n$

$$\operatorname*{res}_{\lambda=\sigma_n} f(\lambda) = \frac{\theta(1,\sigma_n,q)}{\dot{\theta}'(1,\sigma_n,q)} = \frac{e^{\text{æ}_n(q)}}{|\dot{W}(\sigma_n(q))|}$$

По теореме Коши о вычетах:

$$\sum_{n=0}^N \frac{e^{\text{æ}_n(q)}}{|\dot{W}(\sigma_n(q))|} = \sum_{n=0}^N \operatorname*{res}_{\lambda=\pi^2n^2} f_0(\lambda) - \frac{\widehat{q}^{(0)}}{2}\left(1+\sum_{n=0}^N \operatorname*{res}_{\lambda=\pi^2n^2}(f_0(\lambda))^2\right) + o(1),\ N\to\infty$$

Задача 7 Досчитать.
Второе тождество (с $-\text{æ}_n(q)$) доказывается так:
Рассмотрим $q^\sharp$. $\sigma_n(q^\sharp) = \sigma_n(q) \rightsquigarrow W(\lambda,q^\sharp) = W(\lambda,q),\ \text{æ}_n(q^\sharp) = -\text{æ}_n(q)$ □

Следствие 1. *Пусть* $p = p^\sharp \in L^1$. *Пусть* $q\in L^1 : \sigma_n(q) = \sigma_n(p)\ \forall n\geqslant 0 \Rightarrow q = p$

Доказательство.

1. $W(\lambda,q) = W(\lambda,p)$, т.к. $\sigma_n(q) = \sigma_n(p)\ \forall n\geqslant 0$
2. $p = p^\sharp \rightsquigarrow \text{æ}_n(p) = 0\ \forall n\geqslant 0 \rightsquigarrow$

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{|\dot{W}(\sigma_n(q))|} - 2\right) = -1 \rightsquigarrow \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{e^{\text{æ}_n(q)} - 2 + e^{-\text{æ}_n(q)}}{|\dot{W}(\sigma_n(q))|}\right) = 0 \rightsquigarrow \text{æ}_n(q) = 0\ \forall n\geqslant 0$$

3. По теореме единственности $q = p$.

□

Как спасти ситуацию? Рассмотрим a, b – пусть они не фиксированы. Рассмотрим

$$\begin{cases} y'' + qy &= \lambda q \\ y'(0) - ay(0) &= 0 \\ y'(1) + by(1) &= 0 \end{cases}, \; Q = (q, a, b) \mapsto (\{\sigma_n(Q)\}_{n=0}^{\infty},\ \{æ_n(Q)\}_{n=0}^{\infty})$$

Задача

1. $\sigma_n(Q)$ – корни $W(\lambda, Q) := [(\theta + a\varphi)' + b(\theta + a\varphi)](1, \cdot, q) = \theta' + a\varphi' + b\theta + ab\varphi = -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + \ldots$ (главная часть)
2. $W(\lambda, Q) = -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\prod\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{\lambda - \sigma_n(Q)}{\lambda - \pi^2 n^2}$
3. $\sigma_n(Q) = \pi^2 n^2 + Q_0 + \tau_n(Q),\ n \geqslant 0,$ где $Q_0 = \widehat{q}^{\,(0)} + 2a + 2b,\ \{\tau_n(Q)\}_{n=0}^{\infty} \in l^2$

Нормирующие постоянные:

Определение. $æ_n(Q) := \log\left|\dfrac{\psi_n(1, Q)}{\psi_n(0, Q)}\right| = \log[(-1)^n(\theta + a\varphi)(1)]$

Теорема 17. $Q = (q, a, b) \mapsto (Q_0, \{\tau_n(Q)\}_{n=0}^{\infty}, \{æ_n(Q)\}_{n=0}^{\infty})$ *(или* $(\{\sigma_n(Q)\}_{n=0}^{\infty}, \{æ_n(Q)\}_{n=0}^{\infty})$*)– – биекция*

$L^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times S \times l_1^2, \quad S = \{\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2 : \tau_0 < \pi^2 + \tau_1 < 4\pi^2 + \tau_2 < \ \ldots\}$

При этом $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{e^{æ_n(q)}}{|\dot{W}(\sigma_n(q))|} - 2\right) = -1 - b,\ \sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{e^{-æ_n(q)}}{|\dot{W}(\sigma_n(q))|} - 2\right) = -1 - a \quad (*)$

Доказательство. (основные идеи)

(Можно доказать, как в Дирихле, но мы пойдём другим путём.)

1. Теорема !-ти
   - Сначала доказать $(*)$(рассмотреть $\dfrac{(\theta + a\varphi)(1, \lambda, q)}{W(\lambda, Q)}$ и как ранее)
   - Пусть теперь $\sigma_n(P) = \sigma_n(Q),\ æ_n(P) = æ_n(Q)\ \forall n \geqslant 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} a_p = a_q,\ b_p = b_q$
   - Повторить стандартное доказательство: рассмотрим $\begin{pmatrix} \psi_- & \psi_+ \\ \psi_-' & \psi_+' \end{pmatrix}$,

     $\psi_- = \theta + a\varphi,\ \psi_+ : \psi_+(1) = 1,\ \psi_+'(1) = -b$

     Т.е. это инъекция.
2. Сюръективность

   Лемма (1). *Пусть* $q \in L^2(0, 1),\ a, b \in \mathbb{R}$*, тогда*

   $\exists q_{a,b}^- \in L^2(0, 1) : \sigma_n(Q) = \lambda_n(q),\ æ_n(Q) = \nu_n(q)\ \forall n \geqslant 0,$ *где* $Q = (q_{a,b}^-, a, b)$

   Лемма (2). $\forall\ \{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{æ_n\}_{n=1}^{\infty},\ a,\ b\ \exists\,!\ \sigma_0,\ æ_0 :$ *выполняется* $(*)$

   Пусть теперь даны $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty},\ \{æ_n\}_{n=0}^{\infty}$

   (a) считаем a, b по $(*)$

   (b) строим $q : \lambda_n(q) = \sigma_n,\ \nu_n(q) = æ_n$ (т.к. про Дирихле знаем)

   (c) строим $q_{a,b}^-$ из леммы 1

   (d) $\sigma_0(q_{a,b}^-, a, b),\ æ_0(q_{a,b}^-, a, b)$ удовл. $(*) \overset{\text{лемма 2}}{\Longrightarrow}$ равны соотв. $\sigma_0,\ æ_0$

□