Доп. главы ТФКП. 8 лекций.

МАТ–МЕХ, 4 семестр, ПОМИ-группа, *Челкак Д.С.*

Лекция первая. 25 февраля 2005.

0 Простые вещи.

В дальнейшем тексте через $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ мы будем обозначать произвольную ограниченную область, а через B_R - (открытый) круг радиуса R с центром в начале координат. Класс аналитических в $\mathcal{D}$ функций обозначается через $H(\mathcal{D})$. Как известно, одним из первых ключевых фактов ТФКП является

Теорема 0.1 (Формула Коши). *Пусть $f \in H(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta \in \partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Из этой формулы непосредственно вытекает масса следствий. Так, дифференцируя ее по z, получаем

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta \in \partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad z \in \mathcal{D},$$

откуда *для функций* $f \in H(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ имеем

$$|c_n| \leqslant \frac{M(R)}{R^n}, \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

где $M(R) := \max_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|$ и через c_n обозначены тейлоровские коэффициенты $f(z)$ в точке 0. В частности, из этой оценки очевидно, что ряд $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ сходится (равномерно на компактах) внутри B_R и, кроме того,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{1}{R}.$$

Нетрудно видеть, что последнее неравенство на самом деле дает необходимое и достаточное условие того, что степенной ряд аналитичен в круге радиуса R, т.е. что верна

Теорема 0.2 (Коши-Адамар). *Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ равен $\dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, какова бы ни была последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$.*

Также формула Коши дает следующую оценку для $f \in H(B_R(z)) \cap C(\overline{B}_R(z))$:

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + Re^{i\phi})| d\phi \,,$$

которая выражает тот факт, что $|f(z)|$ является *субгармонической* функцией, то есть значение этой функции в центре каждой окружности меньше, чем среднее значение по этой окружности. Отсюда сразу вытекает

Теорема 0.3 (принцип максимума). *Если $f \in H(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}})$, то*

$$\max_{\zeta \in \overline{\mathcal{D}}} |f(\zeta)| = \max_{\zeta \in \partial \mathcal{D}} |f(\zeta)|.$$

В частности, из принципа максимума вытекает, что для $f(z)$, аналитической в кольце $B_{R_2} \setminus \overline{B}_{R_1}$, функция $M(r)$ не может иметь локальных максимумов на промежутке $(R_1\,, R_2)$. Этот результат можно существенно усилить.

1 Теорема Адамара о трех кругах.

Теорема 1.1. *Пусть $f \in H(B_{R_2} \setminus \overline{B}_{R_1})$. Тогда функция $M(r) = \max_{|\zeta|=r} |f(\zeta)|$ обладает следующим свойством выпуклости:*

$$\forall R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2 \qquad \log M(r) \leqslant \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2), \tag{2}$$

т.е. функция $\log M(r)$ выпукла относительно $\log r$.

Доказательство. Зафиксируем $r_1 < r < r_2$ и рассмотрим функцию $g(z) := z^\alpha f(z)$ (мы пока закроем глаза на неоднозначность выбора значения z^α), где α выбрано так, что

$$M(r_1) r_1^\alpha = M(r_2) r_2^\alpha = C \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{\log M(r_2) - \log M(r_1)}{\log r_2 - \log r_1} \,.$$

Если бы α (случайно) оказалось целым, то функция $g(z)$ была бы аналитична в кольце $B_{R_2} \setminus \overline{B}_{R_1}$ и удовлетворяла бы неравенству $|g(\zeta)| \leqslant C$ на его границе. Отсюда по принципу максимума можно получить, что

$$M(r) = \frac{\max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)|}{r^\alpha} \leqslant \frac{C}{r^\alpha},$$

а это неравенство, как несложно проверить, равносильно (2). Осталось преодолеть (чисто техническую) сложность с неоднозначностью функции z^α. Например, можно сказать, что функция $|g(z)|$ однозначна и субгармонична (ибо субгармоничность - это локальное свойство, а локально всегда можно выбрать однозначную ветвь $g(z)$), а значит к ней применим принцип максимума. Набросок альтернативного доказательства: Рассмотрим случай рационального $\alpha = \frac{m}{n}$. Переходя к функции $\widetilde{f}(z) = (f(z))^n$ имеем

$\widetilde{\alpha} = n\alpha \in \mathbb{Z}$. Для функции $\widetilde{f}(z)$ проводим вышеприведенные рассуждения, получаем оценку (2), что дает аналогичную оценку для $f(z)$. Случай $\alpha \notin \mathbb{Q}$ рассматривается путем предельного перехода. Именно, заменяем величину $M(r_2)$ на последовательность $M_2^{(k)} \to M(r_2)$, такую что соответствующие α_k рациональны, после чего переходим к пределу в неравенстве (2). $\square$

2 Целые функции. Порядок и тип.

Определение 2.1. *Целой функцией (entire function) называется функция, аналитическая во всей комплексной плоскости.* **Порядком** *целой функции называется число*[1]

$$\rho = \inf\left\{\mu > 0 : M(r) \leqslant e^{r^\mu}, r \to +\infty\right\}$$

(если таких μ нет вообще, то $\rho = +\infty$). Если порядок функции конечен, то ее **тип** *определяется как*

$$\sigma = \inf\left\{K : M(r) \leqslant e^{Kr^\rho}, r \to +\infty\right\}.$$

Если $\sigma = 0$, то говорят, что функция имеет минимальный, а если $\sigma = +\infty$ - то максимальный тип.

Комментарии: i) В силу теоремы Коши-Адамара, целые функции представляются в виде всюду сходящегося ряда $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, где $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, при этом последнее условие необходимо и достаточно для того, чтобы функция $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ была целой.
ii) В силу теоремы Лиувилля, справедливость неравенства $M(r) \leqslant Cr^n$ при $r \to +\infty$ невозможна, если только $f(z)$ не многочлен, поэтому использование экспоненциальных оценок в определении естественно. Отметим также, что из рассуждений, аналогичных доказательству теоремы Лиувилля сразу вытекает, что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = +\infty,$$

если только f не есть многочлен.

Наша ближайшая цель - установить связь между скоростью убывания коэффициентов c_n при $n \to \infty$ и скоростью роста функции $M(r)$ при $r \to \infty$. Предположим сначала, что для каких-то $K, \mu > 0$ справедлива оценка

$$M(r) \leqslant e^{Kr^\mu}, \quad r \to \infty.$$

Тогда (см. (1)) для достаточно больших r справедливо

$$|c_n| \leqslant \frac{e^{Kr^\mu}}{r^n} = f(r).$$

[1]Здесь и далее запись $A(r) \leqslant B(r),\ r \to \infty$ означает, что требуемое неравенство выполняется для всех достаточно больших r.

Легко видеть, что $(\log f(r))' = K\mu r^{\mu-1} - nr^{-1}$, то есть функция $f(r)$ имеет минимум при $r_{extr} = (n/K\mu)^{1/\mu}$. Отметим, что $r_{extr} \to \infty$ при $n \to \infty$, поэтому для достаточно больших n справедливо

$$|c_n| \leqslant f(r_{extr}) = \left(\frac{eK\mu}{n}\right)^{n/\mu}.$$

Логарифмируя это неравенство, имеем

$$\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \geqslant \frac{1}{\mu} \log \frac{n}{eK\mu}$$

и, далее,

$$\mu \geqslant \frac{\log n - \log eK\mu}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}.$$

Так как знаменатель стремится к бесконечности, имеем

$$\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}.$$

Рассматривая теперь инфимум μ, для которых исходная оценка имеет место, получаем

Предложение 2.2. *Для каждой целой функции справедливо неравенство*

$$\rho \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}.$$

Как мы скоро увидим, на самом деле левая и правая часть всегда равны, то есть коэффициенты $|c_n|$ целой функции порядка ρ убывают не медленнее, чем $1/n^{n/r}$ и примерно такое убывание реализуется на какой-то подпоследовательности коэффициентов.

Лекция вторая. 28 февраля 2005.

Ключевым фактом, позволяющим получить неравенство

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} \leqslant \rho$$

является

$$\log M(r) \leqslant Kr^{\mu},\ r \to \infty \quad \Rightarrow \quad |c_n| \leqslant \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu},\ n \to \infty. \tag{3}$$

Предположим теперь, что справедлива оценка (3) для коэффициентов $|c_n|$, $n \geqslant N$. Имеем

$$M(r) = \max_{|\zeta|=r} \left|\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |c_n| r^n$$

Рассмотрим минимальное $N_r > N$, такое что $\left(\frac{e\mu K r^\mu}{N_r}\right)^{1/\mu} \leqslant \frac{1}{2}$ (ясно, что $N_r = O(r^\mu)$). Тогда

$$M(r) \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |c_n| r^n + \sum_{n=N}^{N_r-1} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} r^n + 1.$$

Оценим сумму $\sum_{n=N}^{N_r-1}$. Для этого найдем максимум выражения $\left(\frac{e\mu K r^\mu}{n}\right)^{n/\mu}$ в зависимости от n. Несложно проверить, что этот максимум достигается при $n = \mu K r^\mu$ и, следовательно,

$$\forall n \ \ \left(\frac{e\mu K r^\mu}{n}\right)^{n/\mu} \leqslant e^{K r^\mu}.$$

В итоге получаем, что

$$M(r) \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |c_n| r^n + (N_r - N) e^{K r^\mu} + 1.$$

Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ импликацию (3) можно "обратить":

$$\log M(r) \leqslant K r^\mu,\ r \to \infty \ \Rightarrow\ |c_n| \leqslant \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu},\ n \to \infty \ \Rightarrow\ \log M(r) \leqslant (K+\varepsilon) r^\mu,\ r \to \infty. \tag{4}$$

Используя только что проведенное рассуждение, докажем

Теорема 2.3. *Для произвольной целой функции справедливо*[2]

$$\rho = \alpha := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}.$$

Если порядок ρ конечен, то верно также

$$(e\rho\sigma)^{1/\rho} = \beta := \varlimsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Доказательство. Неравенство $\rho \geqslant \alpha$ уже получено (Предложение 2.2). Для того, чтобы получить обратную оценку заметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ верно

$$\frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} < \alpha + \varepsilon,\ n \to \infty \quad \Rightarrow \quad |c_n| \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{n/(\alpha+\varepsilon)},\ n \to \infty.$$

Значит, в силу (4), имеем

$$\log M(r) \leqslant (1+\varepsilon) e^{r^{\alpha+\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \rho \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, отсюда вытекает $\rho \leqslant \alpha$. Итак, $\rho = \alpha$.

[2] То есть величины ρ и α (σ и β) либо обе конечны и равны, либо обе бесконечны.

Аналогичным образом из (4) вытекает требуемое равенство для типа σ функции конечного порядка. В самом деле,

$$\log M(r) \leqslant (\sigma+\varepsilon)r^\rho,\ r\to\infty\ \Rightarrow\ |c_n| \leqslant \Big(\frac{e\rho(\sigma+\varepsilon)}{n}\Big)^{n/\rho}\ \Rightarrow\ n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant (e\rho(\sigma+\varepsilon))^{\frac{1}{\rho}},\ n\to\infty.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$, получаем $\beta \leqslant (e\rho\sigma)^{1/\rho}$. Обратно,

$$n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \beta+\varepsilon,\ n\to\infty\ \Rightarrow\ |c_n| \leqslant \Big(\frac{(\beta+\varepsilon)^\rho}{n}\Big)^{n/\rho}\ \Rightarrow\ \log M(r) \leqslant \Big(\frac{(\beta+\varepsilon)^\rho}{e\rho}+\varepsilon\Big)r^\rho,\ r\to\infty.$$

Отсюда $\sigma \leqslant \beta^\rho/e\rho$, что и требовалось установить $\square$

3 Принцип Фрагмена-Линделёфа.

Обсудим поведение функций конечного порядка $\rho>0$ в углах с вершиной в начале координат. Как показывает следующая теорема, они не могут быть ограничены на всех $[2\rho]+1$ лучах, делящих плоскость на равные углы раствора $2\pi/(2[\rho]+1)<\pi/\rho$.

Теорема 3.1 (Phragmen-Lindelöf). *Пусть U является углом раствора $\alpha\in(0,2\pi]$ с вершиной в начале координат и $f\in H(U)\cap C(\overline{U})$. Предположим, что*

$$\log|f(z)| \leqslant K|z|^\mu,\ z\to\infty,\ z\in\overline{U},$$

где $\alpha<\dfrac{\pi}{\mu}$. Тогда из ограниченности функции f на границе угла вытекает ее ограниченность во всем угле, т.е.

$$|f(\zeta)| \leqslant C,\ \zeta\in\partial U \quad\Rightarrow\quad |f(z)|\leqslant C,\ z\in U.$$

Замечание. Данная теорема является обобщением принципа максимума модуля на неограниченные области (углы). Вообще, весь класс такого рода обобщений принципа максимума принято связывать с именами Фрагмена и Линделёфа.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что биссектриса U является положительной полуосью. Рассмотрим функцию

$$g_\varepsilon(z) := f(z)e^{-\varepsilon z^\beta},\quad z\in U,$$

где $\varepsilon>0$ и $\mu<\beta<\pi/\alpha$. Ясно, что для $z\in U$ верно $|\arg z^\beta| \leqslant \frac{1}{2}\alpha\beta < \frac{1}{2}\pi$. Значит,

$$\operatorname{Re} z^\beta \geqslant \cos\frac{\alpha\beta}{2}\cdot|z|^\beta,\ z\in U.$$

Таким образом,

$$\log|g_\varepsilon(z)| \leqslant K|z|^\mu - \cos\frac{\alpha\beta}{2}\cdot|z|^\beta \to -\infty,\quad z\to\infty,\ z\in\overline{U}.$$

Теперь мы можем найти такое R, что $\max\limits_{|\zeta|\geqslant R,\ \zeta\in U}|g(z)|\leqslant C$ и применить обычный принцип максимума для функции $g(z)$ и ограниченной области $U\cap B_R$. В итоге получаем, что

$$|g_\varepsilon(z)| \leqslant C,\ z\in\overline{U}.$$

Устремляя теперь $\varepsilon\downarrow 0$, получаем $|f(z)|\leqslant C$, $z\in\overline{U}$, что и требовалось. $\square$

4 Нули целой функции. Показатель сходимости.

Пусть нам дана произвольная бесконечная последовательность точек (возможно с повторениями) комплексной плоскости, не имеющая конечных точек сгущения:

$$\underbrace{0,\ldots,0}_{\lambda},\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\qquad 0<|\alpha_1|\leqslant|\alpha_2|\leqslant\ldots,\quad |\alpha_k|\to\infty. \tag{5}$$

Зададимся вопросом, может ли эта последовательность в точности совпадать с множеством нулей какой-либо целой функции (для конечных последовательностей нулей искомая функция всегда существует - это многочлен). Ответ дает

Теорема 4.1 (Вейерштрасс). *Бесконечное произведение*

$$f(z):=z^\lambda\prod_{k\geqslant 1}\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{p_k(z)},\quad p_k(z)=\frac{z}{\alpha_k}+\frac{z}{2\alpha_k^2}+\ldots+\frac{z^k}{k\alpha_k^k}$$

равномерно сходится на компактах, а значит является целой функцией. Множество нулей $f(z)$ с учетом кратности в точности совпадает с последовательностью (5).

Замечание. Множители $e^{p_k(z)}$ добавляются исключительно в целях сходимости бесконечного произведения. Многочлены $p_k(z)$, как мы увидим позднее, обычно можно выбирать существенно более "экономным" в плане степени способом.

Лекция третья. 11 марта 2005.

Доказательство теоремы Вейерштрасса. Рассмотрим $z\in\overline{B}_R$. Найдем такой номер $N(2R)$, что $|\alpha_{N(2R)}|\leqslant 2R<|\alpha_{N(2R)+1}|$. Имеем

$$f(z)=\underbrace{z^\lambda\prod_{k=1}^{N(2R)}\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{p_k(z)}}_{f_{2R}(z)}\cdot\underbrace{\prod_{k=N(2R)+1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{p_k(z)}}_{e^{h_{2R}(z)}},$$

где

$$h_{2R}(z)=\sum_{k=N(2R)+1}^{\infty}\Big[\log\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)+p_k(z)\Big]$$

(логарифмирование корректно, так как $|z/\alpha_k|<\frac{1}{2}$). Ясно, что для $k>N(2R)$ верно

$$\Big|\log\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)+p_k(z)\Big|=\Big|-\sum_{s=k+1}^{\infty}\frac{z^s}{s\alpha_k^s}\Big|<\sum_{s=k+1}^{\infty}\frac{1}{s2^s}<1.$$

Из этой оценки вытекает равномерная сходимость суммы $h_{2R}(z)$ для $|z|\leqslant R$, а значит и равномерная сходимость произведения, участвующего в формулировке теоремы. Осталось заметить, что функция $e^{h_{2R}(z)}$ вообще не имеет нулей, а нули функции $f_{2R}(z)$, лежащие в круге B_R совпадают с заданными. Теорема доказана. □

Замечание. Предположим, что существует такое $\varkappa \in \mathbb{N}_0$, что

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{|\alpha_k|^{\varkappa}} = +\infty\,, \qquad \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}} < +\infty\,. \tag{6}$$

В такой ситуации мы можем изменить выбор многочленов $p_k(z)$ следующим образом:

$$p_k(z) := \frac{z}{\alpha_k} + \frac{z^2}{2\alpha_k^2} + \ldots + \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa\alpha_k^{\varkappa}}\,.$$

В самом деле, необходимо только слегка изменить доказательство сходимости ряда $h_{2R}(z)$ при $|z| \leqslant R$:

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)+p_k(z)\right| = \left|-\sum_{s=\varkappa+1}^{\infty}\frac{z^s}{s\alpha_k^s}\right| < \frac{R^{\varkappa+1}}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}}\sum_{s=\varkappa+1}\frac{1}{2^{s-\varkappa-1}} < \frac{2R^{\varkappa+1}}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}}\,.$$

Ряд, составленный из правых частей неравенства, сходится в силу выбора $\varkappa$.

Следствие 4.2. *Пусть нулями целой функции $f(z)$ является последовательность (5). Тогда справедливо представление*

$$f(z) = e^{g(z)}\cdot z^{\lambda}\prod_{k\geqslant 1}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{p_k(z)}, \quad z\in\mathbb{C},$$

где $g(z)$ - целая функция.

Доказательство. Рассматривая отношение $f(z)$ и бесконечного произведения, построенного в Теореме Вейерштрасса видим, что это отношение является целой функцией, не обращающейся в 0 на всей комплексной плоскости. Следовательно, оно представимо в виде $e^{g(z)}$ (другими словами, мы можем выбрать однозначную ветвь логарифма), что и требовалось доказать. $\square$

Отступление. Показатель сходимости последовательности. Рассмотрим какую-либо последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$: $0<|\alpha_1|\leqslant|\alpha_2|\leqslant\ldots,\ \ |\alpha_k|\to\infty$. Положим

$$\tau := \inf\left\{\lambda>0 : \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{|\alpha_k|^{\lambda}} < +\infty\right\}.$$

В принципе, если рост $|\alpha_k|$ достаточно медленный (например, логарифмический), то таких λ может вообще не найтись, тогда мы полагаем $\tau = +\infty$.

Лемма 4.3. *Справедливо равенство*

$$\tau = \gamma := \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\log k}{\log|\alpha_k|}\,.$$

Доказательство. С одной стороны, для всех $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\frac{\log k}{\log|\alpha_k|} < \gamma + \varepsilon, \quad k \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|\alpha_k|^\lambda} < \frac{1}{k^{\frac{\lambda}{\gamma+\varepsilon}}}, \quad k \to \infty \quad \Rightarrow \quad \tau \leqslant \gamma + \varepsilon,$$

то есть $\tau \leqslant \gamma$. С другой стороны, из сходимости ряда $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{|\alpha_k|^{\tau+\varepsilon}}$ и монотонного убывания последовательности $\dfrac{1}{|\alpha_k|^{\tau+\varepsilon}}$ вытекает[3], что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\alpha_k|^{\tau+\varepsilon}} = 0.$$

Следовательно, имеем

$$k < |\alpha_k|^{\tau+\varepsilon}, \quad k \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\log k}{\log|\alpha_k|} < \tau + \varepsilon, \quad k \to \infty \quad \Rightarrow \quad \gamma \leqslant \tau + \varepsilon,$$

а значит $\gamma \leqslant \tau$, что и требовалось установить. $\square$

5 Неравенство Йенсена.

Наша цель - связать скорость роста нулей целой функции с ее порядком, т.е. со скоростью роста ее значений. Обозначим через $n(r)$ количество нулей функции $f(z)$ (с учетом кратности), лежащих в круге $\overline{B}_R$, исключая возможные нули в точке 0.

Теорема 5.1. *Пусть $f \in H(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$ и $M(R) = \max_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|$.*
i) Если $f(0) = 1$, т.е. $f(z) = 1 + c_1 z + \ldots$, то выполняется неравенство

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}\, dr \leqslant \log M(R)\,.$$

ii) В общей ситуации $f(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \ldots$ справедливо

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}\, dr \leqslant \log \frac{M(R)}{|c_\lambda| R^\lambda}\,.$$

Доказательство. $i) \Rightarrow ii)$. Легко видеть, что если мы рассмотрим вместо функции $f(z)$ новую аналитическую функцию $g(z) := \dfrac{f(z)}{c_\lambda z^\lambda}$ и применим к ней первый пункт теоремы, то получится требуемая оценка.
i) Не умаляя общности можно считать, что $f(\zeta) \neq 0$, $|\zeta| = R$, поскольку обе части

[3] В самом деле, $\frac{k}{|\alpha_{2k}|^{\tau+\varepsilon}} \leqslant \sum_{s=k+1}^{2k} \frac{1}{|\alpha_s|^{\tau+\varepsilon}} \to 0\,.$

неравенства очевидно непрерывны по R. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ нули функции $f(z)$ (лежащие в B_R) и рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{f(z)}{(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_N)}\,, \quad z \in \overline{B}_R\,.$$

Функция $\Phi(z)$ не имеет нулей в $\overline{B}_R$ и, как следствие, мы можем рассмотреть аналитическую в B_R функцию $\log \Phi(z)$. Имеем

$$\log \Phi(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=R} \frac{\log \Phi(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \Phi(Re^{i\theta}) d\theta\,.$$

Переходя к вещественным частям, получаем

$$\log|\Phi(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Phi(Re^{i\theta})| d\theta\,.$$

Для левой части верно

$$\log|\Phi(0)| = \log|f(0)| - \sum_{k=1}^{N} \log|\alpha_k| = -\sum_{k=1}^{N} \log|\alpha_k|.$$

Для правой части имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Phi(Re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta}-\alpha_k| d\theta.$$

При этом

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta}-\alpha_k| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\Big|R - \frac{\overline{\alpha}_k}{R}\, Re^{i\theta}\Big| d\theta = \log R,$$

где последнее равенство вытекает из того, что функция $R - \frac{\overline{\alpha}_k}{R}\, z$ не имеет нулей в $\overline{B}_R$. Таким образом, мы установили, что

$$N\log R - \sum_{k=1}^{N} \log|\alpha_k| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta \leqslant \log M(R).$$

Но

$$N\log R - \sum_{k=1}^{N} \log|\alpha_k| = \sum_{k=1}^{N} \int_{|\alpha_k|}^{R} \frac{dt}{t} = \int_0^R \frac{n(r)}{r}\, dr\,,$$

что и дает требуемый результат. $\square$

6 Теорема Адамара о факторизации.

Теорема 6.1. *Пусть дана целая функция конечного порядка $\rho > 0$ и последовательность ее нулей (5) (возможно конечная). Тогда*
i) Показатель сходимости нулей конечен и не превосходит порядок функции: $\tau \leqslant \rho$.
ii) Обозначим через $\varkappa : \tau - 1 \leqslant \varkappa \leqslant \tau$ натуральное число, удовлетворяющее (6) и пусть $p_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^\varkappa}{\varkappa \alpha_k^\varkappa}$. Тогда справедливо представление

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot z^\lambda \prod_{k\geqslant 1} \Bigl(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Bigr) e^{p_k(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

где $g(z)$ - многочлен степени не выше, чем ρ.

Доказательство. i) Пусть $0 < \theta < 1$. Используя неравенство Йенсена, получаем

$$\log \frac{1}{\theta} \cdot n(\theta R) = \int_{\theta R}^{R} \frac{n(\theta R)}{t}\, dt \leqslant \log \frac{M(R)}{|c_\lambda| R^\lambda} \leqslant R^{\rho+\varepsilon} - \log |c_\lambda| R^\lambda \leqslant R^{\rho+\varepsilon}, \quad R \to \infty.$$

Заменяя здесь θR на R, имеем

$$n(R) \leqslant C(\theta) R^{\rho+\varepsilon}, \quad C(\theta) = \frac{1}{\theta^{\rho+\varepsilon} \log \frac{1}{\theta}}\,, \quad R \to \infty.$$

Положим $R = |\alpha_k|$. Тогда $n(R) \geqslant k$, откуда

$$k \leqslant C(\theta) |\alpha_k|^{\rho+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{\log k}{\log |\alpha_k|} \leqslant \rho + \varepsilon + \frac{C(\theta)}{\log |\alpha_k|}\,, \quad k \to \infty.$$

Устремляя $k \to \infty$ и $\varepsilon \downarrow 0$, имеем

$$\tau = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\log k}{\log |\alpha_k|} \leqslant \rho,$$

что и требовалось установить.

Лекция четвертая. 14 марта 2005.

ii) Наша цель - доказать, что все тейлоровские коэффициенты $\frac{1}{n!} g^{(n)}(0)$ целой функции $g(z)$ с достаточно большими номерами $n > \rho$ суть нули. Положим

$$f(z) = z^\lambda \prod_{k=1}^{N(R)} \Bigl(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Bigr) \cdot f_R(z), \qquad f_R(z) = e^{g(z) + \sum_{k=1}^{N(R)} p_k(z)} \prod_{k=N(R)+1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Bigr) e^{p_k(z)},$$

где номер $N(R)$, как и ранее, выбран так, что $|\alpha_{N(R)}| \leqslant R < |\alpha_{N(R)+1}|$. Отметим, что при $|z| = 2R$ верно $|f_R(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant M(2R)$. Поэтому принцип максимума дает $|f_R(z)| \leqslant M(2R)$ при всех $|z| \leqslant 2R$.

Для $|z| \leqslant R$ мы можем записать

$$f_R(z) = e^{h_R(z)}, \quad h_R(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{N(R)} p_k(z) \; + \sum_{k=N(R)+1}^{\infty} \left[\log\Big(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Big) + p_k(z)\right].$$

При этом

$$\operatorname{Re} h_R(z) \leqslant \log M(2R).$$

Наша ближайшая цель - получить из этого неравенства оценку для коэффициентов функции $h_R(z)$.

Лемма 6.2. *Пусть* $h(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \in H(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$. *Тогда для всех* $n \geqslant 1$ *справедливо представление*

$$c_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(Re^{i\theta}) \cdot e^{-in\theta} d\theta \,.$$

Доказательство. Пусть $c_n = \alpha_n + i\beta_n$. Тогда при $r < R$ имеем

$$\operatorname{Re} h(re^{i\theta}) = \alpha_0 + \sum_{n\geqslant 1} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) r^n \,.$$

Умножая это равенство на $\cos n\theta$ и интегрируя, получаем

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(re^{i\theta}) \cdot \cos n\theta d\theta = \alpha_n r^n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \pi \alpha_n r^n.$$

Аналогично,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(re^{i\theta}) \cdot \sin n\theta d\theta = -\pi \beta_n r^n.$$

В итоге,

$$c_n = \alpha_n + i\beta_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(re^{i\theta}) \cdot e^{-in\theta} d\theta$$

и остается только перейти к пределу при $r \uparrow R$. $\square$

Применим только что доказанную лемму к функции $h(z) = \log M(2R) - h_R(z)$. Для $n \geqslant 1$ получаем

$$-\frac{h_R^{(n)}(0)}{n!} = \frac{h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left[\log M(2R) - \operatorname{Re} h_R(e^{i\theta})\right] e^{-in\theta} d\theta.$$

Так как выражение в скобках положительно, отсюда вытекает оценка

$$\left|\frac{h_R^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left[\log M(2R) - \operatorname{Re} h_R(e^{i\theta})\right] d\theta = \frac{2}{\pi R^n} \left(\log M(2R) - \operatorname{Re} h_R(0)\right).$$

Величина $h_R(0)$ не зависит от R (по определению функции h_R), а $\log M(2R) < R^{\rho+\varepsilon}$, $R \to \infty$. Значит, при $n > \rho$ верно

$$\frac{h_R^{(n)}(0)}{n!} \to 0, \quad R \to \infty.$$

Последний шаг состоит в том, чтобы связать тейлоровские коэффициенты h_R и g. Степени многочленов p_k (при всех k) равны $\varkappa \leqslant \rho < n$, откуда

$$\frac{h_R^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} - \sum_{k=N(R)+1}^{\infty} \frac{1}{n\alpha_k^n}\,.$$

Так как $n > \rho \geqslant \tau$, второе слагаемое представляет собой остаток сходящегося ряда и, значит, стремится к нулю при $R \to \infty$. Следовательно,

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!} \to 0, \quad R \to \infty\,, \quad n > \rho.$$

Поскольку тейлоровские коэффициенты g не зависят от R, теорема доказана. $\square$

7 Теоремы Бореля.

В предыдущем параграфе мы показали, что каждая целая функция конечного порядка раскладывается в произведение (7). При этом показатель сходимости нулей и степень многочлена g не превышают порядка функции. Покажем, что это точные оценки.

Теорема 7.1. *Пусть дана последовательность нулей (5) с показателем сходимости τ и многочлен $g(z)$ степени n. Тогда порядок функции (7) в точности равен* $\max(n,\tau)$.

Доказательство. Благодаря Теореме Адамара мы уже знаем, что $\rho \geqslant \max(n,\tau)$, где через ρ обозначен порядок целой функции (7). Поэтому все, что необходимо - это доказать оценку

$$\log|f(z)| \leqslant K|z|^{\max(n,\tau)+\varepsilon}, \quad |z| \to \infty$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Множители $e^{g(z)}$ и z^λ очевидно удовлетворяют требуемому неравенству. Поэтому достаточно проверить, что

$$\log\left|\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{p_k(z)}\right| \leqslant K|z|^{\tau+\varepsilon}, \quad |z| \to \infty.$$

Пусть сначала $\sum_{k\geqslant 1}|\alpha_k|^{-\tau} < \infty$ (и, в частности, $\varkappa < \tau \leqslant \varkappa+1$). Оценим каждый сомножитель $(1-\frac{z}{\alpha_k})e^{p_k(z)}$ в отдельности. Легко видеть, что

$$\left|\frac{z}{\alpha_k}\right| \leqslant \frac{1}{2} \;\;\Rightarrow\;\; \left|\log\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{p_k(z)}\right| = \left|\sum_{s=\varkappa+1}^{\infty}\frac{z^s}{s\alpha_k^s}\right| < 2\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{\varkappa+1} \leqslant 2\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{\tau};$$

$$\left|\frac{z}{\alpha_k}\right| \geqslant \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left|\log\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{p_k(z)}\right| \leqslant \log\Big(1+\frac{|z|}{|\alpha_k|}\Big) + \left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{\varkappa}(2^{\varkappa-1}+\tfrac{1}{2}\,2^{\varkappa-2}+\ldots+\tfrac{1}{\varkappa}) \leqslant C\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{\tau},$$

поскольку $\tau > \varkappa$.

В итоге для всех k имеем

$$\left|\log\Big(1-\frac{z}{\alpha_k}\Big)e^{p_k(z)}\right| \leqslant C\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{\tau}.$$

Суммируя, получаем требуемую оценку (при условии, что $\sum_{k\geqslant 1}|\alpha_k|^{-\tau}<\infty$).

Если же $\sum_{k\geqslant 1}|\alpha_k|^{-\tau}=\infty$, то $\varkappa\leqslant\tau<\varkappa+1$ и аналогичные рассуждения могут быть проделаны с произвольным $\tau'\in(\tau,\varkappa+1]$, что и доказывает теорему. □

Следствие 7.2 (еще одна теорема Бореля). *Пусть f - целая функция конечного порядка $\rho<\infty$ (но которая при этом не является многочленом). Тогда*
i) Если $\rho\notin\mathbb{N}_0$, то для каждого $A\in\mathbb{C}$ уравнение $f(z)=A$ имеет бесконечно много решений и показатель сходимости этих решений (с учетом кратности) τ_A равен ρ.
ii) Если $\rho\in\mathbb{N}_0$, то для всех $A\in\mathbb{C}$, кроме возможно одного исключительного значения, уравнение $f(z)=A$ имеет бесконечно много решений и $\tau_A=\rho$.

Доказательство. i) Доказывать нечего. В самом деле, порядок функции $f(z)-A$ равен порядку $f(z)$, т.е. является нецелым числом ρ. С другой стороны, этот же порядок равен максимуму из (целой) степени многочлена и τ_A. Значит, $\tau_A=\rho$.
ii) Предположим, что есть два значения $A\neq B$, для которых утверждение неверно. Так как τ_A строго меньше порядка функции $f(z)-A$ имеем

$$f(z)-A=e^{c_Az^{\rho}}\cdot f_1(z),$$

где $c_A\neq 0$ и порядок ρ_1 функции f_1 строго меньше, чем ρ. Заметим, что

$$\log|e^{c_Az^{\rho}}|=\operatorname{Re}c_Az^{\rho}=\cos(\arg c_A+n\arg z)\cdot|z|^{\rho}.$$

Так как $\rho_1<\rho$, для всех $\theta:\cos(\arg c_A+n\theta)<0$ имеем

$$|f(Re^{i\theta})-A|\leqslant\cos(\arg c_A+n\theta)\cdot R^{\rho}+O(R^{\rho_1})\to 0,\quad R\to+\infty.$$

Аналогично, для некоторого $c_B\neq 0$ верно

$$\theta:\cos(\arg c_B+n\theta)<0 \quad\Rightarrow\quad |f(Re^{i\theta})-B|\to 0,\quad R\to+\infty.$$

Легко понять, что раз $A\neq B$, то получающиеся углы должны в точности заполнять всю плоскость (поскольку они не могут пересекаться, а их сумма есть $n\cdot\frac{\pi}{n}+n\cdot\frac{\pi}{n}=2\pi$). Таким образом, для всех θ, кроме конечного числа, рассматриваемая функция ограничена на луче $Re^{i\theta}$, $R\in[0,+\infty)$, что противоречит принципу Фрагмена-Линделефа. □

Замечание. i) Проверим, что в случае $\rho=0$ для всех A количество решений уравнения $f(z)=A$ бесконечно. Если бы это было не так, то для какого-то A факторизация Адамара давала бы $f(z)-A=Cz^{\lambda}\prod_{k=1}^{N}(1-\frac{z}{\alpha_k})$, т.е. рассматриваемая функция обязана была бы быть многочленом.
ii) Про решения уравнения $f(z)=A_0$, где A_0 - исключительное значение, ничего (кроме $\tau_{A_0}\leqslant\rho$) сказать нельзя. Их может вообще не быть (e^z), их число может быть конечным ($e^zP(z)$) или же бесконечным, но с другим показателем сходимости ($e^{z^2}\sin z$).

Пример. Рассмотрим целую функцию $\sin z = \frac{1}{2i}\,(e^{iz}-e^{-iz})$. Ее порядок равен 1, нули находятся в точках πk, $k\in\mathbb{Z}$, показатель сходимости нулей также равен 1. Факторизация Адамара дает

$$\sin z = e^{az+b} z \prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2k^2}\Big) = z\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z^2}{\pi^2k^2}\Big)\,,$$

поскольку a должно быть равно 0 из-за нечетности синуса, а $b=0$ в силу $(\sin z)'|_{z=0}=1$.

Лекция пятая. 25 марта 2005.

8 Гамма-функция.

Определение 8.1. *При* $\operatorname{Re} z>0$ *положим*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\,. \tag{8}$$

Замечание. Здесь значение $t^{z-1} := e^{(z-1)\log t}$ корректно определено и, кроме того,

$$|\Gamma(z)| \leqslant \int_0^{+\infty} |t^{z-1}|e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t}dt = \Gamma(\operatorname{Re} z) < +\infty\,,\quad \operatorname{Re} z>0\,.$$

Лемма 8.2. *i) Для* $\operatorname{Re} z>0$ *верно тождество* $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$.
ii) Для $\operatorname{Re} z>0$ *справедливо представление*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\,. \tag{9}$$

Доказательство. i) Доказывается интегрированием по частям:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)\,.$$

ii) Легко видеть, что

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{z-1+n}}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}\,.$$

□

Определение 8.3. *Для* $z\neq 0,-1,-2,\ldots$ *определим* $\Gamma(z)$ *по формуле (9).*

Замечание. Очевидное преимущество представления (9) по сравнению с (8) в том, что ряд равномерно сходится на любом компакте, не содержащих отрицательных целых точек, а интеграл сходится равномерно вообще на любом ограниченном множестве.

Предложение 8.4. $\Gamma \in H(\mathbb{C} \setminus \{0, -1, \ldots\})$. *В точке* $-n$ $\Gamma(z)$ *имеет простой полюс с вычетом* $\frac{(-1)^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Основное тождество* $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ *справедливо во всей плоскости* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Рассмотрим аналитическое продолжение Γ-функции с правой полуплоскости на $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, \ldots\}$ по формуле (9). Ясно, что если мы рассмотрим альтернативное продолжение $\widetilde{\Gamma}(z)$ по формуле $\Gamma(z-1) \equiv (z-1)^{-1}\Gamma(z)$, то опять-таки получится аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, \ldots\}$ функция. Осталось заметить, что аналитическое продолжение единственно. Характер особенностей в отрицательных целых точках сразу вытекает из основного тождества. □

Теорема 8.5 (Формула Эйлера). *Для всех* $z \neq 0, -1, \ldots$ *верно*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

Доказательство. Ясно, что если формула справедлива для какого-то z, то она автоматически выполняется и для $z-1$, поскольку мы можем воспользоваться основным тождеством. Поэтому, достаточно рассматривать только $\operatorname{Re} z > 0$. Вычислим интеграл

$$I_n(z) := \int_0^n t^{z-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n dt,$$

а потом оценим разность $e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n$. После замены переменной и многократного интегрирования по частям имеем

$$I_n(z) = n^z \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^n d\tau = n^z \cdot \frac{n}{z}\int_0^1 \tau^z (1-\tau)^{n-1} d\tau = \ldots = \frac{n! \cdot n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

Таким образом, осталось доказать, что $I_n(z) \to \Gamma(z)$ при $n \to \infty$. Так как для всех $t \in \mathbb{R}$ верно $e^t \geqslant (1+\frac{t}{n})^n$, видим что

$$0 \leqslant e^{-t} - \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n = e^{-t}\left(1 - e^t\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\right) \leqslant e^{-t}\left(1-\Big(1-\frac{t^2}{n^2}\Big)^n\right) \leqslant \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

Отсюда

$$\left|I_n(z) - \int_0^n t^{z-1}e^{-t}dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^n |t^{z+1}| e^{-t} dt \leqslant \frac{1}{n}\Gamma(\operatorname{Re} z + 2) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Наконец, $\int_n^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} \to 0$, поскольку интеграл сходится. □

Следствие 8.6 (разложение в бесконечное произведение). $\frac{1}{\Gamma(z)}$ *является целой функцией и ее факторизация Адамара есть*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{cz} \cdot z \prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-\frac{z}{k}},$$

где $c = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n) = 0.57\ldots$ *В частности,* $\Gamma(z)$ *не имеет нулей.*

Доказательство. Заметим, что

$$\left(\frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}\right)^{-1} = e^{-z\log n}\cdot z\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{z}{k}\Big) = e^{z(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n)}\cdot z\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-\frac{z}{k}}\,.$$

Осталось применить формулу Эйлера. □

Следствие 8.7 (формула отражения). *Справедливо тождество*

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin\pi z} \quad\Leftrightarrow\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}\,,\quad z\in\mathbb{C}\,.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = e^{cz}\cdot z\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-\frac{z}{k}}\cdot e^{-cz}\cdot(-z)\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z}{k}\Big)e^{\frac{z}{k}} = -z^2\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z^2}{k^2}\Big) = -\frac{z\sin\pi z}{\pi}\,,$$

где мы использовали разложение синуса в бесконечное произведение. □

Замечание. В частности, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi/\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}\,.$

9 Асимптотика $\Gamma(z)$. Формула Стирлинга.

Лемма 9.1 (формула Эйлера-Маклорена). *Пусть* $f\in C^1([0,n])$*. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt = \frac{f(0)+f(n)}{2} + \int_0^n f'(t)\left(\{t\}-\tfrac{1}{2}\right)dt\,.$$

Доказательство. Легко видеть, что интегрирование по частям дает

$$\int_k^{k+1} f'(t)\left(\{t\}-\tfrac{1}{2}\right)dt = f(t)\left(\{t\}-\tfrac{1}{2}\right)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)dt\,.$$

Суммируя по k, получаем требуемое равенство. □

Теорема 9.2 (формула Стирлинга). *Для каждого* $\varepsilon>0$ *асимптотика*

$$\log\frac{1}{\Gamma(z)} = -\Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z + z - \frac{1}{2}\,\log 2\pi + O(z^{-1})\,,\quad z\to\infty\,,$$

выполняется равномерно в угле $\arg z\in[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]\,.$

Замечание. i) Так как $\frac{1}{\Gamma(z)}$ не имеет нулей в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, в этой области можно определить не только однозначную ветвь $\log z$, но и однозначную ветвь $\log\frac{1}{\Gamma(z)}$.
ii) Нельзя надеяться получить осмысленную асимптотику во всей плоскости, поскольку гамма-функция имеет счетное множество нулей на отрицательной полуоси. В то же время это и не нужно, поскольку всегда можно воспользоваться формулой отражения.
iii) Несложное тождественное преобразование дает

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\Big(\frac{z}{e}\Big)^z(1+O(z^{-1})\,,\quad z\to\infty\,,\quad \arg z\in[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]\,.$$

Доказательство. По-прежнему, будем использовать формулу Эйлера (Теорема 8.5). Имеем

$$\log\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!\cdot n^z}=\sum_{k=0}^{n}\log(z+k)-\sum_{k=1}^{n}\log k-z\log n$$

Лемма 9.1 дает

$$\sum_{k=0}^{n}\log(z+k)=\int_0^n\log(z+t)dt+\frac{\log z+\log(z+n)}{2}+\underbrace{\int_0^n\frac{\{t\}-\frac12}{z+t}\,dt}_{I_n(z)}=$$

$$=t(\log t-1)\Big|_z^{z+n}+\frac{\log z+\log(z+n)}{2}+I_n(z)=(z+n+\tfrac12)\log(z+n)-(z-\tfrac12)\log z-n+I_n(z)\,.$$

Подставляя сюда $z=1$ и вычитая "лишнее" слагаемое $\log(n+1)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\log k=(n+\tfrac12)\log(n+1)-n+I_n(1)\,.$$

Значит,

$$\log\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!\cdot n^z}=-(z-\tfrac12)\log z+z\log\frac{z+n}{n}+(n+\tfrac12)\log\frac{z+n}{n+1}+I_n(z)-I_n(1)\,.$$

Устремляя $n\to\infty$, получаем

$$\log\frac{1}{\Gamma(z)}=-(z-\tfrac12)\log z+z-1-I(1)+I(z)\,,$$

где

$$I(z)=\int_0^{+\infty}\frac{\{t\}-\frac12}{z+t}\,dt$$

(несобственный интеграл сходится, так как первообразная числителя ограничена, а знаменатель растет). Интегрируя по частям, получаем

$$I(z)=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(z+t)^2}\,,\qquad \varphi(t):=\int_0^t(\{s\}-\tfrac12)ds=\frac12\{t\}(\{t\}-1)\,.$$

Отсюда несложно получить оценку $I(z)=O(z^{-1})$ (справедливую в произвольном угле $\arg z\in[-\pi+\varepsilon,\pi+\varepsilon]$). Именно, если $z=x+iy$, то

$$|I(z)|\leqslant\frac18\int_0^{+\infty}\frac{dt}{|z+t|^2}=\frac18\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x+t)^2+y^2}\leqslant\begin{cases}\frac18\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(x+t)^2}=\frac{1}{8x}\,, & x>0\,,\\ \frac18\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+y^2}=\frac{\pi}{8|y|}\,, & |y|\neq0\,.\end{cases}$$

Первая оценка работает в секторе $\arg z\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, а вторая - в оставшейся области.

Все что нам осталось - это вычислить константу $A=-1-I(1)$.

Лекция шестая. 28 марта 2005.

Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{\Gamma(iy)\Gamma(-iy)} = -\frac{iy\sin\pi iy}{\pi} = \frac{y(e^{\pi y}-e^{-\pi y})}{2\pi}$$

при $y\to+\infty$. Логарифмируя, получаем

$$\pi y + \log y - \log 2\pi + o(1) = \log\frac{1}{\Gamma(iy)\Gamma(-iy)} =$$

$$= -(iy-\tfrac{1}{2})\log iy - (-iy-\tfrac{1}{2})\log(-iy) + 2A + o(1) = \pi y + \log y + 2A + o(1)\,.$$

Следовательно, $A = -\frac{1}{2}\,\log 2\pi$, что и требовалось доказать. □

10 Уточнение асимптотики $\Gamma(z)$. Числа Бернулли.

Напомним, что мы только что доказали тождество

$$\log\Gamma(z) = \Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z - z + \frac{1}{2}\,\log 2\pi - I(z)\,, \qquad I(z) = \int_0^{+\infty}\frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt\,.$$

Интегрируя $I(z)$ по частям, довольно легко найти любое конечное число слагаемых типа $O(z^{-k})$ в асимптотике $\log\Gamma(z)$. Рассмотрим последовательность функций

$$\omega_0(t)\equiv 1\,,\quad \omega_1(t)\equiv\{t\}-\frac{1}{2}\,,\qquad \omega'_{k+1}(t)\equiv\omega_k(t)\,,\quad \int_0^1\omega_{k+1}(t)dt=1\,,\quad k\geqslant 1\,.$$

При помощи индукции по k легко установить, что $\omega_k(t)$ - периодичная функция и, более того, $\omega_k(t)$ - это полином степени k от $\{t\}$. В частности,

$$\omega_2(t)\equiv\frac{1}{2}\,\{t\}^2-\frac{1}{2}\,\{t\}+\frac{1}{12}\,,\qquad \omega_3(t)\equiv\frac{1}{6}\,\{t\}^3-\frac{1}{4}\,\{t\}^2+\frac{1}{12}\,\{t\}\,,\quad\ldots$$

Интегрирование по частям дает

$$-I(z) = -\int_0^{+\infty}\frac{\omega_1(t)}{z+t}\,dt = \frac{\omega_2(0)}{z} - \int_0^{+\infty}\frac{\omega_2(t)}{(z+t)^2}\,dt = \frac{\omega_2(0)}{z} + \frac{\omega_3(0)}{z^2} - 2\int_0^{+\infty}\frac{\omega_3(t)}{(z+t)^3}\,dt =$$

$$= \ldots = \frac{\omega_2(0)}{z} + \ldots + \frac{\omega_k(0)}{(k-2)!\cdot z^{k-1}} + O(z^{-k})\,,\quad k\geqslant 1\,,$$

при $z\to\infty$, $\arg z\in[-\pi-\varepsilon,\pi+\varepsilon]$.

Определение 10.1. *Полиномы Бернулли* $B_k(t)$, $k\geqslant 0$, *определяются равенством* $\omega_k(t)\equiv\frac{1}{k!}\,B_k(\{t\})$. *Их значения при* $t=0$ *называются числами Бернулли* $B_k := B_k(0)$.

Замечание. Старший коэффициент полинома Бернулли равен 1.

Найдем производящую функцию для полиномов Бернулли. Рассмотрим формальный степенной ряд

$$G(x,t) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!}\, t^n\,.$$

Тогда для $x\in(0,1)$.

$$G'_x(x,t) \equiv \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n(x) t^n\right)'_x \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_{n-1}(x) t^n = tG(x,t)$$

и, следовательно, должно быть

$$G(x,t) \equiv e^{xt} G(0,t)\,.$$

Кроме того,

$$\int_0^1 G(x,t)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \int_0^1 \omega_n(x)dx = 1\,,$$

что дает

$$1 = G(0,t)\int_0^1 e^{xt}dx = G(0,t)\cdot \frac{e^t-1}{t} \quad\Rightarrow\quad G(0,t)\equiv \frac{t}{e^t-1} \quad\Rightarrow\quad G(x,t)\equiv \frac{te^{xt}}{e^t-1}\,.$$

Таким образом, доказана

Лемма 10.2. *Справедливы тождества*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!}\, t^n \equiv \frac{te^{xt}}{e^t-1}\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!}\, t^n \equiv \frac{t}{e^t-1}\,.$$

Замечание. Правые части представляют собой мероморфные функции с с особенностями в точках $\pm 2\pi i,\ \pm 4\pi i, \ldots$. Таким образом, все ряды сходятся при $|t| < 2\pi$ и предыдущие рассуждения корректны для таких t и $x\in(0,1)$. Так как обе части аналитичны по x, результат сразу же переносится на все $x\in\mathbb{C}$.

Зная производящую функцию, можно получать разнообразные "комбинаторные" тождества. Мы не будем углубляться в эту деятельность, ограничившись следующими двумя утверждениями:

Лемма 10.3. *i) $B_{2s+1}=0$ для всех $s\geqslant 1$.*
ii) Для всех $n\geqslant 0$ справедливо тождество $B_n(x) \equiv \sum_{j=0}^{n} C_n^j B_{n-j} x^j$.

Доказательство. i) Так как $B_1 = -\frac{1}{2}$, требуемое утверждение эквивалентно четности функции

$$\frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2} \equiv \frac{t}{2}\cdot\frac{e^t+1}{e^t-1} \equiv -\frac{t}{2}\cdot\frac{e^{-t}+1}{e^{-t}-1}\,.$$

ii) Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!}\, t^n \equiv e^{xt} \cdot \frac{t}{e^t-1} \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\, x^j \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!}\, x^k\, .$$

Приравнивая коэффициенты при t^n, получаем

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \sum_{j=0}^{m} \frac{B_{n-j}}{j!(n-j)!}\, ,$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 10.4 (значение $\zeta(2s)$). *Для всех $s \geqslant 1$ верно*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \frac{(2\pi)^{2s}(-1)^{s-1}B_{2s}}{2(2s)!}\, .$$

Доказательство. Лемма 10.2 (с учетом того, что $B_1 = -\frac{1}{2}$ и $B_3 = B_5 = \ldots = 0$) дает

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(2\pi i t)^{2s} B_{2s}}{(2s)!} \equiv \frac{2\pi i t}{e^{2\pi i t}-1} + \pi i t \equiv \pi i t\, \frac{e^{2\pi i t}+1}{e^{2\pi i t}-1} \equiv \pi t \operatorname{ctg} \pi t \equiv 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t^2}{t^2-n^2}\, .$$

Разложим дроби в ряды по степеням t:

$$\frac{2t^2}{t^2-n^2} \equiv -\frac{2t^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t^2}{n^2}} \equiv -2 \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{t^{2s}}{n^{2s}}\, .$$

Приравнивая теперь коэффициенты при t^{2s} (отметим еще, что все ряды являются аналитическими функциями при $|t| < 1$, поэтому рассуждения корректны), получаем требуемое равенство. □

Замечание. Из леммы непосредственно вытекает, что

$$B_{2s} \sim (-1)^{s-1} \frac{2(2s)!}{(2\pi)^{2s}}\, , \quad s \to \infty\, .$$

Возвращаясь к асимптотике $\log \Gamma(z)$, мы можем написать

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2}\, \log 2\pi + \sum_{s=1}^{k} \frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O(z^{-2k-1})$$

при $z \to \infty$, $\arg z \in [-\pi+\varepsilon, \pi+\varepsilon]$, где k - произвольное натуральное число. Необходимо подчеркнуть, что ряд

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}}$$

расходится при всех $z \in \mathbb{C}$ в силу факториального роста чисел Бернулли. Это вполне естественно - если бы он сходился при каком-то $z_0 \in \mathbb{C}$, то, как и всякий степенной ряд, должен был бы сходиться и при всех $z\, :\, |z| > |z_0|$, что выглядит по меньшей мере странно, если z - отрицательное целое число. Такого рода разложения называются *асимптотическими рядами.*

11 Дзэта-функция Римана.

Определение 11.1. *Для* $s \in \mathbb{C}$*:* $\operatorname{Re} s > 1$ *положим*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Замечание. Ряд сходится, так как $|n^{-s}| = n^{-\operatorname{Re} s}$.

Наша ближайшая цель - построить аналитическое продолжение $\zeta(s)$ во всю комплексную плоскость. Исходное определение для этой цели малопригодно, поэтому докажем лемму об интегральном представлении:

Лемма 11.2. *При* $\operatorname{Re} s > 1$ *верно*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \tag{10}$$

Замечание. Интеграл сходится, поскольку $\frac{x^{s-1}}{e^x-1} \sim x^{s-2}$ при $x \to +0$.

Доказательство. По определению,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s}.$$

Заметим, что $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = n^s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx$. Следовательно,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum n = 1^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

Обоснование изменения порядка суммирования тривиально: поскольку $|x^{s-1}e^{-nx}| = x^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-nx}$, этот "двойной интеграл" абсолютно сходится (и оценивается при этом величиной $\Gamma(\operatorname{Re} s)\zeta(\operatorname{Re} s)$). □

Лекция седьмая. 08 апреля 2005.

Теорема 11.3. *i)* $\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \in H(\mathbb{C})$ *(т.е.* $\zeta(s)$ *может быть аналитически продолжена во всю плоскость, кроме точки* $s = 1$*, где она имеет простой полюс с вычетом* 1*);*
ii) Справедливо тождество

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\,\zeta(s), \quad s \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. i) Как и при построении аналитического продолжения (9) функции $\Gamma(s)$, мы будем использовать интегральное представление. При $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \right] =$$

Отметим, что второй интеграл сходится при всех значениях $s \in \mathbb{C}$.

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\int_0^1 \Big(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \Big) x^{s-1} dx + \frac{1}{s-1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \right]$$

Это представление задает аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в $\{s : \operatorname{Re} s > 0\,,\ s \neq 1\}$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\int_0^1 \Big(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \Big) x^{s-1} dx + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \int_1^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \right].$$

Последняя формула работает при $\operatorname{Re} s > -1$, так как $\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = O(x)$, $x \to 0$. Ясно, что такую процедуру заведомо можно повторить произвольное конечное число раз, получая представление для $\zeta(s)$ в области $\operatorname{Re} s > -k$. Отметим еще, что особенности в точках $s = -k$, $k \geqslant 0$ отсутствуют, поскольку $\frac{1}{\Gamma(s)}$ имеет там нули.

ii) Докажем справедливость формулы при $-1 < \operatorname{Re} s < 0$ (так как и левая, и правая части аналитичны во всей плоскости кроме $s = 0$, этого достаточно). Имеем

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \Big) x^{s-1} dx + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \int_1^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \Big) x^{s-1} dx$$

Заметим, что

$$\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\, \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\frac{\operatorname{ctg} \frac{ix}{2}}{2i} = -\frac{1}{2i} \Big(\frac{2}{ix} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{ix}{-\frac{x^2}{4} - \pi^2 n^2} \Big) = \frac{1}{x} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2x}{x^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Значит,

$$\zeta(s)\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^s}{x^2 + 4\pi^2 n^2}\, dx = 2 \sum_{n \geqslant 1} \int_0^{+\infty} \frac{x^s dx}{x^2 + 4\pi^2 n^2}$$

(интеграл и суммирование можно менять местами, поскольку все оценивается через $\zeta(\operatorname{Re} s)\Gamma(\operatorname{Re} s) < +\infty$). В то же время каждый интеграл легко вычисляется по вычетам (напомним, что $-1 < \operatorname{Re} s < 0$):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^s dx}{x^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i s} - 1} \left(\operatorname*{res}_{s = 2\pi i n} + \operatorname*{res}_{s = -2\pi i n} \right) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i s} - 1} \Big(\frac{(2\pi i n)^s}{4\pi i n} + \frac{(-2\pi i n)^s}{-4\pi i n} \Big) =$$

$$= \frac{(2\pi n)^s}{2n}\, \frac{e^{\frac{\pi}{2} i s} - e^{\frac{3\pi}{2} i s}}{e^{2\pi i s} - 1} = \frac{(2\pi n)^s}{4n \cos \frac{\pi s}{2}} = \frac{(2\pi)^s}{4 \cos \frac{\pi s}{2}}\, n^{s-1}.$$

Суммируя по n, получаем анонсированную формулу $2\zeta(s)\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} = (2\pi)^s \sum_{n \geqslant 1} n^{s-1}$ (ряд $\sum_{n \geqslant 1} n^{s-1} = \zeta(1-s)$ сходится, так как $\operatorname{Re} s < 0$). $\square$

Следствие 11.4. $\zeta(-2)=\zeta(-4)=\ldots=0$ *и других нулей в* $\{s:\operatorname{Re}s>1\}\cup\{s:\operatorname{Re}s<0\}$ *дзэта-функция не имеет.*

Доказательство. То, что $\zeta(s)\neq 0$ при $\operatorname{Re}s>1$ вытекает из разложения в бесконечное произведение (см. первый пункт следующей леммы), остальное получается при помощи формулы, выражающей $\zeta(1-s)$ через $\zeta(s)$. □

Установим еще связь $\zeta(s)$ с распределением простых чисел.

Лемма 11.5. *i) При* $\operatorname{Re}s>1$ *верно* $\zeta(s)=\prod\limits_{k\geqslant 1}\Big(1-\frac{1}{p_k^s}\Big)^{-1}$, *где* $p_k=2,3,5,7,11,13,17\ldots$ *В частности,* $\zeta(s)$ *не имеет нулей в полуплоскости* $\{s:\operatorname{Re}s>1\}$.
ii) При $\operatorname{Re}s>1$ *справедливо интегральное представление*

$$\log\zeta(s)=s\int_2^{+\infty}\frac{\pi(x)dx}{x(x^s-1)}\,,$$

где через $\pi(x)$ *обозначено количество простых чисел, не превосходящих* x.

Доказательство. i) Тождество очевидно, поскольку $\Big(1-\frac{1}{p_k^s}\Big)^{-1}=\frac{1}{p_k^s}+\frac{1}{p_k^{2s}}+\ldots$
ii) Имеем

$$\log\zeta(s)=-\sum_{k\geqslant 1}\log\Big(1-\frac{1}{p_k^s}\Big)=-\sum_{n\geqslant 2}(\pi(n)-\pi(n-1))\log\Big(1-\frac{1}{n^s}\Big)=$$

$$=\sum_{n\geqslant 2}\pi(n)\left(-\log\Big(1-\frac{1}{n^s}\Big)+\log\Big(1-\frac{1}{(n+1)^s}\Big)\right)=\sum_{n\geqslant 2}\pi(n)\int_n^{n+1}\big(\log(1-x^{-s})\big)'\,dx\,.$$

Осталось заметить, что $(\log(1-x^{-s}))'=\frac{s}{x(x^s-1)}$ и $\pi(x)=\pi(n)$ для $x\in(n,n+1)$. □

12 Преобразование Меллина.

Определение 12.1. *Преобразованием Меллина называется линейное отображение*

$$f(x),\ x\in\mathbb{R}_+\,,\quad\mapsto\quad F(s):=\int_0^{+\infty}x^{s-1}f(x)dx\,.$$

Замечание. Мы пока не рассматриваем вопрос сходимости интеграла.
Примеры. 1. $f(x)=e^{-x}\mapsto F(s)=\Gamma(s)$, $\operatorname{Re}s>0$ (определение гамма-функции).
2. $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}\mapsto F(s)=\zeta(s)$, $\operatorname{Re}s>1$ (Лемма 11.2).
3.

$$\pi(x)\mapsto\int_2^{+\infty}x^{s-1}\pi(x)dx=\int_2^{+\infty}\Big(\frac{1}{x(x^{-s}-1)}-\frac{1}{x^{1-s}(x^{-s}-1)}\Big)\pi(x)dx=$$

$$=-\frac{\log\zeta(-s)}{s}-\int_2^{+\infty}\frac{\pi(x)dx}{x^{1-s}(x^{-s}-1)}\,,\quad\operatorname{Re}s<-1\,.$$

Отметим, что второй интеграл сходится при $\operatorname{Re}s<-\frac{1}{2}$, т.е. ведет себя лучше, чем $\zeta(-s)$.

Наша ближайшая цель - получить формулу обращения, т.е. выражение $f(x)$ через $F(s)$. После этого, например, можно надеяться выразить $\pi(x)$ через дзэта-функцию Римана (пример 3) и из этого извлечь какую-то информацию о простых числах.

Необходимо сказать, что преобразование Меллина легко выражается через преобразование Фурье, которое является намного более известным.

Определение 12.2. *Преобразованием Фурье называется линейное отображение*

$$f(x)\,,\ x\in\mathbb{R}\,,\quad\mapsto\quad \hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x)dx\,,\ t\in\mathbb{R}\,.$$

Теорема 12.3 (минимальные сведения о преобразовании Фурье).
i) **(лемма Римана-Лебега)** *Если $f\in L^1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}(t)\to 0$, $t\to\pm\infty$.*
ii) Пусть $f\in L^1(\mathbb{R})$ и в точке $x_0\in\mathbb{R}$ выполнено **условие Дини**

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\,dx < +\infty$$

(что заведомо так, если, например, $f\in C^1$ или даже $f\in\mathrm{Lip}_\alpha$, $\alpha>0$). Тогда

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_0t}\cdot \hat{f}(t)dt\,.$$

Доказательство. i) Если $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ (непрерывно дифференцируемые функции с компактным носителем), то утверждение легко доказывается интегрированием по частям:

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Big(\frac{e^{-ixt}}{-it}\Big)'dx = \frac{1}{it}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixt}dx = O\Big(\frac{1}{t}\Big)\,.$$

Если же мы имеем дело с произвольной функцией из $L^1(\mathbb{R})$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая гладкая функция $f_1\in C_0^1(\mathbb{R})$, что $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-f_1(x)|dx < \frac{1}{2}\,\varepsilon$, откуда для всех t имеем $|\hat{f}(t)-\hat{f}_1(t)| < \frac{1}{2}\,\varepsilon$. Так как $\hat{f}_1(t)\to 0$, $t\to\pm\infty$ (см. выше), то для всех достаточно больших t будет $|\hat{f}(t)|<\varepsilon$, что и доказывает требуемое утверждение в силу произвольности выбора $\varepsilon>0$.
ii) Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{+R} e^{ix_0t}\cdot\hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\int_{-R}^{R} e^{i(x_0-x)t}dt\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\frac{\sin R(x-x_0)}{\pi(x-x_0)}\,dx\,.$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Ry}{y}\,dy=\pi$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{+R} e^{ix_0t}\cdot\hat{f}(t)dt - f(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{\pi(x-x_0)}\cdot\sin R(x-x_0)dx = \int_{\mathbb{R}\setminus[x_0-\delta,x_0+\delta]} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}$$

Для каждого фиксированного $\delta>0$ первый интеграл сходится (при $R\to\infty$) к 0 в силу первого пункта. Второй интеграл равномерно (по R) сходится к 0 при $\delta\downarrow 0$ в силу условия Дини (ибо $|\sin R(x-x_0)|\leqslant 1$). Теперь для каждого $\varepsilon>0$ можно сначала найти такое $\delta>0$, что второй интеграл будет меньше чем $\frac{1}{2}\,\varepsilon$ для всех R; а потом (по этому δ) найти такое R_0, что при всех $R>R_0$ первый интеграл также меньше, чем $\frac{1}{2}\,\varepsilon$. $\square$

Лекция восьмая. 11 апреля 2005.

Напомним, что преобразованием Меллина называется линейное отображение

$$f(x),\ x\in\mathbb{R}_+\,, \quad \mapsto \quad F(s):=\int_0^{+\infty} x^{s-1}f(x)dx\,.$$

Теорема 12.4 (простейшие свойства преобразования Меллина). *Пусть для некоторого* $k\in\mathbb{R}$ *верно* $\int_0^{+\infty}|f(x)|x^{k-1}dx<+\infty$ *. Тогда:*
i) $F(s)$ *корректна определена на прямой* $\operatorname{Re}s=k$ *и* $F(k+it)\to 0$ *при* $t\to\pm\infty$ *.*
ii) Если в некоторой точке $x_0\in(0,+\infty)$ *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Дини, то справедлива* **формула обращения**

$$f(x_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}F(s)x_0^{-s}ds \tag{11}$$

Доказательство. Положим $\varphi(y):=e^{ky}f(e^y)$, $y\in\mathbb{R}$. Ясно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(y)|dy=\,[x=e^y]\,=\int_0^{+\infty}x^{k-1}|f(x)|dx\,,$$

т.е. $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$. Вычислим $F(k+it)$:

$$F(k+it)=\int_0^{+\infty}x^{k-1+it}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{iyt}dy=\hat{\varphi}(-t)\,.$$

Первый пункт теперь вытекает из леммы Римана-Лебега, а формула обращения получается из соответствующей формулы для преобразования Фурье:

$$x_0^k f(x_0)=\varphi(\log x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\log x_0}\hat{\varphi}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x_0^{it}F(k-it)dt$$

(надо еще поделить на x_0^k и сделать замену переменной $s:=k-it$). □

13 Распределение простых чисел.

Теорема 13.1.

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}\,,\quad x\to+\infty\,.$$

Доказательство. Напомним, что

$$\log\zeta(s)=s\int_2^{+\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}dx\,,\quad \operatorname{Re}s>1\,.$$

Положим

$$\omega(s):=\int_2^{+\infty}\frac{\pi(x)}{x^{s+1}(x^s-1)}dx\,,\quad \operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$$

(интеграл сходится, поскольку $\pi(x)\leqslant x$). Следовательно,

$$\frac{\log\zeta(s)}{s}-\omega(s)=\int_2^{+\infty}\frac{\pi(x)}{x^{s+1}}\,dx\,,\quad \operatorname{Re}s>1\,.$$

Отметим, что $\omega(s)$ и ее производная ограничены в любой полуплоскости $\operatorname{Re}s\geqslant\frac{1}{2}+\delta$. Проведем некоторые тождественные преобразования. Дифференцируя по s, получаем

$$\varphi(s):=-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}+\frac{\log\zeta(s)}{s^2}+\omega'(s)=\int_2^{+\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x^{s+1}}\,dx\,,\quad \operatorname{Re}s>1\,.$$

Очевидно, что $\varphi(s)$ ограничена при $\operatorname{Re}s\geqslant 1+\delta$, однако нам потребуется более точная информация о поведении этой функции при $\operatorname{Re}s\geqslant 1$, а именно:

$$\varphi(\sigma+it)=O(\log^9|t|)\,,\quad t\to\pm\infty\,,\quad \sigma\in[1,2] \tag{12}$$

(в частности, $\zeta(s)\neq 0$ на прямой $\operatorname{Re}s=1$). Это будет доказано позже (Следствие 14.3).

Прежде, чем применять формулу обращения Меллина, проинтегрируем по частям. Пусть

$$g(x)=\int_0^x\frac{\pi(u)\log u}{u}\,du\,,\qquad h(x)=\int_0^x\frac{g(u)}{u}\,du$$

(очевидно, что $g(x)=O(x\log x)$, $h(x)=O(x\log^2 x)$). Тогда

$$\varphi(s)=\int_0^{+\infty}g'(x)x^{-s}dx=s\int_0^{+\infty}g(x)x^{-s-1}dx=s^2\int_0^{+\infty}h(x)x^{-s-1}dx\,,\quad \operatorname{Re}s>1\,.$$

Нам необходимо доказать, что $\pi(x)\log x\sim x$, $x\to+\infty$. Справедлива простая

Лемма 13.2. *Пусть f - неотрицательная неубывающая функция, такая что*

$$\int_0^x\frac{f(u)}{u}\,du\sim x\,,\quad x\to+\infty\,.$$

Тогда $f(x)\sim x$, $x\to+\infty$.

Доказательство. Для каждого $\delta>0$, всех достаточно больших $x>x_0(\delta)$ и всех $\varepsilon>0$ верно

$$f(x)\log(1+\varepsilon)\leqslant\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{f(u)}{du}\leqslant(1+\delta)(1+\varepsilon)x-(1-\delta)x=(\varepsilon+2\delta+\delta\varepsilon)x\,,$$

т.е.

$$\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{\varepsilon+2\delta+\delta\varepsilon}{\log(1+\varepsilon)}=1+O\Big(\varepsilon+\frac{\delta}{\varepsilon}\Big)\,.$$

Полагая $\varepsilon=\delta^{1/2}$, имеем $f(x)\leqslant(1+O(\delta^{1/2}))x$. Оценка снизу доказывается аналогично. $\square$

В силу этой леммы нам достаточно установить, что $h(x)\sim x$, $x\to+\infty$.

Так как
$$\int_0^{+\infty} h(x)x^{-s-1}dx = \frac{\varphi(s)}{s^2}\,, \quad \operatorname{Re} s > 1\,,$$
по формуле обращения Меллина имеем
$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\varphi(s)}{s^2}\, x^s ds\,, \quad \sigma > 1\,.$$
Заметим, что в окрестности точки $s=1$ имеем
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \ldots \quad \Rightarrow \quad \varphi(s) = \frac{1}{s-1} + \log\frac{1}{s-1} + \ldots = \frac{1}{s-1} + \psi(s)\,,$$
где многоточием обозначены аналитические слагаемые. Поэтому мы можем написать
$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^s}{(s-1)s^2}\, ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\psi(s)}{s^2}\, x^s ds$$
Первый интеграл легко берется по вычетам, находящимся в левой полуплоскости:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^s}{(s-1)s^2}\, ds = \operatorname*{res}_{s=0} + \operatorname*{res}_{s=1} = \left(\frac{x^s}{s-1}\right)'_s\Big|_{s=0} + \frac{x^s}{s^2}\Big|_{s=1} = -\log x - 1 + x$$
Во втором интеграле можно перейти к пределу при $\sigma \downarrow 1$, поскольку особенность $\psi(s)$ в точке $s=1$ логарифмическая и справедлива оценка (12). А тогда имеем
$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{\psi(s)}{s^2}\, x^s ds = x\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(1+it)}{(1+it)^2}\, e^{it\log x}dt = x\cdot o(1)\,, \quad x \to +\infty\,,$$
в силу леммы Римана-Лебега. В итоге $h(x)=x+o(x)$. Доказательство закончено. □

Комментарий. Видно, что нам было бы желательно сдвинуть прямую интегрирования в последнем интеграле как можно левее. Этому препятствуют возможные нули ζ-функции, находящиеся в полосе $0<\operatorname{Re} s<1$. Существует

Гипотеза Римана (\$1000000). *Все нетривиальные (т.е. отличные от* $-2,-4,\ldots$*) нули* ζ*-функции лежат на прямой* $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$.

Известно, что если эта гипотеза справедлива, то
$$\pi(x) = \int_e^x \frac{d\xi}{\log\xi} + O(\sqrt{x}\log x)\,.$$
Такая оценка остатка практически оптимальна, поскольку (результат Литтлвуда) для любой константы $c>0$ каждое из неравенств
$$\pi(x) - \int_e^x \frac{d\xi}{\log\xi} > c\sqrt{x}\,\frac{\log\log\log x}{\log x}\,; \qquad \pi(x) - \int_e^x \frac{d\xi}{\log\xi} < -c\sqrt{x}\,\frac{\log\log\log x}{\log x}$$
справедливо для бесконечного числа значений $x\to+\infty$.

14 Поведение $\zeta(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = 1$.

Теорема 14.1 (Адамар – Валле-Пуссен). *$\zeta(s) \neq 0$, если $\operatorname{Re} s = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение в бесконечное произведение

$$\zeta(s) = \prod_{k \geqslant 1} \Big(1 - \frac{1}{p_k^s}\Big)^{-1}$$

при $s = \sigma + it$, $\sigma \downarrow 1$. Логарифмируя, имеем

$$\log|\zeta(s)| = -\operatorname{Re} \sum_{k \geqslant 1} \log\Big(1 - \frac{1}{p_k^s}\Big) = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 1} \operatorname{Re} \frac{1}{m p_k^{ms}} = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\cos(mt \log p_k)}{m p_k^{m\sigma}}$$

Основная идея приведенного ниже доказательства заключается в том, что если бы было $\zeta(1+it)=0$, то при $\sigma \downarrow 1$ последняя сумма должна стремиться к $-\infty$, то есть "довольно много" косинусов в числителе должны быть "примерно равны" -1. Если же такая ситуация имеет место, то тогда в аналогичной сумме для $\sigma + 2it$ "довольно много" косинусов "примерно равны" $+1$, то есть при $\sigma \downarrow 1$ сумма будет стремиться к $+\infty$, что невозможно, так как тогда ζ-функция должна была бы иметь полюс в точке $1+2it$.

Наиболее простая реализация этой идеи такова (Валле-Пуссен):

$$\forall \phi \quad 3 + 4\cos\phi + \cos 2\phi = 2(1+\cos\phi)^2 \geqslant 0\,.$$

Значит, для всех $\sigma > 1$ и всех $t \in \mathbb{R}$ верно

$$3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+2it)| \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma+it)|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geqslant 1\,.$$

Пусть $\zeta(\sigma+it)=0$. Тогда при $\sigma \downarrow 1$ верно $|\zeta(\sigma+it)| = O(|\sigma-1|)$, $\zeta(\sigma) = O(|\sigma-1|^{-1})$ (так как в точке $s=1$ находится простой полюс) и $\zeta(\sigma+2it) = O(1)$ (так как $\zeta(s)$ регулярна в точке $1+2it$). Но это противоречит полученной оценке. □

Теорема 14.2. *В области $s = \sigma + it$, $\sigma \in [1,2]$, $t \geqslant 2$ справедливы оценки*

$$\zeta(s) = O(\log t)\,, \quad \zeta'(s) = O(\log^2 t)\,, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = O(\log^7 t)\,.$$

Доказательство. i) Применяя формулу суммирования Эйлера-Маклорена (Лемма 9.1) при $\sigma > 1$, имеем

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2N^s} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} + s\int_N^{+\infty} \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x^{s+1}}\,dx = O\Big(\frac{1}{N^\sigma} + \frac{1}{tN^{\sigma-1}} + \frac{t}{\sigma N^\sigma}\Big) = O\Big(\frac{t}{N}\Big)$$

(мы использовали равенство $|x^{s+1}| = x^{\sigma+1}$ при оценке интеграла). При этом оценка равномерна по σ, а значит справедлива и при $\sigma = 1$. Теперь возьмем $N = [t]$ и заметим, что

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} + O(1) = \sum_{n=1}^{[t]-1} O\Big(\frac{1}{n}\Big) + O(1) = O(\log t)\,.$$

ii) Оценка функции $\zeta'(s) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{\log n}{n^s}$ получается аналогично.
iii) Как мы видели при доказательстве Теоремы 14.1, если $\sigma > 1$, то

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leqslant |\zeta(\sigma)|^{3/4} |\zeta(\sigma+2it)|^{1/4} = O\Big(\frac{\log^{1/4} t}{(\sigma-1)^{3/4}}\Big).$$

Положим $\sigma_0(t) := 1+c\log^{-9} t$, где $c>0$ - достаточно малая постоянная. Если $\sigma > \sigma_0(t)$, то оценка уже доказана. Кроме того, справедливо

$$|\zeta(\sigma_0(t)+it)| \geqslant A \cdot c^{3/4} \log^{-7} t,$$

где $A>0$ - некоторая абсолютная постоянная. При $\sigma < \sigma_0(t)$ полученная выше оценка для $\zeta'(s)$ дает

$$\zeta(\sigma+it) = \zeta(\sigma_0(t)+it) + O((\sigma_0(t)-\sigma)\log^2 t) = \zeta(\sigma_0(t)+it) + O(c\log^{-7} t).$$

Ясно, что, выбирая достаточно маленькое c, можно сделать первое слагаемое главным.
$\square$

Следствие 14.3. *В области* $s=\sigma+it$, $\sigma\in[1,2]$, $t\geqslant 2$ *справедливы оценки*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^9 t), \quad \log\zeta(s) = O(\log^9 t).$$

Доказательство. Неравенство для $\zeta'(s)/\zeta(s)$ получается перемножением соответствующих оценок $\zeta'(s)$ и $1/\zeta(s)$, а неравенство для $\log\zeta(s)$ - интегрированием:

$$\log\zeta(s) = \log\zeta(2+it) - \int_\sigma^2 O(\log^9 t)dx = O(\log^9 t).$$

Следствие доказано. $\square$

Источники мудрости.

Маркушевич А. И. *Теория аналитических функций, т. 1,2.* "Наука", 1967-1968.
Олвер Ф. *Асимптотика и специальные функции.* "Наука", 1990 (F. Olver 1974).
Титчмарш Е. К. *Теория дзэта-функции Римана.* "ИЛ", 1953 (E. C. Titchmarsh 1951).