

Конформная инвариантность и универсальность
критической двумерной модели Изинга, и
дискретный комплексный анализ

Д. Челкак (Санкт-Петербург)

[по совместной деятельности
с С.Смирновым (Женева)]

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МГУ, 16-24, 19.05.2009

▶ I: Конформная инвариантность:

- ▶ двумерная модель Изинга, интерфейсы;
 - ▶ SLE(Schramm-Loewner Evolution) и принцип Шрамма;
 - ▶ принцип конформного мартингала;
 - ▶ “голоморфная наблюдаемая” (holomorphic fermion) в модели Изинга.
- ▶ S.Smirnov: [1] *Towards conformal invariance of 2D lattice models.* [arXiv:0708.0032](#)
[2] *Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model.* [arXiv:0708.0039](#)

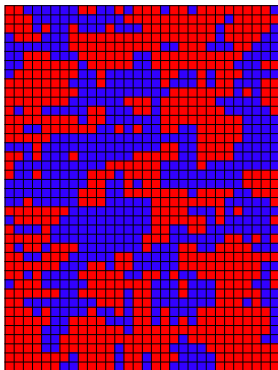
▶ I: Конформная инвариантность:

- ▶ двумерная модель Изинга, интерфейсы;
 - ▶ SLE(Schramm-Loewner Evolution) и принцип Шрамма;
 - ▶ принцип конформного мартингала;
 - ▶ “голоморфная наблюдаемая” (holomorphic fermion) в модели Изинга.
- ▶ S.Smirnov: [1] *Towards conformal invariance of 2D lattice models*. [arXiv:0708.0032](#)
[2] *Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model*. [arXiv:0708.0039](#)

▶ II: Дискретный комплексный анализ; универсальность:

- ▶ изорадиальные графы (ромбические решетки);
 - ▶ дискретная функция Грина и другие приятные факты;
 - ▶ s -голоморфность и сходимости наблюдаемой.
- ▶ D.Chelkak, S.Smirnov: [3] *Discrete complex analysis on isoradial graphs*. [arXiv:0810.2188](#)
[4] *Convergence of holomorphic observables in the Ising model*. [arXiv:09???.????](#)

Модель Изинга (2D):



Спины $\sigma_i = +1$ или -1 .

Гамильтониан:

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j.$$

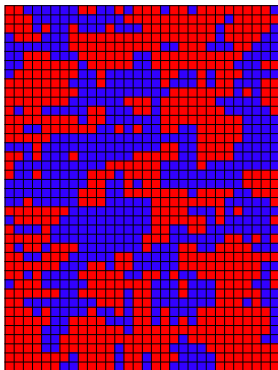
Вероятность (больцмановский вес) конфигурации:

$$\mathbb{P}(\text{conf.}) \sim e^{-\beta H} \sim x^{\# \langle +- \rangle},$$

где β – параметр (обратная температура) и

$$x = e^{-2\beta} \in [0, 1].$$

Модель Изинга (2D):



Спины $\sigma_i = +1$ или -1 .

Гамильтониан:

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j.$$

Вероятность (больцмановский вес) конфигурации:

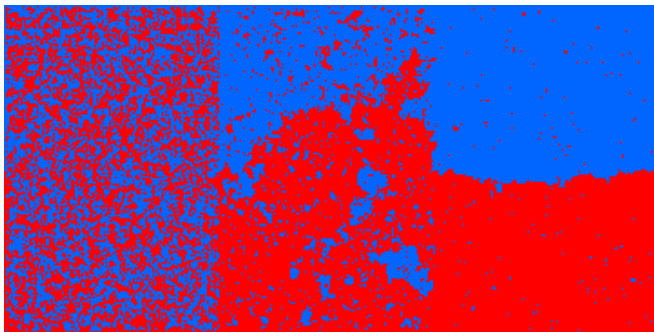
$$\mathbb{P}(\text{conf.}) \sim e^{-\beta H} \sim x^{\# \langle +- \rangle},$$

где β – параметр (обратная температура) и

$$x = e^{-2\beta} \in [0, 1].$$

На произвольном графе: $H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j.$

$$\mathbb{P}(\text{conf.}) \sim \prod_{\langle ij \rangle: \sigma_i \neq \sigma_j} x_{ij}, \quad x_{ij} \in [0, 1].$$



$x \rightarrow 1$

$x = x_{\text{crit}}$

$x \rightarrow 0$

(Добрушинские граничные значения:

+1 на нижней части границы области, -1 на верхней)

[Peierls '36]: \exists фазовый переход (2D)

[Kramers-Wannier '41]: $x_{\text{crit}} = \sqrt{2} - 1$.

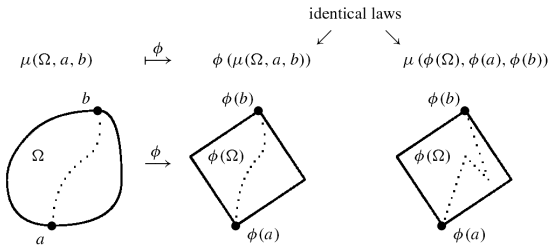
Конформная инвариантность интерфейса, принцип Schramm'a (2000):

- ▶ Пусть $\mu(\Omega, a, b)$ – несамопересекающаяся случайная кривая $a \rightsquigarrow b$ в односвязной области Ω , $a, b \in \partial\Omega$ (т.е. вероятностное распределение на пространстве таких кривых с точностью до перепараметризации, заданное для каждой конфигурации (Ω, a, b)).

Конформная инвариантность интерфейса, принцип Schramm'а (2000):

- ▶ $\mu(\Omega, a, b)$ – случайная кривая в (Ω, a, b) :
- ▶ (A) Конформная инвариантность:

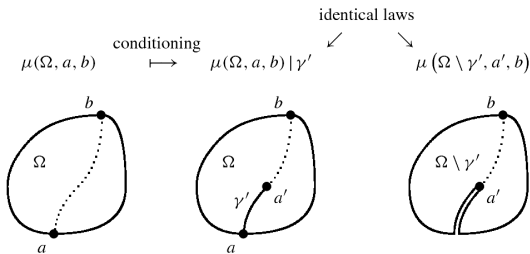
$$\phi(\mu(\Omega, a, b)) = \mu(\phi(\Omega), \phi(a), \phi(b)).$$



Конформная инвариантность интерфейса, принцип Schramm'a (2000):

- ▶ $\mu(\Omega, a, b)$ – случайная кривая в (Ω, a, b) :
- ▶ (A) Конформная инвариантность;
- ▶ (B) Марковское свойство:

$$\mu(\Omega, a, b) | \gamma' = \mu(\Omega \setminus \gamma', a', b).$$



Конформная инвариантность интерфейса, принцип Schramm'a (2000):

- ▶ $\mu(\Omega, a, b)$ – случайная кривая в (Ω, a, b) :
- ▶ (A) Конформная инвариантность
- ▶ (B) Марковское свойство;
- ▶ (A)+(B) (+ некоторые технические детали) $\Rightarrow \mu(\Omega, a, b)$ есть **SLE(κ)** для некоторого значения вещественного параметра $\kappa \geq 0$, где SLE(κ) (**Schramm-Loewner Evolution**) – это случайная кривая, которая в верхней полуплоскости $(\mathbb{C}_+, 0, \infty)$ задается уравнением Лёвнера

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a_t}, \quad g_0(z) \equiv z, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

с “движущей силой” $a_t = \sqrt{\kappa}B_t$, где $g_t : \mathbb{C}_+ \setminus \gamma[0, t] \rightarrow \mathbb{C}_+$.

Уравнение Лёвнера [Ch.Loewner(K.Löwner), 1923]:

$$\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}_+, \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(+\infty) = \infty$$

– несамопересекающаяся кривая, *параметризованная* логарифмической ёмкостью, т.е.

$$g_t : \mathbb{C}_+ \setminus \gamma[0, t] \rightarrow \mathbb{C}_+,$$

$$g_t(z) = 1 \cdot z + 0 + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow i\infty$$

(конформное отображение g_t однозначно определено условиями $\infty \mapsto \infty$ и двумя первыми коэффициентами). Положим $a_t := g_t(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a_t}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \gamma[0, t].$$

SLE = Stochastic Loewner Evolution. Основная идея:

- ▶ конформная инвариантность (A) \Rightarrow достаточно изучать кривые в верхней полуплоскости $(\mathbb{C}_+, 0, \infty)$
- ▶ или, что эквивалентно, конформные отображения:

$$G_t := g_t - a_t : \mathbb{C}_+ \setminus \gamma[0, t] \rightarrow \mathbb{C}_+, \quad G_t : \gamma(t) \mapsto 0,$$

$$G_t(z) = z - a_t + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow i\infty$$

SLE = Stochastic Loewner Evolution. Основная идея:

- ▶ конформная инвариантность (A) \Rightarrow достаточно изучать кривые в верхней полуплоскости $(\mathbb{C}_+, 0, \infty)$
- ▶ или, что эквивалентно, конформные отображения:

$$G_t := g_t - a_t : \mathbb{C}_+ \setminus \gamma[0, t] \rightarrow \mathbb{C}_+, \quad G_t : \gamma(t) \mapsto 0,$$

$$G_t(z) = z - a_t + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow i\infty$$

- ▶ Аддитивность для a_t :

$$\tilde{G}_s \circ G_t = z - (a_t + \tilde{a}_s) + \frac{2(t+s)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow i\infty$$

- ▶ марковское свойство (B) \Rightarrow

$$G_{s+t} \sim \tilde{G}_s \circ G_t \quad \Rightarrow \quad a_{t+s} - a_t \sim \tilde{a}_s.$$

Принцип конформного мартингала (простая версия):

- ▶ $F_{(\Omega,a,b)}(\cdot)$ – конформно инвариантный мартингал для случайной кривой γ , если

$$(A') \quad F_{(\Omega,a,b)}(\cdot) = F_{(\phi(\Omega),\phi(a),\phi(b))}(\phi(\cdot)) \cdot \phi'(b)^\alpha$$

(для всех конформных отображений ϕ) и при этом

$$(B') \quad F_{(\Omega \setminus \gamma[0,t], \gamma(t), b)}(z) \text{ – мартингал для всех } z \in \Omega.$$

Принцип конформного мартингала (простая версия):

- ▶ $F_{(\Omega,a,b)}(\cdot)$ – конформно инвариантный мартингал для случайной кривой γ , если

$$(A') \quad F_{(\Omega,a,b)}(\cdot) = F_{(\phi(\Omega),\phi(a),\phi(b))}(\phi(\cdot)) \cdot \phi'(b)^\alpha$$

(для всех конформных отображений ϕ) и при этом

$$(B') \quad F_{(\Omega \setminus \gamma[0,t],\gamma(t),b)}(z) \text{ – мартингал для всех } z \in \Omega.$$

- ▶ если случайная кривая допускает нетривиальный конформный мартингал F , то это – SLE.

Принцип конформного мартингала (простая версия):

- ▶ *если случайная кривая допускает нетривиальный конформный мартингал F , то это – SLE.*
- ▶ Пример мартингала для SLE(κ):

$$F_{(\Omega, a, b)}(z) = (\Psi'(z))^\alpha (\Psi'(b))^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{3}{\kappa} - \frac{1}{2},$$

где $\Psi : (\Omega, a, b) \rightarrow (\mathbb{C}_+, \infty, 0)$.

[упражнение на применение формулы Ито].

Принцип конформного мартингала (простая версия):

- ▶ если случайная кривая допускает нетривиальный конформный мартингал F , то это – SLE.
- ▶ Пример мартингала для SLE(κ):

$$F_{(\Omega, a, b)}(z) = (\Psi'(z))^\alpha (\Psi'(b))^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{3}{\kappa} - \frac{1}{2},$$

где $\Psi : (\Omega, a, b) \rightarrow (\mathbb{C}_+, \infty, 0)$.

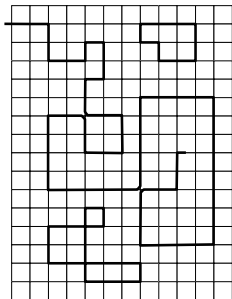
“Физическая” терминология: α – спин [$\alpha = \frac{1}{2} \leftrightarrow \kappa = 3$]

- ▶ $\text{Im } \Psi$ – ядро Пуассона в Ω , отвечающее нагрузке в a ;
- ▶ $F_{\Omega, a, b}$ – решение граничной задачи

$$F(\zeta) \uparrow\uparrow \tau(\zeta)^{-\alpha}, \quad \zeta \in \partial\Omega \setminus \{a\}$$

где $\tau(\zeta)$ – касательный вектор (если $\tau(b) \uparrow\uparrow +1$).

Дискретный мартингал (holomorphic fermion) в модели Изинга:

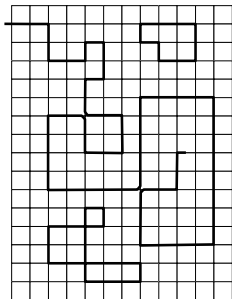


Функция F задана в серединах рёбер исходной решетки: $F(z) :=$

$$\frac{\sum_{conf.: a \rightsquigarrow z} x_{crit}^{\#\langle+-\rangle} e^{-\frac{i}{2} \text{winding}(a \rightsquigarrow z)}}{\sum_{conf.: a \rightsquigarrow b} x_{crit}^{\#\langle+-\rangle} e^{-\frac{i}{2} \text{winding}(a \rightsquigarrow b)}}.$$

($\text{winding}(a \rightsquigarrow z) \bmod 4\pi$ однозначно определен (на картинке = -2π))

Дискретный мартингал (holomorphic fermion) в модели Изинга:



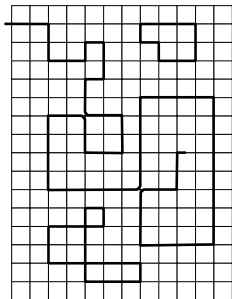
Функция F задана в **середирах**
рёбер исходной решетки: $F(z) :=$

$$\frac{\sum_{conf.: a \rightsquigarrow z} x_{crit}^{\#\langle+-\rangle} e^{-\frac{i}{2} \text{winding}(a \rightsquigarrow z)}}{\sum_{conf.: a \rightsquigarrow b} x_{crit}^{\#\langle+-\rangle} e^{-\frac{i}{2} \text{winding}(a \rightsquigarrow b)}}.$$

($\text{winding}(a \rightsquigarrow z) \bmod 4\pi$ однозначно
определен (на картинке = -2π))

Утверждение: (A'_{disc}) F дискретно голоморфна (аналитична)
на **медиальной решетке** и удовлетворяет граничным условиям
 $F(\zeta) \uparrow\uparrow \tau(\zeta)^{-\frac{1}{2}}$ на границе области (если $\tau(b) \uparrow\uparrow +1$).

Дискретный мартингал (holomorphic fermion) в модели Изинга:



Функция F задана в **середирах**
рёбер исходной решетки: $F(z) :=$

$$\frac{\sum_{conf.: a \rightsquigarrow z} x_{crit}^{\# \langle + - \rangle} e^{-\frac{i}{2} \text{winding}(a \rightsquigarrow z)}}{\sum_{conf.: a \rightsquigarrow b} x_{crit}^{\# \langle + - \rangle} e^{-\frac{i}{2} \text{winding}(a \rightsquigarrow b)}}.$$

($\text{winding}(a \rightsquigarrow z) \bmod 4\pi$ однозначно
определен (на картинке $= -2\pi$))

Утверждение: (A'_{disc}) F дискретно голоморфна (аналитична)
на **медиальной решетке** и удовлетворяет граничным условиям
 $F(\zeta) \uparrow\uparrow \tau(\zeta)^{-\frac{1}{2}}$ на границе области (если $\tau(b) \uparrow\uparrow +1$).

(B'_{disc}) F является мартингалом относительно дискретной
случайной кривой $a \rightsquigarrow b$, разделяющей спины в модели Изинга.

Сходимость интерфейса в (спиновой) модели Изинга:

- ▶ Для того, чтобы доказать сходимость (в некоторой топологии) интерфейса модели Изинга [на квадратной решетке] к SLE(3) *достаточно доказать* равномерную (по $(\Omega^\delta, a^\delta, b^\delta)$) близость (при $\delta \rightarrow 0$) решения *дискретной* краевой задачи
 - (a) F дискретно голоморфна в дискретной области Ω^δ ;
 - (b) $\text{Im}[F(\zeta)\tau(\zeta)^{\frac{1}{2}}] = 0, \zeta \in \partial\Omega^\delta \setminus \{a^\delta\}$;
 - (c) $F(b^\delta) = 1$;к решению аналогичной *непрерывной* задачи в Ω^δ (которую можно рассматривать просто как многоугольную область на плоскости).

Сходимость интерфейса в (спиновой) модели Изинга:

- ▶ Для того, чтобы доказать сходимость (в некоторой топологии) интерфейса модели Изинга [на квадратной решетке] к SLE(3) *достаточно доказать* равномерную (по $(\Omega^\delta, a^\delta, b^\delta)$) близость (при $\delta \rightarrow 0$) решения *дискретной* краевой задачи
 - (a) F дискретно голоморфна в дискретной области Ω^δ ;
 - (b) $\text{Im}[F(\zeta)\tau(\zeta)^{\frac{1}{2}}] = 0, \zeta \in \partial\Omega^\delta \setminus \{a^\delta\}$;
 - (c) $F(b^\delta) = 1$;к решению аналогичной *непрерывной* задачи в Ω^δ
(которую можно рассматривать просто как многоугольную область на плоскости).
- ▶ **ЭТО МОЖНО СДЕЛАТЬ;**

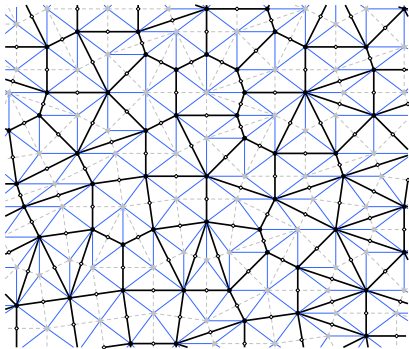
Сходимость интерфейса в (спиновой) модели Изинга:

- ▶ Для того, чтобы доказать сходимость (в некоторой топологии) интерфейса модели Изинга [на квадратной решетке] к SLE(3) *достаточно доказать* равномерную (по $(\Omega^\delta, a^\delta, b^\delta)$) близость (при $\delta \rightarrow 0$) решения *дискретной* краевой задачи
 - (a) F дискретно голоморфна в дискретной области Ω^δ ;
 - (b) $\text{Im}[F(\zeta)\tau(\zeta)^{\frac{1}{2}}] = 0, \zeta \in \partial\Omega^\delta \setminus \{a^\delta\}$;
 - (c) $F(b^\delta) = 1$;к решению аналогичной *непрерывной* задачи в Ω^δ
(которую можно рассматривать просто как многоугольную область на плоскости).
- ▶ **это можно сделать**;
- ▶ **и не только на квадратной решетке**, что соответствует **универсальности** критической модели Изинга
(“конформный предел не зависит от “решетки”, на которой рассматривается модель”)

Комплексный анализ на изорадиальных графах:

[arXiv:0810.2188]

[R. J. Duffin (late 60s); C. Mercat, R. Kenyon (00s); ...]



- *изорадиальный граф* Γ (чёрные вершины),
- *дуальный изорадиальный граф* Γ^* (серые вершины);
- *ромбическая решетка* ($\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$, синие рёбра)
- и множество $\diamond = \Lambda^*$ (белые “ромбики”).

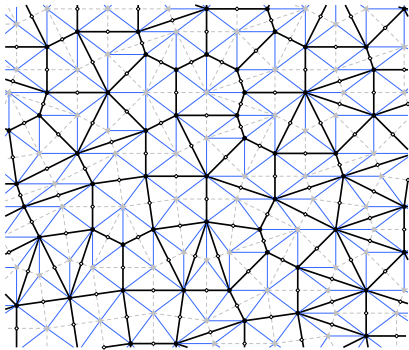
техническое условие (♠):

углы ромбов отделены от 0 и π .

Комплексный анализ на изорадиальных графах:

[arXiv:0810.2188]

[R. J. Duffin (late 60s); C. Mercat, R. Kenyon (00s); ...]



- *изорадиальный граф* Γ (чёрные вершины),
- *дуальный изорадиальный граф* Γ^* (серые вершины);
- *ромбическая решетка* ($\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$, синие рёбра)
- и множество $\diamond = \Lambda^*$ (белые “ромбики”).

техническое условие (♠):

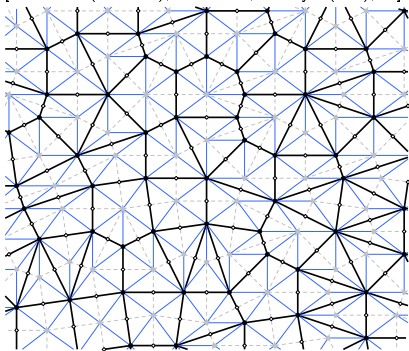
углы ромбов отделены от 0 и π .

Есть естественные разностные операторы $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta: \mathcal{F}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{F}(\diamond)$

Комплексный анализ на изорадиальных графах:

[arXiv:0810.2188]

[R. J. Duffin (late 60s); C. Mercat, R. Kenyon (00s); ...]



- *изорадиальный граф* Γ (чёрные вершины),
- *дуальный изорадиальный граф* Γ^* (серые вершины);
- *ромбическая решетка* ($\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$, синие рёбра)
- и множество $\diamond = \Lambda^*$ (белые “ромбики”).

техническое условие (\spadesuit):

углы ромбов отделены от 0 и π .

Есть естественные разностные операторы $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta: \mathcal{F}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{F}(\diamond)$

Более того: $(\bar{\partial}^\delta)^* \partial^\delta \equiv (\partial^\delta)^* \bar{\partial}^\delta: \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}(\Gamma)$ [$\mathcal{F}(\Gamma^*) \rightarrow \mathcal{F}(\Gamma^*)$]

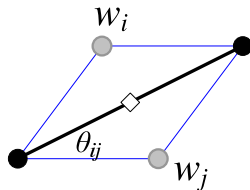
(при естественном выборе весов) \Rightarrow на Γ есть естественный лапласиан Δ^δ .

Модель Изинга на изорадиальном графе:

- ▶ веса ЛОКАЛЬНЫ [зависят только от длины ребра]:

$$x_{ij} = \operatorname{tg} \frac{\theta_{ij}}{2}$$

[или, что то же самое, $\sinh 2J_{ij} = \operatorname{ctg} \theta_{ij}$]

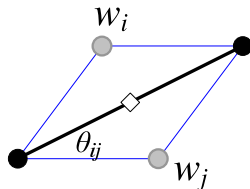


Модель Изинга на изорадиальном графе:

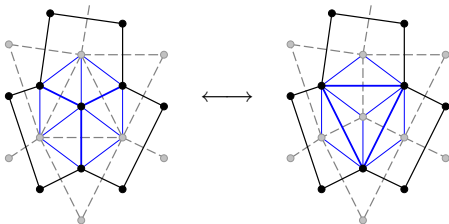
- ▶ веса ЛОКАЛЬНЫ [зависят только от длины ребра]:

$$x_{ij} = \operatorname{tg} \frac{\theta_{ij}}{2}$$

[или, что то же самое, $\sinh 2J_{ij} = \operatorname{ctg} \theta_{ij}$]



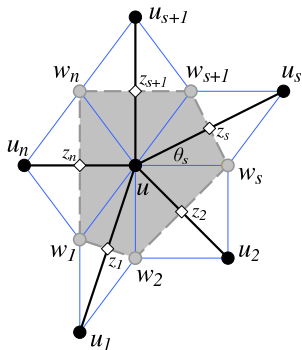
- ▶ $Y - \Delta$ (Yang-Baxter) relation



модель Изинга
с такими весами
 $Y - \Delta$ инварианта
[и это максимальный класс
графов, на которых можно
выбрать локальные веса, об-
ладающие этим свойством]

Формальное определение операторов $\Delta^\delta, \partial^\delta, \bar{\partial}^\delta$:

H задана на Λ ;



$$\partial^\delta H(z_s) := \frac{1}{2} \left[\frac{H(u_s) - H(u)}{u_s - u} + \frac{H(w_{s+1}) - H(w_s)}{w_{s+1} - w_s} \right];$$

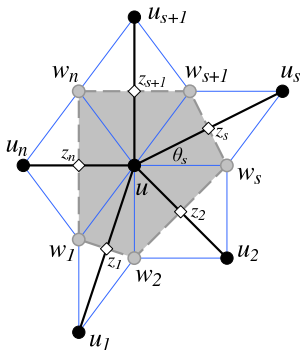
Формальное определение операторов $\Delta^\delta, \partial^\delta, \bar{\partial}^\delta$:

H задана на Λ ; F задана на \diamond .

$$\bar{\partial}^\delta F(u) \quad (= (\partial^\delta)^* F(u)) :=$$

$$- \frac{i}{2\mu_\Gamma^\delta(u)} \sum_{z_s \sim u} (w_{s+1} - w_s) F(z_s);$$

$$\partial^\delta H(z_s) := \frac{1}{2} \left[\frac{H(u_s) - H(u)}{u_s - u} + \frac{H(w_{s+1}) - H(w_s)}{w_{s+1} - w_s} \right];$$



Формальное определение операторов $\Delta^\delta, \partial^\delta, \bar{\partial}^\delta$:

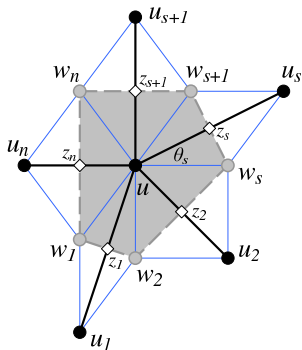
H задана на Λ ; F задана на \diamond .

$$\bar{\partial}^\delta F(u) \quad (= (\partial^\delta)^* F(u)) :=$$

$$- \frac{i}{2\mu_\Gamma^\delta(u)} \sum_{z_s \sim u} (w_{s+1} - w_s) F(z_s);$$

$$\partial^\delta H(z_s) := \frac{1}{2} \left[\frac{H(u_s) - H(u)}{u_s - u} + \frac{H(w_{s+1}) - H(w_s)}{w_{s+1} - w_s} \right];$$

$$\Delta^\delta H(u) := 4\bar{\partial}^\delta \partial^\delta H(u) = \frac{1}{\mu_\Gamma^\delta(u)} \sum_{u_s \sim u} \tan \theta_s \cdot [H(u_s) - H(u)].$$



Приятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta, \Delta^\delta$ аппроксимируют обычные дифференциальные операторы $\bar{\partial}, \partial, \Delta$ при $\delta \rightarrow 0$;

Приятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta, \Delta^\delta$ аппроксимируют обычные дифференциальные операторы $\bar{\partial}, \partial, \Delta$ при $\delta \rightarrow 0$;
- ▶ [переформулировка для Δ^δ]: случайное блуждание

$$\text{RW}(t+1) = \text{RW}(t) + \xi_{\text{RW}(t)}^{(t)},$$

где $\xi^{(t)}$ независимы и $\mathbb{P}(\xi_u = u_k - u) \sim \tan \theta_k, k = 1, \dots, n$.

Тогда:

$$\mathbb{E}[\text{Re } \xi_u] = \mathbb{E}[\text{Im } \xi_u] = 0,$$

$$\mathbb{E}[\text{Re } \xi_u \text{ Im } \xi_u] = 0, \quad \mathbb{E}[(\text{Re } \xi_u)^2] = \mathbb{E}[(\text{Im } \xi_u)^2] = \delta^2 \cdot T_u$$

(где $T_u = \sum_{s=1}^n \sin 2\theta_s / \sum_{s=1}^n \tan \theta_s$).

Приятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta, \Delta^\delta$ аппроксимируют обычные дифференциальные операторы $\bar{\partial}, \partial, \Delta$ при $\delta \rightarrow 0$;
- ▶ асимптотика функции Грина [Kenyon'02]:
 - (i) $[\Delta^\delta H](u) = 0, u \neq u_0; \quad [\Delta^\delta H](u_0) = [\mu_\Gamma^\delta(u_0)]^{-1}$;
 - (ii) $H(u) = o(|u - u_0|)$ при $|u - u_0| \rightarrow \infty$;
 - (iii) $H(u_0) = \frac{1}{2\pi}(\log \delta - \gamma_{\text{Euler}} - \log 2)$.

Приятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta, \Delta^\delta$ аппроксимируют обычные дифференциальные операторы $\bar{\partial}, \partial, \Delta$ при $\delta \rightarrow 0$;
- ▶ асимптотика функции Грина [Kenyon'02]:
 - (i) $[\Delta^\delta H](u) = 0, u \neq u_0; \quad [\Delta^\delta H](u_0) = [\mu_\Gamma^\delta(u_0)]^{-1}$;
 - (ii) $H(u) = o(|u - u_0|)$ при $|u - u_0| \rightarrow \infty$;
 - (iii) $H(u_0) = \frac{1}{2\pi}(\log \delta - \gamma_{\text{Euler}} - \log 2)$.

Существует единственная функция $H(\cdot) = G_\Gamma(\cdot; u_0)$, удовлетворяющая (i)-(iii) и

$$G_\Gamma(u; u_0) = \frac{1}{2\pi} \log |u - u_0| + O\left(\frac{\delta^2}{|u - u_0|^2}\right).$$

Приятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta, \Delta^\delta$ аппроксимируют обычные дифференциальные операторы $\bar{\partial}, \partial, \Delta$ при $\delta \rightarrow 0$;
- ▶ асимптотика функции Грина;
- ▶ \Rightarrow “хорошая” теория дискретных гармонических функций: лемма Гарнака (оценка градиента гармонической ф-ии), **равномерная C^1 -сходимость** для гармонической меры (решений задачи Дирихле), для ядра Пуассона и т.п.

Приятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta, \Delta^\delta$ аппроксимируют обычные дифференциальные операторы $\bar{\partial}, \partial, \Delta$ при $\delta \rightarrow 0$;
- ▶ асимптотика функции Грина;
- ▶ \Rightarrow “хорошая” теория дискретных гармонических функций: лемма Гарнака (оценка градиента гармонической ф-ии), **равномерная C^1 -сходимость** для гармонической меры (решений задачи Дирихле), для ядра Пуассона и т.п.

Неприятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta F = \bar{\partial}^\delta G = 0 \not\Rightarrow \bar{\partial}^\delta [FG] = 0$ [ни на Λ , ни на \diamond];

Приятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta, \partial^\delta, \Delta^\delta$ аппроксимируют обычные дифференциальные операторы $\bar{\partial}, \partial, \Delta$ при $\delta \rightarrow 0$;
- ▶ асимптотика функции Грина;
- ▶ \Rightarrow “хорошая” теория дискретных гармонических функций: лемма Гарнака (оценка градиента гармонической ф-ии), **равномерная C^1 -сходимость** для гармонической меры (решений задачи Дирихле), для ядра Пуассона и т.п.

Неприятные факты:

- ▶ $\bar{\partial}^\delta F = \bar{\partial}^\delta G = 0 \not\Rightarrow \bar{\partial}^\delta [FG] = 0$ [ни на Λ , ни на \diamond];
- ▶ $\bar{\partial}^\delta F = 0 \not\Rightarrow \bar{\partial}^\delta [\partial^\delta F] = 0$ [верно на Λ , но на \diamond уже нет].

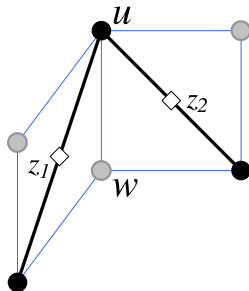
S-голоморфность (определение):

Мы говорим, что функция F , заданная на подмножестве \diamond , является s -голоморфной, если

$$\Pr \left[F(z_1); [i(w-u)]^{-\frac{1}{2}} \right] = \Pr \left[F(z_2); [i(w-u)]^{-\frac{1}{2}} \right]$$

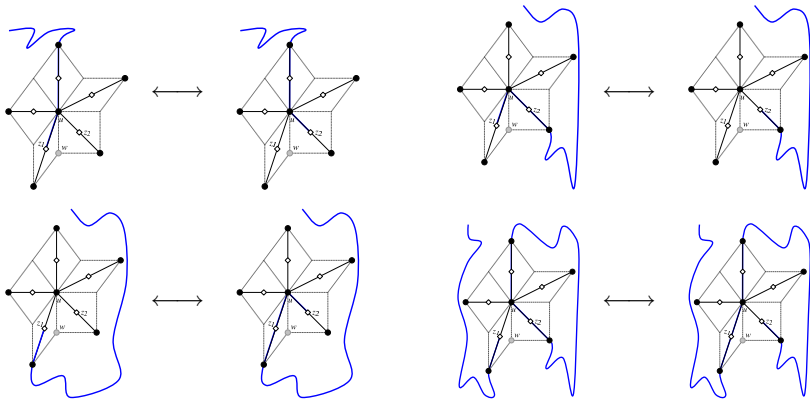
для любых двух соседних вершин $z_0 \sim z_1$.

- ▶ это более сильное свойство, чем голоморфность ($\bar{\partial}^\delta F = 0$);
- ▶ оно выполняется для наблюдаемой в модели Изинга:



S-голоморфность наблюдаемой в модели Изинга:

$$\Pr \left[F(z_1); [i(w-u)]^{-\frac{1}{2}} \right] = \Pr \left[F(z_2); [i(w-u)]^{-\frac{1}{2}} \right]$$



Сходимость наблюдаемой в модели Изинга:

- ▶ **[удивительный] факт:** F – s -голоморфна \Rightarrow
(дискретный) интеграл $H := \operatorname{Im} \int^{\delta} (F(z))^2 d^{\delta} z$
корректно определен (как функция на $\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$)
[H субгармонична на Γ и супергармонична на Γ^*]

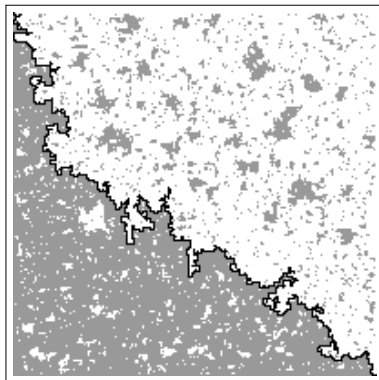
Сходимость наблюдаемой в модели Изинга:

- ▶ **[удивительный] факт:** F – s -голоморфна \Rightarrow
(дискретный) интеграл $H := \operatorname{Im} \int^\delta (F(z))^2 d^\delta z$
корректно определен (как функция на $\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$)
[H субгармонична на Γ и супергармонична на Γ^*]
- ▶ Наблюдаемая в модели Изинга
 - (a) s -голоморфна в дискретной области Ω^δ ;
 - (b) $\operatorname{Im}[F(\zeta)\tau(\zeta)^{\frac{1}{2}}] = 0$, $\zeta \in \partial\Omega^\delta \setminus \{a^\delta\}$; $\Rightarrow H$ постоянна ($= 0$) на $\partial\Omega^\delta$ и “почти гармонична”.

Сходимость наблюдаемой в модели Изинга:

- ▶ **[удивительный] факт:** F – s -голоморфна \Rightarrow
(дискретный) интеграл $H := \operatorname{Im} \int^\delta (F(z))^2 d^\delta z$
корректно определен (как функция на $\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$)
[H субгармонична на Γ и супергармонична на Γ^*]
- ▶ Наблюдаемая в модели Изинга
 - (а) s -голоморфна в дискретной области Ω^δ ;
 - (б) $\operatorname{Im}[F(\zeta)\tau(\zeta)^{\frac{1}{2}}] = 0$, $\zeta \in \partial\Omega^\delta \setminus \{a^\delta\}$; $\Rightarrow H$ постоянна ($= 0$) на $\partial\Omega^\delta$ и “почти гармонична”.
- ▶ Можно [элементарными, правда не очень простыми методами] доказать, что H близка к ядру Пуассона, отвечающему нагрузке в точке a^δ , и этого достаточно для доказательства C^1 -сходимости дискретной наблюдаемой к конформному мартингалу, а интерфейсов в спиновой модели Изинга – к SLE(3):

СП6



Москва

[THE END]