Комбинаторика симметрических групп
Экзаменационные задачи

С. В. Дужин

1. Как известно, число разбиений данного числа на нечетные части равно числу его разбиений на различные части. Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для разбиений на части, не делящиеся на 3.

2. Рассмотрим векторное пространство Λ^5 симметрических многочленов степени 5. Выпишите явно базисы этого пространства m, e, h, p, s (мономиальных, элементарных, полных симметрических многочленов, сумм степеней и функций Шура). Найдите матрицы, выражающие все эти базисы через какой-то один из них.

3. (а) Найдите пары таблиц, которые соответствуют перестановке $(1357)(246)(08) \in S_{10}$ и обратной к ней в силу соответствия Робинсона-Шенстеда-Кнута. (б) Сформулируйте и докажите общее утверждение относительно поведения взаимно обратных перестановок под действием соответствия RSK.

4. Дайте явное описание модуля Шпехта $M^{(3,2,1)}$, укажите его размерность, базис и действие на нем соответствующей симметрической группы.

5. (а) Составьте матрицу характеров группы S_4. (б) Объясните связь матрицы характеров группы S_n с функциями Шура. (в) Докажите формулу, выражающую определитель матрицы характеров для S_n через разбиения числа n.

6. Найдите группу автоморфизмов графа Юнга.

7. Опишите неприводимое представление группы S_5, соответствующее разбиению $(3, 1, 1)$, в терминах базиса Гельфанда-Цетлина. В пространстве представления укажите подпространства, в которых реализуются различные неприводимые представления группы S_3, вложенной в S_5 как подгруппа перестановок, оставляющих неподвижными элементы 4 и 5.

Литература

0. Лекционные заметки (увы, неполные): `http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/IUM`.

1. И. Макдоналд. Симметрические функции и многочлены Холла. М., Мир, 1985.

2. Г. Джеймс. Теория представлений симметрических групп. М., Мир, 1982.

3. A. Okuonkov, A. M. Vershik. A new approach to representation theory of symmetric groups. Selecta Math., New Series, vol. 2, No. 4 (1996), p. 581–605. (этот текст отсканирован и лежит на `mccme.ru/~duzhin/Ok_Versh/`; его можно просмотреть на экране вашей любимой смотрелкой, а распечатать каждую страницу можно командой вида `convert ~duzhin/Ok_Versh/ov01.jpg ps:- | lpr`, зайдя на компьютер mccme.ru).

Задание выдано 22 октября 2001. Решения в рукописном виде класть в ячейку “Дужин” до 05.11.2001 либо присылать в электронном виде до того же срока по адресу `duzhin@mccme.ru`.

Критерии оценок. Задачи 1, 3а, 4, 5а, 5б, 6 оцениваются в 1 балл каждая, задачи 2, 3б, 5в, 7 — в 2 балла каждая. Оценки 5/4/3 ставятся за 12/10/8 баллов соответственно.