第8章　練習問題の解答及びヒント

1. 存在する．たとえば，頂点が $(0, 0)$, $(12, 9)$, $(24, -7)$ の三角形．

2. 直接構成するかあるいは練習 6 の結果を用いるとよい．答え：可能性として多角形 Φ は 3 あるいは 4 あるいは 5 あるいは 6 個の頂点をもつ．

3. 必要十分条件は $k-l=1$ である．これを示すには，与式を $A_1+A_2-B_1+A_3-B_2+\cdots$ と書きかえるとよい．

4. 問題 2 より，このの主張は *Euler* の定理: $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OM}$ と同値であることがわかる．ここで，M, O, H はそれぞれその三角形の重心，外心，垂心である．この Euler の定理を証明するには，3 辺が ABC の 3 辺と平行で，ABC の 2 倍の大きさの三角形 $A_1B_1C_1$ を構成すればよい (図 8.1 参照)．そして三角形 ABC の垂直二等分線はすべて三角形 $A_1B_1C_1$ の中線のどれかと一致することに注意せよ．

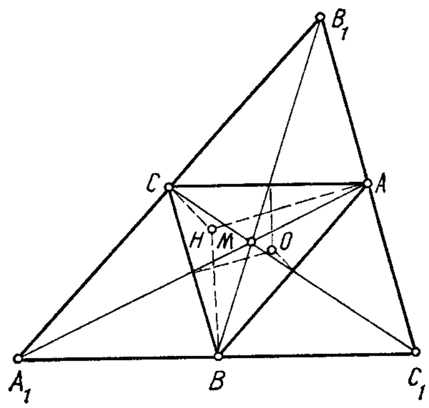

図 8.1: Euler の定理

5. 必要十分条件は $\alpha+\beta+\cdots+\omega=1$ である．これはベクトルの等式：$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\cdots+\omega\overrightarrow{PZ} = \alpha\overrightarrow{QA}+\beta\overrightarrow{QB}+\cdots+\omega\overrightarrow{QZ}+(\alpha+\beta+\cdots+\omega)\overrightarrow{PQ}$ より導かれる．

6. $\{a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n | a_i \geq 0, a_1+a_2+\cdots+a_n=1\}$.

7. 問題のすべての点をその四辺形の 4 頂点によって表せ．

8. これらの点を六角形の頂点によって表せ．

9. 問題のすべての点をその四辺形の 4 頂点によって表せ.

10. 2 本の中線の交点を極とし, 問題 2 の結果を用いよ.

11. 答え：対角線は 1:6 に分けられる. ヒント: その平行四辺形の 1 つの頂点を極, 他の 2 頂点を基底点にとり, 与えられた直線と対角線の交点を異なる 2 つの方法で表せ.

12. (a) $y = b$. (b) $x = a$. (c) $ay = bx$.

13. 3 本の中線の和集合.

14. K を極, A, B を基底点とする. 3 点 D, E, F の座標を点 C の座標 (a, b) を用いて表せ.

15. 練習 14 の解答を参照せよ.

16. (a)(b) とも閉じていない.

17. 点 $K(0, 1)$ を基底点 (E, A) によって展開し (定義 3 参照), $K^2 = -E$ を示せ. よって, この積は複素数の積と一致する (p. 23 参照). 複素数の三角法を用いると, 次の答えとなる:

	E	A	B	C	D
E	E	A	B	C	D
A	A	B	C	D	E
B	B	C	D	E	A
C	C	D	E	A	B
D	D	E	A	B	C

18. (a) 0. (b) $\pm(1 - 2i)$ (c) 1 (与えられた数の 3 乗は -1 である).

19. (a) 点 3 を中心とする半径 5 の円周. (b) 線分 $[-4, 2i]$ の垂直二等分線. (c) 円周 (等式 $|p|^2 + |q|^2 = (|p+q|^2 + |p-q|^2)/2$ を用いよ. p, q は複素数).

20. 不等式の左辺は, 複素平面上の 2 点 0, $5 + 5i$ を結ぶ折れ線の長さに等しい. これを示すには, 複素数 $x_1 + (1 - x_2)i$, $(1 - x_3) + x_2 i$, ..., $x_9 + (1 - x_{10})i$, $(1 - x_1) + x_{10} i$ の和が $5 + 5i$ であることをみよ.

21. 0°, 90°, 180°, 270°, 45°, 330°.

22. (a) 図 8.2 参照.
(b) たとえば, $(r-2)(r-2-|\sin 3\phi|) = 0$, デカルト座標では,

$$(\sqrt{x^2+y^2} - 2)(\sqrt{x^2+y^2} - 2 - \frac{|3x^2y - y^3|}{(x^2+y^2)^{3/2}}) = 0.$$

23. 等式 $z = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ を証明せよ.

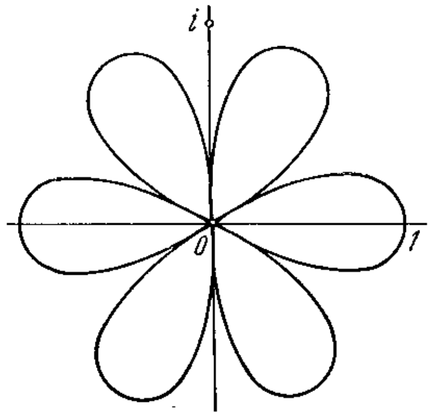

図 8.2: The curve of Exercise 22(a)

24. $2n$. 証明: 問題 9 と同様.

25. z が多角形の外側にあるとする. 多角形が凸であるため, すべての点 $z - c_i$ の偏角は $180°$ の幅におさまる. したがって, すべての点 $1/(z - c_i)$ の偏角も同じ幅におさまるから, これらの和は 0 にはならない.

26. 2 つの平行移動を用いよ.

27. 次のような作図の仕方がある. 与えられたベクトルの端点を通り, 与えられた三角形の辺と平行な直線を描くことにより, その与えられたベクトルに三角形を**内接させる**. そして内接した三角形ごともとの三角形に平行移動させる.

28. 問題の台形を $AB \parallel CD$ の台形 $ABCD$ とする. 点 B をベクトル $\overrightarrow{DC}$ によって平行移動させた点を B' として, 三角形 ACB' を考えよ.

29. XO と YO に関する対称変換を用いよ.

30. 二等分線に関して三角形の頂点に対称な点は, その三角形の対辺 (あるいはその延長線) 上にある.

31. この現象は $180°/n$ の角に起こる. ただし, n は整数である.

32. $90°$ 回転した後, ベクトル $\overrightarrow{MA_i}$ は与えられた多角形の連続する辺となる.

33. $60°$ 回転を用いよ.

34. 点 A を点 B にうつす変換で, 正方形 $ABCD$ の中心の回りの回転を考える. この回転によって点 M がうつる点を K とする. このとき, $AK \perp BM$, $BK \perp CM$, $CK \perp DM$, $DK \perp AM$ を示せ.

35. 円周どうしの交点に関する点対称を用いよ.

36. 先手のプレイヤーはまず，テーブルの中心にコインを置く．その後，点対称を用いる．

37. 公式 2.2 (p. 39) の証明と同様．軸 x と与えられた直線との交点の回りの回転を用いる．

38. 平面上に適当な複素構造を導入せよ．

39. 答え：恒等変換．証明：公式 2.7 (p. 42) を用いる．

40. 3 点 A, B, C を表す複素数が与えられているとき，公式 2.12 から，3 点 M, N, P を表す複素数を求めよ．

41. 容易にわかるように，$R^d_M \circ R^d_N \circ R^d_P \circ R^d_Q = \mathrm{id}$ である．この条件を複素数で書き直せばよい．

42. (a) $R_B \circ R_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$. (b) $S_l \circ R_A$ は軸 AK とベクトル $2\overrightarrow{AK}$ の映進である．ただし，K は A から直線 l に下ろされた垂線の足である．

43. 五角形の連続する 5 辺の中点に関する点対称の合成を考える．このとき，この合成変換は五角形の 1 つの頂点に関する点対称であることを証明せよ．

44. 与えられた 3 つの対称変換の合成である映進の軸を求めよ．点 A を通りこの軸に平行な直線を考えよ．

45. 練習 37 の結果を用いよ．

46. 3 つの円盤は戻ることができない．どんなショットも 3 つの円盤の集合の方向を変えるから．

47. 定義を用いよ．

48. (a) $R_A \circ S_l = S_l \circ R_A$. (b) $R_A \circ R_B = R_B \circ R_C$.

49. (a) 直線 l は線分 AB の垂直二等分線である．(b) 3 直線 l, m, n は 1 点で交わる．

50. すべての点の集合は：$(5-6k+12l, 3+12k-6l)$, $(7-6k+12l, 2+12k-6l)$, $(3-6k+12l, 1+12k-6l)$, $(4-6k+12l, -1+12k-6l)$, $(2-6k+12l, 9+12k-6l)$, $(3-6k+12l, 10+12k-6l)$ である．k, l は任意の整数．

51. (a) 成立する．(b) 成立する．(c) 成立しない．

52. 任意の元 $g \in G$ をとる．性質 2 より，$g^{-1} \in G$. 性質 1 より，$g \circ g^{-1} = \mathrm{id} \in G$.

53. 図 3.1b と 3 つの独立な点の像によって運動は完全に決定できることを利用せよ．

54. これらの群はどれも異なる群である．

55. 問題 21 の結果を用いよ．

56. (a) 存在する. たとえば, 長方形. (b) 存在しない. R_A, R_B をある図形の対称変換とする. このとき, $C = R_A(B)$ となる変換 R_C はまた対称変換である.

57. 円周, 特に 1 点 あるいは同心円の和集合.

58. 平面運動の群における共役化の表は次のとうりである. 横列 g と縦列 f の交差点は, 元 $f \circ g \circ f^{-1}$ とする.

	$T_{\mathbf{b}}$	R_B^β	S_m	$U_m^{\mathbf{b}}$
$T_{\mathbf{a}}$	$T_{\mathbf{a}}$	$T_{R_B^\beta(\mathbf{a})}$	$T_{S_m(\mathbf{a})}$	$T_{S_m(\mathbf{a})}$
R_A^α	$R_{T_{\mathbf{b}}(A)}^\alpha$	$R_{T_{\mathbf{b}}(A)}^\alpha$	$R_{S_M(A)}^{-\alpha}$	$R_{U_m^{\mathbf{b}}(A)}^{-\alpha}$
S_l	$S_{T_{\mathbf{b}}(l)}$	$S_{R_B^\beta(l)}$	$S_{S_m(l)}$	$S_{U_m^{\mathbf{b}}(l)}$
$U_l^{\mathbf{a}}$	$U_{T_{\mathbf{b}}(l)}^{\mathbf{a}}$	$U_{R_B^\beta(l)}^{R^\beta(\mathbf{a})}$	$U_{S_m(l)}^{S_m(\mathbf{a})}$	$U_{U_m^{\mathbf{b}}(l)}^{S_m(\mathbf{a})}$

59. 群 D_3 の積表は, p.67 にある.

60. すべての元と可換な恒等変換. 可換なすべての回転. 群 D_n (n は奇数) にはこの他に可換な元の組はない. 群 D_n (n は偶数) にはこの他に互いに垂直な直線に関する対称変換の組がある.

61. 等式 $(f^{-1})^k \circ f^k = \mathrm{id}$ を確かめよ.

62. f^k の位数は $n/\,\mathrm{GCD}(n, k)$ と等しい.

63. (a)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8

(b) $\varphi(m) = m(1 - 1/p_1)\cdots(1 - 1/p_k)$, ただし, p_1, ..., p_k はすべて m と互いに素な数である.

64. ない. 直線のなかにはこの運動によって自分自身にうつるものもある.

65. n 個の回転 R_A^α の合成が恒等変換であるための必要十分条件は, 回転角の総和 $n\alpha$ が 360° の倍数に等しいことである.

66. A, B によって生成される群は, 位数 5 の巡回群 C_5 である. A 角が $\alpha = \pm 72^\circ$ あるいは $\pm 144^\circ$ の回転, B は同じ中心の回りの角 -2α の回転である.

67. できない. どのような言葉も $EI^kA^lU^m$ と同義語になる. ただし, k, l, m は 0 から 6 の整数である.

67. 適当な対称変換の組, あるいは適当な 1 つの対称変換と 1 つの回転との組をとることができる. たとえば, 軸が隣どうしの 2 つの対称変換 S_1, S_2 は定義関係式 $S_1^2 = S_2^2 = (S_1 \circ S_2)^n = \mathrm{id}$ をみたす.

69. まず, どのような運動 F_i も回転ではないことを証明せよ.

70. 仮定のもとで, 次の 2 つのことがらを証明せよ: (1) 任意の与えられた元 a に対して, $a^m = a^n$ となる整数 m, n が存在する. (2) 次の簡約法則が成り立つ： $xy = xz$ ならば, $y = z$.

71. (1) 群をなさない: $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ は無理数だが, その和は有理数 0 である. (2) 群をなす. (3) 群をなす. (4) 群をなさない: 3/4 の逆数は 2 進数の有理数ではない. (5) たとえば, 集合 $\{\tan n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.

72. $x = ba^{-1}$.

73. この演算が結合法則をみたすことを確かめよ.

74. $G = \{x, 1/(1-x), (x-1)/x, 1-x, 1/x, x/(x-1)\}$. これらの関数の合成は次の表のとうりである.

	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1-x}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
x	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1-x}{x}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1-x}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$
$\frac{1-x}{x}$	$\frac{1-x}{x}$	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{1}{x}$
$1-x$	$1-x$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1-x}{x}$	$\frac{1}{1-x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	x	$\frac{1-x}{x}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{1-x}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	x

75. たとえば, 練習 74 の式の 2 乗の和.

76. 同型である.

77. S_a, S_b, S_c は任意に並べかえられる. 同型写像の総数は, 恒等写像も含めて 6 である.

78. 同型写像の定義を直接確かめよ.

79. 点 E は恒等変換に対応する. 一方, A, B, C, D, K はそれぞれ $60°$, $120°$, $180°$, $240°$, $300°$ の回転に対応する.

80. その円周は恒等変換に対応する. 一方, その三角形と正方形は群 C_3 の残りの 2 つの元に対応する. 2 つの異なる同型写像が存在する.

81. その 2 つの積表を作れ. 横列と縦列を入れ換えることによって, 元の記号を同じものとして同じものにせよ.

82. 同型である. 写像 $k \leftrightarrow 2k$ が同型写像.

83. 同型な群のただ 1 つの組は, D_1 と C_2 である.

84. $\varphi(g \circ g^{-1})$ を考え, $\varphi(g^{-1}) = h^{-1}$ を示せ. そうすれば $\varphi(g^{-n}) = \varphi((g^{-1})^n) = (h^{-1})^n = h^{-n}$ が導かれる.

85. (1) 正三角形の頂点に番号をつけよ. (2) 拡張された実数直線上にこの群を作用させよ. そしてこの作用のもとで集合 $\{0, 1, \infty\}$ の置換を行え.

86. Napier の対数を N とすると, $N(x_1x_2) = N(x_1) + N(x_2) - B$ である.

87. (a) 群の公理を直接確かめよ. (b) 写像 $\varphi(x) = \tan x$ によるこの群の逆像は, ある開区間を含む実数からなる加群となる. それが $\mathbb{R}$ 全体に一致することを証明せよ.

88. (a) $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, (b) この演算は写像 $x \mapsto x - 1$ に沿っての積の引き戻しである.

89. 群 D_3 には 4 つの真の部分群がある:1 つは位数が 3 で残りの 3 つは位数が 2 である.

90. 存在する. -1 も生成元である.

91. $\mathbb{Z}$ の任意の部分群はその最小の正の元によって生成されることを証明せよ.

92. 群の公理を確かめよ. 商群によって (5.2 節) このことはもっと簡単に証明できる.

93. 群をなさない. たとえば, $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$ だから.

94. 群をなす. これを証明するには積表を作成すればよい.

95. 方程式 $x^2 = 3y^2 + 8$ の任意の解はまた方程式 $x^2 \equiv 3y^2 + 8 \pmod 3$ の解である. 後者の方程式は $x^2 \equiv 2 \pmod 3$ と同値であるが, 解がない.

96. 81.

下 2 桁の数字は, 100 を法とするその剰余と同じである. 2003 は 100 と互いに素である. なぜなら, 2 と 5で割り切れないから. $\phi(100) = 100 \cdot (1 - 1/2) \cdot (1 - 1/5) = 40$, $2004 \bmod 40 = 4$ だから, Fermat の小定理より, $2003^{2004} \equiv 2003^4 \equiv 3^4 = 81$ となる.

97. $\mathbb{Z}_m$ から $\mathbb{Z}_n$ への上への準同型写像が存在するための必要十分条件は, m が n で割り切れることである. この場合の上への準同型写像の例として, 対応 $\bar{a} \mapsto \bar{a}$ がある. ただし, 左側のバー は m を法とする剰余類, 右側のバーは n を法とする剰余類である.

98. 置換後の複比の値は, 次の式のうちのどれかになる: x, $1-x$, $1/x$, $1/(1-x)$, $1-1/x$, $x/(x-1)$. この結果と練習 74 の結果を比較せよ.

99. 平面運動の分類 (2.7 節の定理 4) を用いよ.

100. $\angle OAC = \angle BEF$ を証明せよ．この角を α とし，BE, AC をそれぞれ E, A の回りに α 回転すればよい．

101. 2 つの行列の積の行列式は，おのおのの行列の行列式の積に等しいことからどちらの主張も導かれる．

102. (a) 存在する．(b) 存在しない．

103. 核は奇関数全体の集合，像は偶関数全体の集合．

104. 準同型写像 $\varphi(z) = z^n$ を考えよ．

105. 準同型写像 $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$ を考えよ．

106. これは二面体群 D_n である．

107. $aba = bab$ なら，2 つの元 $x = ab$, $y = aba$ は等式 $x^2 = y^3$ をみたす．
$x^2 = y^3$ なら，2 つの元 $a = x^{-1}y$, $b = y^{-1}x^2$ は等式 $aba = bab$ をみたす．

108. 5 つの軌道に分かれる．

109. $\{-1, 2, 1/2\}$.

110. $\{1/2 + i\sqrt{3}/2, 1/2 - i\sqrt{3}/2\}$.

111. どちらの場合も作用は推移的である．どのような辺も 2 つの運動によって動かない，またどのような頂点も 3 つの運動によって動かない．

112. (a) D, S, T. (b) D.

113. (a) 2. (b) 1. (c) 7.

114. $\dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n^{\mathrm{GCD}(k,m)}$. ここで，GCD は最大公約数．

115. 60.

116. 16.

117. 30.

118. (a) 23. (b) 218.

119. $(\binom{15}{6} + 15\binom{7}{3} + 2\binom{5}{2})/30 = 185.$

120. 黒いビーズは, 白いビーズ全体を4つの部分に分ける. m をその一番大きい部分における白ビーズの個数とし, n, k を $n \geq k$ となる m と隣りの部分の白いビーズの個数とする (あいまいな場合, 任意のとりかたを使うことができる). このとき, (m, n, k) はネックレスの完全不変量となる. (この不変量はよくない. なぜなら, 白いビーズが, 2+2+2+0 のネックレスに対してはあいまいで, その値の集合が複雑に述べられるからである).

121. (a) たとえば, よく知られている三角形の合同条件 (2辺とそのなす角, 1辺とその両端の角, 3辺) は, それぞれ完全不変量である.
(b) たとえば, すべての辺 AB, BC, CD, DA の長さと, 角 $\angle ABC$ からなる順序づけられた集合は不変量である. この不変量は凸の四辺形全体の上で完全である.

122. 有限回転群 (p.59) を参照せよ.

123. 円周上の無限個の点集合は離散的ではないことに注意せよ.

124. 回転の中心を角の頂点とし, C_n に対しては $360°/n$ の角, D_n に対しては $180°/n$ の角.

125. 条件 $|kn - lm| = 1$ はその平行四辺形の面積が1であることを意味する. したがって, よく知られている Pick の公式によって, P が A を1つの頂点とするそのような平行四辺形であるなら, P に族する A の軌道の点は, P の頂点のみである.

126. 共役化の表 (p.171) を用いよ.

127. O を平面上の任意の点, S を与えられた群の作用による A の軌道とする. また, A を S の任意の点で, 線分 OA が S の他の点を含まない点とし, B を直線 OA から最小距離となる S の点とする. 組 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は, 生成元系であることを証明せよ.

128. 生成元が a, b, c, 関係式が $a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^3 = (abc)^2 = e$ の位数18の群.

129. $p4m$, $p4g$, $p2$.

130.

C_1	$p1$
D_1	pm, pg, cm
C_2	$p2$
D_2	pmm, pmg, pgg, cmm
C_3	$p3$
D_3	$p31m$, $p3m1$
C_4	$p4$
D_4	$p4m$, $p4g$
C_6	$p6$
D_6	$p6m$

131. 容易に想像できるように, 数字は回転の最大位数, 記号 m (‘*mirror*’) は対称変換 (鏡映ともいう), g は映進を表す. p と c はほんの少し意味あいが違う: 結晶学者の意味するところは, p は**基本の** (*primitive*) 組織, c は**中心の** (*centred*) 組織である. 非専門家であれば, 類似した記号を, 長方形や六角形に使わないのはどうしてかと疑問のままにしておくようなことであるが, 数学的にはただ単に, 文字 c を用いた群は, ひし形の組織をもつことがあることを意味するにすぎないように思われる (p.117 参照). 最後に, m の位数と, 記号 $p3m1$ や $p31m$ のなかの 1 については, まったく謎である.

132. $\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})$ から $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ への全射準同型写像を定義し, 準同型第一定理 (p.100) を用いよ.

133. 与えられた台形を, 等しい長さの辺をもつ台形にうつす変換が存在する.

134. どちらの群も位数 6 で, 二面体群 D_3 に同型である.

135. $p \neq 0$ ならば, 点 m/p.

136. その合成と逆変換に対する明確な式を完全に書け.

137. 直接計算して, $x_i' = (mx_i + n)/(px_i + q)$ のとき,

$$\frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} : \frac{x_4' - x_1'}{x_4' - x_2'} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},$$

となることを確かめよ.

138. 練習 74 と同様に, この群の元の完全なリストは, 2 つの与えられた関数の合成を, 元が繰り返されるまでほどこすことで直接得られる.

同型を証明するため, D_n の定義関係式をみたすような 2 つの元をみつけよ (p.68 の 3.1 式参照).

139. 変換 $x \mapsto (mx+n)/(px+q)$ が有限位数をもつための必要十分条件は,

$$\frac{m^2+q^2+2np}{2(mq-np)} = \cos\alpha$$

が成り立つことである. ただし, α は, 有理数の角度である.

140. 正規部分群ではない. 6.6 式を用いて, ptp^{-1} がアフィン変換とならないような移動 t と射影変換 p をみつけよ.

141. 射影変換によって, 四角形 $ACFD$ が正方形に変わるかもしれない. この場合, この正方形のデカルト座標系を導入することができる. そうすれば, 直接の計算で解ける. **注意.** もちろん, これは美しい解答ではない. 腕力で問題を解くのに必要とされる計算量を, どのようにして減らすかを示しただけだからである. 事実, 変換する前の設定では, 2 つの方程式によって関係づけられる 12 個の実数によって, 6 個の基定点が表されていた. その射影変換ののち, その基底点は, 2 つだけの独立なパラメータによって配置づけられる.

142. $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ から $\mathrm{PGL}(1,\mathbb{R})$ への全射準同型写像を定義し, 準同型第一定理を用いよ (p. 100).

143. 与えられた三角形に外接し, 与えられた 3 つの直線に平行な辺をもつ三角形を作図するほうが簡単である.

144. 外側の円周上の点を中心とし, 係数が $3/4$ の相似拡大変換 を用いよ.

145. 重心を中心とし, 係数が -2 の相似拡大変換を用いよ.

146. 垂心を中心とし, 係数が $1/2$ の相似拡大変換を考えよ. 与えられた三角形の外接円は, この変換によって求める円にうつされることを証明せよ.

147. 承知のように係数が 1 ではない任意の相似変換には, ただ 1 つの不動点がある. この問題はこの不動点が小さい縮尺の地図に存在することを証明すればよい. それが地図の外側にあると仮定して, 小さい縮尺の地図と交わるようにその点を通る直線を描け. そして, その直線と地図の境界との交わる点を考えよ.

148. E は, A を B, C を D にうつす相似拡大変換の中心である.

149. 線分 MC, PN をそれぞれ螺旋相似変換 $F_A(\sqrt{2}, 45^\circ)$, $F_C(\sqrt{2}, 45^\circ)$ の作用での像を求めよ.

150. O を中心とする反転以外に, この群は, 1 点を中心とする正の相似拡大変換全体を元として含み, 積を演算とする 0 でない実数の群 $\mathbb{R}^\star$ に同型である.

151, 152. 反転の中心を通らない直線はその反転の中心を通る円周にうつる. 逆も成り立つ.

153. このことは, 7 章の定理 18 で証明した (p.154 参照).

154. ある軌道の長さは, 2, 3, 6 あるいは 12 でありうる．図 6.16 と下記の議論を参照せよ.

155, 156. 合成と逆変換に対する公式を導け.

157. $(-3, 0)$.

159. (a) 存在する．たとえば $y' = 0$. (b) 存在しない.

160. $y = 2x + C$, $y = \sin x + C$, $y = -1/x$.

161. おおまかにいって, 方程式 7.3 に対しては, 直線の族, 方程式 7.5 に対しては, 双曲線の族.

162. 原点を中心とする円周．対応する微分方程式は $y' = -x/y$ である．この方程式は直線 $y = 0$ 以外のいたるところで定義される．平面全体で定義されるこのような微分方程式は存在しない.

163. $y = 1/(C - x)$.

164. $v = x + y$, $u = x$.

165. $y = -x^4/3 + x^2 + Cx$.

166. $y = e^{x^2/4}\left(\int e^{x^2/2}dx + C\right)^{1/2}$.

167. $y = \tan ax + C$.

168. $y = \dfrac{1}{x^2\tan(1/x + C)} - \dfrac{1}{x}$.

169. $-(n+3)/(n+4) = -4$ となる n を求めよ.

170. $\dfrac{1}{q^k(n) + 2} = \dfrac{1}{n+2} - k$ から, $\dfrac{1}{q(n) + 2} = \dfrac{1}{n+2} - 1$ に注意せよ,

171. 問題 66 を参照せよ.

172. (a) $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{(yy' + x)\sqrt{x^2 + y^2}}{xy' - y}$.
(b) $\sqrt{x^2 + y^2}(C - 2\arctan(y/x))^2 = 1$.

173. $g_t \circ g_s = g_{t+s} = g_{s+t} = g_s \circ g_t$.

174. 1 パラメータ群である．中心が 0 であると仮定すると, パラメータ表示は, $g_t(x, y) = (e^t x, e^t y)$.

175. $x_t = x\cos t - y\sin t$, $y_t = x\sin t + y\cos t$.

176. これらの公式は螺旋相似変換からなる群を定義する．その軌道は対数のうず巻き線である.

177. 軌道は, 直線 $x + y = \mathrm{const}$. 群の性質は, Viète の定理から導かれる.

178. $y = f(y/x)$. ただし, f は任意の関数.

179. $y = \dfrac{xf(\xi) + y}{x - yf(\xi)}$. ただし, $\xi = \arctan \dfrac{y}{x} - \dfrac{b}{a} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

180. 関数 $x^2 + y^2$ はこの群の作用の完全な不変量である.

181. 練習 179 の答えより, ξ.

182. $y = Cx^2 - x$.

183. ならない.

184. 2 直線 $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ の交点を中心とする相似変換からなる群を用いよ.

185. 群 $x_1 = e^{2t}x$, $y_1 = e^t y$ を用いよ．答え: $y = \sqrt{Cx^2 - 2x}$.

186. $y = \dfrac{x + C - 1}{x + C} e^x$.

索 引