目 次

まえがき

数学史上一番有名な本は, おそらく『Euclid 原論』であろう. ヨーロッパにおいて『Euclid 原論』はおよそ 2000 年もの間, すべての学校の標準的な幾何学の教科書として使われた.

本の初めのほうに, 次の命題 I.5 がある. ここではその前半のみ引用する.

定理 1 (Euclid) 二等辺三角形の両底角は等しい.

証明 現在, 高校生でおなじみの証明は大変短いものだ.

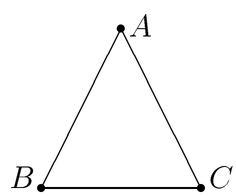


図 1: 二等辺三角形

模範的な証明. ABC を与えられた二等辺三角形とする (図 1). $AB = AC$ から, A, B, C をそれぞれ A, C, B にうつす平面運動が存在する (対称変換). この運動によって, $\angle ABC$ は $\angle ACB$ にうつる. よって, この 2 つの底角は等しい.

この定理についておもしろいことは何もないように思われる. がしかし, 少し待ってほしい. Euclid 独自の証明を見てみよう (図 2).

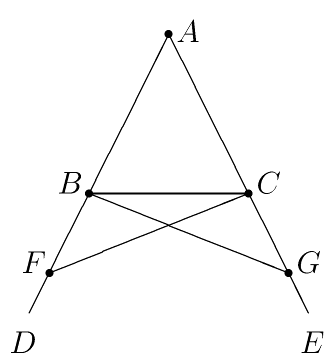


図 2: Euclid の証明

Euclid の証明．辺 AB, AC のそれぞれの延長線 AD, AE 上に $AF = AG$ となる 2 点 F, G をとる．このとき，$\triangle ABG = \triangle ACF$ より，$\angle ABG = \angle ACF$．また，$\triangle CBG = \triangle BCF$ より，$\angle CBG = \angle BCF$ となる．ゆえに，$\angle ABC = \angle ABG - \angle CBG = \angle ACF - \angle BCF = \angle ACB$.

中世紀のイギリスにおいて，命題 I.5 は，“*pons asinorum*”(ろばの橋) という名前で知られていた．事実，図 2 の 4 点 F, B, C, G とそれらを結ぶ線分で形成される図形は橋に似ている．Euclid の証明を習得できなかったできの悪い生徒は，この橋を越えられなかったろばに例えられた．

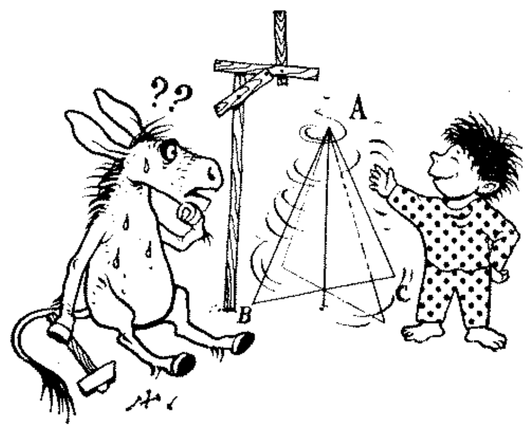


図 3: ろばの橋

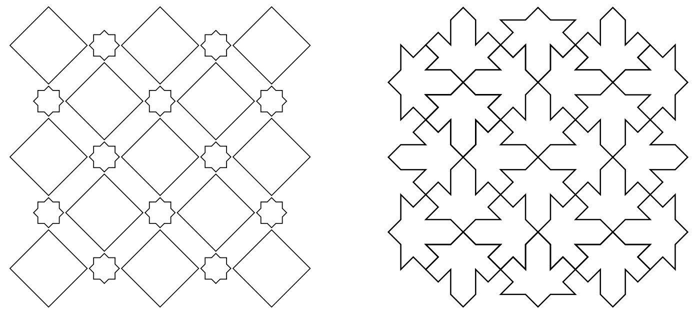
現代的な視点からみると Euclid の論理はめんどうで奇妙にみえる．実際，彼はこのような補助の三角形 ABG, ACF を必要とし，三角形 ABC だけを使って証明しなかった．その理由は，Euclid が幾何学に**運動**を取り入れることができなかったからである．「数学的な対象は運動と無関係である」とした彼の哲学によって運動を用いることは禁じられていたのである．

このように，運動によって幾何学的な事実を説明することができ，それらの証明も簡単にできるのである．しかしながら，運動を単に単独に研究することは重要ではない．おもしろいのは運動どうしの**ふるまい**，すなわち，運動どうし相互に関係づけられた**運動の集合**(もっと一般に変換の集合) の構造にある．このとき，一番重要な概念は**変換群**である．

数学的な理論としての群論は，19 世紀に世に出たばかりである．しかしながら，変換群に直接関係のある具体的な例は，古代文明時代すでに，東洋においても西洋においても創られていた．これは，20 世紀の名高い数学者 Hermann Weyl が，模様美術を「潜在的な形で表現された高等数学の最も古い顔」と呼んだ所以である．

次の図は，中世紀に描かれたスペインにおけるアルハンブラ宮殿の壁模様である．このような模様を敷き詰め模様という．

どちらの模様も，多くの平面変換で変わらないという意味で，非常に対称的である．事実図 4 a の対称的な性質は，図 4 b のそれとほとんど互角である．すなわち，どちらの模



a　　　*b*

図 4: アルハンブラ宮殿の壁模様

様も無限個の平行移動や 90°, 180° 回転, 対称変換, そして映進によって変化しない. しかし, これらは同じものではない. この 2 つの模様の違いは, これらの運動がおのおのの模様に対してどのように関係づけられているかにある. この言葉の正確な意味は, 図 4a と図 4b の対称群が同型でないという群論の言葉でしか説明されないのである (p.120 参照).

敷き詰め模様の対称群の可能な限りの**すべての**型を決定し, 分類するという問題は, 19 世紀後半, ロシアの科学者 E. S. Fedorov とドイツの科学者 G. Schönfliess によって, まったく別々に解かれた. そして, ちょうど 17 種類の平面結晶群があることがわかったのである (p.118 の表参照).

もちろん, 群論は単なる平面模様の分類だけにとどまらず, その他のいろいろな問題解決に大いに役立つ. 事実, 群論は, 代数学, 幾何学, 位相数学, 微分積分学, 力学などで広く用いられていて, 数学全般における重要な概念の 1 つである.

本書は群論の入門書である. まず初等的な Euclid 幾何学のいくつかの例を挙げる. そこでは平面運動が重要な役割を果たし, それによって群論のアイデアが自然にわいてくる. それから, 変換群, そしてもっと一般の抽象群を導入し, 群論の代数的な側面や整数論における応用について議論する. その後, 群の作用, 軌道, 不変量, いくつかの分類問題にうつり, 最後に, 連続な群を用いて微分方程式の解法をおこなう. 本書の主なねらいは, 群の概念が数学の異なる分野でどのように従事しているかを示すことであり, つまりは数学が統一された科学であることを論証することである.

本書は, 初等的な代数学, 幾何学, 微分積分学などのような高等数学教育を終えた読者を対象に書かれている.

詳細な解答がある問題や, 巻末にヒントや答えがある練習問題が豊富に掲載されているので, 読者には積極的に多くの問題を解いて本書を理解してもらいたい.