第1章　点の代数

この章では, 平面上の点集合に代数的な演算—和と積—を導入する. この演算によって, 代数学を幾何学に, そして幾何学を代数学に適応できる.

1.1　格子模様の平面

正方格子, すなわち, 平行な等間隔の直線の集合で互いに垂直な 2 つの集合を考えよう. 図 1.1 に示される二等辺三角形や正方形のように, 格子点上にそのすべての頂点がある多角形がどのようなものかを調べてみよう.

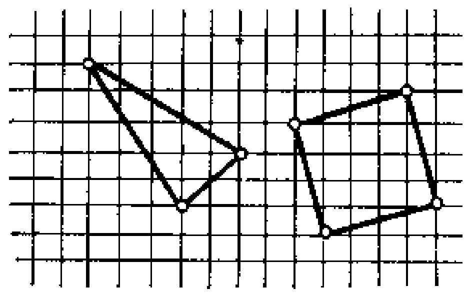

図 1.1: 格子平面上の多角形

問題 1 正方形以外の正多角形は, そのすべての頂点が格子点にのることが不可能であることを証明せよ.

解答. そのすべての頂点が格子点上にある正多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ が仮にあったとする. 任意の連続する頂点 $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ に対して, $A_{k-1}A_kA_{k+1}B_k$ が平行四辺形となるような格子点 B_k を求め, そのようにして図 1.2 のように構成された多角形 $B_1B_2\cdots B_n$ は, その中心 O の回りの $360/n$ 度回転, または OA_k に関する折り返しで自分自身に重なる. したがって, どのような点 B_k も直線 OA_k 上にあり, $B_1B_2\cdots B_k$ は正多角形となる. $n>6$ ならば, 正多角形 $B_1B_2\cdots B_k$ は, 正多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ より小さいはずである. なぜならば, $\alpha=\frac{n-2}{n}180^\circ>\beta=\frac{2}{n}360^\circ$ より, B_k が線分 OA_k 上の点となるからである. 重要なことは, B_1, $B_2,\cdots,B_n$ もまた, すべて格子点であるということである.

同じ手続きを正多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ の代わりに, 正多角形 $B_1B_2\cdots B_n$ に対して実行すると, 以下の条件をみたす正多角形 $C_1C_2\cdots C_n$ が得られる：

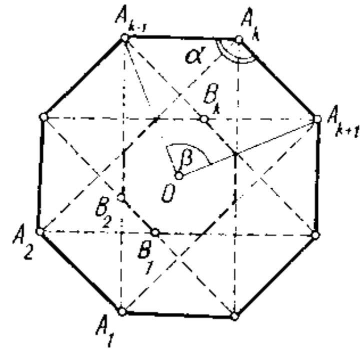

図 1.2: 正多角形

- 頂点は格子点ばかりからなり,
- 頂点 C_k は線分 OA_k 上にあり, しかも点 B_k よりも点 O に近い.

線分 OA_k 上には有限個の格子点しかないから, この手続きを何回か繰り返すうちに矛盾にたどりつく.

同じような議論は正五角形についてもできる. 違いはと言えば, 直線 OA_k 上の点 B_k が線分 OA_k の外に出てしまうことである.

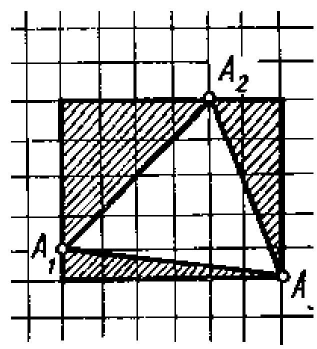

図 1.3: このような正多角形は存在するか？

$n = 3$, または $n = 6$ だと, 先の議論はだめになる (なぜ？). そこで, 今度は違う方法で, $n = 3$, または $n = 6$ について証明しよう. まず, 正六角形の 3 頂点を用いて, 正三角形がつくれることに注意すれば, 証明は $n = 3$ についてだけやれば十分であることがわかる. 正三角形のすべての頂点が格子点上にあると仮定しよう (図 1.3). ピタゴラスの定理より, この正三角形のどの辺の平方も整数となることがわかる (格子の一辺の長さを 1 とする). したがって, 面積 $S = a^2\sqrt{3}/4$ は無理数になる. ところが, 図 1.3 のように, 正三角形 $A_1A_2A_3$ は整数の長さの辺からなる長方形から, 3 つの直角三角形を取り除いても得られる. したがって, 面積は有理数にならなければならない—実際, その面積は m を適当な整数として m あるいは $m + \frac{1}{2}$ と表される. よって, これは矛盾である.

練習 1.　格子模様の平面上に, そのすべての辺が整数の長さをもち, 格子直線に平行でない正三角形は存在するか. ただし, 格子の一辺の長さを 1 とする.

1.2　点の和

問題 1 の解答は, 正方格子のすばらしい性質に依存していた. すなわち, 平行四辺形の 3 頂点が格子点上にあるならば, 残りの 1 頂点も格子点上にあるという性質である. 数学的な言い方をすれば, この現象は**格子点の全体からなる集合は, いま我々が注目している演算に関して閉じている**ということになる. ではこれから, その演算の正確な定義をしよう.

平面上に 3 点 M, N, P が与えられたとする. 三角形 MNP にもう 1 点付け加えて平行四辺形にするには 3 通りの方法がある. 1 つは, P を MN の中点 K とむすび, 直線 PK 上に K に関して P と対称となる点 L をとる方法である (図 1.4).

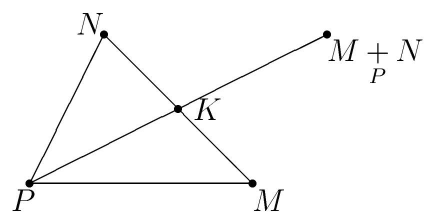

図 1.4: 点の和

定義 1　このように構成された点 L を P **を極とした点** M **と点** N **の和**といい, $L = M \underset{P}{+} N$ と表す. この式を「P 上 M 足す N」と読むことにする. 極を固定して考えているときは, 単に $L = M + N$ と書く.

この定義は, 平面上の任意の 3 点に対して適用できる. もし, M, N, P が一直線上にあるならば, その平行四辺形はつぶれて線分になる. 3 点が一致していたらさらにつぶれて点になる.

ここで, 問題 1 で用いられた正方格子の性質を表す事柄を述べよう:

『任意の格子点を極とする任意の 2 つの格子点の和は格子点である.』

さて, 今度は格子模様は忘れて, 点の和の性質を調べよう.

練習 2.　2 つの三角形 ABC, DEF と点 P が与えられているとする. Φ をすべての点 $M \underset{P}{+} N$ の集合とするとき, 次のことを調べよ. ただし, M, N はそれぞれ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ の内点とする：

a) Φ は多角形であることを証明せよ. また, Φ の辺の本数を求めよ.

b) Φ の周の長さは, 2 つの三角形 ABC, DEF の周の長さの和と等しいことを証明せよ.

点の和は, ベクトルの和と密接な関係がある. つまり, $L = M \underset{P}{+} N$ は $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ と同値で, 次のようなベクトルの和の演算と類似した性質をもつ：

1° 結合法則

$$(A \underset{P}{+} B) \underset{P}{+} C = A \underset{P}{+} (B \underset{P}{+} C)$$

が任意の極 P に関する任意の 3 点 A, B, C に対して成り立つ.

2° 任意の極 P に関する任意の点 A に対して, 次の等式が成り立つ：

$$P \underset{P}{+} A = A.$$

すなわち, P は演算 $\underset{P}{+}$ の単位元である.

3° 与えられた極 P に関して, 任意の点 A は**逆**の点をもつ. すなわち, 次の式をみたす点 A' が存在する：

$$A \underset{P}{+} A' = P.$$

実際, P に関して, A と対称な点 A' をとればよい.

4° 交換法則

$$A \underset{P}{+} B = B \underset{P}{+} A$$

が任意の 2 点 A, B に対して成り立つ.

これらの 4 項目は気ままに並べたのではない. 基本的な法則ほど先に来るように順序をつけてある. 第 3 章「変換群」まで読み進むと, そのことがよくわかるだろう.

法則 2° – –4° は当たり前で, 証明するまでもないだろう. 法則 1 は, 次のようにして確かめられる. まず, 点 $M = A \underset{P}{+} B$ と点 $N = B \underset{P}{+} C$ を構成する (図 1.5 参照). 線分 AM と線分 CN はともに線分 PB に平行で, 長さが等しい. したがって, MC と AN の中点は一致する. 和の定義より, このことは $M \underset{P}{+} C = A \underset{P}{+} N$ を示している.

法則 3° を用いると, 与えられた極に関する 2 点の**差**を $B \underset{P}{-} A = B \underset{P}{+} A'$ と定義することができる. ここで, $A' = \underset{P}{-} A$ は A の逆で点である. 点 $B \underset{P}{-} A$ は方程式 $A \underset{P}{+} X = B$ のただひとつの解である.

極を固定してしまえば, 和と差の演算はふつうの数と同じように計算できる. たとえば $A - (B - C + D) = A - B + C - D$ という具合に計算できる.

問題 2 三角形 ABC の中線の交点を M とする. このとき, $A \underset{M}{+} B \underset{M}{+} C$ を求めよ.

解答. 任意の中線は点 M で $2 : 1$ の比に分けられる. したがって, 図 1.6 において, $CM = 2MK$ である. $D = A \underset{M}{+} B$ は, 中線 CK の延長線上の点で, $DK = KM = \frac{1}{2}MC$ をみたすものである. ゆえに, $DM = MC$, $D \underset{M}{+} C = M$.

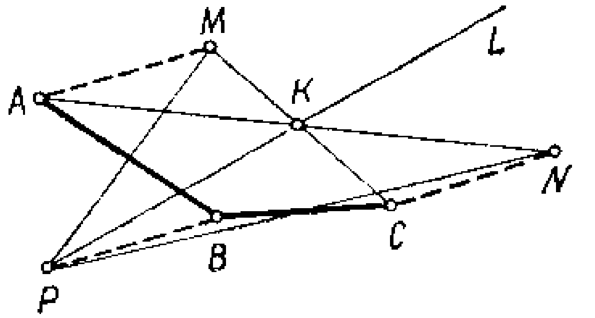

図 1.5: 点の和の結合性

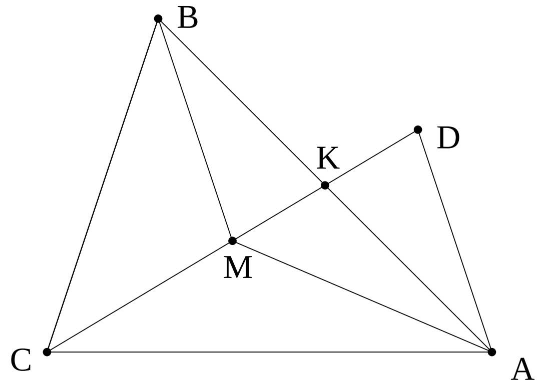

図 1.6: 三角形の頂点の和

面白いことに, 中線の交点は $A \underset{M}{+} B \underset{M}{+} C = M$ をみたすただひとつの点になっている. これを証明するには極を取り替えるながら点の足し算を進めるやり方を学ぶ必要がある. 次の 2 つの関係式を証明しよう：

$$A \underset{Q}{+} B = A \underset{P}{+} B \underset{P}{-} Q, \tag{1.1}$$

$$A \underset{Q}{-} B = A \underset{P}{-} B \underset{P}{+} Q. \tag{1.2}$$

最初の等式は, $(A \underset{Q}{+} B) \underset{P}{+} Q = A \underset{P}{+} B$ と書き直せる. これは図 1.7 から明らか. 二番目の等式については, $A \underset{P}{-} B \underset{P}{+} Q$ が方程式 $B \underset{Q}{+} X = A$ の解であることを確かめよう. 実際, 一番目の等式を用いると, 次の式を得る:

$$B \underset{Q}{+} (A \underset{P}{-} B \underset{P}{+} Q) = B \underset{P}{+} (A \underset{P}{-} B \underset{P}{+} Q) \underset{P}{-} Q = A.$$

どちらの関係式 1.1 においても, P は左辺に現れない. よって, 右辺は P のえらび方によらない.

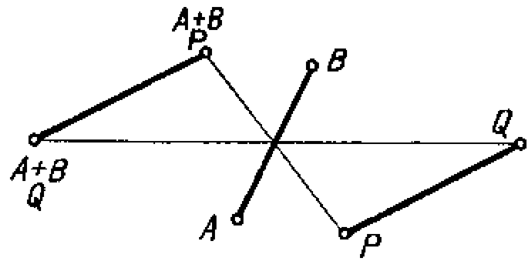

図 1.7: 基点の変換

練習 3.　式

$$A_1 \underset{P}{+} \cdots \underset{P}{+} A_2 \underset{P}{+} \cdots \underset{P}{+} A_k \underset{P}{-} B_1 \underset{P}{-} B_2 \underset{P}{-} \cdots \underset{P}{-} B_l$$

の計算結果が極 P のえらび方によらないための条件を調べよ.

証明を続けよう. 点 N が中線の交点 M と同じ性質, すなわち, 等式 $A \underset{N}{+} B \underset{N}{+} C = N$ をみたすとする. 等式をこわさずに極を引き算することができるから, $A \underset{N}{+} B \underset{N}{+} C \underset{N}{-} N \underset{N}{-} N = N$ が成り立つ. 練習 3 が解けた人は, 左辺が極 N のえらび方に依らないことがわかるだろう. とくに, 極 N の代わりに, M を入れてみれば, $M \underset{M}{-} N \underset{M}{-} N = N$ すなわち $N \underset{M}{+} N \underset{M}{+} N = N$ を得る. ゆえに, $N = M$. これは, M が問題 2 で示された性質をもつただ 1 つの点であることを意味する.

練習 4.　中心 O の円に三角形 ABC が外接している. H を三角形 ABC の各頂点から対辺へ向かう 3 垂線の交点とする. このとき, $A \underset{O}{+} B \underset{O}{+} C = H$ が成り立つことを示せ.

1.3　点の実数倍

与えられた極 P に関して, 点 A に実数 α をかけて, 点 $B = \alpha_P A$ を得ることができる.

定義 2 極 P に関する点 A の実数 α 倍は, 直線 PA 上の点で P からの距離が $|\alpha||PA|$ であるような点 B である. ただし, $\alpha > 0$ ならば A と同じ側に, $\alpha < 0$ ならばその反対側にとるとする. とくに, どのような点もゼロ倍されると極 P となり, 極 P 自身は, 何倍されても極 P のままである.

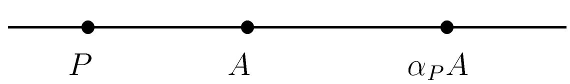

図 1.8: 点の実数倍

次のようにも言うことができる. この演算は, ベクトル $\overrightarrow{PA}$ の起点 P をピンでとめて, 長さを伸ばしたり縮めたりすることを意味している. すなわち, $\overrightarrow{PB} = \alpha\overrightarrow{PA}$ である. 容易にわかるように, 点に数をかける演算には, 次の性質がある：

5° $1_P A = A$.
6° $\alpha_P(\beta_P A) = (\alpha\beta)_P A$.
7° $(\alpha+\beta)_P A = \alpha_P A \underset{P}{+} \beta_P A$.
8° $\alpha_P(A \underset{P}{+} B) = \alpha_P A \underset{P}{+} \alpha_P B$.

点の**自然数** n 倍は, 点を n 回足し算することである: $n_P A = A \underset{P}{+} A \underset{P}{+} \ldots \underset{P}{+} A$ (A が n 回繰り返し足される) と同じである. この事実を用いると, 点 $\frac{1}{2}{}_P A$ が方程式 $X \underset{P}{+} X = A$ の (ただひとつの) 解であることがわかる.

極 P に関する線形結合, すなわち, いくつかの点に係数をつけて足し合わせたもの

$$\alpha_P A \underset{P}{+} \beta_P B + \ldots \underset{P}{+} \omega_P Z = S. \tag{1.3}$$

を考える. 一般に, 点 S は極 P のえらび方に依存する. $\alpha, \beta, \cdots, \omega$ が整数であるとき, 練習 3で条件によっては結果が極 P のえらび方に依らないことを調べた. 同じことが係数をもっと一般に実数にしたときにも成り立つ. たとえば, 点 $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ は極 P のえらび方に依らず, 線分 AB の中点となる.

練習 5. (練習 3 の一般化) 線形結合 S (1.3) が極 P のえらび方に依らないための必要十分条件を, 係数 $\alpha, \beta, \cdots, \omega$ を用いて表せ.

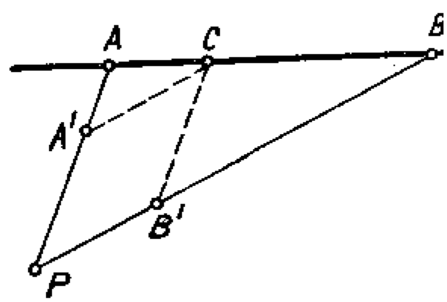

図 1.9: 端点によって表される線分上の点

点の和と点の実数倍を使えば, 線分 AB の上の端点も含めてすべての点を表すことができる. 実際, C を線分 AB を $k:l$ に内分する点とし (定義から, $l \cdot \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{CB}$ と書ける), 直線 AB の外に勝手な点 P をえらび, これを極としよう. C を通って PB および PA に平行な 2 直線を引く. そして, それぞれが PA, PB と交わる点を A', B' とする (図 1.9). このとき, 次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned} \frac{PA'}{PA} &= \frac{BC}{BA} = \frac{l}{k+l} \\ \frac{PB'}{PB} &= \frac{AC}{AB} = \frac{k}{k+l} \end{aligned}$$

$\frac{l}{k+l} = \alpha$, $\frac{k}{k+l} = \beta$ とおくと, $C = A' + B' = \alpha A + \beta B$ となるから, $\alpha + \beta = 1$ であることがわかる.

逆も正しい. α と β を $\alpha + \beta = 1$ をみたす任意の負でない数とすると, $C = \alpha A + \beta B$ は線分 AB 上の点となる. 更に, $\alpha + \beta = 1$ で, α と β のどちらかが負であるとき, C は線分 AB の外側ではあるが, 直線 AB 上の点となる. 図 1.9 を適当に直せば, $\alpha = \frac{l}{k+l}$, $\beta = \frac{k}{k+l}$ が依然として成り立つことが確かめられる. ただし, 比 $k : l$ は負になってしまうが.

以上より, 直線 AB は α が任意の実数であるとき, $\alpha A + (1 - \alpha) B$ で表されるすべての点集合となり, 線分 AB は, $0 \leq \alpha \leq 1$ で定義される部分集合となることがわる. ここに述べたことは基点 (極) のえらび方に依らないことに注意しよう.

練習 6. 凸 n 多角形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ のすべての内点集合に対する同様の記述を試みよ.

練習 6 を済ませたら, 再度, 練習 2 をこの新しいテクニックで解いてみよう.

練習 7. 四辺形の対辺の中点どうしをむすぶ 2 つの線分と 2 つの対角線の中点どうしをむすぶ線分は 1 点で交わり, どの線分もこの交点で等分されることを証明せよ (図 1.10 参照).

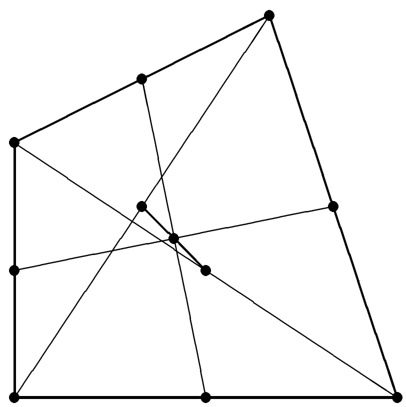

図 1.10: 練習 7 の四辺形

1.4　重心

問題 2 で三角形 ABC の中線の交点 M は方程式 $A \underset{M}{+} B \underset{M}{+} C = M$ の (ただひとつの) 解として, 姿をみせない形で定義された. 我々はもう M を A, B, C を用いてはっきりと表すことができるだろう. やってみよう. 方程式の両辺に $\frac{1}{3}$ をかけると, $\frac{1}{3}{}_M(A \underset{M}{+} B \underset{M}{+} C) = M$ となる. 練習 5 によると, 左辺は極のえらび方に依らないから,

$$M = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

と書くことができる.

同様にして, 四辺形の対辺の中点どうしをむすぶ 2 線分の交点 (練習 7 参照) は

$$M = \frac{1}{4}(A + B + C + D).$$

と書ける.

一般に, いくつかの点の (任意の極に関しての) 相加平均 $M = \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$ を, それらの点からなる系の**重心** あるいは**質量中心**という. このように, 三角形の重心 (より正確には三角形の頂点の重心) は, 中線の交点となる. 重心のからむ幾何学的な問題が点の演算で解かれる例をいくつかみよう.

問題 3 *3* 点 A, B, C を一直線上の点とし, E, F を平面上の任意の *2* 点とする. このとき, 三角形 AEF, BEF, CEF のそれぞれの重心は, 一直線上にあることを証明せよ.

解答. 定義より, 重心は頂点の相加平均である：

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(A + E + F) &= K, \\ \frac{1}{3}(B + E + F) &= L, \\ \frac{1}{3}(C + E + F) &= M. \end{aligned}$$

仮定より, C は直線 AB 上の点であるから, $C = \alpha A + (1 - \alpha)B$ となる. したがって, $\alpha K + (1 - \alpha)L = \frac{\alpha}{3}(A + E + F) = \frac{1-\alpha}{3}(B + E + F) = \frac{1}{3}(C + E + F) = M$ が成り立つ. これは M が直線 KL 上の点であることを示している.

練習 8. A, B, C, D, E, F が六角形の各辺の中点を順番にとったものとする. このとき, 三角形 ACE と三角形 BDF の重心は一致することを証明せよ.

練習 9. 四辺形 $ABCD$ において, 辺 AB の中点を E, 辺 CD の中点を K とする. このとき, 4 線分 AK, CE, BK, ED の中点は, 平行四辺形をなすことを証明せよ.

問題 4 四辺形において, 重心と対角線の交点が一致するための必要十分条件は, *2* 組の対辺 *(*練習 *7*参照*)* がともに平行となることを証明せよ.

解答. 対角線の交点 O を極としよう (図 1.11). このとき, 適当な数 α, β によって, $C = \alpha A$, $D = \beta B$ となり, 中点 K, L は $K = \frac{1}{2}(A + B)$, $L = \frac{1}{2}(\alpha A + \beta B)$ となる.

$AB \parallel CD$ ならば, $\triangle OBA$ と $\triangle ODC$ は相似であるから, $\alpha = \beta$, $L = \alpha K$ で, 3 点 K, L, O は一直線上にあることになる.

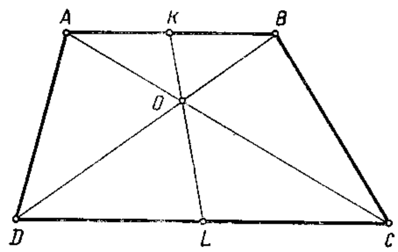

図 1.11: 台形

逆に, AB が CD と平行かどうかはわからないが, 3 点 K, L, O が一直線上にあると仮定しよう. 極 O に関する点の演算を用いて, 適当な実数 γ に対して $L = \gamma K$ を得る. 先の K,L の式に代入すると, $\alpha A + \beta B = \gamma A + \gamma B$, $(\alpha - \gamma)A = (\gamma - \beta)B$ となる. しかし, $(\alpha - \gamma)A$ と $(\gamma - \beta)B$ は, それぞれ, 異なる 2 直線 OA, OB 上にあるから, もしそれらが一致するとしたら点 O になる他はない. このように, $\alpha - \gamma = \gamma - \beta = 0$, $\alpha = \beta$ で, 三角形 OAB と 三角形 ODC は相似であることがわかる. ゆえに, $AB \parallel CD$.

練習 10. 点の和と点のスカラー倍を用いて, 三角形の中線が重心によって 2 : 1 に内分されることを証明せよ (問題 2 参照).

練習 11. ある直線が平行四辺形の隣合う二辺を 1/3, 1/4 に切るとする. ただし, 二辺の共通頂点側にそれぞれの短い切片がくるようになっているとする (図 1.12). このとき, 平行四辺形の対角線は, どのような比でわけられるか.

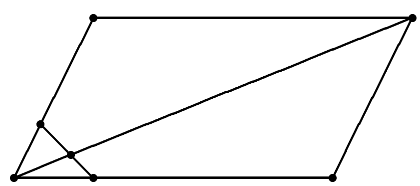

図 1.12: 対角線を切る

1.5 座標

問題 4 の議論の中で次の事実を用いた：

『2 点 M, N が極と同一直線上に並ばないならば, 等式 $\alpha M + \beta N = \gamma M + \delta N$ が成り立つのは, $\alpha = \beta$ かつ $\gamma = \delta$ のときであり, しかもそのときに限る.』

実際, 与えられた等式は, $(\alpha - \gamma)M = (\gamma - \delta)N$ と書き換えられる. これをみれば, $\alpha = \gamma$ かつ $\beta = \delta$ が成り立つことがわかる.

極 P と 2 点 M, N を, 同一直線上に並ばないようにとる. このとき, 平面上の任意の点 Z は適当な実数 x, y によって, $Z = xM + yN$ と書ける (図 1.13).

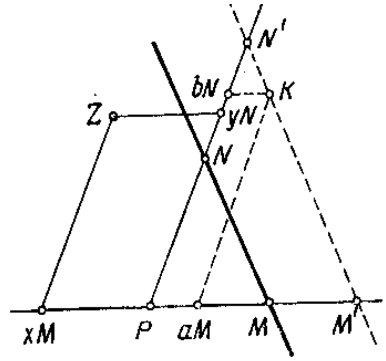

図 1.13: アフィン座標

定義 3 平面上のアフィン座標系とは, 順序づけられた独立な 3 点の集合 $\{P, M, N\}$ である. 点 P を**極**あるいは**原点**といい, 集合 $\{M, N\}$ を与えられた座標系の**基底点**という. 座標系 $\{P, M, N\}$ における Z の座標は, 展開式 $Z = x_P M + y_P N$ の係数 $\{x, y\}$ である.

先の議論によると, 点 Z の座標 x, y は**一意的に** 決まるから, 平面上の点と実数の組に 1 対 1 の対応が得られる.

一般に, このような座標を**アフィン座標**という. $\angle MNP$ が直角で, $|PM| = |PN|$ であるなら, お馴染みのデカルト座標である.

2 点の和はそれらの座標の和である：

$$(aM + bN) + (cM + dN) = (a + b)M + (c + d)N.$$

点のスカラー倍はその点の座標のスカラー倍である：

$$c(aM + bN) = (ca)M + (cb)N.$$

平面上の点と, 実数のペアの対応は, 幾何学の命題と代数学の命題の双方向の翻訳のための辞書として用いられる. どのような図形もその座標がある関係式をみたす点の集まりである. たとえば, 点が直線 MN に属する必要十分条件は, その点が $x + y = 1$ という条件つきで $xM + yN$ と表されることである. この意味で, $x + y = 1$ は, **直線** MN **の方程式**である.

問題 5 $K(a, b)$ を通り, MN に平行な直線の方程式を求めよ.

解答. 求める直線と PM, PN との交点をそれぞれ M', N' とする. $M'N' \parallel MN$ より, 適当な t によって $M' = tM$, $N' = tN$ と書ける (図 1.13). $M'N'$ 上の任意の点 Z は $\alpha + \beta = 1$ として $\alpha M' + \beta N'$ のように表せる. すなわち, $Z = \alpha tM + \beta tN$ かつ $\alpha t + \beta t = t$ である. このように, 任意の点 $Z \in MN$ の座標 $x = \alpha t$, $y = \beta t$ は, 関係式 $x + y = t$ をみたす. ただし, t の値はまだわからない. t の値を知るには, K がいま問題にしている直線上にあることに注意すればよい. すなわち, $a + b = t$ が成り立つ. したがって, 求める直線の方程式は $x + y = a + b$ である.

練習 12. 点 $K(a,b)$ を通る次の直線の方程式をそれぞれ求めよ：

(1) PM に平行な直線;
(2) PN に平行な直線；
(3) P を通る直線.

問題 6 ある三角形領域において, 任意の辺に平行に進んできた光がその他の辺にあたると反射して第 *3* の辺の方向に出て行くという法則が成り立つと仮定しよう. この三角形の中に立っている人が *1* つの辺に平行に懐中電灯をつけるとする. このとき, 自分の背中を照らすことになる. これを証明せよ.

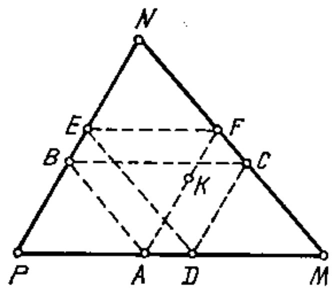

図 1.14: 三角形のなかのジグザグ

解答. この三角形の１つの頂点を極に, その他の 2 つの頂点を基底点とする (図 1.14). この座標系で計算しよう. 人が点 $K(a,b)$ に立って懐中電灯を PN に平行に向け, 辺 PM 上の点 A に光が当たるとする. 点 A の座標は $(a,0)$ である. なぜならば, $KA \parallel PN$ だから点 A の第 1 座標は K のそれと同じで (練習 12 参照), A は PM の上にあるから, 第 2 座標は 0 となるからである.

光の経路の直線部分 AB は, MN に平行である. 問題 5 によれば, 直線 AB の方程式は $x+y=a$ となる. なぜならば, a は A の第 1 座標と第 2 座標の和になるからである. 点 B は PN 上にあるから $x=0$ である. よって, 第 2 座標は a となる.

こんな具合に議論を進めれば, 次々と光線と辺との交わりを計算することができる. それらは $C(1-a,a)$, $D(1-a,0)$, $E(0,1-a)$, $F(a,1-a)$ のようになる. 直線 FK は PN に平行である. だから, 光線は後ろから出発点 K に戻ることがわかる.

用心深い読者は, 先の議論の弱点を指摘したかもしれない. 実のところ光線は $ABCDEF$ を完全に巡る前に点 K に戻る可能性がある—つまり, 後ろからではなく横から光があたる可能性がある.

練習 13. 問題 6 の光線の軌道が 6 本ではなく 3 本の線分だけで構成されるような三角形 MNP 内の点 K をすべて図示せよ.

練習 14. K を三角形 MNP の内部点とし, 直線 AK, BK, CK が辺 BC, CA, AB と交わる点をそれぞれ D, E, F とする (図 1.15). このとき, 等式 $KD/AD + KE/BE + KF/CF = 1$ が成り立つことを証明せよ.

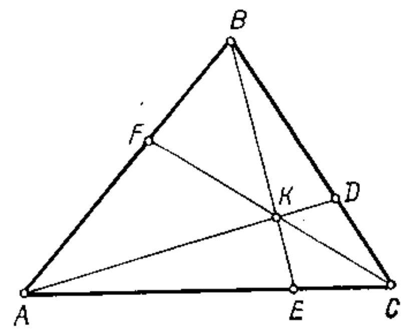

図 1.15: 1 点で交わる三角形の中の直線

練習 15. 図 1.15 のように, 三角形 ABC の辺上に 3 点 D, E, F が与えられている. 3 直線 AD, BE, CF が 1 点で交わるのは, 等式 $AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA$ が成り立つときで, しかもそのときに限ることを証明せよ (チェバの定理).

1.6 点の積

平面上の点を実数倍することをすでに学んだ. 実数は直線上の点で表せることを思いおこそう. この直線を極 P と原点が一致するように平面におく. 極は点の和あるいは点のスカラー倍という演算を定義するのに用いられる. 実数直線の上の 1 に対応する点を E (図 1.16a) としよう.

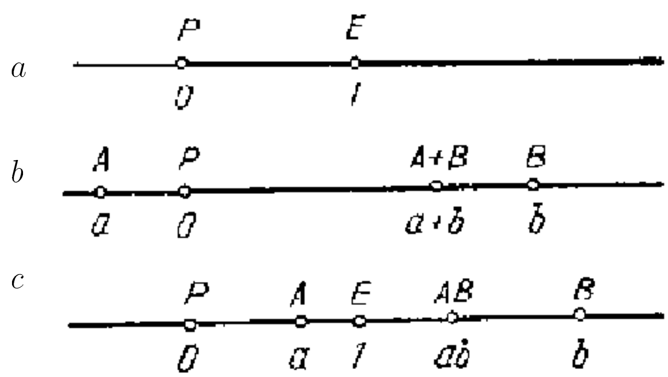

図 1.16: 直線上の代数的な演算

点の和の定義は, ふつうの実数の和の定義と次のような意味で一致する. A, B をそれぞれ数 a, b に対応する点とすると, (極 P に関する) 和 $A+B$ は, 数 $a+b$ (図 1.16b) に対応している.

さらに, 点のスカラー倍の演算は, この実数直線上に制限すると, ふつうの数の積に次の意味で一致する. $A \leftrightarrow a$, $B \leftrightarrow b$ のとき, $a_P B$, $b_P A$ のどちらの点も, 数 ab に対応する. この点を A と B の**積**といい, AB と表すことにする.

さて, この定義を平面全体にひろげよう. 任意の 2 点 A, B に対して, 新しい点 AB を与えるための規則をこの**点の積** AB がふつうの数の積における次のような規則をみたすように決めたい:

9° 結合法則

$$(AB)C = A(BC).$$

10° 交換法則

$$AB = BA.$$

11° 同じ極上の点の和に関する分配法則

$$A(B + C) = AB + AC.$$

さらに, その新しい演算が, 前に定義された点のスカラー倍の演算と一致することが必要である. すなわち, 平面上の任意の点 Z と実数直線上の任意の点 A に対して, $AZ = a_P Z$ となることが必要である (a は A に対応する実数). とくに, これは実数直線上の単位点 E が数 1 の役目をすべての平面上の点 Z に対して果たすことを意味する. つまり $EZ = 1_P Z = Z$.

そのような演算が平面上の点に対して定義可能なのかどうかはすぐにはわからない. しかしながら, 実際には多くの定義の仕方がある. そして, これから調べていくと本質的には 3 つの異なる定義の仕方があることがわかる. まず, 少し複雑な定義をしてみよう.

問題 7 $EABCDK$ を点 P を中心とする正六角形とする. ただし, E は, 実数直線上の 1 に対応する点とする. 何らかのかけ算が定義されているとして $A^2 = B$ と仮定したとき, この六角形の頂点のペアの積をすべて求めよ.

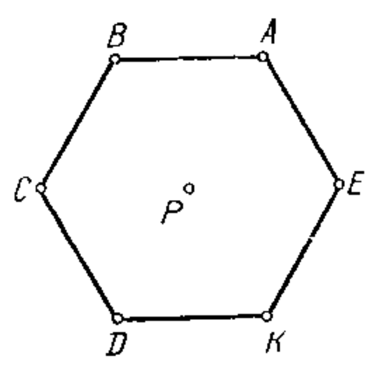

図 1.17: 六角形の頂点の積

解答. 極 P をとり, 基底点 E, A(図 1.17) を用いて, すべての頂点を展開すると, $B = A - E$, $C = -E$, $D = -A$, $K = E - A$ となる. 基底点どうしの積は, $E^2 = E$, $EA = A$, $A^2 = B$ のようにわかっている. 分配法則によって, $BK = (A - E)(E - A) = -A^2 + 2AE - E^2 = -B + 2A - E = A$ のような計算ができる. 他の積も同様にしてわかるから, 次の積表が得られる：

	E	A	B	C	D	K
E	E	A	B	C	D	K
A	A	B	C	D	K	E
B	B	C	D	K	E	A
C	C	D	K	E	A	B
D	D	K	E	A	B	C
K	K	E	A	B	C	D

注目してほしいことは, 六角形の 6 頂点が, いまとりあげた積に関して**閉じている**, すなわち, 任意の 2 つの頂点の積は再び頂点となることである.

練習 16. 問題 7 の正六角形の頂点の集合は, 次で定義される積に関して閉じているか：
(a) $A^2 = A$;
(b) $a^2 = P$.
また, その積表を作成せよ.

練習 17. 極 P を中心とする正五角形 $EABCD$ の積表を作成せよ. ただし, $A^2 = B$ とする.

例をながめたので, これから一般の場合を考察しよう. 先のすべての必要条件をみたす積が定義されているとする.

すでに決まっている $P = 0$ と $E = 1$ 以外の任意の点 F を直線 PE の外にとる. (E, F) の組は極 P に関する基底点として使える. 問題 7 で議論したように, 点の積は F の平方がわかれば完全に決まるのである.

適当な実数 α, β をみつけて $F^2 = \alpha E + \beta F$ と書ける. 別の点 G をみつけて, 基底点の組を (E, G) にとり直し, 平方 G^2 の展開がもっと簡単になるようにしよう.

$G = F - \frac{\beta}{2}E$ とおく. このとき, 直線 FG, PE は平行となり, E, G は基底点となる：

$$\begin{aligned} G^2 &= (F - \frac{\beta}{2}E)^2 \\ &= F^2 - \beta EF + \frac{\beta^2}{4}E^2 \\ &= (\alpha + \frac{\beta^2}{4})E. \end{aligned}$$

この関係式をよくみてみると, 基底点の組 (E, G) のもとでの積は, 最初の基底点の組 (E, F) のときより簡単になることがわかる. なぜならば, 第 2 基底点の平方が 2 点の線

形結合ではなく, 単に係数つきの E に過ぎないのだから. さらに, 積の規則を簡単にするため, 係数の符号を眺めながら G を書き換えてみよう：

1. $\alpha+\dfrac{\beta^2}{4}=0$ のとき (練習 16b 参照). この場合, 積は次の式で与えられる：

$$E^2=E,\quad EG=G,\quad G^2=0;$$
$$(aE+bG)(cE+dG)=acE+(ad+bc)G.$$

2. $\alpha+\dfrac{\beta^2}{4}>0$ のとき. $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha+\beta^2/4}}G=H$ とおくと, 基底点の組 (E,H) のもとで次の積公式が得られる：

$$E^2=E,\quad EH=H,\quad H^2=E;$$
$$(aE+bH)(cE+dH)=(ac+bd)E+(ad+bc)H.$$

(読者は, 練習 16b の六角形の頂点でこのような H をさがしてみよう).

3. $\alpha+\dfrac{\beta^2}{4}<0$ のとき. $I=\dfrac{1}{\sqrt{|\alpha+\beta^2/4|}}G$ とおくと, 次が成り立つ：

$$E^2=E,\quad EI=I,\quad I^2=-E;$$
$$(aE+bI)(cE+dI)=(ac-bd)E+(ad+bc)H.$$

これら 3 つの場合のどれもが, 先の積に関する必要条件をすべてみたすことが簡単にわかる. 次の問題は積が逆の演算である**割算**が可能かということ. すなわち, 方程式 $AX=B$ が $A\neq 0$ のときに X について解けるかということである.

第 1 の場合, E を G で割ってみよう. つまり, $Z=xE+yG$ とおいて $GZ=E$ をみたす Z をさがす. 定義から $G(xE+yG)=xG$ となるのでこれは決して E にはならない. という訳で割算は一般にだめである.

同じことが第 2 の場合にも言える. 読者は H が $E+H$ で割れないことを確かめてみよう.

しかし, 第 3 の場合, ゼロでない点による割算はいつも可能である. 確かめてみよう. 係数が同時に消えることがない $M=aE+bI$, $N=cE+dI$ をとってくる. 商 M/N, 言い換えると $NZ=M$ 詳しくは $(cE+dI)(xE+yI)=aE+bI$ となる $Z=xE+yI$ を求めよう. 展開するとこの方程式は, 次の連立方程式と同値になる：

$$\begin{aligned} cx-dy &= a,\\ dx+cy &= b. \end{aligned}$$

これは $c^2+d^2\neq 0$ の条件下でただひとつの解 $x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$ をもつ.

これまでのことより, 次のことがわかる.

定理 2 平面上の点の積は本質的に *3* つの異なる方法で定義できる. それは, 次の性質をもつ元 X が存在するかどうかによって異なってくる.

1. $X^2 = 0$,
2. $X^2 = 1$,
3. $X^2 = -1$.

第 *3* の場合だけ, 0 でない元による割算が可能となる.

正式には, 実数体上の *3* つの異なる *2* 次元の代数系が存在し, それらのうち *1* つ (第 *3* の場合) だけが割算をともなう代数系になるということである.

積の幾何学的意味は, 原点 P に関する E と I の相互の位置関係に依存する. たとえば, 四辺形 $PEAB$ が線分 PE 上にあったとする. このとき, 点 A^2 はどこにくるだろうか. これは, 点 I のえらび方に依存する. I が A に一致するならば, $A^2 = -E$ となり. I が B に一致するならば

$$A^2 = (B+E)^2 = B^2 + 2BE + E^2 = -E + 2B + E = 2B$$

となる. もちろん, 他の選択も可能である. そして答えも様々である.

いろいろ可能性はあるがとくに $I = A$, すなわち, I が E を 90° 正の方向に (反時計回りに) 回転させて得られる場合をとり, 次の節ではそれを詳しく研究することにする.

1.7 複素数

直線 PE 上の点は実数と同一視する. 平面上の点の間に代数的な演算を定義したので, 平面は実数より広い数の世界とみなすことができる. これらの数を**複素数**とよぶ. 慣例的に, 極 P を 0, 点 E を 1, 点 I を i または $\sqrt{-1}$, $aE + bI$ を $a + bi$ と表す. この表記法で先の代数的な演算の定義を書き直すと, 次のようになる：

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i, \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i, \\
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i, \\
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.
\end{aligned}$$

簡単に言うと, この演算は $i^2 = -1$ という簡約ルールをともないながら「変数」i の多項式の演算のように計算される. 商に関する公式を導くときは, 分母と分子に同じ数 $c - di$ をかければよい.

2 つの基本複素数 1, i はそれぞれ**実数単位**, **虚数単位**とよばれる.

練習 18. 次の複素数の計算をせよ：

(a) $\dfrac{3-5i}{1+i} - i(3+4i) + \dfrac{1}{i}$,
(b) $\sqrt{3-4i}$,
(c) $(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^{2004}$.

$z = a + bi$ とする．点 z と点 0 の距離を複素数 z の**大きさ**，あるいは**絶対値**と呼び，$|z|$ と表す．a と b は z のデカルト座標だから，$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ であることがわかる．たとえば，$\cos t + i \sin t$ と $\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} i$ の大きさは，任意の実数 t に対して，ともに 1 となる．

0, w, z, $z - w$ は，平行四辺形をなすから，z と w の距離は，$|z - w|$ となる (図 1.18 参照).

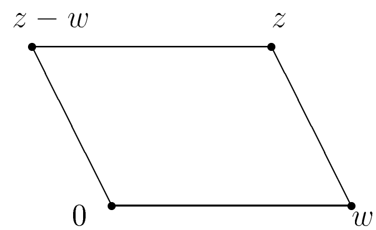

図 1.18: 複素数平面上の平行四辺形

練習 19.　次の条件をみたす複素平面上のすべての点 z の集合を求めよ：

(a) $|z + 3| = 5$.
(b) $|z + 4| = |z - 2i|$.
(c) 2 つの固定点と z とのおのおのの距離の 2 乗の和が一定である.

代数的な問題を純粋に考えるとき，$\sqrt{a^2 + b^2}$ が 2 点間の距離であるという事実によって，幾何学的な定理や直観を適用することができる．

問題 8 次の不等式を証明せよ：

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \geq \quad & \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}. \end{aligned}$$

解答. $z_1 = a_1 + b_1 i, \cdots, z_n = a_n + b_n i$ とおき，折れ線 $0, z_1, z_1 + z_2, \cdots, z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ を考える．不等式の左辺は，この折れ線の全長であり，右辺は両端の点の間の距離である．

練習 20.　任意の実数 $x_1, \cdots, x_{10}$ に対して，次の不等式を証明せよ：

$$\sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \cdots + \sqrt{x_{10}^2 + (1 - x_1)^2} > 7.$$

半直線 01 を反時計回りに回転させて点 z を通るようにするための角度を複素数 z の**偏角**といい，$\arg z$ と表す．ここで，0 と 1 は，それぞれ，数 0, 1 に対応する点である．

練習 21.　次の複素数の偏角を求めよ: 2, i, -3, $-2i$, $1 + i$, $\sqrt{3} - i$.

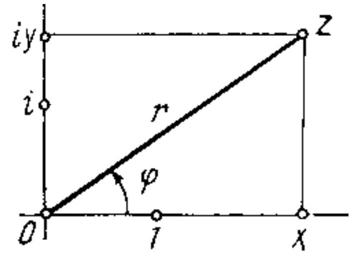

図 1.19: 極座標

複素数は, 大きさ r と偏角 φ がわかれば決まる．実際, 図 1.19 のように $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ とすれば, $z = x + yi$ となるから, 次のように表せる：

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

この表現を複素数の**極形式**とよぶ.

しかし, 複素数と実数のペアの対応 $z \leftrightarrow (r, \varphi)$ は 1 対 1 ではない．まず, 0 の偏角は未定義である．0 以外の複素数については偏角はきっちりもとに戻ってくる回転の分だけ不定である．たとえば, 1 の偏角は 0, -2π, 2π, -4π, $4\pi \cdots$ のどれをとってもよい．それにもかかわらず, (r, φ) というペアは点 z の座標とみなされ, **極座標**とよばれる．この座標は空港の管制塔で使われている．飛行機の位置を知るのに, まず方向をみつけだし, 次に距離を計る.

図形の方程式は, 極座標で書くと簡単になることがある.

練習 22. (a) 方程式 $r = |\cos 3\varphi|$ の表す曲線をプロットせよ．(b) 図 1.20 のような 6 枚の花びらをもつ花の方程式を極の方程式とデカルト座標で表せ.

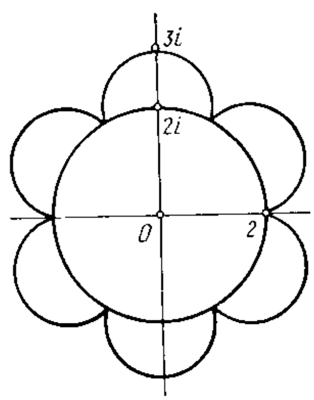

図 1.20: 複素数平面上の花

複素数の積は, 絶対値と偏角で表すと簡単である．実際, 次の式が成り立つ：

$|zw$

一番目の式は, $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ のから導かれる. 二番目の式を証明する.

証明 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $w=s(\cos\psi+i\sin\psi)$ とおくと,

$zw=rs(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i\sin\psi)=rs((\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)+i(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi))$ となる. 簡単にすると, 次の式となる：

$zw = rs(\cos(\varphi+\psi)$ i si i2.9.7c()]20611599800c()2081860(+)2061881.00020()208

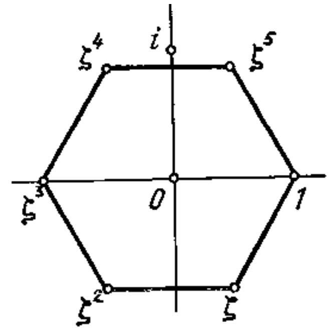

図 1.22: 1 の巾乗根

数 ζ の整数巾は, 平面上の 6 点だけを占める. 図 1.22 の正六角形の頂点がそれである. それら 6 つのどの複素数も, ζ の巾乗で 1 の 6 乗根である. 一般に, 自然数 n に対して, ちょうど n 個の 1 の n 乗根が複素数の範囲で存在する. それらは正多角形の頂点をなす.

問題 9 半径 1 の円に内接する正 n 角形を考える. ひとつの頂点からのびるすべての対角線と 2 本の辺の長さの積を求めよ.

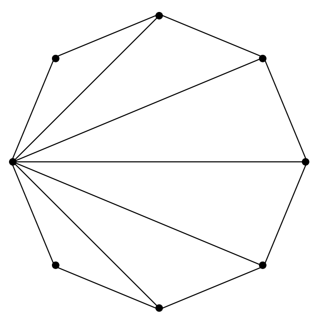

図 1.23: 正多角形の辺と対角線

解答. 多角形の中心に極 (数 0) をおき, 頂点 A_1 に実数単位 (数 1) をおく. このとき, すべての頂点は, 方程式 $z^n - 1 = 0$ の根となる. したがって, A_1 以外の頂点はすべて, $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$ の根となる. この式は, $z^n - 1$ を $z - 1$ で割って得られたものである. 次に, 多項式 $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$ と多項式 $(z - A_2)(z - A_3)\cdots(z - A_n)$ を比較しよう. これらは根の集合が等しく, 最高次係数も等しいから完全に一致する. よって, $z = A_1$ における値も一致する：

$$(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)\cdots(A_1 - A_n) = A_1^{n-1} + A_1^{n-2} + \cdots + A_1 + 1.$$

$A_1 = 1$ より, 次の答えが得られる：

$$|A_1 - A_2||A_1 - A_3|\cdots|A_1 - A_n| = n.$$

練習 24. 正多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ が単位円に内接しているとする．その円周上の任意の点を A とするとき, A から正多角形のすべての頂点までの距離の平方の和を求めよ．

割算は積の逆演算だから, 1.4 と逆の公式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|}, \\
\arg\frac{z}{w} &= \arg z - \arg w
\end{aligned}
$$

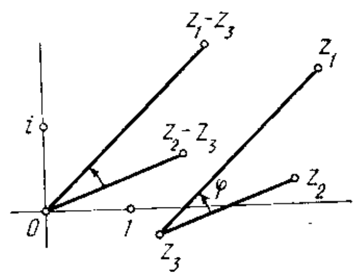

図 1.24: 複素数で表された角

初等幾何学の観点では, 二番目の等式はおもしろい．角の大きさが頂点と 2 辺上の他の 2 点によって $\varphi = \arg\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ (図 1.24) のように表現できるからである．ここで, 2 つの応用例をあげる．ひとつは幾何の問題を代数で解く問題, もうひとつは代数の問題を幾何的な方法で解く問題である．

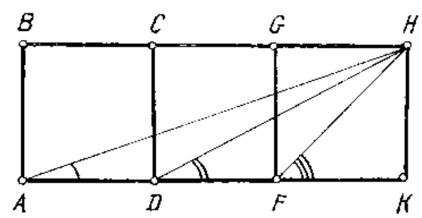

図 1.25: 3 つの角の和

問題 10 *3 つの正方形が図 1.25 のように隣り合って並んでいる．このとき, 3 つの角 $\angle KAH$, $\angle KDH$, $\angle KFH$ の和が直角となることを証明せよ．*

解答. $A = 0$, $D = 1$, $B = i$ とすると, $F = 2$, $K = 3$, $H = 3 + i$ となる．したがって, $\angle DAH = \arg\frac{H-A}{D-A} = \arg(3+i)$, $\angle FDH = \arg\frac{H-D}{F-D} = \arg(2+i)$ より $\angle DAH + \angle FDH = \arg(3+i)(2+i) = \arg(5+5i) = \pi/4$ を得る．

問題 11 互いに異なる複素数 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ が等式 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ をみたすとき, 次の式の値は, 実数となることを証明せよ：

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

解答. 与えられた 4 点は, 0 を中心とする一つの円周上に並ぶ. 2 点 $z_1,\ z_2$ によって, この円周は 2 つの弧にわかれる. 他の 2 点 $z_3,\ z_4$ は, 同じ弧の上にあるか異なる弧の上にあるかどちらかである. 前者の場合, $\angle z_1z_3z_2$ と $\angle z_1z_4z_2$ は, 同じ弧を見込んでいるから等しい. ゆえに $\arg\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \arg\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$, $\arg\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = 0$. よって, 問題の値は実数である. 後者の場合, $\angle z_1z_3z_4$ と $\angle z_2z_4z_1$ は同じ向きをもち, $\angle z_1z_3z_4 + \angle z_2z_4z_1 = 180^\circ$ である. よって, 求める値は負の実数となる.

問題 11 の主張は任意の円周あるいは直線上にある 4 つの複素数の場合に拡張される. 逆も真である. すなわち, 先の式が実数になるならば, 与えられた 4 点はひとつの円周上, あるいは, 一直線上にある.

練習 25. $c_1, c_2, \cdots, c_n$ を頂点とする凸 n 多角形を考える.

$$\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \cdots + \frac{1}{z - c_n} = 0$$

をみたす複素数 z は, この多角形の内点であることを証明せよ.