# 第2章　平面運動

平面運動とは, 線分の長さを変えない平面変換である. したがって, 平面運動を図形に施しても, その図形の面積や角などの形は変化しない.

この章ではまず, 初等幾何学でよく知られている問題をとりあげる. これらの問題は基本的に同じアイデア, すなわち図形の位置を部分的に変えることによって解ける. そうすることによって, 図形の隠された性質が現れるからである.

そのあと, 運動の合成について詳しく議論する. これは, 次章「変換群」への準備でもある.

## 2.1　平行移動

**定義 4** 平行移動 ( あるいは単に移動ともいう ) とは, 任意の点 $A$ を, $\overrightarrow{AA'}$ が与えられた定ベクトル $\mathbf{v}$ に等しくなるような点 $A'$ にうつす平面変換である. この変換を $T_{\mathbf{v}}$ と表す.

**問題 12** 図 *2.1* のように, 村 $A$ と村 $B$ の間に川が流れている. その川は真直ぐで川幅が一定である. このとき, 折れ線 $AMNB$ の長さが最短となるように橋 $MN$ を架けよ. ただし, 橋は川に垂直に架けるものとする.

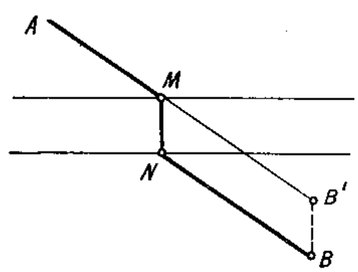


図 2.1: 川に架かる橋

**解答.** 川がなければ, 点 $A$ と点 $B$ をむすぶ最短の道は線分 $AB$ である. 一方の川岸をもう一方の川岸に両岸が一致するまで川に垂直に動かし, $B$ が移動した点を $B'$ とする (図 2.1). このとき, 一致した川岸上のどこに点 $M$ をとっても, $AMB'B$ と $AMNB$ の長さは等しい. したがって, $AMB'$ の長さが最小と

なるような $M$ を求めなければならない．このような $M$ は直線 $AB'$ とその一致した川岸との交点である．

**練習 26.** 図 2.2 のように，まっすぐで川幅が一定の 2 つの川が流れている．このとき，その 2 つの川によって分けられる点 $A$ と点 $B$ をむすぶ最短の道を描け．ただし，橋は川に垂直に架けるものとする．

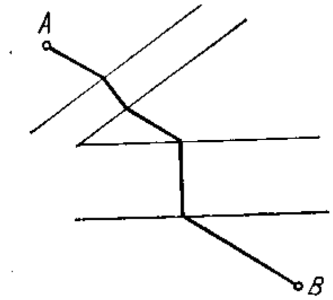


図 2.2: 2 つの川に架かる 2 つの橋

**問題 13** 与えられた円に，与えられたベクトルを内接せよ (*i.e.* 与えられた円の弦で，与えられた線分に平行で長さが等しくなるような弦を作図せよ )．

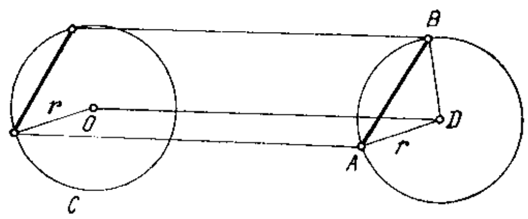


図 2.3: 円にベクトルを内接する

**解答**. $AB$ を与えられたベクトル，$C$ を中心 $O$ 半径 $r$ の与えられた円とする (図 2.3)．$C$ に内接するように，$AB$ を $C$ に向かって平行移動しなければならない．実は，逆の操作，すなわち $AB$ の両端点 $A$, $B$ を通るように，$C$ を動かすほうが簡単である．そのため，$AD = BD = r$ となる三角形 $ABD$ を作る．点 $D$ は，$C$ が移動した円の中心となる．なお，ベクトル $DO$ によって，2 点 $A$, $B$ を移動させると，$C$ に内接した線分が得られる．

次の練習問題は平行移動によって解ける．

**練習 27.** 与えられた三角形に，与えられたベクトルを内接させよ ( i.e. そのベクトルに平行で長さが等しい線分で，その両端点がそれぞれその三角形の異なる辺上にあるものを作図せよ )．

**練習 28.** 台形の平行な 2 辺の長さと 2 つの対角線の長さがわかっているとき，どのようにしてその台形を構成すればよいか．

## 2.2　対称変換

**定義 5** $l$ を平面上の直線とする. $l$ に関する対称変換とは, 平面上の任意の点 $A$ を $l$ が線分 $AA'$ の垂直二等分線となるような点 $A'$ にうつす平面変換である. この変換を軸 $l$ に関する線対称ともいい, $S_l$ と表す.

**問題 14** 2点 $A, B$ が直線 $l$ に関して同じ領域にあるとする. このとき, 折れ線 $AMB$ の長さが最小となる $l$ 上の点 $M$ を求めよ. '現実の' 問題で考えたいなら, からっぽなバケツをもつ人 $A$, 火事 $B$, 川 $l$ をイメージするとよい.

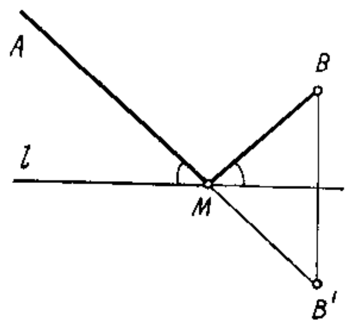


図 2.4: 最短の道

**解答.** $A$ と $B$ が $l$ に関して異なる領域にあるなら, 求める $M$ は直線 $AB$ と $l$ との交点である. 問題をこの場合に帰着させる (図 2.4 参照). つまり図のように $B' = S_l(B)$ とする. このとき, $l$ 上のどこに $M$ をとっても, 折れ線 $AMB$ と折れ線 $AMB'$ の長さは等しいから, 求める $M$ は直線 $AB'$ と $l$ との交点である.

2 線分 $AM$, $BM$ と直線 $l$ がなす 2 つの角は等しいことに注意しよう. これは良く知られている光学の法則である.

**練習 29.** $\angle XOY$ の内部に, 2 点 $A, B$ がある. このとき, 折れ線 $AMNB$ の長さが最小[1]となる 2 点 $M, N$ を求めよ. ただし, $M \in XO$, $N \in YO$ とする.

次は短い道に関する最後の問題である.

**問題 15** 鋭角三角形 $ABC$ 内に内接する三角形で, 周の長さが最小となるものを描け (図 2.6).

[1]図 2.5 の絵は, あるロシア民話の一場面である. 点 $A$ にいる 'からす' は, 点 $B$ にいる '王子' に, できるだけ早く「死んだ水」と「生きた水」をかけなくてはならない. そうすれば, その王子は生き返るというのである.

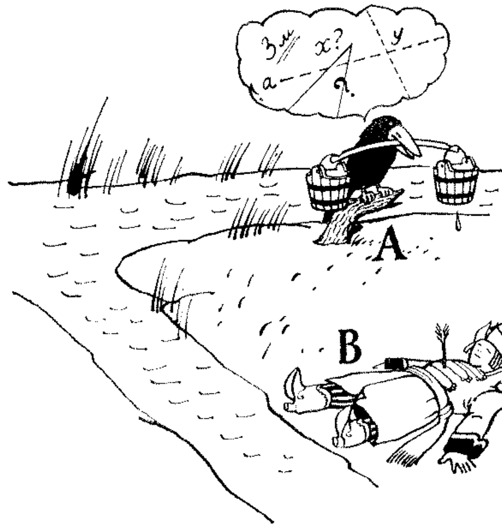


図 2.5: 練習 29 の 2 つの川

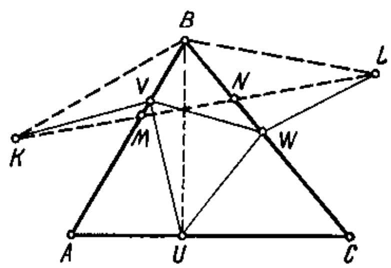


図 2.6: 三角形に内接する三角形

**解答.** 図 2.6 のように, 三角形 $ABC$ に内接した任意の三角形を $UVW$ とし, $K$, $L$ をそれぞれ直線 $AB$, $BC$ に関する点 $U$ の対称点とする. このとき, 折れ線 $UVWU$ と折れ線 $KVWL$ の長さは等しい. とくに, $U$ を固定してこの長さを最小にするには, $KVWL$ が直線となるように 2 点 $V \in AB$, $W \in AC$ をえらべばよい. 任意の $U \in AC$ に対して, 直線 $KL$ と $BA$, $BC$ とが交わる点をそれぞれ $M$, $N$ とする. 点 $U$ を動かして $\triangle UMN$ の周の長さが最小となるような点 $U$ をえらべば, 求める三角形が得られるから, 線分 $KL$ の長さが最小となる $U$ を求めなければならない.

$\triangle BKL$ は $BK = BU = BL$ となる二等辺三角形であることに注意しよう. $\angle KBL$ は $U$ の位置に依存しない：$\angle KBL = 2\angle ABC$. したがって, 辺 $KL$ の長さを最小にする $U$ の位置は $BK$ あるいは $BL$ (つまり $BU$) の長さが最小となる $AC$ 上の点となる. よって, 求める $U$ は $BU \perp AC$ となる $AC$ 上の点である.

3 点 $U$, $V$, $W$ の対称性から, 最小周の三角形 $UVW$ の他の 2 点 $V \in AB$,

$W \in BC$ はそれぞれ, 頂点 $C$, $B$ から対辺におろした垂線の足である.

**練習 30.** 三角形の 1 つの頂点とその 3 頂点角の二等分線が与えられているとき, どのようにしてその三角形を構成すればよいか.

**練習 31.** 2 つの鏡が 45° の角をなし, その角の内部にある光線が入っているとする. 何回かその鏡に反射したあと, その光線は最初の光線に平行な直線に沿ってその角からでていくことを証明せよ. また, 45° の角以外に, 同じような性質をもつ角は存在するか.

## 2.3 回転

**定義 6** $O$ を平面上の点とし, $\varphi$ を実数の角とする. $O$ の回りの角 $\varphi$ の回転とは, 任意の点 $A$ を $|OA| = |OA'|$, $\angle AOA' = \varphi$ となるような点 $A'$ にうつす平面変換である. ただし, 反時計回りを正の角とする. この変換を $R_O^\varphi$ と表す.

図 1.17 をみてみよう. $P$ を正六角形 $ABCDKE$ の中心とする. このとき, 次の式が成り立つ：

$$A +_P B +_P C +_P D +_P K +_P E = P.$$

このように, 偶数個の頂点をもつ正多角形のすべての頂点を中心 $P$ を極として足すと, $P$ になる (点の和の定義に関しては, p.9 参照). 言い換えれば, それらのすべての半径ベクトルの和は 0 である. 奇数個の頂点をもつ正多角形に対して, 同じ性質が成り立つかどうかを示すことは簡単ではない. すべてのベクトルの座標を直接計算しようとすると, かなり複雑な三角法による表現を扱わなければならないからである. しかし, これは平面全体を動かすことによって, 簡単に示される.

**問題 16** 任意の正多角形に対して, $P$ をその正多角形の中心とする. このとき, その正多角形のすべての頂点を $P$ を極として足すと, $P$ になることを証明せよ.

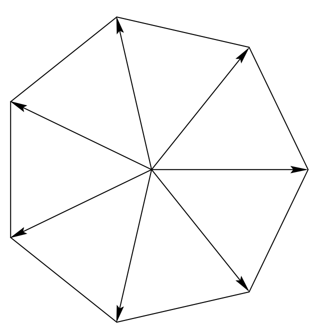

図 2.7: 多角形の頂点の和

**解答.** 頂点の個数を $n$ とする．点 $P$ の回りに $360°/n$ 回転すると, もとの正多角形になる．したがって, 頂点の和も変わらない．しかし, 平面上の点で, そのような回転によって位置が変わらない点はただ 1 つしかない．それは回転の中心である．したがって, 正多角形の頂点の $P$ 上和は $P$ である．

**練習 32.** 凸多角形内に点 $M$ がある．$M$ から, その多角形のすべての辺に垂線をおろし, そのおのおのの垂線上に, その対応する辺の長さと, $M$ からの長さが等しい点 $A_i$ をとる．このとき, $M$ を極としたこれらのすべての点の和は 0 であることを示せ．

**問題 17** 平面上の点 $D$ と長さ $a, b, c$ が与えられている．このとき, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ となる正三角形 $ABC$ を求めよ ( 図 2.8).

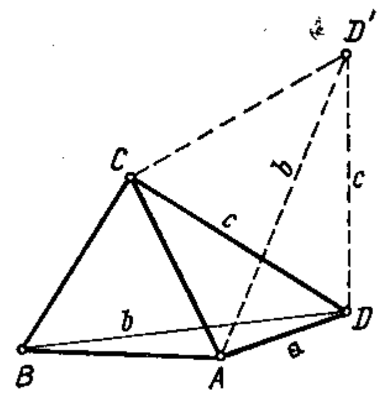


図 2.8: 正三角形の構成

**解答.** 3 辺がわかれば, 三角形は決まるが, 図 2.8 の 3 本の線分 $a$, $b$, $c$ では三角形を構成することはできない．そこで次のようにする．点 $c$ の回りに, 平面を $60°$ 回転させる．そうすれば, $B$ は $A$ に移動し, $D$ は $D'$ に移動する．回転によって長さは変わらないから, $\triangle ADD'$ の辺の長さはそれぞれ $a$, $b$, $c$ である．まず, この三角形 $ADD'$ をつくり, 次に, $\triangle CDD'$ が正三角形になるような点 $C$ をみつけ, 最後に点 $B$ をみつければよい．

**練習 33.** 3 本の平行線が与えられたとき, それぞれの線上から 1 点ずつとり, その 3 点が正三角形の頂点となるようにせよ．

**問題 18** 三角形の内側に, その三角形の頂点からの距離の和が最小になる点を求めよ ( 図 2.7).

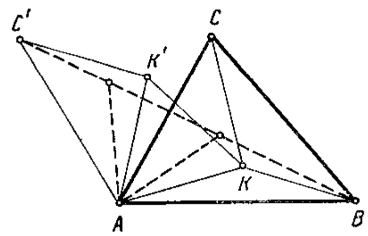


図 2.9: 距離の和の最小

**解答.** 三角形 $ABC$ 内に任意の点 $K$ をとる. 2 点 $C, K$ を, $A$ を中心として反時計回りに $60°$ 回転させ, $K$ が移動した点を $K'$, $C$ が移動した点を $C'$ とする (図 2.9 参照). 問題の 3 つの距離の和 $AK + BK + CK$ は, 折れ線 $C'K'KB$ の長さに等しい. $K$ と $K'$ が直線 $BC'$ 上にあるとき, 折れ線 $C'K'KB$ の長さは最小になる. よって, 求める点は $\angle AK_0C' = 60°$ (i.e. $\angle AK_0B = 120°$) となる直線 $BC'$ 上の点 $K_0$ である. 対称性より, $\angle BK_0C = \angle CK_0A = 120°$ である.

上の解法は, その角が $120°$ より小さい三角形に対してのみ成り立つ. そうではない場合は読者が証明してみよう.

**練習 34.** 正方形 $ABCD$ 内の任意の点を $M$ とする. このとき, 点 $A, B, C, D$ を通り, それぞれ辺 $BM, CM, DM, AM$ に垂直であるような 4 本の直線を描け. また, このとき, これらの 4 本の直線が 1 点で交わることを示せ.

$180°$ の回転を**裏返し**あるいは**中央対称**という. 点対称について述べる際, 記号からしばしば $180°$ を省き, $R_A^{180°}$ の代わりに $R_A$ と書くことにする. これによって解ける 2 つの問題をあげておく.

**練習 35.** 2 円 $O, O'$ が 2 点で交わっているとする. この交点の 1 つを通り, $O$ と $O'$ で長さが等しい弦を切る直線を描け.

**練習 36.** 1 台の丸いテーブルと沢山の硬貨がある. 2 人のプレイヤーが, 交代でそのテーブルの上に硬貨を置く. ただし, 硬貨は互いに重ならないように置かなければならない. 先手のプレイヤーは, どうすれば勝てるだろうか.

## 2.4 複素変数関数

もう 1 度, 問題 16 を考えよう (p.35 参照). 先の幾何学的な証明の他に, この問題には代数的な証明がある. まず, 平面上に**複素構造**を導入しよう. 複素数と平面上の点とを 1 対 1 対応させるのである. たとえば, その正多角形の中心を表す複素数を 0, 頂点の 1 つを表す複素数を 1, 1 の反時計回り隣りの頂点を表す複素数を $\zeta$ とする. このとき, 残りの頂点は $\zeta^2, \cdots, \zeta^{n-1}$ と表される. 知りたいのは, $x = 1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1}$ の値である. $\zeta^n = 1$ より, $x\zeta = \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} + 1 = x$ となり, $\zeta \neq 1$ だから, $x = 0$.

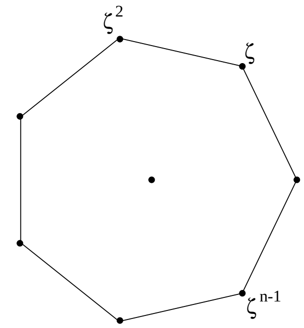


図 2.10: 頂点が複素数の正多角形

この代数的解法は, 本質的にはいままでの幾何学的解法と同じである. もっと正確に言うと, ただ単に, 幾何学的論理を代数的な言葉に翻訳しただけである. このことを説明しよう. 上の代数的な証明は, 等式 $\zeta x = x$ をみたす唯一の解が $x = 0$ であるという事実がメインである. では, 複素数に $\zeta$ をかけることによって, 幾何学的には何がおこるのだろうか？$|\zeta| = 1$ であるから, その絶対値は変わらない. 偏角は, $360°/n$ だけ増える. したがって, 幾何学的用語で言い換えると, 複素数に $\zeta$ をかけるということは, その複素数を多角形の中心の回りに $360°/n$ 回転することである.

一般に, 平面上の点を複素数とみなすならば, 平面変換, とくに平面運動は**複素変数関数** $w = f(z)$ として考えられる. ただし, $z$ は平面上の任意の点, $w$ はその像である. たとえば, 0 を中心とする角 $\varphi$ の回転は関数 $w = \alpha z$ $(|\alpha| = 1)$ で表される (このとき, $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi$ は回転角). 同じように, 平行移動は, 関数

$$w \;=\; z + a, \tag{2.1}$$

で表される. ここで $a$ は複素数である.

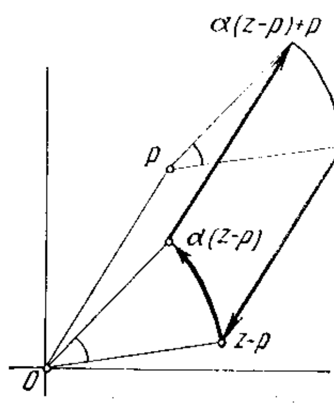


図 2.11: 複素座標系の平面運動

さて, 点 $p$ を中心とする回転の公式を導こう. 図 2.11 は, 点 $z$ の点 $p$ を中心とする角 $\varphi$ の回転を示している. これは, 次の 3 つのステップに分けられる：

1. 移動 $z \mapsto z - p$；
2. 原点の回りの回転 $z - p \mapsto \alpha(z-p)$；
3. 逆移動 $\alpha(z-p) \mapsto \alpha(z-p) + p$.

したがって, 点 $p$ の回りの角 $\varphi$ の回転変換は, 次の関数で与えられる：

$$w = \alpha z + (1-\alpha)p, (\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2.2}$$

平行移動と回転を**真の運動**という. その根拠は, 平行移動や回転を物理的におこすのに平面空間から離れる必要がないからだ. それに反して, 直線に関する対称変換は, 周りの3次元空間のなかで平面を回転させ (裏返さ) ないと得られない.

**定理 3** 真の平面運動全体の集合は, 次の複素変数関数によって表される平行移動全体の集合に集合として一致する：

$$w = \alpha z + m. \tag{2.3}$$

ただし, $a$, $m$ は複素数, $|\alpha| = 1$.

**証明** 2.1, 2.2 より, 任意の真の平面運動は線形関数 2.3 で表されることがわかる.

その逆も成り立つ. すなわち

**『2.3 で表される関数は真の平面運動である.』**

実際, $\alpha = 1$ ならば, 方程式 2.3 は方程式 2.1 となり, 平行移動となる. したがって, これは真の平面運動である. $\alpha \neq 1$ ならば, 2.3 は次のように書き換えられる：

$$w = \alpha z + m = \alpha(z - \frac{m}{1-\alpha}) + \frac{m}{1-\alpha}.$$

この式は, 点 $p = m/(1-\alpha)$ を中心とする角 $\varphi$ の回転を表しているから, 真の平面運動である.

真でない平面運動 (たとえば, 対称変換) に対する同様の記述を求めるためには, 和や差以外の演算–**複素共役化**–が必要である. 複素数 $z = x + iy$ の共役は, $\bar{z} = x - iy$ と定義される. 幾何学的には, 複素共役化は, 実軸に関する対称変換を表している (図 2.12)(p. 23 参照).

**練習 37.** 直線 $y = kx + b$ に関する次の対称変換の等式を証明せよ：

$$w = \bar{z} + 2bi, \quad if \quad k = 0, \tag{2.4}$$

$$w = \frac{1-k^2+2ki}{1+k^2}(\bar{z} + \frac{b}{k}) - \frac{b}{k}, \quad \text{if} \quad k \neq 0. \tag{2.5}$$

( ヒント：$\frac{1-k^2+2ki}{1+k^2} = \alpha^2$ とおいてみよう. ただし, $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi$ は直線 $y = kx + b$ と $x$ 軸とのなす角である.)

複素代数学を利用して解ける問題をあげておく.

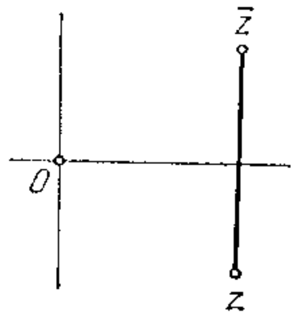


図 2.12: 複素共役

**問題 19** 海賊が宝物を捜している．手紙によると，その宝物をみつけるためには，まず宝島にある *2* 本の木 $A$, $B$ と，岩 $C$ をみつけなければならない (図 *2.14*)．点 $A$ を中心に，点 $C$ を時計回りに 90° 回転させた点を $D$, 点 $B$ を中心に，点 $C$ を反時計回りに 90° 回転させた点を $E$ とし，線分 $DE$ の中点 $K$ に宝物が埋められているという．しかし，その海賊は，$A$ と $B$ をみつけたが，$C$ をみつけることができなかった．どのようにして，$K$ の場所を捜しだしたらよいか．


図 2.13: 海賊

**解答**. 平面上に複素構造を導入する．すなわち，3 点 $A$, $B$, $C$ を表す複素数をそれぞれ $0$, $b$, $c$ とする (図 2.14)．このとき，2.2 式より，2 点 $D$, $E$ には，それぞれ複素数 $-ic$, $i(c-b)+b$ が対応する．よって，$K$ を表す複素数は $\dfrac{1-i}{2}b$ である．この表し方は文字 $c$ を含まないから，隠された場所は $c$ の場所に依存しないことがわかる．$K$ は $AB$ を斜線とする直角二等辺三角形の頂点である．

**練習 38.** 三角形 $ABC$ の 2 辺 $AB, AC$ を，$A$ の回りにそれぞれ反対方向に 90° 回転させる．このとき，新しい 2 端点をむすぶ直線は，三角形 $ABC$ の $A$ を通る中線に垂直であることを証明せよ．

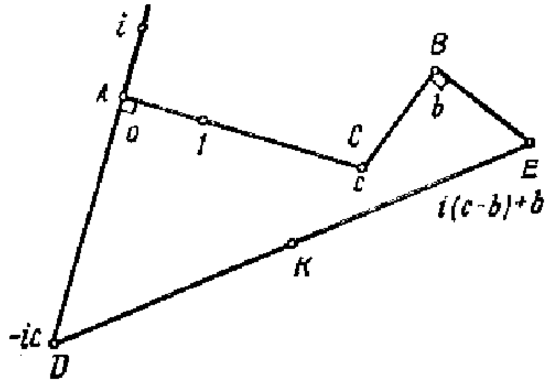


図 2.14: 宝物はどこ？

## 2.5 運動の合成

平面運動 $f, g$ が与えられているとする．このとき, $f \circ g$ を, 平面運動 $f$ と $g$ の**合成**または**積**という．本書では, まず $g$ を施し, 次に $f$ を施すことにする．

**定義 7** 平面運動 $f$ と $g$ の合成 $g \circ f$ は, 次の関係式によって定義される：

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad for \forall x.$$

変換 $f \circ g$ は運動である．事実, $f \circ g$ は 2 点間の距離を変えない．この節では, 運動の特別なタイプ—移動, 対称変換, 回転—の合成についてとりあげる．

**問題 20** $S_m \circ S_l$ を求めよ ( 図 2.11)．ただし, $S_l$, $S_m$ は, それぞれ直線 $l$, $m$ に関する対称変換とする．

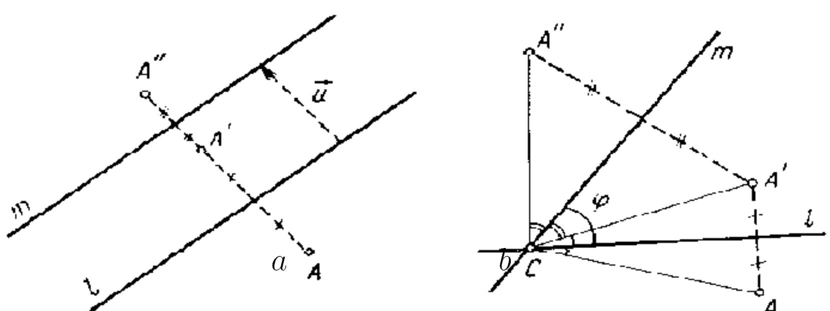


図 2.15: 対称変換の積

**解答.** 平面上の任意の点 $A$ に対して, $A' = S_l(A)$, $A'' = S_m(A')$ とする．

(i) $l \parallel m$ のとき (図 2.14a)．このとき, 3 点 $A$, $A'$, $A''$ は一直線上にある．その直線は $l$ と $m$ に垂直で $A$ と $A'$ の距離は 2 直線 $l$ と $m$ との距離の 2 倍である．

また, その距離は $A$ の位置に依存しない. よって, $S_l$ と $S_m$ の合成は, ベクトル $2\mathbf{u}$ による移動である：

$$S_m \circ S_l = T_{2\mathbf{u}}. \tag{2.6}$$

ただし, $\mathbf{u}$ は $l$ と $m$ に垂直なベクトルで, $l$ から $m$ へ方向づけられ, その大きさは $l$ と $m$ との距離に等しい.

$(ii)$ $l \not\parallel m$ のとき (図 2.14b). $C$ を $l$ と $m$ の交点, $\varphi$ を $l$ と $m$ のなす角とすると, 図から, $\angle ACA'' = 2\varphi$ であることがわかる. また, $|AC| = |A'C| = |A''C|$ に注意すると, 次の式が導かれる：

$$S_m \circ S_l = R_C^{2\varphi}. \tag{2.7}$$

ここで, $R_C^{2\varphi}$ は $C$ を中心とする角 $2\varphi$ の回転である ($\varphi < 0$ なら, 時計回り, $\varphi > 0$ なら, 反時計回りに回転させる).

読者は, 点 $A$ を図 2.15b とは異なる位置にとっても, 式 2.6 と 2.7 が成り立つことを確かめよ.

角 $\varphi$ は, $l$ から $m$ へ向かって計ることに注意しよう. たとえば, $\varphi = \pi/4$ のとき 2.7 式は, $l$ が $C$ を中心として正の方向に（反時計回りに）$45^\circ$ 回転すると, $m$ に重なることを意味する. したがって, 運動の合成 $S_m \circ S_l$ は合成の順序に依存する. 詳しく言うと, $S_l \circ S_m$ は $S_m \circ S_l$ の逆の運動である.

**練習 39.**　3 直線 $l, m, n$ が 1 点で交わっている. このとき, 運動 $(S_n \circ S_m \circ S_l)^2 = S_n \circ S_m \circ S_l \circ S_n \circ S_m \circ S_l$ は, どのような運動か ( まず, 平面の任意の点にその合成を施し予想をたててから, いままでの公式を用いて, その予想を証明するとよい ).

2.6, 2.7 を右辺から左辺にみると, 移動や回転を対称変換の積に分解する方法がわかる. この分解は一意的ではないので, 問題によっては, 軸のとり方でかなり本質的に証明できるものもある.

**問題 21** *2 つの回転の合成を式で表せ ( 図 2.16).*

**解答.** $(i)$ 2 つの回転の中心が一致するとき. $R_A^\varphi$, $R_A^\psi$ を, その 2 つの回転変換とすると, 次の式が成り立つ：

$$R_A^\varphi \circ R_A^\psi = R_A^{\varphi+\psi}. \tag{2.8}$$

$(ii)$ 2 つの回転の中心が異なるとき. $R_A^\varphi$, $R_B^\psi$ を, その 2 つの回転とすると, (2.7) より次の式が成り立つ：$R_A^\varphi = S_m \circ S_l$;　$R_B^\psi = S_p \circ S_n$. ここで, 2 直線 $l, m$ は点 $A$ で交わり, 角 $\varphi/2$ をなす. また, 2 直線 $n, p$ は点 $B$ で交わり, 角 $\psi/2$ をなす (図 2.16a 参照). ゆえに $R_A^\varphi \circ R_B^\psi = S_m \circ S_l \circ S_p \circ S_n$.

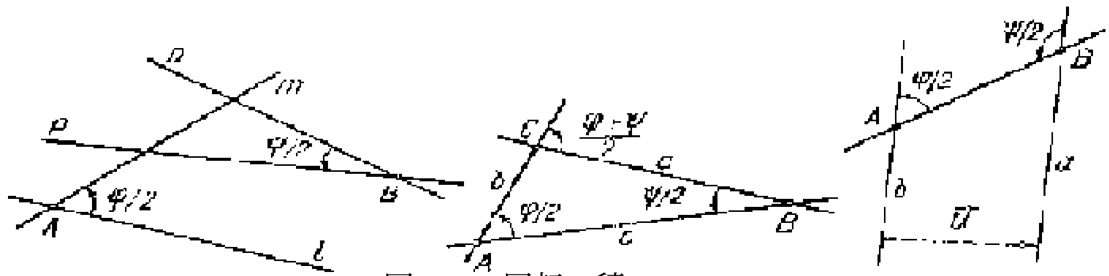

図 2.16: 回転の積

この式は $l = p$ のとき, $S_m \circ S_n$ と単純化できる．なぜなら, このとき, $S_l \circ S_p$ は**恒等変換**すなわち任意の点をそれ自身にうつす変換だからである．

さて, 改めて図 2.16b を考えてみよう．$c$ を $A$ と $B$ をむすぶ直線とする．このとき, $c$ を $A$ の回りに $\varphi/2$ 回転させると直線 $b$ と重なり, $c$ を $B$ の回りに $-\psi/2$ 回転させると直線 $a$ と重なる．$b \not\parallel c$ のとき．その交点を $C$ とすると, 次の式が成り立つ：

$$R_A^{\varphi} \circ R_B^{\psi} = S_b \circ S_c \circ S_c \circ S_a = S_b \circ S_a = R_C^{\varphi+\psi}.$$

$\alpha = \varphi/2$, $\beta = \psi/2$, $\gamma = \pi - \alpha - \psi$ とおくと, この式は次のようになる：

$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} = R_C^{-2\gamma}. \tag{2.9}$$

2.9 の両辺に右側から $R_C^{2\gamma}$ 倍すると, もっと対称的な形になる：

$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma} = \mathrm{id}\,. \tag{2.10}$$

逆も成立する．すなわち, 3 点 $A$, $B$, $C$ と角 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ( $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2\pi$ ) が 2.10 式をみたすなら, 角 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ は三角形 $ABC$ の頂点の角に等しい．

2.10 式は直接確かめられる．$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$ より, $R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma}$ は平行移動となる．$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma}$ が恒等変換であることを示すためには, それが不動点をもつことを確かめればよい．しかし, 図 2.17 によって, $A$ は連続する写像 $R_C^{2\gamma}, R_B^{2\beta}, R_A^{2\alpha}$ によって動かされないことがわかる．

$a \parallel b$ (i.e. $\varphi + \psi$ が $2\pi$ の倍数 ) のとき．

$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} = T_{2\mathbf{u}} \tag{2.11}$$

となる．ただし, $\mathbf{u}$ は図 2.16c で定義されているベクトルである．

さて, 今度は, 複素数表示を用いて 2 つの回転の合成を表す式を導いてみよう．

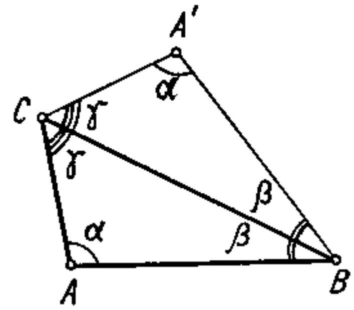


図 2.17: 3 つの回転の合成

複素平面上に複素数 $z$ をとる. $z$ に, 回転 $R_B^{\psi}$ を施したあと, 回転 $R_A^{\varphi}$ を施すことを式で表すと, 2.2 式より次のようになる：

$$\begin{aligned} R_B^{\psi}(z) &= q(z-b)+b; \\ R_A^{\varphi}(w) &= p(w-a)+a. \end{aligned}$$

ただし, $p=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $q=\cos\psi+i\sin\psi$.

$w$ の代わりに $R_B^{\psi}(z)$ を使うと, 合成は

$$\begin{aligned} (R_A^{\varphi}\circ R_B^{\psi})(z) &= p(q(z-b)+b-a)+a \\ &= pq(z-\frac{a-pa+pb-pqb}{1-pq})+\frac{a-pa+pb-pqb}{1-pq} \end{aligned}$$

となる. $pq=\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$ に注意すると, 次の式が成り立つ：

$$R_A^{\varphi}\circ R_B^{\psi}=R_C^{\varphi+\psi},$$

ここで, $C$ は複素数

$$c=\frac{a-pa+pb-pqb}{1-pq} \tag{2.12}$$

に対応する点である.

このように, 幾何学的な議論と代数的な議論は, 2 つの回転の合成に関して, 2 つの異なる式を導くことがわかる. (2.12) より, 次の系が導かれる：

**『三角形 $ABC$ の 2 頂点 $A$, $B$ を表す複素数をそれぞれ $a$, $b$ とし, 角 $A$, 角 $B$ の大きさをそれぞれ $\varphi/2$, $\psi/2$ とすると, 頂点 $C$ を表す複素数は 2.12 から求められる.』**

さて, 運動の合成とこれまでの公式を用いて, 次の問題を解いてみよう.

**問題 22** 図 *2.18* のように, 三角形 $ABC$ のすべての辺上に正三角形が描かれている. これらの *3* つの正三角形の中心を $M$, $N$, $P$ とするとき, 三角形 $MNP$ は正三角形であることを証明せよ. [2]

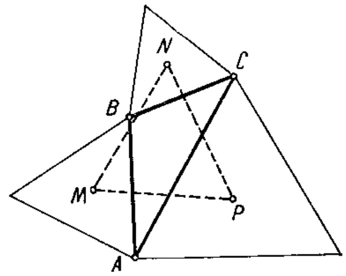


図 2.18: Napoléon の問題

**解答.**　三角形 $AMB$, $BNC$, $CPA$ を頂角 $120^\circ$ の二等辺三角形とし, $F = R_P^{120^\circ} \circ R_N^{120^\circ} \circ R_M^{120^\circ}$ とする. 2.9, 2.10 より $F$ は, 回転あるいは平行移動である. その回転角の和は $360^\circ$ であるから, $F$ は平行移動でなければならない. ここで, 点 $A$ が関数 $F$ によってどのように動くのかをたどってみると, $R_M^{120^\circ}(A) = B$, $R_N^{120^\circ}(B) = C$, $R_P^{120^\circ}(C) = A$ であることがわかる. ゆえに, $F(A) = A$. よって, $F$ はゼロベクトルによる移動, すなわち恒等変換である:

$$R_P^{120^\circ} \circ R_N^{120^\circ} \circ R_M^{120^\circ} = \mathrm{id}\,.$$

この式と 2.10 を比較すると, 結果として, 三角形 $MNP$ は正三角形であることがわかる.

**練習 40.**　問題 22 を複素数表示を用いて解け.

**練習 41.**　1 つの四角形と, その 4 辺がそれぞれ正方形の一辺となるように 4 つの正方形が描かれている. このとき, それらの正方形の中心を適当にむすぶと, 両対角線が互いに垂直で長さが等しくなることを示せ.

**練習 42.**　次の 2 つの変換の合成を求めよ：
1) 2 つの中央対称；
2) 1 つの中央対称と 1 つの線対称.

**練習 43.**　五角形のすべての辺の中点が与えられているとき, その五角形を構成する方法を述べよ.

## 2.6　映進

これまで, 移動, 回転, 対称変換という 3 種類の運動をみてきた. けれども, これら 3 種類以外の平面運動が存在する. たとえば, 練習 42 のような線対称と中央対称の積は, これら 3 種類のどれにも属さない.

[2] この問題は **Napoléon の問題**として知られている. しかし, フランスの有名な将軍 Napoléon が, この問題をつくったわけではない.

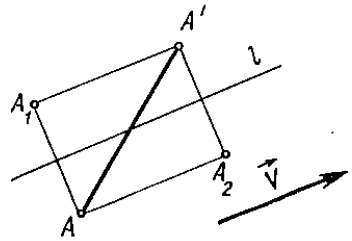


図 2.19: 映進

**定義 8** $v$ を直線 $l$ に平行なベクトルとする．このとき，**軸 $l$ と $v$ に関する映進**とは，対称変換 $S_l$ と移動 $T_v$ の合成である *(図 2.19 参照)*.

この映進を $U_l^v$ と表すと，等式 $U_l^v = T_v \circ S_l = S_l \circ T_v$ が成り立つ．なぜならば，図 2.15 の四角形 $AA_1A'A_2$ は，つねに直角四角形だからである．他の平面運動と同様に，映進は幾何学的な問題を解くのに大変有効である．

**問題 23** 三角形 $ABC$ が与えられている．このとき，$AD = BE$, $AC \parallel DE$ となる辺 $AB$ 上の点 $D$ と辺 $BC$ 上の点 $E$ を求め，2 点 $D, E$ を通る直線を描け．

**解答.** この答えは，映進の次の 2 つの性質がネックになる．この性質は図 2.19 をみるとすぐわかるだろう：

1. 任意の点とその点の映進による像とをむすぶ線分の中点は，つねにその映進の軸上にある；
2. 映進の軸は，その映進の運動によって動かされない．

半直線 $AB$ を半直線 $BC$ にうつす映進 $U$ がある．その対称軸は，直線 $NK$ である．ただし，$N$ は，線分 $AB$ の中点で，$K$ は $NB = BK$ となる線分 $BC$ 上の点である．仮定より，$AD = BE$ である．ゆえに，$U(D) = E$. また，$DE$ の中点は直線 $NK$ 上になければならない．しかし，$DE \parallel AC$ より，$DE$ の中点は，中線 $BM$ 上にあることになる．よって，3 線分 $DE$, $BM$, $NK$ は 1 点で交わる．このように，2 点 $D$, $E$ を通る直線は，次の順序で描ける：まず，先に述べた 2 点 $N$, $K$ を探す．次に，中線 $BM$ を描く．最後に，$BM$ と $NK$ の交点を通り，線分 $AC$ に平行な直線を描く．これが求める直線である．

**練習 44.** 点 $A$ と 3 直線 $l$, $m$, $n$ が与えられている．このとき，$A$ を通る直線 $k$ で，次をみたすものを描け：$S_l \circ S_m \circ S_n(k) \parallel k$.

**練習 45.** 複素数を用いて，映進を表す式を求めよ．

## 2.7 運動の分類

前節で新しい種類の平面運動が紹介されたので, 結局いままでに 4 種類の平面運動があることがわかった. ここで, おのずと次のような問題がおこってくる:「いままでにでてきた 4 種類の平面運動以外の平面運動は存在するか？」これは次の定理によって答えられる.

**定理 4** 任意の平面運動は, 移動, 回転, 対称変換, 映進のうちのどれかである.

**証明** まず第一に, 平面運動は独立な 3 点 $A$, $B$, $C$ の像によって完全に定義されることに注意しよう. 実際, 3 点 $A'$, $B'$, $C'$ がそれぞれ $A$, $B$, $C$ の像であるならば, 任意の点 $D$ に対して, ただ 1 つの点 $D'$ が存在して, $A'$, $B'$, $C'$ から点 $D'$ への距離がそれぞれ $A$, $B$, $C$ から $D$ への距離と等しくなるからである.

第二に, 任意の 2 点 $M$, $M'$ に対して, $M$ を $M'$ にうつす対称変換があることに注意しよう. 実際, この対称変換は一意的に定義される. すなわちそれは対称軸が線分 $MM'$ の垂直二等分線である対称変換である.

以上 2 つの注意点から, 次のことがわかる：

**『任意の平面運動は, 対称変換の積で表される』**(問題 21 参照)

実際, $f$ を任意の平面運動, $A$, $B$, $C$ を平面上の独立な 3 点, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $A' \neq A$ とする. また, $A$ を $A'$ にうつす対称変換を $S_l$ とし, $B_1 = S_l(B)$, $C_1 = S_l(C)$ とする (図 2.20). このとき, $B_1 \neq B'$ であるならば, $B_1$ を $B'$ にうつす対称変換を $S_m$ とすると, $S_m(A') = A'$, $C_2 = S_m(C_1)$ である. 最後に, もし $C_2 \neq C'$ ならば, $C_2$ を $C'$ にうつす三番目の対称変換 $S_n$ を求める. このような最悪の場合, つまりこのような手順のすべてが必要なとき, $f$ は $S_n \circ S_m \circ S_l$ と表される. もしいくつかのステップが不必要なら, $f$ は 1 つの対称変換, あるいは 2 つの対称変換の合成として表される.

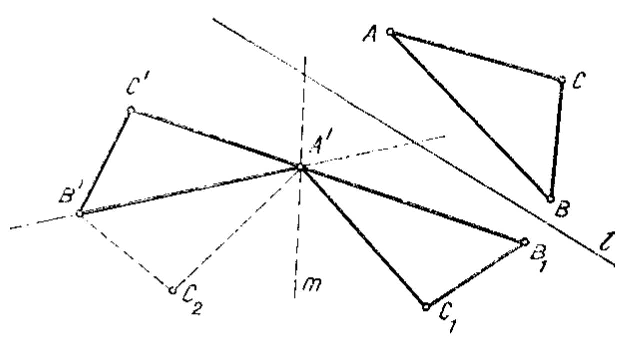


図 2.20: 平面運動の対称変換への分解

さて, 3 つ以下の対称変換の積が, いままでにでてきた 4 種類の平面運動のうちの 1 つであることを証明しよう. 実際, 1 つの対称変換は対称変換である. 2 つの対称変換の積は, 回転あるいは移動である. 唯一の明らかでない場合は, 3 つの対称変換の積 $S_n \circ S_m \circ S_l$ である.

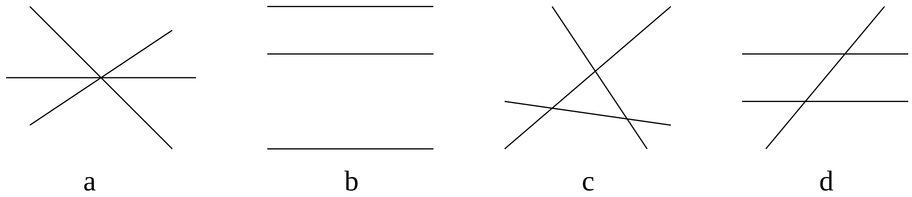


図 2.21: 平面上の 3 直線

平面上の 3 直線の位置関係は, 図2.21の 4 つの異なるパターンのうちのどれかになる. $(a)$ と $(b)$ の場合, $S_n \circ S_m \circ S_l$ は対称変換であり, $(c)$ と $(d)$ の場合, $S_n \circ S_m \circ S_l$ は映進であることを示そう.

$(a)$ の場合. $S_m \circ S_l$ は, $m$ と $l$ のなす角の 2 倍角の回転である. $l'$ を, $S_m \circ S_l = S_n \circ S_{l'}$, $l' \neq l$, $l' \neq m$ をみたし, しかも $l$ と $m$ の交点を通る直線とすると, 次の式が成り立つ：

$$S_n \circ S_m \circ S_l = S_n \circ S_n \circ S_{l'} = S_{l'}.$$

$(b)$ の場合. $(a)$ と同様な議論が成り立つ.

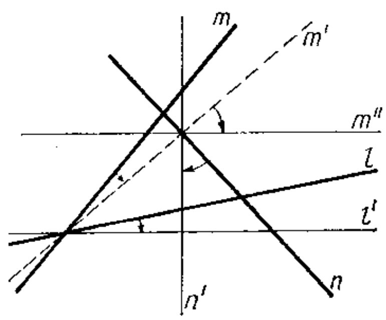


図 2.22: 2 つの回転を施す

$(c)$ の場合. 3 つの対称変換の積を 2 つの対称変換の積におきかえる. まず, $S_m \circ S_l$ を同値な積 $S_{m'} \circ S_{l'}$ でおきかえると, $S_n \circ S_m \circ S_l = S_n \circ S_{m'} \circ S_{l'}$ である. ただし, $m' \perp n$ (図2.22). 同様に, 積 $S_n \circ S_{m'}$ を $S_{n'} \circ S_{m''}$ でおきかえると

$$f = S_n \circ S_m \circ S_l = S_n \circ S_{m'} \circ S_{l'} = S_{n'} \circ S_{m''} \circ S_{l'}.$$

ただし, $n' \perp l'$. $l' \parallel m''$ より, $S_{m''} \circ S_{l'}$ は $n'$ 方向への平行移動である. よって, $f$ は映進である.

最後に, $(d)$ は $(c)$ の場合に帰着される. なぜなら, もし 3 直線のうちの 2 直線 ($n$ と $m$ または $m$ と $l$) が同じ角で回転するなら, 合成 $S_n \circ S_m \circ S_l$ は変化しないからである. □

平面運動は複素数で簡単に表される. 先に証明した定理 3 より, 平行移動と回転は関数 $\alpha z + m$ with $|\alpha| = 1$ で表される.

**定理 5** 平面の対称変換と映進全体の集合は

$$w = \alpha\bar{z} + m \tag{2.13}$$

によって表される平行移動全体の集合に等しい．ただし, $\alpha$, $m$ は複素数, $|\alpha| = 1$.

**証明** 練習 37, 45 から, 対称変換と映進はこのような式で表されることがわかる.

後半を証明するにあたっては, 平行移動 2.13 と標準的な対称変換 $z \mapsto \bar{z}$ の合成は $z \mapsto \alpha z + m$ となることに注意しよう．これは, 定理 3 より, 平行移動か回転のどちらかになる.

## 2.8　方向

これまで 4 種類の平面運動—移動, 回転, 対称変換, 映進—をみてきた．最初の 2 つは, 偶数個 (2 個) の対称変換の積として表される．これを**真の**平面運動という．残りの 2 つは, 奇数個 (1 個, または 2 個) の対称変換の積として表される．これを**真でない**平面運動という．なぜならば, このような真でない平面運動を物理的に実行するためには, 平面空間から脱出しなければならないからである (3 次元空間で平面を裏返さなければならない).

この 2 種類の平面運動は, **方向**の概念によって区別できる.

順序づけられた独立な 3 点 $A$, $B$, $C$ は, この順序が三角形 $ABC$ を反時計回りにまわるとき, **正に方向づけられている**という．また, その順序が三角形 $ABC$ を時計回りにまわるとき, その 3 点は**負に方向づけられている**という.


図 2.23: 3 つのパック

**練習 46.**　3 つのアイスホッケー用の円盤が, 平面上で三角形を形成している．ホッケー選手が, 1 つの円盤をえらび, 残りの 2 つの円盤の間を通過するようにまっすぐスティックで打つ．25 回打ったあと, 3 つの円盤はすべてもとの位置にもどることができるか.

どのような平面運動 $f$ も平面上のどのような 3 点もすべて方向を変えないか, あるいはすべて方向を逆にするかのどちらかであることは注目すべきことである．つまり, 平

面上の任意の 3 点 $A$, $B$, $C$ に対して, $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ の方向は, $A$, $B$, $C$ の方向と同じであるか—または逆方向であるかのどちらかである.

とくに, 容易にわかるように, 真の運動 (移動, 回転) は方向を保存する運動で, 真でない運動 (対称変換, 回転) は方向を逆にする運動である.

したがって, **奇数個の対称変換の合成は恒等変換ではない**ことがわかる.

方向の概念は, 複素数表示によって表すことができる.

**練習 47.** 3 つの複素数の組 $(z_1, z_2, z_3)$ が, 正に方向づけられるための必要十分条件は, $0 \leq arg(z_3 - z_1)/(z_2 - z_3) \leq 2\pi$ が成り立つことであることを示せ.

## 2.9　対合の計算

**定義 9** 変換 $f$ は, *2* つの等式

$$f \neq \mathrm{id}, \quad f^2 = f \circ f = \mathrm{id}$$

をみたすとき, **対合**といわれる. 二番目の等式は, 条件

$$f = f^{-1}$$

と同値である. すなわち, $f(A) = B$ が成り立つための必要十分条件は, $f(B) = A$ が成り立つことである.

平面運動には, 次の 2 種類の対合がある：

- $R_A$ —点 $A$ の回りの $180^\circ$ 回転 ( 2.3 節参照)；
- $S_l$—直線 $l$ に関する対称変換 ( 2.2 節参照).

対合の運動は, 2 種類の幾何学的な対象—点と線—に対応する. この対応は実際, 1 対 1 対応である. なぜなら, 異なる点および異なる直線は, 異なる対合を生成するからだ. したがって, 幾何学的な対象から対合への移行は, すべての情報を保存し, 点と線についてのすべての事実は, 対応する対合の言葉にいいかえられる.

**問題 24** 直線 $l$ と直線 $m$ が垂直であることに同値な性質を, *2* つの対称変換 $S_l$, $S_m$ の組の性質として述べよ.

**解答.** $S_m \circ S_l$ は, $l \parallel m$ のとき移動となり, $l$ と $m$ のなす角が $\varphi$ であるとき角 $2\varphi$ の回転となる. よって, $m = l$ でない限り, 合成変換 $S_m \circ S_l$ は, 決して恒等変換にはならない. $(S_m \circ S_l)^2$ は (前者の場合) 移動あるいは (後者の場合) $4\varphi$ の回転である. したがって, 2 直線 $l$, $m$ が垂直であるための必要十分条件は

$$(S_m \circ S_l)^2 = \mathrm{id} \tag{2.14}$$

である. よって, $S_m \circ S_l$ は対合である. この対合は, この与えられた2直線の交点の回りの裏返しであることに注意しよう. 等式 2.14 の両辺に左から $S_m$, 右から $S_l$ を施すと, 次の等式が得られる：

$$S_m \circ S_l = S_l \circ S_m. \tag{2.15}$$

すなわち, 対合 $S_m$ と対合 $S_l$ は**交換可能である**. これが求める必要十分条件である.

ここで, 可換性と結合法則について述べよう. 一般に, 運動の合成は可換であるとは限らない. いまみたように, 2つの異なる対称変換が可換であるための必要十分条件は, その2つの対称軸が垂直であることである. 一方, 運動の合成に関しては, 次のことが成り立つ：

**『変換の合成と同様に, 運動の合成に関して結合法則がみたされる.』**

実際, 集合 $V$, $W$, $X$, $Y$ と写像 $f$, $g$, $h$ が, 次のように与えられているとする：

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} Y.$$

このとき, 次の合成をつくることができる： $g \circ f : V \to X$, $h \circ g : W \to Y$, $h \circ (g \circ f) : V \to Y$, $(h \circ g) \circ f : V \to Y$.

結合法則がみたされるということは, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立つことを意味する.

このほとんど明らかな性質をきちんと証明するためには, 合成の意味 (定義) を理解すれば十分である. たとえば, ここで, 写像 $g \circ f$ は, 任意の元 $v \in V$ で, $(g \circ f)(v) = g(f(v))$ と定義されているから, 次の式が成り立つ：

$$(h \circ (g \circ f))(v) = h((g \circ f)(v)) = h(g(f(v))) = (h \circ g)(f(v)) = ((h \circ g) \circ f)(v). \tag{2.16}$$

よって, 任意の元において, $h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ の値は等しい. ゆえに, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

結合法則がよく理解できる例をあげよう.

$f$, $g$, $h$ がそれぞれくつ下, ブーツ, オーバーシューズをはく運作であるとする. このとき, $(h \circ g) \circ f$ は, まずくつ下をはき, それからオーバーシューズの内側にブーツを入れたものをくつ下をはいた足に身につける動作を意味する. 一方, $h \circ (g \circ f)$ は, まずくつ下を入れたブーツをはいて, それからそのブーツの上にオーバーシューズをはく動作である. 明らかにこの2つの結果は同じである！

このような動作の合成は必ずしも可換ではない. たとえば, くつ下をはいてブーツをはく動作は, ブーツをはいてくつ下をはく動作と結果として同じではない (可換ではない). しかし, 交換可能な (可換な) 動作も存在する. たとえば, 1つの足にくつ下をはくことと, もう片方の足にくつ下をはくことである.

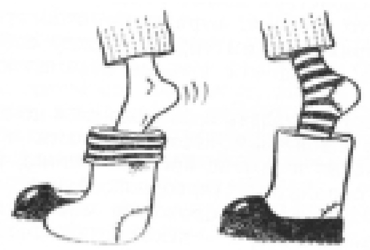

図 2.24: 結合法則

同じように, いくつかの合成の逆操作も考えられる. たとえば, くつ下をはき, それからブーツ, それからオーバーシューズをはくという一連の動作の逆の動作は, オーバーシューズを脱ぎ, それからブーツ, それからくつ下を脱ぐ動作になる. したがって, 次の式が成り立つ：

$$(h \circ g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}.$$

それでは, 具体的に対合の計算をしてみよう.

**問題 25** *4* 点 $A, B, C, D$ が平行四辺形を形成するための条件を, 対合を用いて表せ.

**解答.** 練習 42 より, $R_A \circ R_B = T_{2\overrightarrow{BA}}$, $R_D \circ R_C = T_{2\overrightarrow{CD}}$ である. 四角形 $ABCD$ ( この順で頂点をもつ ) が, 平行四辺形であるための必要十分条件は, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ であから, このことは, 次の条件と同値である：

$$R_A \circ R_B = R_D \circ R_C.$$

この式は, 次のように書き直される：$R_A \circ R_B \circ R_C \circ R_D = \mathrm{id}$, または

$$R_A \circ R_B \circ R_C = R_D. \tag{2.17}$$

(2.16) 式は, 与えられた 3 頂点から, 平行四辺形の残りの頂点を求める式とみなすこともできる.

**練習 48.** 次の幾何学的な事実を, 対応する対合間の代数的な関係式で表せ：
$(a)$ 点 $A$ は直線 $l$ 上にある；　$(b)$ 点 $A$ は線分 $BC$ の中点である.

**練習 49.** 次の関係式の幾何学的な意味を述べよ：
$(a)$　$R_A \circ S_l = S_l \circ R_B$;　$(b)$　$(S_n \circ S_m \circ S_l)^2 = \mathrm{id}$.

対合の式を使うと, 平面上の点と線についての情報を簡潔に表せることがある. 例をあげよう.

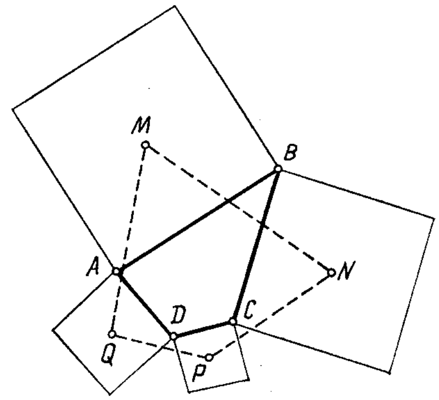


図 2.25: 四辺形の 1 辺を 1 辺とする正方形

**問題 26** 図 *2.25* のように, 四角形 $ABCD$ と, その *4* 辺をそれぞれ一辺とする *4* つの正方形が描かれているとする. ただし, 図の $M$, $N$, $P$, $Q$ は, それぞれ対応する正方形の中心である. このとき, 四角形 $MNPQ$ が正方形になるための四角形 $ABCD$ の条件を述べよ.

**解答.** 四角形 $MNPQ$ の 2 つの対角線が, 互いに垂直であることはすで示した (練習 41 参照). したがって, 四角形 $MNPQ$ が正方形になるための必要十分条件は, 四角形 $MNPQ$ が平行四辺形であることである. 問題 25 より, この条件を次のように 4 つの対合に関する条件として書くことができる：

$$R_M \circ R_N \circ R_P \circ R_Q = \mathrm{id}\,. \tag{2.18}$$

2.9 式より次が成り立つ：

$$\begin{aligned} R_M &= R_A^d \circ R_B^d; \\ R_N &= R_B^d \circ R_C^d; \\ R_P &= R_C^d \circ R_D^d; \\ R_Q &= R_D^d \circ R_A^d. \end{aligned}$$

ただし, $d = 90^\circ$ とする. また, $R_M$ のように, 回転角が記されていない回転は $180^\circ$ 回転とする. この式を (2.18) に代入すると

$$R_A^d \circ R_B \circ R_C \circ R_D \circ R_A^d = \mathrm{id} \tag{2.19}$$

となる. この式の両辺に左と右からそれぞれ $R_A^{-d}$ をかけると, 次のようになる：

$$R_B \circ R_c \circ R_D = R_A.$$

2.17 より, この式は四角形 $ABCD$ が平行四辺形であることを表している. よって, 四角形 $MNPQ$ が正方形になるための必要十分条件は, 四角形 $ABCD$ が平行四辺形であることである.