第3章　変換群

群の概念は, 2つの異なる考え方—幾何学的な考え方と代数的な考え方—を合わせもつ.

幾何学的な面で**変換群**は対称性の法則を数学的に表現する. すなわち, 与えられた対象を変えない変換が多くあればある程, その与えられた対象は対称的なのである.

代数的な面で**抽象群**は数学にお馴染みの演算の共通の顔である. このような演算の例—数や点の足し算やかけ算, ベクトルの足し算, 移動の合成—は1,2章で考察された.

3.1　平面をころがる三角形

変換群がよくわかる問題から始めよう.

問題 27 平面に正三角形 ABC がある. 正三角形 ABC を, 一辺を固定して, $180°$ パタッとひっくりかえす. このような操作を何回か行った結果, 正三角形 ABC がもとの位置にもどったならば, そのとき, 3 頂点 A, B, C は, それぞれ同じ位置にもどっていることを証明せよ.

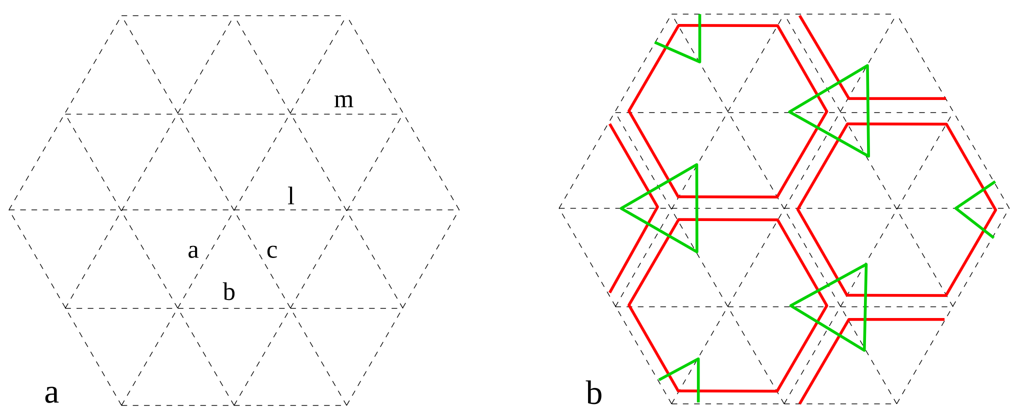


図 3.1: ころがる三角形の敷き詰め模様

解答. 正三角形 ABC の一辺を固定して, $180°$ ひっくりかえす操作を, どのように辺をえらび, どのような回数施したとしても, 辺 BC, AC, AB は図3.1aの網状組織のなかの線分にうつる.

このような変換は, これらの直線に関する対称変換の合成である. G をこのような変換すべての集合としよう. G の元は, たとえば, 頂点を中心とする $120°$ の回転や, 正三角形の中線を対称軸とする映進などである.

この問題は, G に属する平面運動で, 三角形 ABC を三角形 ABC にうつすものが, 恒等変換のみであることを証明すればよい. 恒等変換以外で, 三角形 ABC を三角形 ABC にうつす平面運動には次の 5 種類がある： 三角形の中心の回りの 2 つの自明でない回転と, 三角形の中線に関する 3 つの対称変換である. このどれも, G に属さないことを示さなければならない.

読者のなかにはこれまでに, 良い例や反例を作ることによって問題を解決したことがあるだろう. ここでも同じ方法をとる—しかし, 作りたい例は次のような変わったものである. すなわち, 次の 2 つの性質をもつ模様である. この模様を**敷き詰め模様**という：

1. 3.1a に示される任意の直線に関して対称である；
2. 三角形 ABC の中線に関して**対称的でなく**, かつ, 三角形の重心を中心とする回転に関しても**対称的でない**.

1 の性質は, その敷き詰め模様が G に属するどのような運動によっても変わらないことを意味する. 2 の性質は, G がその三角形の 5 つの自明でない運動をどれも含まないことを意味する.

上のような 2 つの性質がある敷き詰め模様を作らなければならない. 適切な例として, 図 3.1b でみられるような昔の中国の敷き詰め模様（格子細工）がある. もちろん, このような例は一意的ではない. このような例をつくる一般的なレシピは, 次のように述べられる.

まず, 三角形 ABC 内に**完全非対称の模様**を描く. これは, 三角形 ABC の自明でない運動によって形が変わる模様である. 次に, その三角形の辺に関する対称変換を連続的に施すことによって, 三角形 ABC とともに, この模様も一緒に動かしてみる. そして最後に, そのようなすべての図形の和をとる. このような作り方は, 三角形 ABC の内部にある模様が色で染められていて, 三角形が回転すると, 色で跡を残すのをイメージするとよくわかるだろう.

練習 50.　問題 27 の 3 点 A, B, C を $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(0,6)$ となるように, 平面上に座標系を導入せよ (p.17 の定義 3 参照)(三角形 ABC は問題 27 と同様に, 正三角形である !). 三角形 ABC 内の模様として, 点 $K(3,1)$ をとるとする. このとき, この模様から, 結果としてできる敷き詰め模様を描け. また, そのような点すべての座標を求めよ.

練習 51.　問題 27 の主張は, 正三角形 ABC を次の 3 つの大きさの角をもつ三角形におきかえても成立するか：

(a) $45°, 45°, 90°$;

(b) $30°, 60°, 90°$;

(c) $30°, 30°, 120°$.

3.2　変換群

定義 10 変換群は, 次の *2* つの性質をみたす変換の集合 G である：

1. *2* つの変換 f, g が G に属するならば, 合成 $f \circ g$ も G に属する；
2. 任意の変換 $f \in G$ に対して, 逆変換 f^{-1} は G の元である.

この 2 つの性質は, G の元どうしが相互に関係づけられていることを意味する. その全体はその合成のもとで閉じているから, 逆変換も元としてもつ. 演算で閉じた集合の概念は, 問題 1 をはじめ, 何回かこれまでにでてきたことを思いおこそう.

例 1. 問題 27 の解答における変換の集合 G は変換群である. 性質 1 は, 問題 27 を解くのに重要である. それは作り方から明らかである. 性質 2 もまた, 対称変換の列の逆変換は, 逆の順番で施される同様の対称変換の列だから明らかである.

例 2. 与えられた集合 M の変換全体の集合は, 変換群をなす. これを $Tr(M)$ と表す.

練習 52. 任意の変換群は恒等変換を含むことを証明せよ.

問題 27 の議論では, G の他に $\mathcal{M}$ (平面運動全体の群) と D_3 (正三角形の対称群) を扱った.

G と D_3 はどちらも $\mathcal{M}$ に含まれている. このことを, G と D_3 は $\mathcal{M}$ の**部分群**であるという. 一般に, 平面図形 Φ が与えられたとき, Φ を Φ にうつす平面運動全体の集合を考えることができる. この集合を, 図形 Φ の**対称群**または**運動群**といい, $\mathrm{Sym}(\Phi)$ と表す. $\mathrm{Sym}(\Phi)$ の任意の元は, 図形 Φ の**対称**といわれる. たとえば, D_3 は正三角形の対称群であるから, $\mathrm{Sym}(\triangle) = D_3$ である.

問題 27 の G もまた, ある図形 (図 3.1b で描かれた模様) の対称群である. このことを確かめるためには, この模様を変えない任意の運動が, この三角格子の直線に関する対称変換のいくつかの合成であることを確認するだけでよい.

練習 53. このことを確かめよ.

対称群によって, 変換群の多数の興味ある例を作ることができる. いくつかの例を考えてみよう.

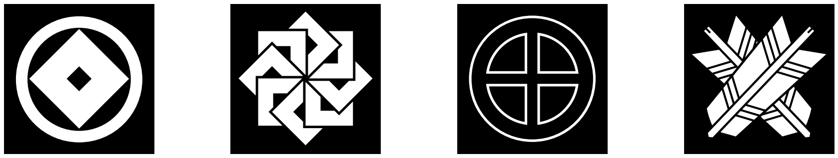
問題 28 図 *3.2* は日本の**家紋**とよばれるものである. それらのおのおのの対称群を求めよ. また, 同じものはどれとどれか.

解答. Φ_1 は, 45° の角をなす 4 本の軸に関して線対称であり, $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 回転によって変化しない. また, 任意の変換群と同様に, $\mathrm{Sym}(\Phi_1)$ は恒等変換を含む. したがって, その元の総数は 8 である.

$\mathrm{Sym}(\Phi_2)$ も 8 個の元からなる. しかし, $\mathrm{Sym}(\Phi_1)$ とは異なる. なぜならば, $\mathrm{Sym}(\Phi_2)$ の任意の元は回転だからである.

Φ_3 と Φ_1 の対称群は同じである. すなわち, どちらの群も恒等変換を含む 4 つの対称変換と 4 つの回転で構成される.

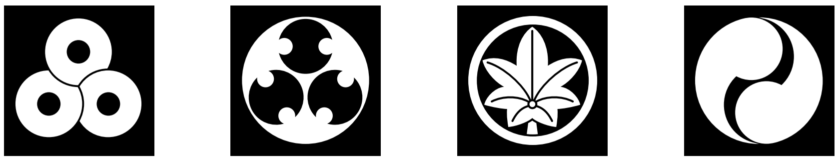
Φ_4 には自明な変換しか含まれない. したがって, 対称群 $\mathrm{Sym}(\Phi_4)$ はただ 1 つの元—恒等変換—で構成される.



a　*b*　*c*　*d*

図 3.2: :家紋その 1

練習 54.　3.3, a—d の対称群を求めよ．更に, a ～ d を互いに比較せよ．また, a ～ d を問題 28 の群とも比較せよ．



a　*b*　*c*　*d*

図 3.3: 家紋その 2

3.3　有限変換群の分類

図 3.2 と図 3.3 の図形の対称群は, いくつかの回転で構成されているか, あるいはいくつかの回転と, その回転と同数の (恒等写像を含む) 対称変換で構成されている．このことを一般化して, 定理にすることができる．その定理を述べる前に, いくつかの用語を説明しよう．

変換群が有限個の元で構成されているとき, それは**有限である**といわれる．3.2 と 3.3 の図の対称群はすべて有限である．無限個の元からなる群は**無限群**といわれる．平面運動全体の群 $\mathcal{M}$ と問題 27 の群 G は無限である．

群の**位数**とは, その群が含む元の個数である．有限群は有限位数の群である．

ある 1 点を中心とする $360°/n$ の整数倍回転で構成される群を**位数** n **の巡回群**といい, C_n と表す．C_n のすべての回転と n 個の対称変換で構成される群を **位数** $2n$ **の二面体群**といい, D_n と表す．ただし, D_n の対称変換の n 本の対称軸はすべて回転の中心を通り, 隣どうしの 2 本は $180°/n$ の角をなすものとする．

たとえば, Fig. 3.2 と 3.3 の 8 つの図の対称群は, 左からそれぞれ D_4, C_8, D_4, C_1, C_3, D_3, D_1, C_2 である．

定理 6　平面運動の任意の有限群は C_n または D_n のどちらかである．

証明　この定理を証明するにあたって, まず次のことを理解しておこう．

『有限群は平行移動を含まない.』

実際, 有限群がベクトル $\mathbf{a}$ による平行移動を含むとすると, その有限群は, 倍数のベクトル $n\mathbf{a}$ による無限個の平行移動も含まなければならない. これは矛盾である.

『有限群は映進を含まない.』

実際, 有限群に映進が含まれるとすると, その有限群にはその映進の 2 乗も含まれなければならない. しかし, 映進の 2 乗は平行移動であるから, その群は有限群ではありえないことになる. これは矛盾である.

結論として, **任意の平面運動の有限群は, 回転と対称変換だけで構成される**ことがわかる.

有限群に属する回転の中心はすべて等しい. なぜならば, 次の練習問題からわかるように, 異なる点を中心とする 2 つの回転を元として含む群は, 平行移動を元としてもってしまうからである.

練習 55. A, B を平面上の異なる 2 点とし, φ, ψ を $360°$ の倍数でない角とするとき, $R_B^{-\psi} \circ R_A^{-\varphi} \circ R_B^{\psi} \circ R_A^{\varphi}$ は, 自明でない移動であることを証明せよ.

与えられた有限群に属するすべての回転を R_A^0, $R_A^{\varphi}, \cdots, R_A^{\omega}$ $(0 < \varphi, \cdots, \omega < 360°)$ とし, これらの角 $\varphi, \cdots, \omega$ の最小値を ψ とする. このとき, φ 以外のすべての角は ψ の倍数でなければならない. 実際, φ が ψ で割り切れないと仮定すると, $\varphi = k\psi + \xi$ $(0 < \xi < \psi)$ と書ける. したがって, 角 ξ の回転もその群に属さなければならない. $\xi < \psi$ より, これは矛盾である.

ある適当な整数 n が存在して, $\psi = 360°/n$ でなければならない—そうでなければ, R_A^{ψ} のある累乗は ψ より小さな角で表されるからである. このように, 平面運動の任意の有限群に属するすべての回転は, $R_A^{k\psi}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1, \psi = 360°/n)$ であることがわかる. もし, その群が対称変換を含まないならば, それは C_n である.

次に, その群が n 個の回転と, 少なくとも 1 つの対称変換を含むと仮定しよう. このとき, その群の対称変換の個数がちょうど n 個であることを示す.

実際, R_1, $R_2, \cdots, R_n$ を n 個の異なる回転とし, S をある対称変換とすると, $S \circ R_1$, $S \circ R_2, \cdots, S \circ R_n$ は, n 個の異なる対称変換である. したがって, 対称変換の個数は n 以上である. 同様に, その群の回転の個数も対称変換の個数以上になる. なぜならば, S_1, $S_2, \cdots, S_m$ が m 個の異なる対称変換ならば, $S_1 \circ S_1$, $S_1 \circ S_2, \cdots, S_1 \circ S_m$ は m 個の異なる回転だからである (恒等変換を含む).

このように, 平面運動の任意の有限群は C_n または, ある点を中心とする n 個の回転とその回転と同数の対称変換で構成されることがわかる. $n = 1$ のとき, その有限群は 1 個の対称変換と恒等変換を要素として含む位数 2 の群 D_1 である. $n \geq 2$ のとき, すべての対称変換の対称軸が回転の中心を通ることを示さなければならない. まず, 有限群は平行な 2 直線をそれぞれ対称軸とする 2 つの対称変換を含まないことに注意しよう. なぜならば, その積はゼロベクトルでないベクトルによる移動だからである. したがって, 任意の 2 本の対称軸は交点がある. その対称軸が点 P で交わり, なす角が φ の 2 つの対称変換の積はまたその群に属し, P の回りの角 2φ の回転となる. よって, 点 P は, すべ

ての回転の中心 A と一致しなければならない．一方，角 φ は $180°/n$ の整数倍でなければならない．したがって，その有限群は D_n であることがわかる．これで示せた．　□

練習 56.　a) 対称軸がちょうど 2 本の平面図形は存在するか．b) 対称点がちょうど 2 点の平面図形は存在するか．

練習 57.　一番対称的で (つまり，一番大きい対称群をもつ) 有界な平面図形を指し示し，名を述べよ．

3.4　共役変換

問題 28 の解答のところで，Φ_1 と Φ_3 の対称群は同じであると述べた．すなわち $\mathrm{Sym}(\Phi_1) = \mathrm{Sym}(\Phi_3)$ である．この等式の厳密な意味は何だろうか？さらに，もっと一般的に，前節で証明した分類定理の厳密な意味は何だろうか？ この疑問について少し考えよう．

このような対称群どうしの等号は，言葉でいうと次の意味がある：2 つの図形 Φ_1, Φ_3 が中心も対称軸も一致するように置かれているときのみ，集合 $G = \mathrm{Sym}(\Phi_1)$ と集合 $H = \mathrm{Sym}(\Phi_3)$ は一致する．そうでなければ，G と H は密接に関係づけられているが異なるものである．次にこの関係について説明しよう．

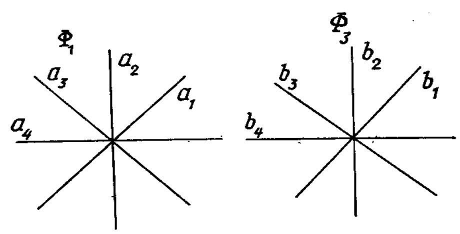


図 3.4: 共役な対称群

G の回転の中心を A, 対称軸を図 3.4 の $a_1, \cdots, a_4$ とし，H の回転の中心を B, 対称軸を図 3.4 の $b_1, \cdots, b_4$ とする．また，B を A にうつし，おのおのの b_i を a_i にうつす平面運動を f とする．G の変換は，次の方法で H の元から得られる．たとえば，b_3 を軸とする対称変換を使って考えてみよう．まず，Φ_1 を f^{-1} で動かし，次に，b_3 に関しする対称変換を施し，最後に，f でもどす．容易にわかるように，Φ_1 はこれらの動作の結果，Φ_1 を a_3 に関して対称変換した図形と同じ図形になる．

定義 11 一般に，H の任意の元 h に対して，$f \circ h \circ f^{-1}$ は G の元である．もっと詳しく言うと，h が b_i に関する対称変換であるとき，$f \circ h \circ f^{-1}$ は a_i に関する対称変換である．また，h が B の回りの回転であるとき，$f \circ h \circ f^{-1}$ は A の回りの同じ角の回転である．このとき，2つの変換 $h \in H$ と $g = f \circ h \circ f^{-1} \in G$ は共役であるという．$f \circ h \circ f^{-1}$ を f による共役化という．

共役変換は以前, 複素数を用いて回転公式を表したときと, 練習 37 (Chapter 2) ででてきた.

運動の群 H の元のリストが, ある (1 つの同じ) 運動による共役化で, 変換群 G の元のリストになるならば, H と G は**共役である**という. 平面上に任意に置かれた図形の 2 つのコピーの対称群は, つねに共役である. その共役化は, コピーの 1 つをもう 1 つのコピーにうつす運動によって実現される.

一般に, 共役化は, ある物体を異なる視点からみることとして, 理解されるべきである. その共役化させる運動は 2 つの視点 (物理の言葉で, **2 つの関係系**という) を関連づける運動である.

共役部分群の一番重要な性質は, それらが同じ内部構造をもつことだ. この意味を数学的に説明しよう. G と H をどちらも平面運動の群とし, 運動 f によって, 互いに共役化されるものとする. このとき, $g = f \circ h \circ f^{-1}$ ならば, g と h は互いに**対応している**といい, $g \leftrightarrow h$ と表す. このとき, この対応は 1 対 1 対応である. なぜならば, h は g によって $h = f^{-1} \circ g \circ f$ と一意的に表されるからである.

このとき, 次の 2 つの性質が成り立つ：

1. $g_1 \leftrightarrow h_1,\ g_2 \leftrightarrow h_2$ ならば, $\ g_1 \circ g_2 \leftrightarrow h_1 \circ h_2$.
2. $g \leftrightarrow h$ ならば, $\ g^{-1} \leftrightarrow h^{-1}$.

このことは, 次のように確かめられる：

1. $g_1 \circ g_2 = (f \circ h_1 \circ f^{-1}) \circ (f \circ h_2 \circ f^{-1}) = f \circ (h_1 \circ h_2) \circ f^{-1}$.
2. $(f \circ h \circ f^{-1})^{-1} = f \circ h^{-1} \circ f^{-1}$.

このように, 群における演算 (合成と逆変換) は, それぞれこの対応で, もう一方の群の類似した演算に対応する. この対応を**同型写像**という. 同型写像については, 第 4 章で詳しく説明する.

次に, 平面運動の群における共役化の公式を導こう.

問題 29 対称変換 S_l を用いて, 回転 R_A^α に共役な運動を求めよ.

解答. 共役な運動を求めるためには, S_l を使い, 視点を変えて**平面の下から**回転をみなければならない. その結果は明らかに, 直線 l に関する点 A の対称点 A' を中心とする角 $-\alpha$ の回転となる. この結果を厳密に確認しよう. つまり, 次のことを証明する：

$$S_l \circ R_A^\alpha \circ S_l^{-1} = R_{A'}^{-\alpha}.$$

M を平面上の任意の点とする (図 3.5 参照). $M_1 = S_l^{-1}(M) = S_l(M)$, $M_2 = R_A^\alpha(M_1), M_3 = S_l(M_2)$ とすると, $\triangle MA'M_3 \equiv \triangle M_1AM_2$ である. ゆえに, $M_3 = R_{A'}^{-\alpha}(M)$.

練習 58. 平面運動の群における共役化をすべて表に表せ. すなわち, 任意の $g = T_{\mathbf{a}}, R_A^\alpha, S_l, U_l^{\mathbf{a}}$ と任意の $f = T_{\mathbf{b}}, R_B^\beta, S_m, U_m^{\mathbf{b}}$ に対して, $f \circ g \circ f^{-1}$ を求めよ.

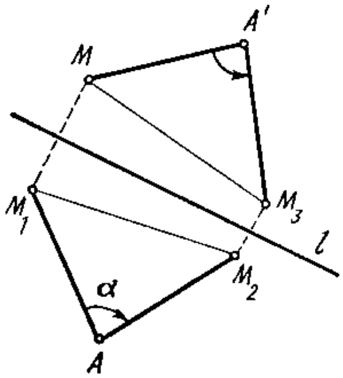


図 3.5: 対称変換による回転の共役化

読者には, 平面運動の操作が自由にできる '二面体の道具' を作って練習してもらいたい. その道具は段ボールから切り取られた正多角形と紙きれに描かれた同じ正多角形でできていて, どちらの多角形の頂点にも順番に $1, 2, \cdots$ と番号が書かれている (図 44a).

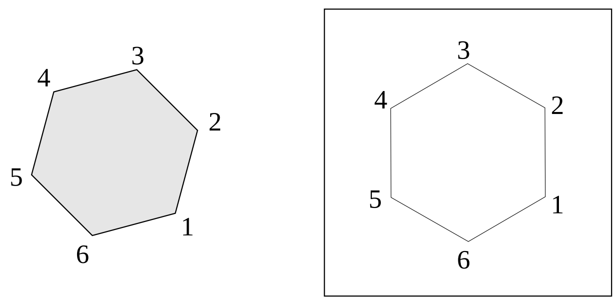


図 3.6: 二面体の道具

この道具で二面体群 D_n を勉強することができる. たとえば, D_n の元の積を求めるには, まず, 頂点の番号が一致するようにその紙きれの上に段ボールの多角形を重ねる. そして, 与えられた運動を順に施して, 頂点の数を比べることによって, その合成運動を求める. 同じように, 共役元も求められる.

練習 59. 適当な二面体の道具を用いて, D_3 と D_4 の積表と共役化の表をそれぞれ作れ.

共役運動の表 (問題 58 の答え) をみると, 移動 $T_{\mathbf{a}}$ は, 移動 $T_{\mathbf{b}}$ によって共役化されても, 変わらないことに気がつくだろう：

$$T_{\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}^{-1}} = T_{\mathbf{a}}.$$

この等式は, $T_{\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}}$ と同値である. またこれは, 任意の 2 つの移動が**可換である**ことを意味する. 言い換えると, 合成に関してそれらは交換できるということである (可換性については問題 24 で述べた).

任意の 2 つの元が可換である変換群は**可換である**といわれる.

問題 30 平面運動の有限可換群をすべて求めよ.

解答. すでに平面運動の有限群のすべてを知っている. すなわち C_n と D_n $(n = 1, 2, \cdots)$ である.

任意の巡回群 C_n は可換群である. このことは, ある 1 点を中心とする回転の群が, 可換であることからわかる. 実際, 角 α の回転と角 β の回転の積は, 順序に関係しない角 $\alpha + \beta$ の回転である.

D_1 は可換である. 2 つの元だけで構成されていて, そのうちの 1 つは恒等変換だからである. D_2 も可換である. 実際, D_2 はその対称軸が互いに垂直である 2 つの対称変換 S_1, S_2 と半回転 R と恒等変換で構成されている. 以前導いた規則によると, 合成 $S_1 \circ S_2$ は, ある方向の $180°$ 回転で, 一方, $S_2 \circ S_1$ は, その反対方向の $180°$ 回転である. よって, $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$ である. ゆえに, $S_1 \circ R = S_1 \circ S_2 \circ S_1 = R \circ S_1$. 同様に, $S_2 \circ R = R \circ S_2$ である. したがって, D_2 は可換である.

次に, D_n $(n \geq 3)$ を考える. D_n の元で, その対称軸が隣りどうしの対称変換を 2 つえらぶ. すなわち, その 2 直線のなす角が $180°/n$ の対称変換である. それらの積は, 正または負の方向の $360°/n$ の回転である. よって, それは積の順序に依存する. $n \geq 3$ より, その 2 つの積の値は異なることがわかる. したがって, D_n は非可換である.

このように, 平面運動の有限可換群の完全リストは D_1, D_2, C_n $(n \in N)$ となる.

積の表から, その群が可換であるかどうか簡単に読みとれる. すなわち, 群が可換であるための必要十分条件は, その積の表が主対角線に関して対称的であることだ. 練習 59 をやってみた読者は, D_3 と D_4 が非可換であることを視覚的に理解できただろう. しかし, その積表が全体的に対称的でなくても, つねに対称的な位置に同じ元の組が存在する. このような組はその群の可換な組である.

練習 60. D_3 と D_4 について, 可換な元の組をすべてあげよ.

3.5　巡回群

巡回群 C_n が可換であることを示す別の方法がある. R を角 $360°/n$ の回転とすると, C_n の任意の元は, R の累乗で表される (i.e. $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ R \circ R, \cdots, R^n = \mathrm{id}$). また, 明らかに $R^k \circ R^l = R^{k+l} = R^l \circ R^k$ である.

変換 f の累乗が, 群のすべての元を表すことができるとき, f をその群の**生成元**という.

生成元の意味をもっと理解するために, 群ではなく, 変換 f をただ 1 つの元としてもつ集合 M を想像してみよう. 問題は「f を含む変換群が存在するか」である. 答えは「存在する」である. f を含む一番最小の群は, 次のように構成される：

ある群が f を元とするとき, 群の定義の 1 番目の性質によって, f の累乗 f^2, f^3, $\cdots$, すべてが含まれなければならない. 2 番目の性質によって, その群は, 逆変換 f^{-1} を含まなければならない. したがって, その群は f の累乗 $(f^{-1})^2$, $(f^{-1})^3\cdots$ すべてを含まれなければならない.

練習 61. 等式 $(f^{-1})^k = (f^k)^{-1}$ を証明せよ.

変換 $(f^{-1})^k$ $(k \in N)$ は, f の負の累乗とよばれ, f^{-k} とも表される. 任意の変換の 0 乗は定義から恒等変換である. ここで注意してほしいのは, 与えられた変換の整数乗すべての集合 $\cdots f^{-2}$, f^{-1}, f^0, f^1, f^2, $\cdots$ は, **つねに**群をなすことである. なぜならば, 恒等式 $f^k \circ f^l = f^{k+l}$, $(f^k)^{-1} = f^{-k}$ は, すべての自然数 k, l に対してだけではなく, すべての整数 k, l に対して成り立つからである. f の整数乗すべての集合を f **によって生成される群**という.

可能性として, 次の 2 つの場合がある.

1. f^k がすべて異なるとき. このとき, f によって生成される群の元は無限個ある. この群を**無限巡回群**という.
2. 累乗のなかに同じものがあるとき. このとき, ある整数 $n \in N$ が存在し, $f^n = id$ となる. 実際, $f^k = f^l$ $(k > l)$ ならば, $f^{k-l} = id$ であるからである. $n \equiv min\{m \in N | f^m = id\}$ を, f の**位数**という. この場合, f によって生成される群は, ちょうど n 個の異なる変換 f, $f^2, \cdots, f^n$ で構成される (これらはすべて異なる. 実際, $f^k = f^l$ $(0 < l < k \leq n)$ ならば, $f^{k-l} = id$ となり, これは n のえらび方から矛盾である).
   このとき, f によって生成される群を**位数 n の有限巡回群**という. とくに, この概念は巡回群 C_n を含む.

f が無限巡回群を生成するとき, f **は無限位数をもつ**ともいう. 定義から, 恒等変換の位数は 1 で, それが生成する群はただ 1 つの元からなる. これを**自明な群**という. 対合的な変換は位数 2 の群を生成し, それ自身と恒等変換からなる.

問題 31 C_{12} の生成元を求めよ. また, その生成元以外の元によって生成される C_{12} の部分群も求めよ.

解答. C_{12} は 30° の倍数角の 12 個の回転で構成される. これらの回転はすべて 30° 回転の累乗であるから, 30° 回転は C_{12} の生成元となる. 30° 回転の逆回転 (330° 回転) もまた, 明らかに生成元である. 他の元について考えるのを簡単にするため, 図 3.7 を用いる. ただし, C_{12} のすべての元は, 正十二角形の頂点として表されている. すなわち, A_0 は恒等変換に対応し, A_1 は 30° 回転に対応する. 1 つずつ C_{12} の元について考えてみよう. そして, 任意の元に対して, その元の累乗に対応する頂点に印をつけてみると, 次のことがわかるだろう：

- さらに 2 つの回転がある—150° 回転と 210° 回転—これは C_{12} を生成する；

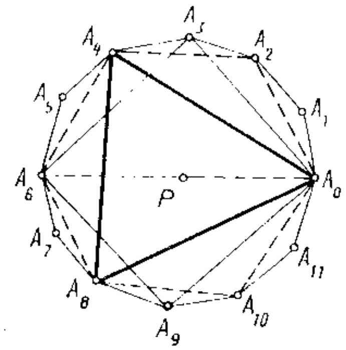


図 3.7: 巡回群 C_{12} とその部分群

- $60°$ 回転と $300°$ 回転は, 位数 6 の群 C_6 を生成する．このことは, 図 3.7 の六角形 $A_0A_2A_4A_6A_8A_{10}$ として視覚的にみられる；
- $90°$ 回転と $270°$ 回転は, 位数 4 の群を生成する (四角形 $A_0A_3A_6A_9$)；
- $120°$ 回転と $240°$ 回転は, 位数 3 の群を生成する (三角形 $A_0A_4A_8$)；
- 対合である $180°$ の回転は, 群 C_2 を生成する (線分 A_0A_6).

この結果は, 次の表で要約される．表の上の欄は k の値, 下の欄は回転 R^k の位数である (R は $30°$ 回転)：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

練習 62. 最大公約数 (GCD) を用いて f で生成される位数 n の巡回群の元 f^k の位数に対する一般式を求めよ.

有限群に属する変換がこの群の生成元であるための必要十分条件は, その変換の位数がその群の位数に等しいことである．巡回群 C_n の生成元の個数を $\varphi(n)$ と表し, 関数 φ を **Euler 関数**という．たとえば, 上の表から $\varphi(12) = 4$ であることがわかる.

練習 63. (a) $\varphi(n)$ $(n = 1, 2, \cdots, 20)$ を計算せよ．(b) n の素因数分解を用いて, $\varphi(n)$ の一般式を求めよ.

タイプが異なる平面運動は, どんな位数であるのかを調べよう．明らかに, 自明せない移動と映進は無限位数をもつ．なぜなら, このような変換を繰り返すと, 任意の点は無限の位置を占めてしまうからである (図 3.8a, b).

練習 64. 自明でない移動, あるいは映進を施しても動かない平面図形はあるか.

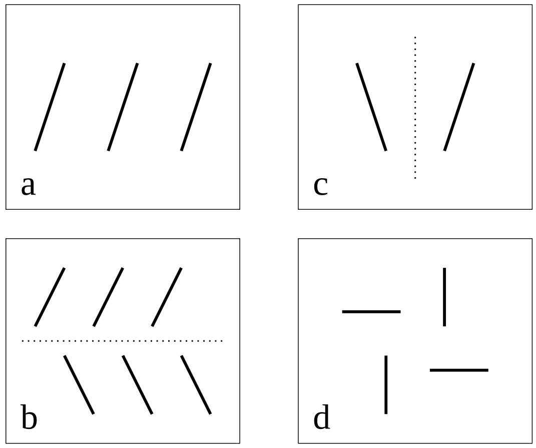


図 3.8: 移動, 対称変換, 映進の位数

対称変換の位数はどれも 2 である (図 3.8c).

回転の位数はいろいろある. 回転角が有理数の角度 $360°\dot{m}/n$ で表されるとき, その回転の位数は n である. ただし, m/n は既約分数である (図 3.8d). また, 回転角が無理数であるとき, その回転の位数は無限である.

練習 65. 問題 31 の回転に対して, 上記の主張を確かめよ. また, この主張を一般に証明せよ.

3.6　生成元と関係式

巡回群は 1 つの元によって生成される群だから, 群のなかでは一番簡単なものである. さて次に, 1 つの元では生成しきれない群について考えてみよう.

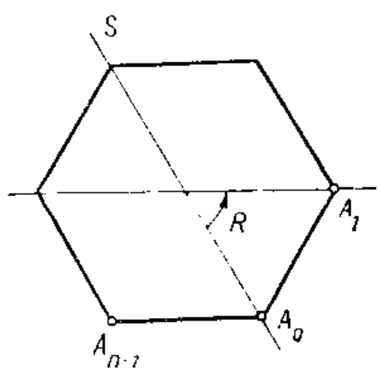


図 3.9: 群 D_n

まず, D_n $(n \geq 2)$ は巡回群ではないことを示す. 実際, $n > 2$ のとき, D_n が可換でないことはすでにみた. よって, $D_n(n > 2)$ は巡回群ではないことがわかる. $n = 2$ とき,

D_2 の自明でない元の位数はすべて 2 である. つまり, D_2 には位数 4 の元が存在あいない. よって, D_2 も巡回群ではない.

次のような疑問が自然におこる:「 D_n の元の集合で D_n を生成することができる 1 番小さいものは何か？ つまり, その集合の元の倍数と逆変換によって, 群の任意の元を表すことができるような 1 番小さい集合は何か？」2 つの元で事足りる. たとえば, $\{R, S\}$ はこのような集合の例となる (R は $360°/n$ 回転, S は任意の対称変換). 実際, D_n の任意の回転は R^k と表され, D_n の任意の対称変換は $R^k \circ S$ と表される.

最初の主張は明らかである. 二番目の主張を証明しよう：

『D_n **の任意の対称変換は** $R^k \circ S$ **と表される.**』

まず, $R^k \circ S$ $(k = 0, 1 \cdots, n-1)$ は, すべて異なることに注意しよう. 実際, $R^k \circ S = R^l \circ S$ の両辺に右から S を施すと $R^k = R^l$ となるから, これは矛盾である. また, これらの運動はすべて真ではない. すなわち対称変換であるが回転でない運動である： D_n の元の対称変換の総数は n だから, そのおのおのの元はリスト S, $R \circ S, \cdots$, $R^{n-1} \circ S$ のなかに現れなければならない.

したがって, $\{R, S\}$ は D_n の生成元の集合である. すなわち, D_n は, 次のように表される：

$$D_n = \{id, R, \cdots, R^{k-1}, S, R \circ S, \cdots, R^{k-1} \circ S\}.$$

さて, R と S による D_n の積の規則を述べよう.

- R^k と R^l の合成は R^{k+l} である. $k + l > n$ ならば, $R^{k+l} = R^{k+l-n}$ とおきかえることができる.

- 同様に, $R^k \circ (R^l \circ S) = R^{k+l} \circ S$ である. $k + l > n$ ならば, $R^k \circ (R^l \circ S) = R^{k+l-n} \circ S$ とおきかえるほうが簡単である.

- 合成 $(R^k \circ S) \circ R^l$ を求めてみよう. $S \circ R^k \circ S = R^{-k}$ であることを思いおこそう (問題 29). この等式の両辺に右から S を施すと, $S \circ R^k = R^{-k} \circ S$ となる. したがって
$$(R^k \circ S) \circ R^l = R^k \circ (S \circ R^l) = R^k \circ (R^{-l} \circ S) = R^{k-l} \circ S.$$

- 同様に, $(R^k \circ S) \circ (R^l \circ S) = R^{k-l}$ である.

D_n に対する積表は, 生成元 R と S に関して次のように表される：

	R^l	$R^l \circ S$
R^k	R^{k+l}	$R^{k+l} \circ S$
$R^k \circ S$	$R^{k-l} \circ S$	R^{k-l}

ここで, $R^n = \mathrm{id}$ から, 必要ならば, R のべき指数は n 個増やしたり減らしたりすることができる.

n が具体的な値をとると, 上の表は完全な形になる. たとえば, $n = 3$ のときは, 次のような表になる：

	id	R	R^2	S_a	S_b	S_c
id	id	R	R^2	S_a	S_b	S_c
R	R	R^2	id	S_b	S_c	S_a
R^2	R^2	id	R	S_c	S_a	S_b
S_a	S_a	S_c	S_b	id	R^2	R
S_b	S_b	S_a	S_c	R	id	R^2
S_c	S_c	S_b	S_a	R^2	R	id

重要なことは, D_n の完全な積表は, 生成元 R, S についての次の 3 つの関係式から導かれることである：

$$S^2 = \mathrm{id}; \quad (S \circ R)^2 = \mathrm{id}; \quad R^n = \mathrm{id}\,. \tag{3.1}$$

他のすべての関係式は群の定義を形式的に用いると, この 3 式から導かれるのである. 例として, 関係式 $S \circ R^k \circ S = R^{-k}$ について確かめよう.

3.1 式の 2 番目の関係式は

$$S \circ R \circ S \circ R = \mathrm{id}$$

と展開される. これは

$$S \circ R \circ S = R^{-1}$$

と同値である. $S^2 = \mathrm{id}$ を考慮すると

$$S \circ R^k \circ S = R^{-k}$$

である.

次のような意味で, 関係式 3.1 は D_n の**定義関係式**の完全な集合となる. すなわち, もし群が 2 つの元 S, R によって生成されていて, S と R は関係式 3.1 と, **この 3 式による形式的帰結のみをみたすとき**, この群の位数は $2n$ で, その構造は D_n の構造と同じになる.

ここで, 変換群の生成元と定義関係式の定義をしよう. $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ を群 G の有限部分集合とする. $M = s_{i_1}^{k_1} s_{i_2}^{k_2} \cdots s_{i_m}^{k_m}$ の形の式を S 上の単項式 とよぼう. ただし, i_1, ..., i_m は 1 から n までの数, 巾指数 k_1, ..., k_n は任意の整数とする. s_1, ..., s_n 間の**関係式** とは, G の元 id に等しい S 上の単項式 r である. $r_1 r_2^{-1} = \mathrm{id}$ に同値な関係式を $r_1 = r_2$ とも書く .

定義 12 *G を変換群, S を G の部分集合, R を S の元の間の関係式の集合とする.*

このとき, 次の 2 つの条件をみたすならば, S を G の生成元の集合, R を G の定義関係式の集合という:

1. G の任意の元は, S 上の単項式で表される.

2. S の元の間の任意の関係式は, 集合 R に属する関係式の形式的帰結である.

関係式 $r_1 = \mathrm{id}$, ..., $r_m = \mathrm{id}$ の形式的帰結とは, 与えられた集合から導かれる新しい単項式を意味する. ただし, それは群の演算 (積や逆変換) や結合法則のような性質, また

簡約ルール $s^ks^l = s^{k+l}$, $s^0 = \mathrm{id}$, そして $ab = \mathrm{id}$ と $ba = \mathrm{id}$ が同値な式であるという事実などから導かれた式である．たとえば, 2 つの関係式 $ab^2 = \mathrm{id}$, $ba^2 = \mathrm{id}$ からは $b = a^{-2}$ より, 関係式 $a^3 = \mathrm{id}$ が導かれる．

ある意味で元たち $s_1, \ldots, s_n$ の性質はここでは意味がないことに注意しよう．このことは, のちに (5 章, p.101) 定義する, あらかじめ決められた生成元と関係式の集合をもった抽象群の概念によって理解できるだろう．

この節では定義関係式の重要性が理解できるいくつかの問題にとどめよう．

問題 32 A, B を次の関係式をみたす変換とする：

$$A^3 = id; \quad B^5 = id; \quad AB = B^4A. \tag{3.2}$$

また, 群の公理とこの *3* 式から形式的に得られる関係式以外はみたされないとすると, 変換 A, B によって生成される群は, 位数 *3* の巡回群であることを証明せよ．

解答． 式を簡単にするため, 合成の記号 ($\circ$) を省略する．それに対応して「合成」の代わりに「積」という言葉を用いることにする．

A と B によって生成される群 G の任意の元は

$$B^{k_1}A^{l_1}B^{k_2}A^{l_2}\cdots B^{k_m}A^{l_m}$$

と書ける．ただし, (3.2) 式より, $0 \le k_i \le 4$, $0 \le l_i \le 2$ と仮定できる．次の規則を用いて, このワードを並べかえる:A **が** B **の左隣に現れたら,** AB **を** B^4A **でおきかえる．**

このルールを十分当てはめれば, 早かれ遅かれ, B という語はすべて左側に押し出され, 結局 B^kA^l という形のワードにたどりつく． ただし, 前と同様に $0 \le k_i \le 4$, $0 \le l_i \le 2$ とする．

整数 k は, 5 個の異なる値をとることができ, 整数 l は, 3 個の異なる値をとることができるから, 積 B^kA^l の総数は, 15 以下である．しかし, これらの元すべてが異なるとは限らない．なぜなら, 定義関係式 (3.2) から, 次の等式が導かれるからである：

$$B = A^3B = A^2B^4A = AB^{16}A^2 = B^{64}A^3 = B^4.$$

また, このルールは次のようにもいえる：**文字** A **が文字** B **を左から右に通り抜けるとき, 通り抜けられた文字** B **の指数には** 4 **がかけられる．**

ゆえに, $B^3 = \mathrm{id}$. 関係式 $B^5 = \mathrm{id}$ より, 結局, $B = \mathrm{id}$ であることがわかる．このように, G は, $A^3 = \mathrm{id}$ をみたすただ 1 つの元 A で生成される群である．生成元 A は, 自明では**ありえない**ことに注意しよう．なぜなら, 関係式 $A = \mathrm{id}$ は, 関係式 (3.2) から**導かれない**からである．実際, A を 120° 回転とし, B を恒等変換とすると, (3.2) の 3 つの関係式はみたされるが, $A = \mathrm{id}$ ではない．

練習 66. A, B を $ABA^2 = \mathrm{id}$, $B^2A = \mathrm{id}$ をみたす自明でない平面運動とする．このとき, A と B によって生成される群の位数を求めよ．また, A と B はどのような運動か．

次の練習問題は, ちょっとみただけでは変換群の定理とは全く無関係にみえるが, 同様の方法で解くことができる．

練習 67. 部族 Aiue の言葉には, 4 文字 A, I, U, E しかない．文字 E は特別である．E だけで使うとある意味をもつが, どのような言葉のどのような場所につけたとしても, その言葉の意味は変わらない．さらに, 文字 A, I, U は連続的に 7 回発音すると, E と同義語になる．また, 次の言葉の断片は, 同義語として考えられる：UUUI=IU, AAI=IA, UUUA=AU. この部族の総人口は 400 人である．この部族のすべての人々はそれぞれ異なる名前をつけることができるか．

練習 68. D_n の生成元の組をすべて求めよ．また, その生成元のおのおの組に対する定義関係式を示せ．

定義関係式は生成元がどのような個数の群にも使える．たとえば, 位数 n の巡回群は 1 つの生成元 R と 1 つの定義関係式 $R^n = id$ で表示される群である．無限巡回群はどのような関係式ももたない 1 つの生成元 T で構成される群である．この最後の主張「どのような関係式ももたない」の意味をもう 1 度強調したい．ここで意味していることは, T に関するどのような**自明でない**関係式ももたないことである．自明でない関係式とは T と id を含む関係式で, 群の公理からは導かれない式である．ここで, 自明な関係式とは次のような式である： $T^{-1}T^4T^{-3} = \mathrm{id}$.

ここで, 3 つの生成元をもつ群の例をあげよう．たとえば, 問題 27 で G と表された平面運動で構成される群である．この G を正式な結晶学の記号で, $p3m1$ と表す (結晶群については 4 章参照)．定義より, $p3m1$ は無限個の対称変換で構成される．つまり図 3.1a で示されるすべての直線に関する対称変換によって生成される．

しかし, この群はただ単に 3 つの対称変換 S_a, S_b, S_c だけでも生成できる．ただし, a, b, c はそれぞれ図 3.1a の格子 1 単位をなす正三角形の 1 辺である．このことを示すために, 三角格子に属する任意の直線 x に関する対称変換 S_x が S_a, S_b, S_c の式で表されることを示さなければならない．

たとえば, S_l (図 3.1a の記号) を考えよう．l は c に関して a に対称な直線だから, S_l は S_a の S_c による共役化により得られる： $S_l = S_c \circ S_a \circ S_c$. 同様に, $S_l(b) = m$ より, $S_m = S_l \circ S_b \circ S_l = S_c \circ S_a \circ S_c \circ S_b \circ S_c \circ S_a \circ S_c$.

同様の議論で, S_a, S_b, S_c によって, 任意の対称変換 S_x を表すことができる．事実, 格子に属する任意の直線 x は S_a, S_b, S_c の適当な合成によって a あるいは b あるいは c から得られる．

さて, 3 つの生成元 S_a, S_b, S_c は, 次の関係式をみたすことをみよう：

$$S_a^2 = S_b^2 = S_c^2 = \mathrm{id}, \tag{3.3}$$

$$(S_a \circ S_b)^3 = (S_b \circ S_c)^3 = (S_c \circ S_a)^3 = \mathrm{id}\,. \tag{3.4}$$

練習 69. F_1, F_2, F_3 を無限群を生成する 3 つの平面運動で, 次の関係式をみたすものとする：

$$F_1^2 = F_2^2 = F_3^2 = (F_1 \circ F_2)^3 = (F_2 \circ F_3)^3 = (F_3 \circ F_1)^3 = \mathrm{id}\,.$$

このとき, F_1, F_2, F_3 は, おのおの, 正三角形のある辺に関する対称変換であることを証明せよ.

関係式 3.4, 3.4 から無限個の関係式が導かれるが, 練習 71 より, (3.3), (3.4) 式は, 平面運動の群を一意的に決定する. 実際, これらの関係式は先に説明した群 $p3m1$ の**定義関係式**であることが示される.