第5章　軌道と不変量

この章で触れる話題は, 群の作用, 軌道, 不変量, そして, 敷き詰め模様についてである.

定義から, 変換群はある集合に**作用する**. たとえば, 平面運動の群は, 平面(の点全体の集合)に作用する. 置換群 S_3 は, 集合 $\{1,2,3\}$ に作用する. 集合 $\{1,2,3\}$ を変換する作用は, 群に本来備わっているものだから, それは任意の抽象的な群に対しても定義される. 群の作用を正確に定義するためには, 準同型写像の概念が必要である.

5.1　準同型写像

準同型写像の概念は, 同型写像の概念の一般化である. 同型写像と同様に準同型写像は, 同じ演算を保存するという性質によって定義される. 同型写像の定義と違うところは, 1対1である必要がないことだけである.

定義 16 群 G から群 H への写像 $\varphi : G \to H$ は, 条件

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad for \quad \forall a, b \in G \tag{5.1}$$

をみたすとき, **準同型写像**といわれる(この群の演算は, ここでは積で表されているが, もちろん本当の積でなくてよい).

同型写像は, 1対1の準同型写像である. 同型写像の性質には, 任意の準同型写像に一般化されるものもある. たとえば, 準同型写像 φ による $e \in G$ の像はつねに単位元 $e' \in H$ である：$\varphi(e) = e'$. また, 任意の元 $g \in G$ に対して, 次の等式が成り立つ：

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}. \tag{5.2}$$

これら2つの等式は, 5.1 式から容易に導かれる.

任意の2つの群 G, H に対して, G のすべての元を H の単位元にうつす写像は, 準同型写像である. これを**自明な準同型写像**という. $\varphi : G \to G'$ が同型写像で, G' が H の部分群であれば, φ を G から H の写像とみなせる. それは, 明らかに準同型写像である. このような準同型写像を**単射準同型写像**という. それは, G の異なる2つの元が, φ によって H の異なる2つの元にうつされるという性質で特徴づけられる.

自明な準同型写像による群全体の像は, 自明な部分群(ただ1つの元からなる群)である. 任意の準同型写像 $\varphi : G \to H$ による G の像 $\varphi(G)$ は, H の部分群であることに注意しよう.

準同型写像のなかで一番興味深いものは, 単射準同型写像とある意味で双対な**全射準同型写像**である. 準同型写像 $\varphi : G \to H$ は $\varphi(G) = H$ であるとき, すなわち, H の任意の元が G のある元の像であるとき, **全射である**といわれる.

全射準同型写像のいくつかの例を考えよう.

問題 37 加法を演算とする整数全体の群 $\mathbb{Z}$ から剰余類の群 $\mathbb{Z}_m$ への全射準同型写像を構成せよ.

解答. 答えは簡単だ. つまり任意の整数 $a \in \mathbb{Z}$ を m を法とする a の類 $\overline{a}$ にうつす写像 p が求める全射準同型写像である. $\mathbb{Z}_m$ の定義 (p.90 参照) より

$$p(a+b) = \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b} = p(a) + p(b).$$

であるから, p は足し算の演算を保存する. また明らかに全射である. 積の演算も保存する–$p(ab) = p(a)p(b)$–ことに注意すると, p は積の演算に関しても準同型写像となることがわかる (練習 95 参照).

練習 97. どのような数 m, n に対して, $\mathbb{Z}_m$ から $\mathbb{Z}_n$ への全射準同型写像は存在するか.

問題 38 S_4 から S_3 への全射準同型写像を求めよ.

解答. S_n は n 個の元の置換群を表す (4.1). たとえば, S_4 は濃度が 4 の集合の 24 個の置換からなり, S_3 は濃度が 3 の集合の 6 個の置換からなる. 先にみたように (練習 74), S_3 は, $1/x$ と $1-x$ によって生成される変換の群 Φ に同型である. したがって, S_4 から Φ への準同型写像を構成できればよい. これを次のように構成する. 4 変数で表された式

$$x = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$$

を考える. これを a, b, c, d の**複比**とよぶ. 文字 a, b, c, d がこの式において並べかえられると, その複比の値も変わる. しかし, 変化した複比の値はつねに x だけで表される. たとえば, 置換 $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$(i.e. $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto d$, $d \mapsto a$) をおこなった結果, 上記の x は $\frac{x}{x-1}$ となる：

$$\frac{b-d}{c-d} : \frac{b-a}{c-a} = \frac{x}{x-1}.$$

練習 98. x を先の複比とする. このとき, 4 文字 a, b, c, d の 24 個の置換の各々に対して, 置換したあとの複比を初期値 x を用いて表せ.

練習 98 を解いた読者は, 求められた 6 つの関数の集合が以前でてきた関数の群 Φ であることを思いおこすだろう. 置換 σ に対応するこの有理関数を $f_\sigma(x)$ とする. $f: \sigma \mapsto f_\sigma$ が準同型写像であることを示すため, $f_{\tau\sigma} = f_\tau \circ f_\sigma$ であることを確かめなければならない. 実際

$$f_\sigma(x) = \frac{\sigma(a) - \sigma(c)}{\sigma(b) - \sigma(c)} : \frac{\sigma(a) - \sigma(d)}{\sigma(b) - \sigma(d)} = y,$$

とすると, 明らかに次の式が成り立つ：

$$f_{\tau\sigma}(x) = \frac{\tau\sigma(a) - \tau\sigma(c)}{\tau\sigma(b) - \tau\sigma(c)} : \frac{\tau\sigma(a) - \tau\sigma(d)}{\tau\sigma(b) - \tau\sigma(d)} = f_\tau(y).$$

ゆえに, $f_{\tau\sigma}(x) = f_\tau(f_\sigma(x))$.

さて, 次の重要な性質に注目していただきたい. f が準同形写像, すなわち関係式 $f_{\tau\sigma} = f_\tau \circ f_\sigma$ をみたす写像であることは, 問題 38 の答えを単純にしていることだ. なぜなら, f による置換の像全体が集合 Φ に一致することを示すのに, 練習 98 で述べられた 4 文字の 24 個の置換をすべて確かめる必要はないからである. 3 つの置換 $a \leftrightarrow b, b \leftrightarrow c, c \leftrightarrow d$ は, S_4 を生成するから, これらの像だけを確かめればよい. これらの置換は, それぞれ関数 $1/x$, $1-x$, $1/x$ に対応する. 承知のように, 2 つの関数 $1/x$, $1-x$ は, 群 Φ を生成する.

練習 99. 方向を保存するすべての運動に対して $+1$ を割り当て, 方向を変えるすべての運動に対して -1 を割り当てるとする. このとき, この割り当ては, 平面運動全体の群から, 積を演算とする 2 つの元の集合 $\{+1, -1\}$ への全射準同型写像であることを確かめよ.

問題 39 真の平面運動全体の群 G から絶対値が 1 の複素数全体の群 T への全射準同型写像を求めよ.

解答. 任意の真の平面運動は, 複素関数 $f(z) = pz + a(|p| = 1)$ として解析的に書ける (2.3). この運動を数 p に対応させる写像を考える. この写像が群どうしの準同型写像であることを確かめよう. 実際, 運動 f と $g(z) = qz + b$ で定義される運動 g との合成 $g \circ f$ は

$$g(f(z)) = q(pz + a) + b = qpz + (aq + b).$$

ゆえに, $\varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f)$.

いま証明した主張を幾何学的に解釈すると, 2 つの回転（回転の中心が異なるものでもいい）がかけられると, その 2 つの回転角は足されるということである. とくに, $R_A^\varphi \circ R_B^{-\varphi}$ は平行移動となる.

練習 100 は, 次のことを用いるとよい：

『直線 l と m の間のなす角は, $R_A^\varphi(l)$ と $R_B^\varphi(m)$ とのなす角に等しい.』

実際, 回転によって角度は保存されるから, l と m とのなす角は $R_A^\varphi(l)$ と $R_B^\varphi(m)$ とのなす角に等しい —したがって, 直線 $R_A^\varphi(m)$ と直線 $R_B^\varphi(m)$ は平行である.

練習 100. 三角形 ABC の頂点 B, C からおろした垂線の足をそれぞれ, E, F とし, O を三角形 ABC の外心とする. このとき, 線分 AO と線分 EF は垂直であることを証明せよ.

練習 101. 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**行列式**は $ad - bc$ である. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ の**積**は, $\begin{pmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{pmatrix}$ である. 行列式が0でない行列すべての集合は, この積を演算として群をなすことを証明せよ. また, 行列式は, この群から積を演算とする0でない数の群への全射準同型写像であることを示せ.

5.2 商群

剰余類の群 $\mathbb{Z}_m$ と準同型写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ をもっと一般的な視点からみてみよう. Z_m は, mZ を法とする Z の剰余類で構成される. このことを「Z_m は mZ を法とする Z の商群である」ともいい, $Z_m = Z/mZ$ と表す.

さて, G を任意の群, H を G の部分群とする. H を法とする G の剰余類の集合を群にしてみよう. 例として, Z_m の作り方を用いる. まずおこる問題がある：「左剰余類 eH, g_1H, g_2H, ... と右剰余類 He, Hg_1, Hg_2, ... のどちらの剰余類を用いるべきか?」 Z は可換だから, この問題は Z に対してはおこらない.

左剰余類は $gH = \{gh|h \in H\}$, 右剰余類は $Hg = \{hg|h \in H\}$ という集合である. ただし, $g \in G - H$ である. G が非可換ならば, 一般に $gH \neq Hg$ である. たとえば, $G = D_3$, $H = \{id, S_a\}$, $g = R \in D_3 - H$ とすると, D_3 の積表（p. 67 参照）から, 次のことが求まる：

$$\begin{aligned} RH &= \{R \circ id, R \circ S_a\} = \{R, S_b\}, \\ HR &= \{id \circ R, S_a \circ R\} = \{R, S_c\}. \end{aligned}$$

しかし, D_3 の部分群 $C_3 = \{id, R, R^2\}$ に対しては, g として $D_3 - C_3$ の元をどのようにとっても, 左剰余類分解と右剰余類分解は, 同じ2つの剰余類 C_3 と $D_3\mathbb{C}_3$ で構成される.

定義 17 群 G の部分群 H が**正規である**とは, 任意の元 $g \in G$ に対して, $gH = Hg$ であるときをいう.

$H \subset G$ が正規ならば, 次の等式列が成り立つ：

$$(g_1H)(g_2H) = g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H = g_1g_2H.$$

これは, g_1H と g_2H からそれぞれ任意に1つずつ元をとると, それらの積が1つの同じ剰余類 $(g_1g_2)H$ に属することを意味する. よって, 正規部分群を法とする剰余類の集合において, 正しく定義された積が存在することになる. すなわち, $\bar{g}_1\bar{g}_2 = \overline{g_1g_2}$. ただし, アルファベットの上のバーは, 与えられた正規部分群による元の剰余類を表す: $\bar{g} = gH = Hg$. この演算は, 明らかに結合法則をみたす. また, 単位元の役割りは剰余類 $H = eH$ が果たし, gH の逆元は $g^{-1}H$ が果たす. このように, 剰余類の集合 H, g_1H, $g_2H \cdots$ は群の構造を得る.

定義 18 G を群, H を G の部分群とする. G の H を法とする商群とは, 積 $\bar{g_1}\bar{g_2} = \overline{g_1 g_2}$ を演算とする H による剰余類全体の集合である. これを G/H と表す.

商群 G/H の構造は, G の積表の上の横列と左の縦列を剰余類で並べかえることによって, 読みとることができる. たとえば, D_3 の積表をみると (p.67), すぐわかるように, その積表は 1 つのブロックが 3×3 のサイズの 4 つのブロックに分かれる. 回転に対応するブロックを R, 対称変換に対応するブロックを S とすると, この表のブロック構造は次のようになる：

	R	S
R	R	R
S	S	R

この表は, Z_2 に同型な位数 2 の巡回群を表している. ゆえに, $D_3/C_3 \cong \mathbb{Z}_2$. ただし, $\cong$ は同型を表す記号である.

問題 40 G を真の平面運動全体の群, すなわち平面上の回転と移動全体の群, N を固定点 A の回りの回転全体で構成される G の部分群, K を移動全体で構成される G の部分群とする. このとき, N と K は G の正規部分群であるか. また, N あるいは K が, G の正規部分群であるとき, その商群の構造を求めよ.

解答. 正規性の条件 $gH = Hg$ は $gHg^{-1} = H$ と書き換えられる. この式は, 部分群 H が正規である必要十分条件が, H の任意の元に対するすべての共役化が H に含まれることを意味する. 共役化は別の視点 (p.61 参照) から物事をみることだから, どのような視点から部分群を見ても同じに見えるとき, その部分群は正規であることになる. 平面に立っている人 (1 章参照) にとって, 彼がどのような場所にいようとも, 移動の集合はどれも同じに見える. しかし, 固定された点 A の回りの回転の集合は, A の位置にいる人から見るのと, A 以外の位置にいる人から見るのとでは異なって見える. したがって, K は正規であるが N は正規ではないことがわかる.

この事実は, 練習 58(p. 171 参照) を用いてもっと厳密に証明される. 移動に共役な運動は移動である. したがって, K は正規である. 運動 f による A の回りの回転に共役な運動は, $f(A)$ の回りの回転である. したがって, N は正規ではない.

$K \subset G$ は正規であるから, 商群 G/K が定義される. G/K の構造を理解するために, 問題 39 で議論した G から T への準同型写像を考えよう. この写像を φ とする. G の 2 つの元が φ によって同じ元にうつるための必要十分条件は, その 2 つの元が G の K による同じ剰余類に属することである. 実際, $\varphi(f) = \varphi(g) = p$ とすると, $p = 1$ のときは, f, g は移動となるから K に属することとなる. $p = \cos\alpha + i\sin\alpha \neq 1$ のときは, f と g はどちらも α° 回転になる. たとえば, $f = R_A^\alpha$, $g = R_B^\alpha$ とすると, $f = R_A^\alpha = R_B^\alpha \circ (R_B^{-\alpha} \circ R_A^\alpha) \in gK$.

なぜならば, $R_B^{-\alpha} \circ R_A^{\alpha}$ は移動だからである. 逆に, f と g が K によるある剰余類に属するならば, $f = g \circ h$ であるから, $\varphi(f) = \varphi(g)$.

いま証明した性質は, φ が集合 G/K と集合 H の間の 1 対 1 対応をもたらすことも意味する. この 1 対 1 対応を $\bar{f}$ と表す. 写像 $\bar{f}$ は明らかにその群の演算と一致しているので, 同型 $\varphi : G/K \to H$ を与えている. 商群 G/K は絶対値が 1 の複素数全体の群, またはある点を中心とする回転全体の群に同型である.

G の K による剰余類分解には, 次のような単純な幾何学的意味がある：**すべての剰余類は, 任意の点を中心とする同じ角の回転で構成されている.** 部分群 K 自身 (移動全体の集合) は, 単位の剰余類である—それは, φ によって T の単位元にうつる.

これらの議論を一般化すると, **準同型第一定理**になる：

定理 10 *(準同型第一定理) φ が, 群 G から群 H への全射準同型写像で, K が G の*__核__*, すなわち, φ によって H の単位元にうつる G の集合であるならば, $G/K \cong H$ が成り立つ.*

証明 任意の準同型写像 φ の核 K は, G の正規部分群である. したがって, 商群 G/K は正しく定義されている. 実際, $k \in K$ のとき, $f(k) = e$ だから, $f(gkg^{-1}) = f(g)f(k)f(g)^{-1} = f(g)ef(g)^{-1} = e$ である. ゆえに $gkg^{-1} \in K$. □

準同型第一定理により, G, H, K の位数は, 次の等式で関係づけられる：$|G| = |H| \cdot |K|$. とくに, 次の系が導かれる：

『有限群 G から有限群 H への準同型写像が存在するとき, H の位数は G の位数の約数である.』

練習 102. (a) D_3 から $\mathbb{Z}_2$ への全射準同型写像は存在するか. (b) $\mathbb{Z}_3$ への全射準同型写像は存在するか.

問題 41 問題 *38* の解答における準同型写像 $\varphi : S_4 \to \Phi$ の核を求めよ.

解答. $K \subset S_4$ を φ の核とする. φ は全射準同型写像, すなわちその像全体が群 Φ と一致するものであるから, 2 つの群 S_4/K と Φ は同型である. ゆえに, $|K| = 24 : 6 = 4$. 容易に確かめられるように, 次の 4 つの置換は, 式 x を x のままにする置換である：

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

この 4 つの元に関する積表は, 記号のえらび方を同じものとして, D_2 の積表と一致する. ゆえに, $K \cong D_2$. 準同型定理から, $S_4/D_2 \cong D_3$ である.

練習 103. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で構成される加群からそれ自身への準同型写像 $F(f(x))\equiv f(x)+f(-x)$ の像と核を求めよ.

練習 104. S をある固定された点を中心とする平面の回転群, C_n を位数 n の巡回部分群とする. このとき, $S/C_n\cong S$ であることを示せ.

練習 105. 準同型第一定理を用いて, 練習 104 の群 S を $(\mathbb{R},+)$ のある商群として表せ.

5.3　生成元と関係式によって表示される群

この節では, 与えられた生成元と関係式の集合をもつ抽象群の構成について説明する. 第 3 章では (p.68), 与えられた群における生成元と関係式について話した. 今度の問題はその逆である. すなわち, 生成元とその間の関係式からなる任意の集合から群を**定義**したい.

この定義には, すでに学んだ商群とこれから定義する自由群が用いられる.

定義 19 S をアルファベットの文字からなる任意の集合とする. S による自由群 $F(S)$ とは, S 上のすべての単項式 (p.68 参照) からなる群で, 演算は 2 つの単項式を並べ, 簡約規則 $s^k s^l = s^{k+l}$, $s^0=1$ を用いることによって得られるものである.

たとえば, S が 1 つの元からなるとき, $F(S)$ は無限巡回群となる.

定義 20 R を S 上の単項式の集合とする (任意の単項式 r は S の元の間の関係式 $r=1$ と考える). 生成元と関係式 R をもつ群は, 商群 $F(S)/H(R)$ として定義される. ただし, $F(S)$ は S 上の自由群, $H(R)$ は R に属するすべての関係式を含む $F(S)$ の最小の正規部分群である (言い換えると, $H(R)$ は R の元と共役なすべての元によって生成される $F(S)$ の部分群である).

生成元 $s_1,\dots,s_n$ と, 関係式 $r_1,\dots,r_m$ をもつ抽象群を

$$\langle\, r_1,\dots,r_m \,|\, r_1,\dots,r_m \,\rangle$$

と表す (右側の関係式は単に単項式 r と書くこともある. この場合, 等式 $r=1$ を意味する).

たとえば, 容易にわかるように

$$\langle\, a \,|\, a^n = 1 \,\rangle$$

は位数 n の巡回群を表す.

問題 42

$$\langle\, a,b \,|\, ab = 1 \,\rangle$$

によって表示される群は, 整数全体の加群 $\mathbb{Z}$ に同型な無限巡回群であることを証明せよ.

解答. 自由群 $F(a,b)$ は, 任意の長さで任意の整数巾指数のワード $a^{k_1}b^{l_1}\dots a^{k_n}b^{l_n}$ 全体からなる．その商群を得るにはこのようなワードを部分群 $H(R)$ のすべての元を法として考えるべきである．すなわち, $a = bh$ あるいは $a = hb$ $(h \in H(R))$ ならば, a と b は 1 つの同じ剰余類に属すると考える．ここで, $a = (ab)b^{-1}$ より, a と b^{-1} は同じ剰余類に属する．したがって, a と b で表された任意のワードは b だけで表されたワードと同値である．このように, $F(S)/H(R)$ の任意の元は $\bar{b}$ のある累乗であることがわかる．よって, この群は巡回群である．

$H(R)$ の任意の元における, a の指数すべての和は b の指数すべての和と等しい．したがって, $b^n (n \neq 0)$ は $H(R)$ の元ではありえない．これは, $\bar{b}$ のすべての累乗がすべて異なることを意味する．このように, $F(S)/H(R)$ は無限群となる．

注意. 先の議論において, 生成元 a, b は対称的な役割を果たす．ba は ab に共役 (i.e.$ba = a^{-1}(ab)a$) だからである．したがって, $ba \in H(R)$—このような理由から定義 20 では, $H(R)$ を R によって生成される**正規**部分群と設定している．

練習 106.

$$\langle\, a, b \,|\, a^2 = 1,\, b^n = 1,\, aba = b^{-1} \,\rangle\,?$$

によって表示される群は何か．

練習 107.

$$\langle\, a, b \,|\, aba = bab \,\rangle \cong \langle\, x, y \,|\, x^2 = y^3 \,\rangle\,.$$

を証明せよ．

5.4　群の作用と軌道

群の作用は, 準同型写像に関して定義される．

定義 21 G を群, X を集合とする．**X 上の G による作用**とは, G から, X の変換群 *(p. 57 参照)* への準同型写像である：

$$T : G \to \mathrm{Tr}(X).$$

変換 T_g による作用で, 点 $x \in X$ は $T_g(x)$ にうつる．T_g を略して gx と表すこともある．

与えられた G は, あらゆる違った方法で与えられた X 上に作用できることを強調したい．なぜならば, 一般に多くの異なる準同型写像 $G \to \mathrm{Tr}(X)$ があるからだ．たとえば, この章の初めに議論した平面上の群 S_3 による作用は, 平面上の正三角形が決まると決まる．もっと正確には, その三角形の中心と 3 つの対称軸が決まれば決まる．図 5.1 は, 中心が O, 対称軸が a, b, c の正三角形である．

D_3 のどのような元によって原点 (O) をうつしても原点となる．また, 直線 a, b, c 上の点で原点以外のものは 3 つの異なる点 (自分自身を含む) にうつり, 平面上の任意の点は, D_3 による作用で 6 つの異なる点にうつることがわかる．

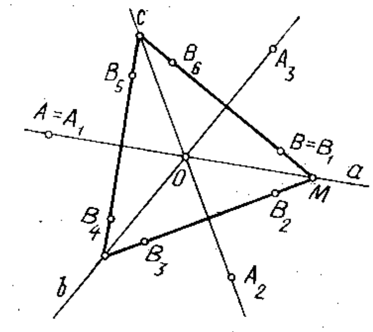


図 5.1: 平面上の群 D_3 による作用

定義 22 群の作用によって与えられた点 $x \in X$ から得られるすべての点集合 $\mathcal{O}(x)$ は, x **の軌道**とよばれる. すなわち

$$\mathcal{O}(x) = \{T_g(x) \mid g \in G\}.$$

集合 $\mathcal{O}(x)$ の濃度を軌道の長さという.

先の例では, 3 つの異なる軌道があった. 長さ 1 と 3 と 6 の軌道である.

明らかに, 任意の点は, それ自身の軌道に属する. その軌道が 1 点で構成されているとき, その点をその作用の**不動点**という. 図 5.1 において, ただ 1 つの不動点は O である.

図 5.1 をみてみよう. $A = A_1$ の軌道は, $\{A_1, A_2, A_3\}$ である. A_2 あるいは A_3 を始点としてとったとしても, 同じ軌道を得る. これは, 次の一般的性質の現れである：

『点 x の軌道に属する任意の点の軌道は $\mathcal{O}(x)$ と一致する.』

事実, $y \in \mathcal{O}(x)$ とすると, ある適当な元 $h \in G$ に対して $y = hx$ となる. このとき, $\mathcal{O}(y) = \{gy|g \in G\} = \{ghx|g \in G\}$ となるが, 群の公理より, 任意の不動点 $h \in G$ に対して, $G = \{gh|g \in G\} = G$ となる.

この結果は次の重要な事柄を導く：

『任意の 2 つの軌道は等しいか, または共通元が全くないかのどちらかである.』

事実, 2 つの軌道 $\mathcal{O}(x)$ と $\mathcal{O}(y)$ に共通元 z があるとすると, $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(y)$ となる.

軌道, あるいは集合を軌道に分割するという例は, 単位円 S を積を演算とする複素数の群とみなしたとき, この群の平面上への作用を考えるとよくわかる. この作用は 1 つの不動点 (数 0) をもち, 平面の残りの点は, 同心円を軌道として分割される.

練習 108. D_3 を複素数平面上の正三角形の対称群とする. ただし, その正三角形は中心が原点で, 対称軸の 1 つが x 軸であるように置かれているものとする. このとき, 有限集合 $\{0, 1, -1, 2, -2, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 4, -4, 2+2i\sqrt{3}, 2-2i\sqrt{3}, -2+2i\sqrt{3}, -2-2i\sqrt{3}\}$ 上の D_3 による作用に対する軌道をすべて求めよ.

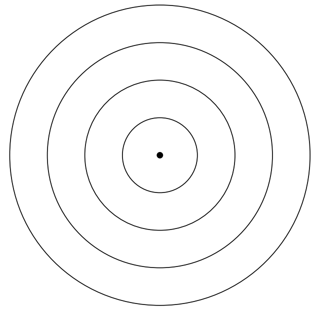


図 5.2: 群 S による軌道

問題 43 ある適当な集合上に, 有理式の群 Φ(*練習 74*) の自然な作用を定義せよ.

解答. 1 変数の有理式は関数と考えられる. つまり, 実数から実数への写像である. 不運にもこれらの関数は, 実数全体の上で定義されているわけではない. なぜならば, 分母が 0 になることがあるからである. この状態を改善する 2 つの方法がある. 1 つは, $\mathbb{R}$ から 2 点 0, 1 を除く方法 (注意：Φ の分母が消える x の値がただ 1 つ存在する), もう 1 つは, $\mathbb{R}$ 以外の点 ∞ を $\mathbb{R}$ に付け加え, 次の規則で関数をこの 1 点にまで定義するものである：

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
0	∞	1	0	1	∞	0
1	1	0	1	∞	0	∞
∞	0	∞	∞	0	1	1

この表は, 集合 $\mathbb{R}\cup\infty$ 上への Φ の純粋な作用を定義している. とくに, 3 点 0, 1, ∞ は 1 つの軌道を形成し, この軌道上への Φ の作用は, Φ と 3 つの印の置換群 D_3 との同型写像を定義している.

練習 109. この作用の軌道で, 濃度が 3 の集合 (上記以外) を 1 つ求めよ. また, それ以外の軌道は, 濃度が 6 の集合であることを証明せよ.

練習 110. 関数 $F_i \in \Phi$ を**複素変数関数**とみなし, 群 Φ の作用を集合 $\mathbb{C}\cup\infty$ 上に延長する. このとき, Φ の作用の軌道で, 濃度が 2 のものを求めよ. また, その濃度 2 の軌道と上記の 2 つの濃度 3 の軌道以外は, 濃度が 6 の軌道であることを証明せよ.

5.5 軌道を数える

群の作用の別の例を考えてみよう.

問題 44 Q を空間内の立方体とし, G を, Q を Q にうつす空間の回転全体で構成される群 (*i.e.* Q の**真の対称群**) とする. このとき, G のすべての元を列挙し, Q の面集合上への G の作用を述べよ.

解答. G は恒等変換以外で次の元を含む：

- 2 つの平行な辺 (たとえば, 図 5.2 の AA') の中点を通る直線の回りの $180°$ 回転が 6 つ.
- 2 つの互いに反対側の面の中心をむすぶ直線 (たとえば, BB') の回りの $180°$ 回転が 3 つ.
- 上記と同じ直線の回りの $90°$ 回転が 6 つ.
- 立方体の互いに反対側にある頂点の組を含む直線 (たとえば, CC') の回りの $120°$ 回転が 8 つ.

このように, G は 24 個の元で構成される.

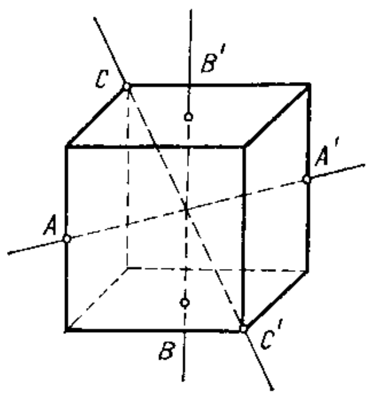


図 5.3: 立方体の回転

立方体の面の集合 F 上の G の自然な作用は, **推移的**である. すなわち, 任意の面は, 任意の他の面に群のある適当な元によってうつることができる. 言い換えると, 集合 F は, 6 つの点で構成されるが, その群の作用に対して 1 つの軌道をつくる. 任意の面 $f \in F$ に対して, f を動かさない回転はちょうど 4 つある：恒等変換と, この面の中心を通る直線の回りの 3 つの回転である. $6 \cdot 2$ は, G の位数 24 であることに注意しよう.

練習 111. 辺の集合 E と頂点の集合 V 上の G による作用について述べよ.

これまで, 位数が 6 と 8 と 12 の集合上への G の推移的な作用を求めてきた. これらの位数はすべて, 24 の約数 (群の位数) であることに注意しよう. 24 の約数は他にもある.

すべての約数に対して, 立方体のある幾何学的な元からなる約数個の集合を構成することができ, その集合上で, G は推移的に作用する. 図 5.4 は, 自然な推移的作用をもつ 4 個, 3 個, 2 個の要素で構成される集合—立方体内に内接された対角線の集合 D, 中線の集合 M, そして, 正四面体の集合 T を示している.

定義 23 群の推移的な作用をもつ集合をこの群の等質空間という.

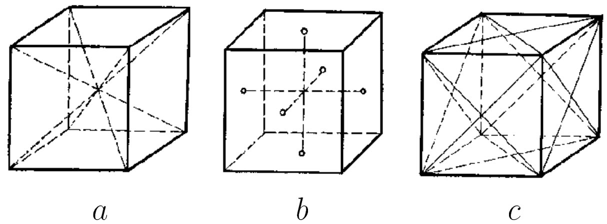


図 5.4: 立方体の対称群の等質空間

これらのそれぞれの場合において, 群 G から対応する集合の変換群への準同型写像がある.

練習 112. 集合 F, E, V, D, M のうちのどの集合に対して, この準同型写像は
a) 全射か；　b) 同型写像か.

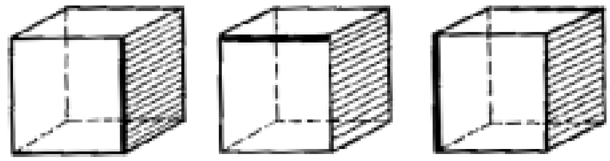
作用される集合として, 練習 112 の集合のなかのいくつかの元で構成される集合も考えられる.

問題 45 組 (f, e) の集合上の G による作用に対する軌道を図形で説明せよ. ただし, $f \in F$ は立方体 Q の任意の面, $e \in E$ はその任意の辺である.

解答. 問題の集合は, $F \times E$ (集合 F と E の直積) である. それは, 全部で $6 \times 12 = 72$ 個の要素からなり, 3 つの異なるカテゴリーに分かれる. すなわち辺 e が面 f に属するもの (図 5.5a), 辺 e と面 f とに 1 つの共通頂点があるもの (図 5.5b), 辺eが面fと共通点がないもの(図 5.5c) である. 明らかに, 辺と面の組はこれらの 3 つのタイプのうちの 1 つに属する. そしてそのタイプはどんな運動によっても別のタイプの組にはうつれない. 同じタイプに属する任意の 2 つの組は, ある適当な運動でそれぞれうつり合うことを示そう.

最初のタイプ (辺が面に含まれるタイプ) の 2 組 (f_1, e_1), (f_2, e_2) が与えられたと仮定する. まず, f_1 を f_2 にうつす回転をみつけ, それから, この面を動かさない 4 つの回転を用いて e_1 を e_2 に動かす. これで証明は終わりである. あとの 2 つの場合も同様である.

このように, G の作用によって, 集合 $F \times E$ は, 3 つの軌道に分かれる. その典型的な代表元は, 図 5.5 に示される.



a b c

図 5.5: 面–辺の異なる組

練習 113. 次の集合上の G による作用に対する軌道の個数を求めよ．また, その軌道の代表元を示せ：
(a) $V \times F$(頂点–面)；
(b) $D \times F$(対角線–面)；
(c) $E \times E$(順序づけられた辺の組).

これまでの議論でわかったことを一般化しよう．それには, 点の**安定化分群**という概念が必要である．

定義 24 集合 X 上に G の作用が与えられているとする．このとき, $x \in X$ **の安定化部分群**とは, 点 x を動かさない G の元のすべての集合 $st(x)$ である．すなわち

$$\mathrm{St}(x) = \{g \in G \,|\, T_g(x) = x\}.$$

安定化部分群は, G の部分群である．なぜならば, 任意の元 $g, h \in \mathrm{St}(x)$ に対して, 次の式が成立するからである：$T_{gh}(x) = T_g(T_h(x)) = T_g(x) = x, T_{g^{-1}}(x) = T_g^{-1}(x) = x$.

不動点の安定化部分群は, G 全体と一致する．たとえば, 図 5.1 をみよ．点 O の安定化部分群は, 群全体である．また, 点 A の安定化部分群は, 2 つの元 (恒等変換と対称変換) からなる．一方, 点 B の安定化部分群は, 自明な部分群 (恒等変換だけからなる群) である．

ここで, 読者は, 問題 44 と同じ規則に気がつくだろう．すなわち, 安定化部分群の位数と対応する軌道の長さとの積は, 全体の群の位数である：

$$|\mathcal{O}(x)| \cdot |\,\mathrm{St}(x)| = |G|. \tag{5.3}$$

5.3 式を証明するため, G の部分群 $H = \mathrm{St}(x)$ による左剰余類分解を考える：

$$G = g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_kH.$$

同じ剰余類に属するすべての元は, x に同じように作用する．すなわち, 同じ剰余類のすべての元は x を同じ位置に動かす．なぜならば, 任意の $h \in H$ に対して, $T_{gh}(x) = T_g(T_h(x)) = T_g(x)$ だからである．逆に, $g, k \in G$ が x を同じ位置に動かすとき, g と k は H による同じ剰余類に属する．実際, $k = gh$ となる $h \in G$ が存在し, そのとき

$$T_h(x) = T_{g^{-1}k}(x) = T_g^{-1}T_k(x) = x$$

が成り立つ．ゆえに, $h = g^{-1}k \in \mathrm{St}(x)$.

したがって, x の軌道の点の個数は G の H による剰余類分解 $G/\mathrm{St}(x)$ における剰余類の個数に等しい．よって, 5.3 が示された．

5.3 式は, とくに, 同じ軌道内のどのような点の安定化部分群をとっても, 位数が同じになることを示している．事実, それらは G の元で共役となる．よって, それらはすべて同型である．すなわち, 次のことがわかる：

『G を X に作用する群とし, $\mathcal{O}(x)$ をその作用による $x \in X$ の軌道とする．このとき, 任意の2点 $x, y \in \mathcal{O}(x)$ に対して, $\mathrm{St}(x)$ と $\mathrm{St}(y)$ は共役である.』

実際, 仮定により, $y = T_g(x)$ となる $g \in G$ が存在する．この g による共役化で $\mathrm{St}(x)$ と $\mathrm{St}(y)$ は共役になる．実際, 任意の元 $h \in \mathrm{St}(x)$ に対して, 次の式が成り立つ：

$$T_{ghg^{-1}}(y) = T_g(T_h(T_g^{-1}(y))) = T_g(T_h(x)) = T_g(x) = y.$$

ゆえに, $g\,\mathrm{St}(x)g^{-1} \subset \mathrm{St}(y)$. x と y を入れかえると $\mathrm{St}(y) \subset g\,\mathrm{St}(x)g^{-1}$ であるから, $g\,\mathrm{St}(x)g^{-1} = \mathrm{St}(y)$. すなわち, $\mathrm{St}(x)$ と $\mathrm{St}(y)$ は共役である．

問題 46 p 個の等しい部分に分けられた円を n 色で色づける方法は, 何通りあるか．ただし, p は素数とする．また, *2* つの色づけ方は, その円の回転によって互いにうつり合うとき, 同じぬり方であるとする．

解答. 円の可能な限りの色づけ方 (n^p 個) への巡回群 C_p の作用を扱う．求めたいのは, この作用による軌道の個数である．軌道の長さは群の位数の約数であるから, この例ではただ2つの値しかとれない．すなわち, 1 あるいは p である．なぜならば, p は素数だからだ．長さ1の軌道は, どのような回転によっても変化しない色づけに対応する．すなわち, それは, 円全体が1色でぬられた色づけである．そのような色づけの総数は n 個である．残りの色づけの総数は $n^p - n$ 個であるが, それは濃度 p の軌道に分かれる．したがって, そのような軌道は $(n^p - 1)/p$ 個である．よって, 軌道の総数, すなわち円の色づけ方は, 全部で $(n^p - n)/p + n$ 通りある．

p が素数のとき, 数 $n^p - n$ は p で割り切れることもついでながら証明できる．これは, フェルマーの小定理 4.6 の別証でもある．

練習 114. 問題 46 において p が素数でない場合には何通りあるか．

練習 114 を, 問題 46 で用いたような直接な議論で解くのは難しい．しかしながら, 任意の群の作用による軌道の個数を計算するための一般公式がある—いわゆる, **Burnside の公式**とよばれる公式である．次にそれを述べ証明する．

$g \in G$ が, 集合 X 上に作用する群の元であるとき, 対応する変換 T_g の不動点の個数, すなわち $T_g(x) = x$ となる $x \in M$ の個数を $N(x)$ とする．

練習 115. 数字 0, 1, 8 は, 中央対称 (180° 回転) によって形が変わらないが, 数字 6, 9 は形が変わる．一方, 残りの数字 2, 3, 4, 5, 7 は, 180° 回転によって数字としては意味のない形に変わる．このとき, このような 180° 回転によって形が変わらない 5 桁の数字は何個あるか.

定理 11 (Burnside の公式) 軌道の個数 r は, G のすべての元に対する不動点の個数の相加平均である．すなわち, 次の式が成り立つ：

$$r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} N(g).$$

証明 式の証明の前にまず, 簡単な問題を考えよう：「与えられた点 $x \in M$ は, 総和 $\sum_{g\in G} N(g)$ のなかに何回でてくるか？」 明らかに, g が x を動かさないとき, g はその総和に現れる．したがって, いつでもそのなかにでてくる．よって, 答えは「$|\operatorname{St}(x)|$ 回」である．軌道 $\mathcal{O}(x)$ に属する他の点は, その総和に同じ回数現れる．なぜならば, すべての安定化部分群の濃度は等しいからである．よって, この軌道の個数は, $|\operatorname{St}(x)|\cdot|\mathcal{O}(x)|$ であることがわかる．承知のように, この個数は, G の位数 $|G|$ に等しい．任意の軌道は, 同じ濃度 $|G|$ であるから, その総和は $|G|\cdot$ (軌道の個数) である．これで証明された. □

Burnside の公式を使って, 再度問題 46 を解いてみよう．ここで, 恒等変換は n^p 個の不動点がある．一方, 任意の非恒等変換は n 個の不動点がある．よって, $r = (n^p+(p-1)n)/p$ である．容易に確かめられるように, この結果は以前得られたものと同じである.

問題 47 *7*個の白いビーズと *3*個の黒いビーズでできたネックレスを考える．異なるネックレスの個数を求めよ.

解答. 2 つのネックレスは, どちらかのネックレスを回転, あるいは対称変換させることによってもう片方のネックレスと同じものになるとき, 同じネックレスであるとみなす．したがって, 固定された正十角形の頂点において, 7 個の白いビーズと 3 個の黒いビーズの可能な限りのすべての配置の集合 X と, X の二面体群 D_{10} による作用を考えなければならない.

Burnside の公式を念頭において, D_{10} の任意の元に対する X の不動点の個数を計算しよう．恒等変換によって, 集合 X のすべての $\binom{10}{3} = 120$ 個の点は動かない.

ネックレスは自明でない回転によって形が変わる．同じことが軸 (a) に関する対称変換 (図 5.6) についてもいえる．なぜならば, 白と黒どちらの色の個数も奇数個だからである．しかし, 軸 (b) に関する対称変換によっては, ネックレスの形は変化しない．任意のそのような対称変換に対して, 変わらないネックレスは $2\cdot 4 = 8$ 個ある：まず第一に, 対称軸上のビーズの 1 つは白いビーズで, もう 1 つは黒いビーズでなければならない．第二に, その軸に対称的な 4 組のビーズのうちの 1 組は黒いビーズの組でなければならない．軸 (b) に関する対称変換の個数は 5 個であるので, Burnside の公式によって次が求まる：$r = (120+5\cdot 8)/20 = 8$.

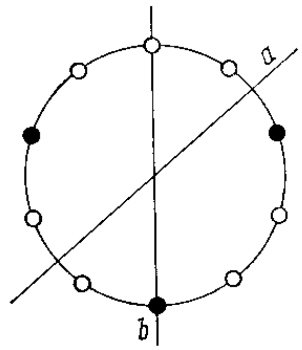


図 5.6: 3-7 タイプのネックレス

練習 116. 問題 47 において, 白いビーズが 6 個, 黒いビーズが 4 個の場合はどうなるか.

練習 117. **さいころ**とは, 1 から 6 までの数字がおのおのの面に記されている立方体のことである. 異なるさいころの個数を求めよ (2 つのさいころは, 空間内での回転で同じになるとき同じさいころとみなす).

練習 118. 2 色で (i.e. 与えられた 2 色だけを使って) 立方体の (a) 頂点 (b) 辺 をぬりわける方法は何通りあるか. ただし, 練習 117 と同様に真の回転変換だけを考慮にいれる.

練習 119. 15 角形内に内接できる六角形は何通りあるか (ある平面運動によって等しくなるとき, 2 つの図形は等しいとみなす).

5.6　不変量

ネックレスの問題は, 群論や Burnside の公式を適用しなくても解ける. 一番自然な解き方は, 以下のように述べられる. 3 個の黒いビーズによって, その円は 3 つの部分に分かれる. それぞれの部分に m 個, n 個, k 個の白いビーズがあるとする. ただし, m, n, k は 0 から 7 までの数で, $m+n+k=7$ をみたす整数である.

このとき, (m,n,k) は, m, n, k の順序を変えても同じネックレスを表していることに注意しよう. 回転と対称変換によって, どのような順列でも生成できるからである (4 個の黒いビーズを用いた場合は正しくない!) したがって, $m \le n \le k$ と仮定して一般性を失わない. よって, ネックレスの問題はその条件をみたす 3 つの整数の組の個数の計算問題となる. このような組は直接みつけられる. 次は, 辞書式順序で並べられたものである：$(0,0,7)$, $(0,1,6)$, $(0,2,5)$, $(0,3,4)$, $(1,1,5)$, $(1,2,4)$, $(1,3,3)$, $(2,2,3)$.

ところで, 3 組 (m,n,k) によって軌道をすべて列挙できるのはなぜだろうか？ なぜなら, それは次の 2 つの性質をみたすからである：

- 2 つのネックレスが等しい (同じ軌道に属する) とき, その対応する 3 組は等しい.
- 2 つのネックレスのその 3 組が等しいとき, その 2 つのネックレスは等しい.

最初の性質は次のようにも表現される：m, n, k の値はその作用の軌道で一定である.

定義 25 群 G が集合 X に作用していると仮定する. このとき, X から集合 N への写像 φ が, この作用の**不変量である**とは, 同じ軌道内のすべての元が, φ によってすべて同じ値にうつるときをいう.

不変量は任意でありうる. 上の例題で, N は, 順序づけられていない 3 つの整数で構成されていた. これらの 3 つの整数の最小数 (上で m と表されている) もまた, この群の作用の不変量となる. しかし, この不変量は, 2 番目の性質をもたない：たとえば, 図 5.7 の 2 つのネックレスは, 異なるネックレスであるが, それらの m の値は同じである. このような不変量では, 異なる軌道を区別することはできない.

定義 26 異なる軌道で不変量 $\varphi : X \to N$ の値がすべて異なるとき, その不変量を**完全不変量**という.

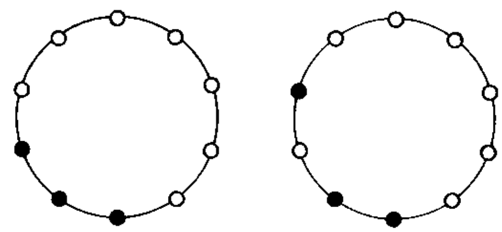


図 5.7: ネックレスの不変量

練習 120. 4 個の黒いビーズと 6 個の白いビーズでできたネックレスの完全不変量を構成せよ.

$\mathcal{M}$ を平面運動全体の群とする. このとき, $\mathcal{M}$ は自然な方法で平面上に作用する. この作用は推移的であり, よって平面全体は群 $\mathcal{M}$ の等質空間となる. しかし, この作用の不変量はおもしろくない. なぜならば, この不変量はただの定数写像だからである.

$\mathcal{M}$ は, 平面上の直線全体の集合にも作用する. この作用は自明ではない. 2 つの線分が同じ軌道に属するための必要十分条件は, その 2 線分の長さが等しいことだからである. このように, 線分の長さはこの作用の完全不変量である.

練習 121. 次の集合上に作用する群 $\mathcal{M}$ の完全不変量をいくつか述べよ：
(a) すべての三角形； (b) すべての四角形.

H が $\mathcal{M}$ の部分群であるとき, H もまた平面に作用する. H が十分小さければ, その軌道は大きくない. したがって, その作用は自明でない不変量をもつかもしれない. たとえば, H が点 A の回りの回転の群であるとき, その軌道は A を中心とする円周である. A からの距離がこの作用の完全不変量である. A を中心とする極座標系において (p.25

参照), A からの距離は極距離 r である. したがって, すべての不変量は r の関数 $f(r)$ となる.

さて, 平面上の 2 面体群 D_3 (図 5.1 参照) による作用を考えよう. O を極の中心とし, OM を極軸とする. このとき, 極距離 r はこの作用の不変量である. しかし, 完全不変量ではない. 完全不変量にするためには, r に加えてもう 1 つの関数 $\cos\varphi$ が必要である. ここで, 関数 $\cos\varphi$ は D_3 の不変量であることに注意しよう. 実際, D_3 は対称変換 $\varphi \mapsto -\varphi$ と回転 $\varphi \mapsto \varphi + 120°$ によって生成され, $\cos 3\varphi$ はこれらの変換で変わらない. 実は, 組 $(r, \cos 3\varphi)$ がこの作用の完全不変量となる. なぜならば, 容易に確かめられるように, 同次方程式

$$\cos 3\varphi = b,$$
$$r = c$$

は, 任意の実数 $c > 0$ と $|b| \leq 1$ に対して, 1 つの軌道の点に対応する 3 つ, あるいは 6 つの解をもつからである.

5.7　結晶群

必要なテクニックがそろったので, まえがきで述べた敷き詰め模様の分類問題について考えてみよう (p.5 参照). 敷き詰め模様の対称群—2 つの異なる方向に無限に繰り返された平面模様—は俗にいう**平面結晶群**によって表される. このような群の例には, 問題 27 のころがる正三角形の群—図 3.1b の敷き詰め模様の対称群—がある. 結晶群を**壁紙群**ともいう.

正確な定義は次のとうりである.

定義 27 結晶群とは有界な基本領域をもつ平面運動の離散的な群である.

この定義における 2 つの言葉を説明しよう.

定義 28 運動の群 G が**離散的である**とは, G による任意の軌道が平面上で離散的な集合であるときをいう. すなわち, 平面上の任意の点 A に対して, A の近傍で, A を含む軌道のどのような他の点も含まないものが存在するときをいう.

離散的な群の簡単な例は, 1 つの移動によって生成される巡回群である. 逆に, 一直線上の 2 つの長さが互いに素なベクトルの移動を含む群は, 離散的ではない. なぜならば, 任意の点 A の軌道は, A を通りその移動と平行な直線のちゅう密な部分集合だからである.

練習 122. $\alpha°$ 回転によって生成される群が離散的であるための必要十分条件は, α が有理数であることを証明せよ.

練習 123. 平面運動の離散的な群の作用によって平面上の任意の点の安定化部分群は有限となることを証明せよ.

説明が必要な二番目の概念は, **基本領域**である.

定義 29 群 G の**基本領域**とは, 次の *2* つの性質をみたす領域[1] F である：

- 平面上の任意の点は, ある点 $x \in F$ *(*境界点も許す*)* の軌道に属する；
- F の異なる *2* つの内点は, 同じ軌道に属さない.

この 2 つの性質は, 群の変換による F の像が (境界点を除いて) すべて異なり, 重ならないで平面をおおいつくすことを意味する. 別の言い方で, 図 F による平面の**タイル張り**という.

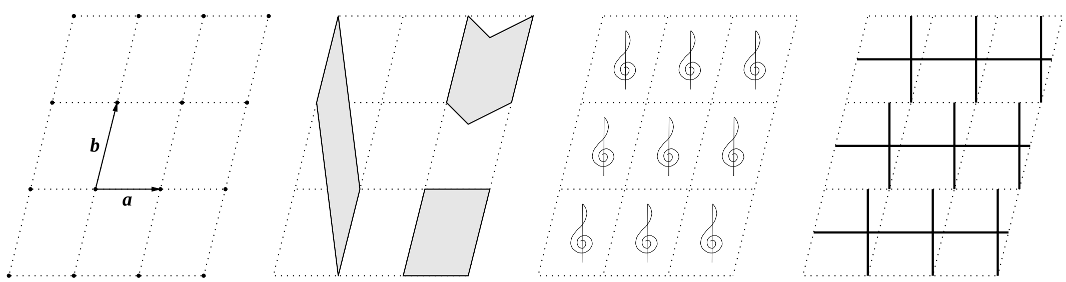
たとえば, ころがる正三角形の群 (問題 27) は結晶群である. 基本領域としては, 最初の位置にある正三角形をえらべる. 問題 27 で注意した主張は, まさに基本領域の定義の二番目の性質である.

練習 124. C_n と D_n の基本領域を求めよ.

「結晶」という言葉を使ったのは, **空間運動**の離散的な群が, 自然界における結晶の対称群を描くのに用いられているからだ. 結晶群において, 平面空間と 3 次元空間のどちらにも共通の記号体系がある. たとえば, ころがる正三角形の群は $p3m1$ と表される.

結晶群とそれに対応する敷き詰め模様の例をいくつかあげよう.

一番簡単な例は $p1$ と表され, 独立な 2 つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の移動によって生成される. 図 5.8a は, $p1$ の生成元と点の軌道を示している.



a b c d

図 5.8: 一番簡単な結晶群

基本領域として, 辺 $\mathbf{a}$ と辺 $\mathbf{b}$ をもつ平行四辺形をとることができる. その基本領域のえらび方はいろいろある. 図 5.8b は, $p1$ に対するいくつかの異なる基本領域を示している. これらの領域のうちの 2 つは平行四辺形で, 1 つは六角形である. 平行四辺形 1 の独立な 2 辺は, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ である. 平行四辺形 2 の独立な 2 辺は, $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ と $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ である.

練習 125. $k\mathbf{a}+l\mathbf{b}$, $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ を独立な 2 辺とする平行四辺形が, 基本領域であるための必要十分条件は, $|kn-lm|=1$ であることを証明せよ. ただし, k, l, m は整数とする.

[1] 領域の正確な意味を述べるのは大変である. しかし, この章では「領域」を「多角形」で代用して差し支えない.

敷き詰め模様の群のなかで一番簡単な群 $p1$ は, 敷き詰め模様の純粋な平行移動からなる対称群を表す. 敷き詰め模様の対称群が $p1$ であるということは, その対称群には平行移動の変換しか含まれないということである. 対称群が $p1$ 型の敷き詰め模様をみつけることは簡単だ. そのためには, 基本領域である平行四辺形内にその対称群が自明であるような図形を描き, 与えられた群の平行移動で得られるこの図のコピーすべての和を考えるだけでよい (図 5.8c).

そのえらばれた図形が厳密にその平行四辺形内にあれば, 得られる敷き詰め模様の対称群はまさに $p1$ と等しい. しかし, もしその図形が平行四辺形の境界に触れてもよいなら, 得られる図形の対称群は, 集合としてもっと大きくなる. この例は, 図 5.8d にある.

$p1$ は, 平面の結晶群のなかで一番簡単なものであるばかりでなく, 次のような理由で大変重要である.

補助定理 1. すべての平面の結晶群は, $p1$ 型の群 (i.e. 2 つの独立な移動によって生成される群) を含む.

証明 結晶群は少なくとも 1 つの移動を含まなければならない. そうでなければ, 有限群になるからである.

G を離散的な平面運動の群で, 条件:『任意の移動 $g \in G$ に対して, g に平行な直線 l が存在する』をみたすものとする. このとき, G の基本領域は, 有界ではないことを示す.

回転以外のどのような運動が G に属するのか, 少し考えてみよう. まず, 次のことに注意していただきたい. G に属する任意の映進の対称軸は l に平行でなければならない—映進の 2 乗は移動だからである. また, その群に属する回転は, $180°$ 回転しかない. なぜならば, $R^{\varphi} \in G$, $\varphi \neq 180°$ であるとき, その群は, 移動全体とともに, $T_{\mathbf{a}} \in G$ $T_{\mathbf{a}}$ に独立な移動 $R^{\varphi} \circ T_{\mathbf{a}} \circ R^{-\varphi}$ を含むからである (練習 58 の答えをみよ). 2 つの $180°$ 回転の合成は, それらの中心をむすぶ直線に沿った移動である. したがって, G に属するすべての回転の中心は, l に平行な一直線上になければならない. l は, すべての回転の中心を通る直線であると仮定して一般性を失わない. 次の練習問題で, G がどのような対称変換を含むのかを考えてみよう.

練習 126. G は, その対称軸が l に垂直か, あるいは l に一致するような対称変換のみを含むことを証明せよ.

以上のことから, 2 点は直線 l からの距離が等しいときのみ, 1 つの軌道に属することがわかる. 基本領域は, おのおのの軌道の 1 点を含まなければならない. よって, G の基本領域は有界ではなく, G は結晶群ではない.

これで, 任意の敷き詰め模様の群 G は, 2 つの独立な移動とそれらが生成する $p1$ 型の部分群を含むことが示せた. 実際にはもっと強い主張が成り立つ:

補助定理 2. G に属する移動**全体**の群は $p1$ 型の群である.

この補助定理を示すためには, 次の問題を解かなければならない.

練習 127. 移動だけで構成される任意の敷き詰め模様の群は, 2 つの独立な移動によって生成されることを証明せよ.

ある意味で任意の敷き詰め模様の群は, $p1$ や平面運動の有限群に帰着される. G を任意の敷き詰め模様の群, H を G の移動からなる部分群とする (H は $p1$ 型であることはすでに知っている). このとき, 部分群 H は G において正規である. なぜならば, 任意の運動による移動の共役化は移動だからである (8 参照).

補助定理 3. 任意の結晶群 G に対して, 商群 G/H は有限群で, 10 個タイプ C_n, D_n $(n = 1, 2, 3, 4, 6)$ のうちのどれか 1 つのタイプに等しい.

ここではこのことを証明しないが, 読者には平面結晶群の表を用いてこのことを確かめてもらいたい (練習 130). G/H のタイプを G の**敷き詰め模様のクラス**という.

それではいくつかの具体例で平面の結晶群の表をつくってみよう. その前にまず群 G とその部分群 H そしてそれらの基本領域の間の関係について議論する.

Φ が G の基本領域, $g_1, \cdots, g_k$ が剰余類分解 G/H の完全な代表元の集合であるならば, そのとき, 和集合

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^{k} g_i \Phi$$

は H に対する基本領域をなす. 領域 Φ をその敷き詰め模様の**モチーフ**といい, 領域 Π をその**基本組織**という. 原則として, 基本組織 Φ と g_i は Π が平行四辺形になるようにいつもとれるが, 別の形の多角形, とりわけ正六角形を用いるほうが便利なこともある.

(Π の面積) : (Φ の面積) は G における H の**指数** (i.e. G/H の位数) に等しい. G/H が大きければ大きい程, Π の基本領域 Φ は小さくなる.

問題 48 その対称群が $p3m1$ 型であるような敷き詰め模様のモチーフと基本組織をみつけよ. また, その移動全体からなる部分群 H に関する G の剰余類の集合を図形で説明せよ.

> **解答.** 図 5.9a をみてみよう. それは, 対称群 $p3m1$, すなわち, 正三角形の 3 辺に関する 3 つの対称変換によって生成される群を示している. (図 5.9a の代わりに, 図 3.1b も同様に使うことができた). その敷き詰め模様は, 平面上で正三角形 MNB (**モチーフ**) をころがすことによって得られる. また, それは点 A と点 B と点 D をむすぶベクトルによって移動を与える.
>
> 基本組織として, たとえば平行四辺形 $ABCD$ をえらぶことができる. その 2 辺 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ は移動からなる G の部分群 H を生成する. 容易にわかるように, $S_{ABCD} : S_{MNB} = 6 : 1$ である. 平行四辺形 $ABCD$ を, その敷き詰め模様の基本領域である 6 つの正三角形に分けることは不可能である (しかし, それを別の型の 6 基本領域に分けることは可能である—やってみよう). この場合, H の基本領域として六角形, たとえば $BQCLDM$ をえらぶのがもっと便利である. この基本領域は, 6 つの基本的三角形に自然に分けられる.
>
> G/H の剰余類の個数を求めるとき, H の元は平面上のモチーフの相対的な位置 (‘足’ の方向や向き) を変えないことに注意しよう. 同じ剰余類に属する異なる運動, たとえば $g \circ h_1$ や $g \circ h_2$ $(h_1, h_2 \in H)$ は同じようにそのモチーフの

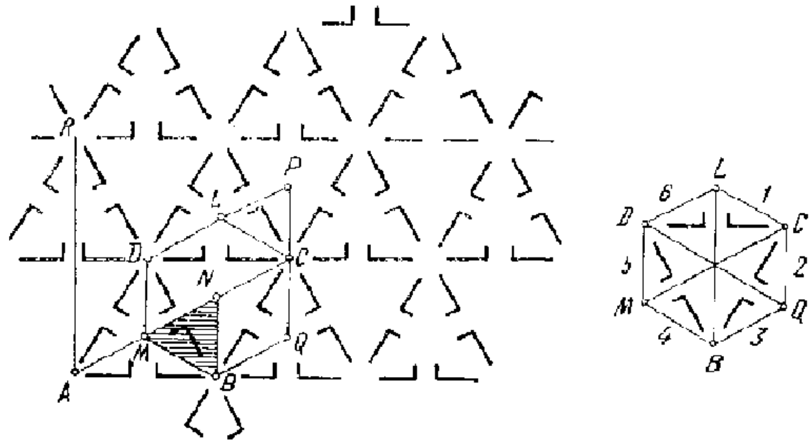


図 5.9: $p3m1$ 型の敷き詰め模様

相対的な位置を変える．なぜならば, h_1 と h_2 によっては, モチーフの位置は変わらないからだ．図から, モチーフには異なる 6 つの位置があることがわかる．よって, G/H の元の個数は 6 である．図 5.9b にあるように, それらに 1 から 6 までの番号をつけよう．このとき, たとえば, 剰余類 gH に属する運動のすべては, これらの数の次のような順列を誘導する．ただし, $g \in G$ はある垂直な直線を軸とする対称移動である：$1 \leftrightarrow 6$, $2 \leftrightarrow 5$, $3 \leftrightarrow 4$.

このようにして次の結果に到達する：G/H は D_3 が正三角形の頂点の集合に作用するのと同様に, その基本組織に含まれるモチーフの集合に作用する：つまり, 恒等写像と 3 つの対称移動を含む 3 つの回転変換が存在する．その結果は, 次のように書かれる：$G/H \cong D_3$. この事実は, 次のようにも述べられる：G の敷き詰め模様のクラスは D_3 である．

$p3m1/p1$ と書くのは誤りである．$p3m1$ 型の群に含まれる $p1$ 型の部分群はたくさんあるからである．

練習 128. G/K の位数を求めよ．ただし, G は先に議論した群, $K \subset H$ は $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AR}$ によって生成される移動の部分群とする (図 5.9a 参照)．このとき, この群の構造を図で説明せよ．とくに, それは C_n, D_n のうちの 1 つに同型か．

平面運動の群 $\mathcal{M}$ における $p1$ 型の部分群にはどのくらい異なるものがあるのだろうか? もちろん, 無限個あるだろう．ある部分群は 2 つの基本ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ によって生成される．しかし, このような群どうしはどれも同型である．実際にはもっと強い主張が成り立つ．すなわち, 任意の 2 つの $p1$ 型部分群は平面の適当な線形変換によって互いに共役である (p.123 参照): H が移動 $T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}}$ によって生成され, K が $T_{\mathbf{c}}, T_{\mathbf{d}}$ によって生成されるとき, $LHL^{-1} = K$ となる．ただし, L は $L(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$, $L(\mathbf{b}) = \mathbf{d}$ となる線形変換である．

定義 30 平面運動の *2* つの群が同値であるとは, 適当な線形変換によって互いに共役になるときをいう．

さてこれから, まえがきでも述べた主張「壁模様には 17 種類の対称群が存在する」の正確な定理を述べよう.

定理 12 (Fedorov–Schönfliess) 定義で述べられた同値性を同じものとみなして, 任意の結晶群は, 下記の表にある *17*種類の群のうちの *1*つの群に同値である. これらの *17* 種類の群は, 互いに同型ではない.

証明の概略 証明はあまり難しくないが, かなり長い. したがって, ここでは概略のみ紹介する. 詳細は, 読者にまかせよう.

1. 結晶群の回転は, 位数が 2, 3, 4, 6 だけであることを証明せよ.
2. $G^+ \subset G$ を G における真の (方向保存の) 運動全体からなる部分群とする. このとき, G^+ は, 指数 (i.e. G/G^+ の位数) が 1 あるいは 2 の正規部分群である.
3. $G^+ = G$(i.e. G は移動と回転だけで構成される群) であるなら, G は, $p1$, $p2$, $p3$, $p4$, $p6$ のうちのどれかに同値である. どれになるかは, G の回転の最大位数に依る.
4. $G^+ \neq G$ であるなら, G は G^+ と $G \setminus G^+$ のある運動 f によって生成される. ちなみに, G^+ だけによって生成される群は, 上記の 5 つのタイプのどれかになる. おこりうるあらゆる可能性を考えて (f は対称変換あるいは映進のどちらかであり, その軸は, 回転などの中心を通るかあるいは通らないかなど), 次のことを立証する：
   (a) $G^+ = p1$ なら, $G = pm$, pg または, cm.
   (b) $G^+ = p2$ なら, $G = pmm$, pmg, pgg または, cmm.
   (c) $G^+ = p3$ なら, $G = p31m$ または $p3m1$.
   (d) $G^+ = p4$ なら, $G = p4m$ または $p4g$.
   (e) $G^+ = p6$ なら, $G = p6m$.

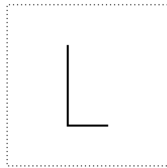
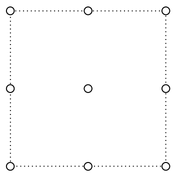
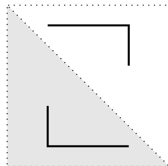
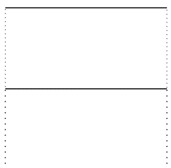
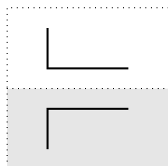
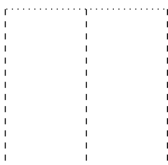
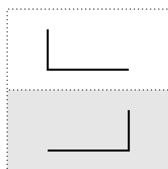
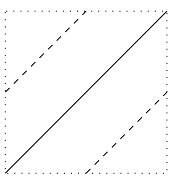
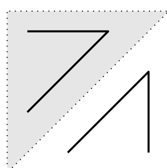
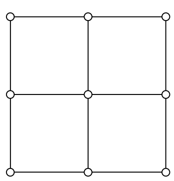
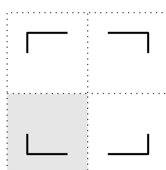
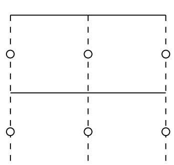
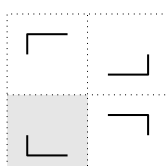
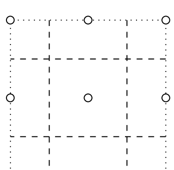
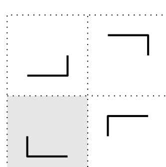
表は (左から右へ) 次の項目をもつ：

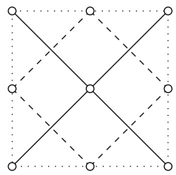
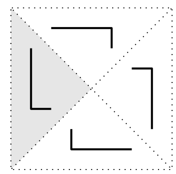
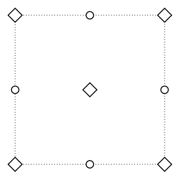
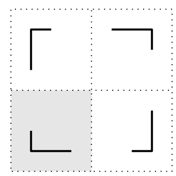
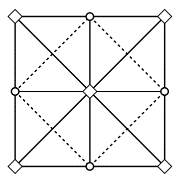
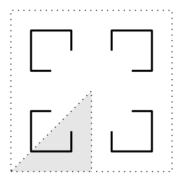
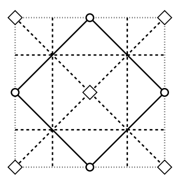
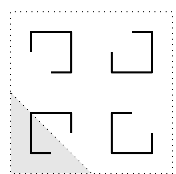
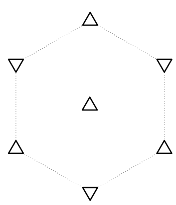
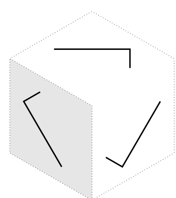
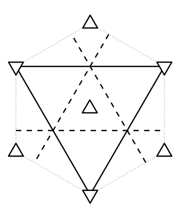
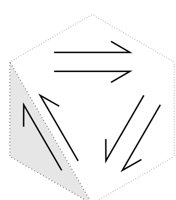
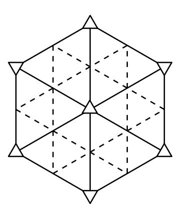
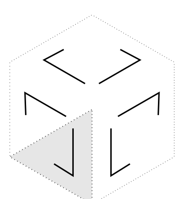
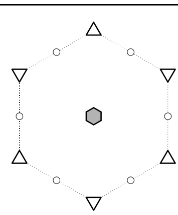
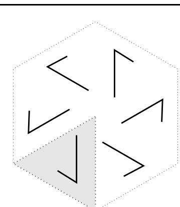
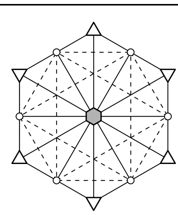
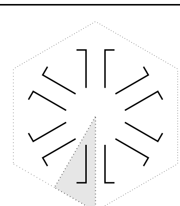
- 記号: その群の標準的な結晶学的記号.
- 対称群: 平行線で囲まれた基本領域をもつ基礎組織とその群に含まれる運動に対する印 (直線は対称変換の軸, 破線は映進の軸である. 記号 ○, △, ◇, ⬣ はそれぞれ, 位数 2, 3, 4, 6 の回転の中心を示している).
- 例: この対称群をもつ簡単な敷き詰め模様の例.
- 生成元と関係式: その群の生成元と定義関係式の集合.

表の 1 番目〜 12 番目の群に対しては正方形の形, 13 番目〜 17 番目の群に対しては正六角形の形の基本組織を代表とする. しかし, それ以外にも, $p1$, $p2$ 型の群に対しては平行四辺形, pm, pg, pmm, pmg, pgg 型の群に対しては長方形, cm, cmm 型の群に対してはひし形をとれることに注意しよう.

この表を用いると, 自分の部屋の壁紙模様など, どのような敷き詰め模様の対称群でも決定することができるだろう.

平面結晶群の表

記号	対称群	例	生成元と関係式
p1			独立な移動 T_1, T_2 $T_1T_2 = T_2T_1$
p2			裏返し R_1, R_2, R_3 $R_1^2 = R_2^2 = R_3^3 = \mathrm{id},$ $(R_1R_2R_3)^2 = \mathrm{id}$
pm			対称変換 S_1, S_2 と移動 T $S_1T = TS_1,\ S_2T = TS_2,\ S_1^2 = S_2^2 = \mathrm{id}$
pg			平行な映進 U_1, U_2 $U_1^2 = U_2^2$
cm			対称変換 S と映進 U $S^2 = \mathrm{id},\ SU^2 = U^2S$
pmm			長方形の辺に関する対称変換 S_1, S_2, S_3, S_4 $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2 = \mathrm{id},$ $(S_1S_2)^2 = (S_2S_3)^2 = (S_3S_4)^2 = (S_4S_1)^2 = \mathrm{id}$
pmg			対称変換 S と中央対称 R_1, R_2 $S^2 = R_1^2 = R_2^2 = \mathrm{id},$ $R_1SR_1 = R_2SR_2$
pgg			垂直な映進 U_1, U_2 $(U_1U_2)^2 = (U_1^{-1}U_2)^2 = \mathrm{id}$

cmm			対称変換 S_1, S_2 と中央対称 R $S_1^2 = S_2^2 = R^2 = \mathrm{id}$, $(S_1S_2)^2 = (S_1RS_2R)^2 = \mathrm{id}$
p4			中央対称 R と $90°$ 回転 R_1 $R^2 = R_1^4 = (R_1R)^4 = \mathrm{id}$
p4m			二等辺直角三角型の辺に関する対称変換 S_1, S_2, S_3 $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \mathrm{id}$, $(S_1S_2)^2 = (S_2S_3)^4 = (S_3S_1)^4 = \mathrm{id}$
p4g			対称変換 S と $90°$ 回転 R $S^2 = R^4 = (R^{-1}SRS)^2 = \mathrm{id}$
p3			3 つの $120°$ 回転 R_1, R_2, R_3 $R_1^3 = R_2^3 = R_3^3 = R_1R_2R_3 = \mathrm{id}$
p31m			対称変換 R と $120°$ 回転 R $R^3 = S^2 = (R^{-1}SRS)^3 = \mathrm{id}$
p3m1			正三角型の辺に関する対称変換 S_1, S_2, S_3 $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \mathrm{id}$, $(S_1S_2)^3 = (S_2S_3)^3 = (S_3S_1)^3 = \mathrm{id}$
p6			裏返し R と $120°$ 回転 R_1 $R^2 = R_1^3 = (R_1R)^6 = \mathrm{id}$
p6m			$(30°, 60°, 90°)$ 三角形の辺に関する対称変換 S_1, S_2, S_3 $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \mathrm{id}$, $(S_1S_2)^2 = (S_2S_3)^3 = (S_3S_1)^6 = \mathrm{id}$

練習 129.　図 4 と図 5.8d の敷き詰め模様の対称群を求めよ.

練習 130.　結晶群の表における敷詰め模様のクラスを決定せよ. また, 補助定理 3 (p. 115) を証明せよ.

練習 131.　結晶群の記号で使われる文字と数の意味を推測してみよう.