第6章　いろいろな変換

この本の主人公 —変換群— はこれまで, 平面運動で構成される群という特別な例として登場してきた. この章では, 別のタイプの平面変換, すなわち, アフィン変換, 射影変換, 相似変換, 反転変換について議論する. これらの変換はすべて2つの実数変数, あるいは1つの複素変数のどちらかの分数線形関数によって表される.

6.1　アフィン変換

アフィン変換は, 平面変換のなかでも重要なものである. それは運動の自然な一般化である. 事実, 平面運動全体の群 $\mathcal{M}$ は, アフィン群 $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ の部分群である. 運動からアフィン変換への変換関数は, 座標を用いることで簡単に得られる.

問題 49 平面運動をデカルト座標を用いて表わせ.

解答. Oxy を平面のデカルト座標系 (以下 ’古い’ という), 運動 f による Oxy の像を, 別のデカルト座標系 $O_1x_1y_1$(以下’ 新しい’ という) とする.

点 A が古い座標系で座標 (p, q) であるとき, その像 A' は新しい座標系で同じ座標 (p, q) となる.

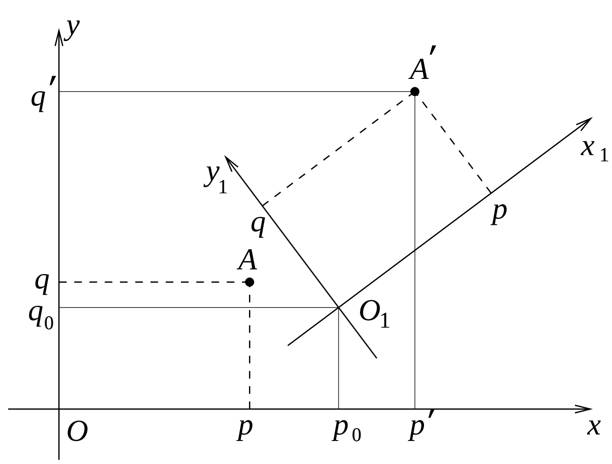

図 6.1: 座標における運動

方向を変えない運動 (移動あるいは回転) に対しては, 図 6.1 から容易に, 古い座

標系を用いて A' の座標 (p', q') を表すことができる.

$$\begin{cases} p' &= p\cos\alpha - q\sin\alpha + p_0 \\ q' &= p\sin\alpha + q\cos\alpha + q_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

ただし, α は, 2 つの軸 Ox, O_1x_1 のなす角である.

方向を変える変換に対しても, q が $-q$ に変わるだけで同じような式を得る：

$$\begin{cases} p' &= p\cos\alpha + q\sin\alpha + p_0 \\ q' &= p\sin\alpha - q\cos\alpha + q_0 \end{cases} \tag{6.2}$$

アフィン変換は 6.1 や 6.2 と類似した式によって与えられる. ただし, 係数は, 任意の数であり, サインやコサインである必要はない.

定義 31 平面のアフィン変換とは, 方程式

$$\begin{cases} x' &= ax + by + x_0 \\ y' &= cx + dy + y_0 \end{cases} \tag{6.3}$$

にしたがって, 点 (x, y) を点 (x', y') にうつす変換である.

式 6.3 の係数 a, b, c, d は任意の値である. しかし平面の本当の (1 対 1) 変換を得たいなら, $ab - bc \neq 0$ と仮定しなければならない ($ad - bc$ は行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式). 事実, 基底ベクトル $(1, 0)$ と $(0, 1)$ は, 変換 6.3 によって, それぞれベクトル (a, c) と (b, d) にうつり, これら 2 つのベクトルで構成される平行四辺形の面積は $ad - bc$ となる.

アフィン変換によって, 平行な直線は平行な直線にうつるが, 角の大きさは必ずしも保存されない. すなわち, アフィン変換によって正方形は平行四辺形になることもある. たとえば, 図 6.2 は行列が $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のアフィン変換を示している.

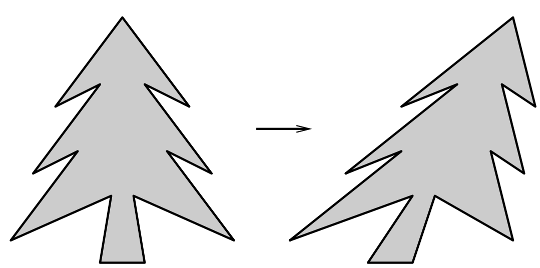

図 6.2: アフィン変換

定義 32 平面のアフィン変換群とは, $ad - bc \neq 0$ となるアフィン変換全体の群である. これを $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ と表す.

アフィン変換群は平面上に推移的に作用する．原点 O の安定化部分群は，**線形変換群** $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ である．

定義 33 平面の線形変換は

$$\begin{cases} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{cases} \tag{6.4}$$

をみたす変換である．群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ は $ad-bc\neq 0$ となる変換全体の群である．

練習 132. $\mathbb{R}^2$ を平面の平行移動全体の群とせよ．このとき，$\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^2\cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ であることを証明せよ．

アフィン変換の基本的性質は，直線上の点の比を保存することである (p.13 参照)．すなわち点 C が線分 AB を比 $k:l$ で分けるとき，C の像 C' もまた同じ比 $k:l$ で対応する線分 $A'B'$ を分ける．事実 $\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})$ は，直線を直線にうつし，かつ任意の直線上の点の比を保存する平面変換全体の集合と**一致する**ことが証明される．

アフィン変換は，幾何学的な問題を解くのに役立つ．ただし，その問題の主張はアフィン変換によって変わらないものでなければならないが，解答は，具体的な場合を考えると簡単になる．

簡単な例をみるため，1 章で話題にした中線の性質を考えよう: **任意の三角形の 3 つの中線は 1 点で交わり，この点はおのおのの中線を** $2:1$ **の比で分ける** (練習 10 参照)．

与えられた三角形は，アフィン変換によって正三角形に変えることができる．正三角形に対してこの中線の性質は明らかである．

練習 133. アフィン変換を用いて，問題 4 (p.15) を解け．

線形変換，アフィン変換は，1 次元の場合でも意味をなす．直線の線形変換は式 $x\mapsto ax$ で表され，直線のアフィン変換は，式 $x\mapsto ax+b$ で表される．その対応する群は条件 $a\neq 0$ によって区別され，それぞれ $\mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$, $\mathrm{Aff}(1,\mathbb{R})$ と表す．実数 $\mathbb{R}$ の代わりに，素数による剰余を考えることもできる．そうすればそれらは有限群になる．また実数の代わりに複素数を用いることもできる．この群 $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$, $\mathrm{Aff}(1,\mathbb{C})$ についてはのちに言及される (6.3 章参照)．

練習 134. (a) 群 $G=\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_2)$ の位数を求めよ．いままでてきた群で，G と同型な群を求めよ．(b) 群 $\mathrm{Aff}(1,\mathbb{Z}_3)$ に対してはどうか．

6.2 写真撮影

射影変換の概念は日常生活から浮かんでくる．

数学的な視点からみると，写真撮影は絵を描くことと同様に，**透視変換**あるいは**中心射影**である．写真撮影は，与えられた物体の任意の点 A を直線 AO (O は，カメラの光学上の中心点) が，フイルム平面と交わる点 A' にうつす変換である (図 6.3)．自然を描く時，芸術家は写真撮影と同じようなことをする．ただ違うのは，その物体と目の **'間' に**キャンバスが置かれていることである．

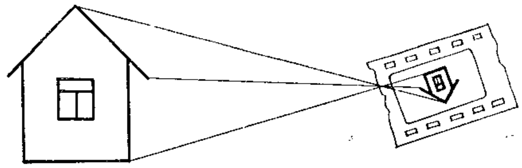

図 6.3: 射影としての写真撮影

このような変換によって, 明らかに直線は直線にうつる. したがって射影変換の前にまず, 直線の透視変換について述べることにする.

定義 34 *l, l' を平面上の 2 直線, S を同じ平面上の固定点とする (図 6.4a). 透視変換とは, 任意の点 $A \in l$ を 2 直線 SA, l' の交点 A' にうつす写像 $p : l \to l'$ である. 同様に空間内の 2 平面 Π_1, Π_2 と点 S に対しても, 透視変換 $p : \Pi_1 \to \Pi_2$ を定義できる (図 6.4b 参照).*

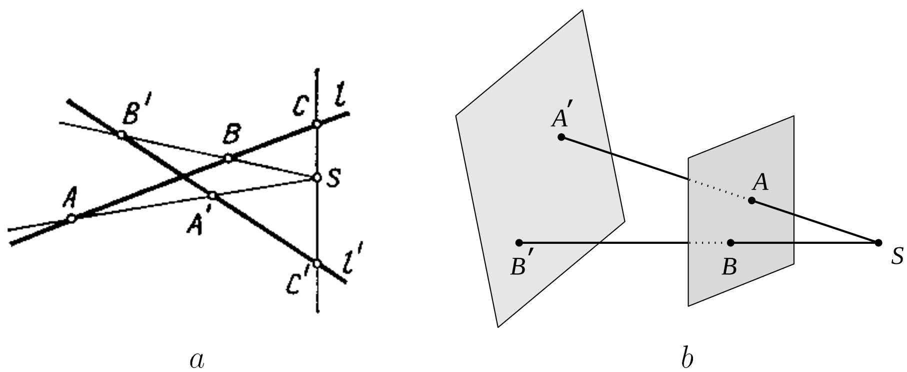

図 6.4: 直線の透視変換 (a) と平面の透視変換 (b)

定義 35 直線をその直線, あるいは平面をその平面にうつす射影変換は透視変換のいくつかの合成である. そこで補助線または補助平面が用いられる.

射影変換の性質を表す次のような問題から議論しよう. ある直線に沿って並んだ等間隔の物体の列 (たとえば, 道の木々) の写真を撮るとする. これらの点の写真への像は等間隔になるとは限らない. しかし, それらが全く任意であるはずはないので, その射影変換によって変わらないなにかある不変量があるにちがいない. このような不変量は, 4 点以上の点に依存しなければならない. なぜならば, 2 点間の距離は変化することができ, 3 点間の相互関係もまた任意に変化できるからである. たとえば, 図 6.4 において, B は A と C の間にあるが, その像 B' は A の像 A' と C の像 C' の間にはない.

注目すべき事実として, 4 点の**複比**あるいは**非調和比**とよばれるその 4 点変数の関数は直線の射影変換 p によって値が変わらない.

定義 36 4点 A, B, C, D の複比は, 次のように定義される：

$$(A,B;C,D)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}.$$

ただし, 4直線 AC, BC, AD, BD は符合付きの数で, 正であるか負であるかは, 与えられた点の組の方向に依る.

定理 13 複比は射影変換によって変わらない, すなわち, $(A,B;C,D)=(A',B';C',D')$ をみたす.

証明 異なる 2 つの公式によって, 図 6.5 の三角形の面積を表すと, 次のようになる：

$$\begin{aligned}
S_{\triangle SAC}&=\frac{1}{2}h\cdot AC=\frac{1}{2}SA\cdot SC\sin\angle ASC,\\
S_{\triangle SBC}&=\frac{1}{2}h\cdot BC=\frac{1}{2}SB\cdot SC\sin\angle BSC,\\
S_{\triangle SAD}&=\frac{1}{2}h\cdot AD=\frac{1}{2}SA\cdot SD\sin\angle ASD,\\
S_{\triangle SBD}&=\frac{1}{2}h\cdot BD=\frac{1}{2}SB\cdot SD\sin\angle BSD.
\end{aligned}$$

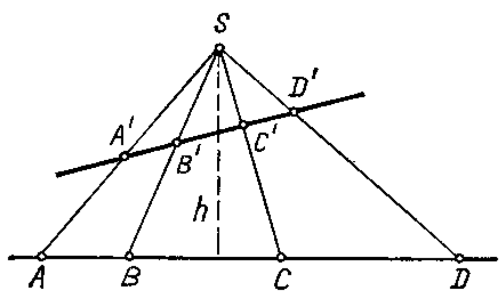

図 6.5: 複比を導く

ゆえに,

$$\begin{aligned}
(A,B;C,D)&=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{S_{\triangle SAC}}{S_{\triangle SBC}}:\frac{S_{\triangle SAD}}{S_{\triangle SBD}}\\
&=\frac{SA\cdot SC\sin\angle ASC\cdot SB\cdot SD\sin\angle BSD}{SB\cdot SC\sin\angle BSC\cdot SA\cdot SD\sin\angle ASD}\\
&=\frac{\sin\angle ASC}{\sin\angle BSC}:\frac{\sin\angle ASD}{\sin\angle BSD}.
\end{aligned}$$

同様に,

$$(A',B';C',D')=\frac{\sin\angle A'SC'}{\sin\angle B'SC'}:\frac{\sin\angle A'SD'}{\sin\angle B'SD'}$$

となる. ゆえに, $(A,B;C,D)=(A',B';C',D')$. □

問題 50 A, B, C, D を, 一直線上に (この順序で) 等間隔で並んだ 4 本の木とし, A', B', C', D' をそれぞれ A, B, C, D の写真への像とする. ただし, $A'B'$ $=6cm$, $B'C'=2$ cm. このとき, $C'D'$ の長さを求めよ.

解答. 次を得る：

$$(A,B;C,D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}.$$

$C'D' = x$ とすると

$$(A',B';C',D') = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{8}{2} : \frac{x+8}{x+2}.$$

$(A,B;C,D) = (A,B';C',D')$ より,

$$\frac{8(x+2)}{2(x+8)} = \frac{4}{3}.$$

ゆえに, $x = 1$.

射影変換の座標における一般式を導くのに, 同様の議論が用いられる. $p : l \to l'$ を直線 l から直線 l' への射影変換とし, x を l 上の変点 M の座標, p による M の像 $M' \in l'$ の座標を x' とする. また, l 上の異なる 3 点 A, B, C を固定し, それぞれの座標を a, b, c とする. このとき, 関係式

$$(A,B;C,M) = (A,B';C',M')$$

は, 次のように書き直される：

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b} = \frac{c'-a'}{c'-b'} : \frac{x'-a'}{x'-b'}.$$

ただし, $p(a) = a'$, $p(b) = b'$, $p(c) = c'$, $p(d) = d'$ である.

したがって, この式から x を用いて x' を表すことができる. 射影変換 p は次のように表される.

$$x' = \frac{mx+n}{px+q}. \tag{6.5}$$

ただし, m, n, p, q は a, b, c, a', b', c' に依存する定数である. このような関数を**分数線形変換**という.

6.5 において, $mq - np \neq 0$ でなければならない ($mq - np$ は, 行列 $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ の行列式). なぜなら次のような問題を考えてみるとよい：

$$f : x \mapsto \frac{mx+n}{px+q}$$

は, 実数から実数への上への 1 対 1 写像であるか？

答えは「1 対 1 写像ではない」である. 事実, $p \neq 0$ のとき, 点 $x = -q/p$ には f による逆像が存在しない.

練習 135.　この写像 f において**逆像**が存在しない実数を示せ.

1 点 ∞ (無限大) を導入して, その射影変換の作用を次の規則で, 集合 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ 上に拡張する (p.104 参照)：

- $\dfrac{a}{0} = \infty$ for $\forall a \neq 0$,
- $\dfrac{m \cdot \infty + n}{p \cdot \infty + q} = \begin{cases} \frac{m}{p}, & \text{if } p \neq 0, \\ \infty, & \text{if } p = 0. \end{cases}$

このように, $mq - np \neq 0$ となる分数線形変換 $f(x) = \frac{mx+n}{px+q}$ は, 拡張された直線 $\overline{\mathbb{R}}$ から $\overline{\mathbb{R}}$ への 1 対 1 変換を正しく定義している.

練習 136.　集合 $\{f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}} | f(x) = \frac{mx+n}{px+q}, mq - np \neq 0, m, n, p, q \in \mathbb{R}\}$ は, 群をなすことを確かめよ.

この群を **(拡張された) 実数直線の射影変換群**といい, $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{R})$ と表す.

練習 137.　6.5 式を用いて, 複比が $\overline{\mathbb{R}}$ の 4 点集合に作用する射影変換群の不変量であることを確かめよ.

6.5 式を導く議論によって, 任意の異なる 3 点は, ある適当な射影変換によって任意のそのような 3 点にうつれることがわかる. このことは, 3 点集合上への射影変換の作用が, 自明な不変量をもつことを意味する.

いままでに, 何回か 2 つの射影変換 $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto 1 - x$ によって生成される群を考えた (練習 74, 問題 43 など参照) が, これは射影変換群における唯一の有限群ではない.

練習 138.　2 つの変換 $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto (x-1)/(x+1)$ は, D_4 に同型な 8 個の元からなる群を生成することを証明せよ.

練習 139.　直線の射影変換で有限位数のものをすべて求めよ.

直線の射影変換については, これで終わりである. 次に, 平面について少し言葉の説明をする

平面の射影変換全体の集合は群をなし, この群を $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ と表す. この部分群として, たとえばアフィン変換全体の集合 $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ がある.

練習 140.　$\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ は, $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ の正規部分群であるか.

直線の射影変換に用いた議論と類似した議論によって, 次の定理が導かれる.

定理 14 *平面の射影変換は, デカルト (あるいはアフィン) 座標系で*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_0 x + b_0 y + c_0} \\ y' = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_0 x + b_0 y + c_0} \end{cases} \tag{6.6}$$

と表される変換であり, しかもそれだけに限る.

定理 15 群 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ は, どんな *3* 点も一直線上にない *4* 点全体の集合上に推移的に作用する.

この最後の定理より, 初等幾何学のいくつかの問題はかなり簡単になる. もし, 問題が点と直線の間の関係のみ必要とするなら, 任意の与えられた四辺形を別の四辺形にうつす射影変換をつくることができ, 解法はもっと簡単になることがある. しかし, 思いだしてほしい. 射影変換は一般に, 角や距離や面積ばかりでなく, 直線の線分の比や異なる図形どうしの面積比まで変えてしまう. ただ唯一変わらないものは, 直線と複比である.

ここにこの応用例がある.

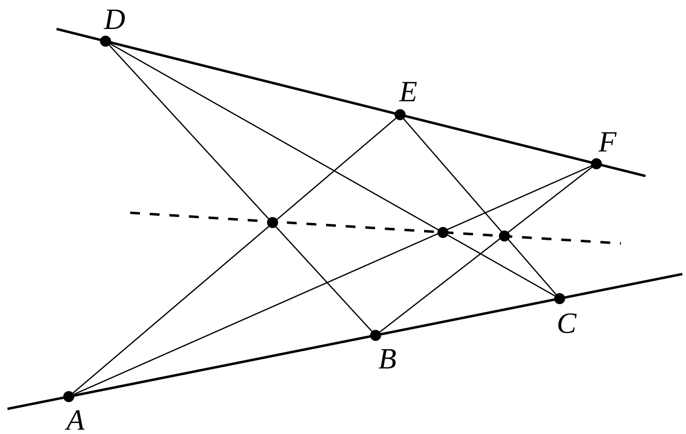

図 6.6: Pappus の定理

練習 141. Pappus の定理を証明せよ (図 6.6 参照): 3 点 A, B, C と 3 点 D, E, F がおのおの一直線上にあるとき, 3 交点 $AE \cap BD$, $AF \cap CD$, $BF \cap CE$ もまた一直線上にある.

6.3　相似変換

定義 37 相似変換とは, *1* つの同じ正の倍率ですべての距離を変える平面変換である.

アフィン変換と同様に, 相似変換は, 運動全体の族よりも大きい平面変換の族である. 定義 37 から明らかに, 相似変換全体の集合は変換群である.

相似変換の一番簡単な種類は, **相似拡大変換**である. これは運動とは異なる変換である.

定義 38 中心 A, 係数 $k \neq 0$ の**相似拡大変換** H_A^k とは, 平面上の任意の点 M を $\overrightarrow{AM'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$ となる点 M' にうつす変換である (図 *6.7* 参照).

平面の相似拡大変換全体の集合は群をなさないが, ある固定点をもった相似拡大変換全体の集合は群をなす. 複素座標 z を用いて, このような変換を式 $z \mapsto kz$ で表すことができる. ただし, k は 0 でない実数である. したがってこの群は, 積を演算とする 0 でない実数の群 $\mathbb{R}^*$ に同型である.

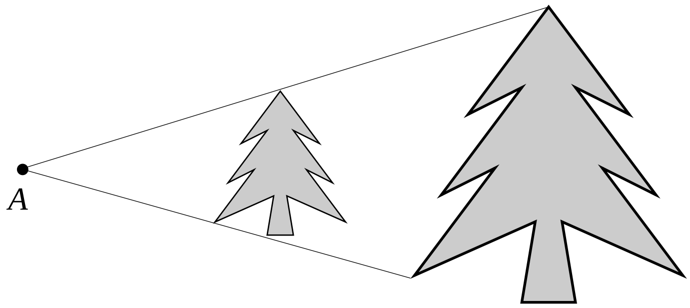

図 6.7: 相似拡大変換

練習 142. $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^{\star} \cong \mathrm{PGL}(1,\mathbb{R})$ を証明せよ. $\cong$ は同型を表す.

以下は, 相似拡大変換によって解ける初等幾何学の問題である.

問題 51 与えられた三角形 ABC に正方形を内接させよ.

解答. 3 頂点が三角形 ABC に内接している正方形を描くのはやさしい (図 6.8 の正方形 $KLMN$ 参照).

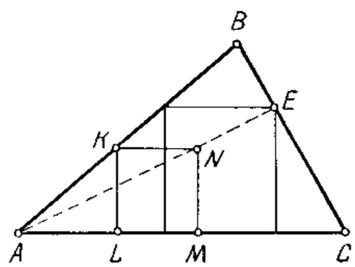

図 6.8: 三角形に四角形を内接する

図 6.8 のように, 点 A を中心とする任意の相似拡大変換によって, 正方形 $KLMN$ の 3 頂点は三角形 ABC の辺上にうつる. あとは H_A^k が点 N から, 辺 BC 上の点 E にうつるような係数 k を求めればよい. 構成法は図 6.8 の通りである.

練習 143. 与えられた三角形 ABC 内に 3 辺がそれぞれ三角形 ABC の辺に平行な三角形を内接させよ.

相似拡大変換のもう 1 つの便利な性質は, それが直線の向きを保存することである. すなわち, 直線 l の像はつねに l に平行な直線となる. このことを次の問題に適応してみよう.

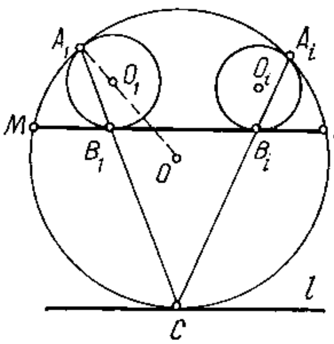

図 6.9: 円の弓形に内接された円

問題 52 円周 S 上に *2* 点 M, N がある．弦 MN と *1* つの弧 $\widetilde{MN}$ で囲まれる弓形の部分にいくつかの円 $S_1, S_2, \cdots$ が内接している (図 6.9)．$A_i = S_i \cap \widetilde{MN}$, $B_i = S_i \cap MN$ とすると，すべての直線 A_1B_1, A_2B_2, $\cdots$ は，ある *1* 点で交わることを証明せよ．

> **解答.** 任意の直線 A_iB_i が点 C を通ることを示す．ただし，C は図 6.9 にあるように，弦 MN に平行で，しかも S に接する直線 l 上の点とする．中心 A_1, 係数 $k = OA_1 : O_1A_1$ の相似拡大変換を h_1 とする．h_1 は S_1 (中心を O_1 とする) を S にうつす．したがって，S_1 に接する直線 MN の像は MN に平行な直線で，S に接する l である．$B_1 = S_1 \cap MN$ より，$h_1(B_1) = C$．同様のことが，おのおのの S_i に対して成り立つ．これで示せた．

練習 144.　2 つの同心円に対して，その 2 つの円と 4 つの連続点 A, B, C, D で交わり，関係式 $AB = 2BC = CD$ をみたす直線を構成せよ．

練習 145.　三角形が与えられたとき，その三角形のおのおのの辺の中点を通り，その辺の対角の 2 等分線に平行な 3 直線は，ある 1 点で交わることを証明せよ．

練習 146.　**9 点円 (くてんえん) の定理または Euler 円の定理**　任意の三角形 ABC に対して，次の 9 点を通る円が存在することを証明せよ：三角形 ABC のおのおのの辺の中点 (3 点)，頂点からの垂線の足 (3 点)，線分 KA, KB, KC の中点 (3 点)，ただし，K は三角形 ABC の垂心とする．

平面の相似変換全体の群は，相似拡大変換全体の集合より集合として大きい．

定義 39 螺旋相似変換は，中心が同じの相似拡大変換と回転の合成として定義される *(* 図 *6.10* 参照*)*.

本書では，このような変換に，複素数について学んだときでくわした．すなわち点の複素数 a 倍は，係数 $|a|$ の相似変換をしたあと，原点の回りに偏角 $\arg a$ だけ回転する変換に等しい (2.4)．螺旋相似変換の幾何学的な応用問題をいくつか考えよう．

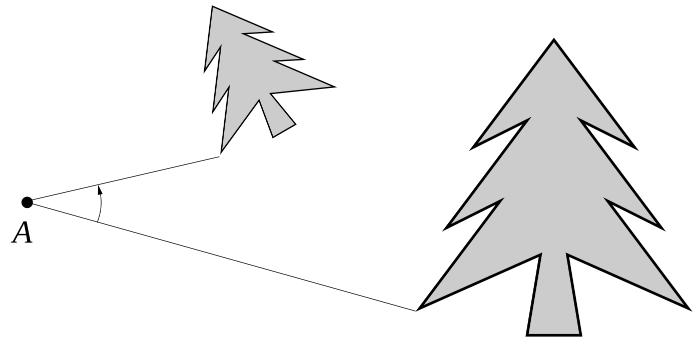

図 6.10: 螺旋相似変換

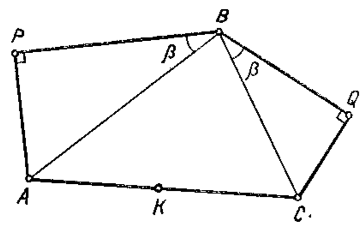

図 6.11: 三角形 ABC の辺上に描かれた正三角形

問題 53 任意の三角形 ABC に対して, P, Q を $\angle APB = \angle BQC = 90°$, $\angle ABP = \angle CBQ = \beta$ をみたす $\triangle ABC$ の外側の *2* 点とする (図 *6.11*). このとき, $\triangle PQK$ の頂点角すべてを求めよ. ただし, K は辺 AC の中点とする.

解答. 2 つの螺旋相似変換を考える：$F_P = H_P^k \circ R_P^d$, $F_Q = H_Q^{1/k} \circ R_Q^d$. ただし, $d = 90°, k = PB : PA = QB : QC$ とする. 明らかに $F_P(A) = B, F_Q(B) = C$ であるから, $(F_Q \circ F_P)(A) = C$. 一般に, 2 つの螺旋相似変換が合成されると, 係数はかけられ, 回転角は足される (少しあとで説明する). したがって, $F = F_Q \circ F_P$ は 180° 回転でなければならない. $F(A) = C$ より, その回転の中心は K となる. よって $F(K) = K$. $F_P(K) = K_1$ とすると, $F_Q(K_1) = K$ だから 2 つの直角三角形 KPK_1, QKK_1 はどちらも頂点 K_1 で同じ角 β をとる. よって, この 2 つの三角形は合同である (図 6.12).

ゆえに, $PQ \perp KK_1$, $\angle KPQ = \angle KQP = \beta$.

先の議論では, 2 つの螺旋相似変換の合成は, 係数がその 2 つの螺旋相似変換のそれぞれの係数の積で, 回転角がそれぞれの回転角の和であるような螺旋相似変換であることを使った. この事実は, 2 つの螺旋相似変換の中心が一致するときは明らかである. このことを複素数を用いて一般的な条件で証明してみよう. それには, 次の定理が必要である.

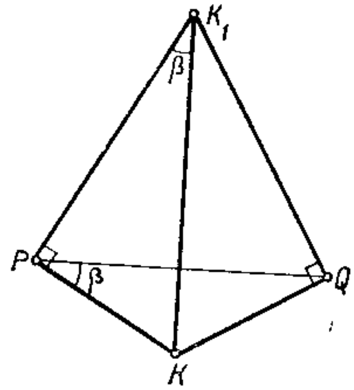

図 6.12: 螺旋相似変換の積

定理 16 平面変換が相似変換であるための必要十分条件は, 複素座標 z を用いて,

$$z \mapsto pz + a \tag{6.7}$$

あるいは

$$z \mapsto p\bar{z} + a, \tag{6.8}$$

と書けることである. ただし p, a は任意の複素数, $p \neq 0$ である. *2* つの場合 *6.7, 6.8* はそれぞれ真の *(i.e.* 方向保存の*)* 変換, 真でない *(i.e.* 方向を逆にする*)* 変換に対応する.

証明 事実, 真の平面運動が線形関数 $w = pz + a \quad (|p| = 1)$ に対応していることは 2.3 において示した. いま, F を相似変換, すなわち F をある要素 k によってすべての距離を引き延ばし (あるいは, 縮め) かつ, 方向を変えない変換とし, H を係数 k の原点中心の相似変換とする. このとき, $H^{-1} \circ F$ は距離と方向を変えない変換である. よって, それは真の運動で, $w = pz + a \quad (|p| = 1)$ に対応する. このとき, 変換 $F = H \circ (H^{-1} \circ F)$ は $w = k(pz + a)$ と書ける. この式は線形変換を表している.

逆に, 任意の複素関数 $pz + a$ が与えられたとき, それは要素 $k = |p|$ によって点間の距離を伸ばす (あるいは, 縮める) ことが, 次のように確かめられる：

$$|(pz_1 + a) - (pz_2 + a)| = |p| \cdot |z_1 - z_2|.$$

真でない変換の場合は関数 6.8 が関数 6.7 と標準的な対称変換 $z \mapsto \bar{z}$ の合成であることから, 真の変換の場合に帰着される.

6.1 章の用語や記号を用いると, 定理 16 は, 真の相似変換の群が, $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$ であることを意味する. ただし, $\mathbb{C}$ は複素数を表す.

複素数で相似変換を表すことによって, 互いに関連する次の 2 つの重要な事実を証明できる：

- 移動でない任意の相似変換 $pz + a$(つまり, $p \neq 1$) は, ただ 1 つの不動点をもつ.

- 移動でない任意の相似変換 $pz+a$ は, 螺旋相似変換 (とくに, 相似拡大変換) である.

実際, 不動点とは $pz_0+a=z_0$ となる数 z_0 である. $p\neq 1$ ならば, この方程式はただ 1 つの解 $z_0=a/(1-p)$ をもつ. したがって, 一番目の主張は成り立つ.

また, 式

$$pz+a=p\left(z-\frac{a}{1-p}\right)+\frac{a}{1-p}$$

は, この変換が中心 $1/(1-p)$, 引き延ばし係数 $|p|$, 回転角 $\arg p$ の螺旋相似変換であることを示している. よって, 二番目の主張も成り立つ.

ここで, 問題 53 の解答で用いた次の性質を証明する：

『任意の螺旋相似変換 F_1, F_2 に対して, 合成 $F_1\circ F_2$ の係数は (F_1 の係数)×(F_2 の係数), $F_1\circ F_2$ の回転角は (F_1 の回転角)+(F_2 の回転角) である.』

事実, $w=pz+a$, $u=qw+b$ を 2 つの螺旋相似変換とすると, その合成は次のようになる：

$$u=q(pz+a)+b=pqz+(aq+b).$$

この式は, 係数が $|pq|=|p||q|$, 回転角が $\arg(pq)=\arg p+\arg q$ の螺旋相似変換を表している.

練習 147. 2 枚の透明な紙にそれぞれ異なる縮尺で同じ国の地図が描かれている. このとき, 1 つの地図を, もう 1 つの地図の上に完全に覆いかぶさるように置くと, ある点をピンで突き刺せば, それは 2 枚とも同じ場所を表すようにできることを証明せよ.

練習 148. 平面上に $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$ となる 4 点 A, B, C, D が与えられているとき, 三角形 ABE と三角形 CDE が合同になるような点 E が存在することを証明せよ.

練習 149. 三角形 ABC の外側に, おのおのの辺を一辺とする正方形が描かれている. M, N, P をそれぞれ辺 AB, BC, CA を一辺とする正方形の中心とするとき, 次の等式が成り立つことを示せ： $NP\perp CM$, $|NP|=|CM|$.

6.4　反転

問題 54 円 S は, *2* 点 A, B でそれぞれ円 S_1, S_2 に接している. このとき, 直線 AB は, S_1 と S_2 の間の相似変換の中心を通ることを証明せよ.

解答. 直線 AB と直線 O_1O_2 の交点を K とする (図 6.13 参照). K が S_1 と S_2 の間の相似変換の中心であることを証明したい. まず, かなり間接的な方法でこの相似変換を構成しよう.

f を, 平面上の任意の点 M を $KM\cdot KM'=KA\cdot KB=\mathrm{const}$ となる点 $M'\in KM$ にうつす変換とすると, 明らかに, $f(A)=B$, $f(B)=A$ となる.

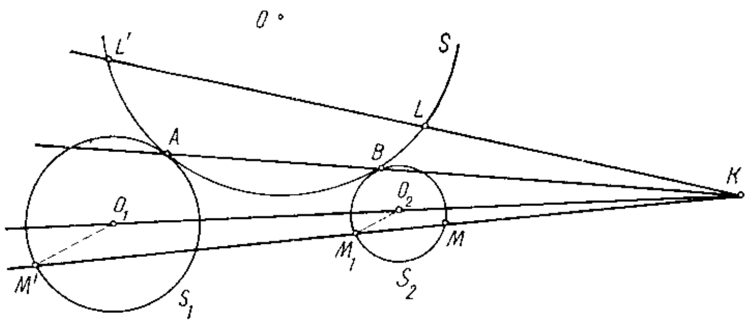

図 6.13: 接する 3 円

S は, f によってそれ自身にうつることに注意しよう．これは, 初等幾何学でよく知られている次の定理から導かれる (知らなければ, 自分で証明してみよう)：

『 固定された円 S, 固定された点 K と K を通り 2 点 L, L' で S と交わる直線 l に対して, $|KL| \cdot |KL'|$ の値は, l のえらび方に依らず一定である.』

点 $M \in S_2$ をとる．その像 $M' = f'(M)$ は, 次の式をみたす半直線 KM 上の点である：

$$KM' = \frac{KA \cdot KB}{KM}.$$

M_1 を S_2 と KM との二番目の交点とせよ．先に引用した定理により, $KM \cdot KM_1 = C = \mathrm{const}$ だから

$$KM' = \frac{KA \cdot KB}{C} \cdot KM_1.$$

この式は, 点 M' が中心 K の相似変換による M_1 の像であることを意味する! したがって, f による S_2 の像は, ある円である．これを S_2' とする．S_2 は点 B を通り, 点 B で S に接しているので, S_2' は A を通り A で S に接する．ゆえに $S_2' = S_1$.

したがって, S_1 と S_2 は, 中心 K の相似変換によって互いにうつり合う.

たとえば, 問題 54 の変換 f は反転である.

定義 40 中心 O, 半径 R の円 T に関する反転とは, 平面上の任意の点 M を $OM{\cdot}OM' = R^2$ となるような半直線 OM 上の点 M' にうつす変換である.

定義における反転は, T の内側の部分を外側の部分にうつし, T の外側の部分を内側の部分にうつす．また, T を T にうつす．H. Pétard の良く知られた冗談話「A contribution to the mathematical theory of big game hunting」がある．それは, ライオンを捕らえる

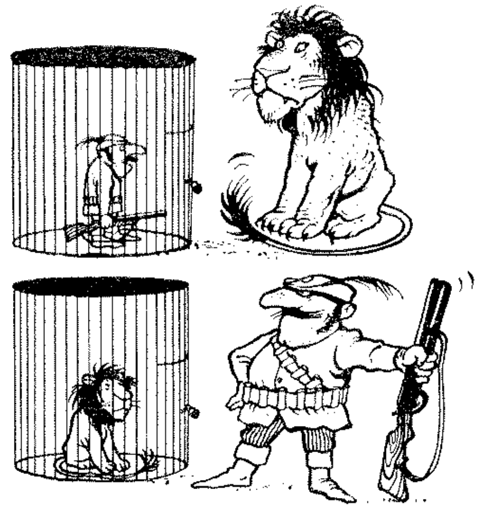

図 6.14: 反転によるライオンの捕らえ方 (H. Pétard による)

次のような方法を提案している．ハンターが檻に入って待つ．ライオンが現れたら，ハンターは反転を施す．そうすれば，ライオンは檻の中に入る．

定義の反転は，**ほぼ** 1 対 1 の平面変換である．つまり，円の中心 O を除くすべての点で定義されいて，そこで 1 対 1 対応となる．M が中心 O に向って動くとき，M の像 M' は中心 O から無限に離れてゆく．このような理由で，p.127 で直線の射影変換に行ったように，平面に 1 点 ∞ (“無限大”) を加える．そして，反転を拡張された平面の 1 対 1 変換とみなすのである．

ここで扱う平面は複素平面であると仮定する．承知のように，任意の複素数 z とその複素共役 $\bar{z}$ は関係式 $z\bar{z} = |z|^2$ をみたす．したがって，中心 0，半径 r の反転に対する代数的な式は $z \mapsto r^2/\bar{z}$ である．

練習 150. 固定された中心 O をもつ反転全体の集合によって生成される群はなにか．

問題 54 の議論中に，反転 f の中心を通らない任意の円が，f によって円にうつることがわかった．

練習 151. 反転の中心を通る円のその反転による像を求めよ．

練習 152. 反転による直線の像を求めよ．

これらの事実をすべてよせ集めると，反転は直線や円の集合を保存することがわかる．直線を無限遠点を通過する円とみなすと，反転は円変換といえる．すなわち (一般化された) 円全体の族を保存する変換である．あとで，円変換全体の集合は反転全体の集合より集合として大きいことがわかるだろう．

初等幾何学における反転の応用例をいくつかあげておく．

問題 55 図 *6.15a* のように，*4* つの円がおのおのそのうちの隣りの *2* つの円に接している．このとき，その *4* 接点はある *1* つの円周上にあることを証明せよ．

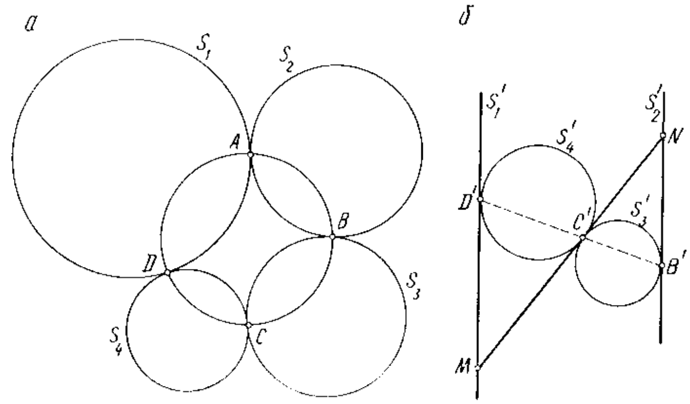

図 6.15: 接する 4 円

解答. 中心 A(接点の 1 つの) の円 (半径はなんでもよい) に関する反転 f を適応しよう．この平面変換のあと, この問題は簡単になる．$S_i' = f(S_i)$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ とする．先の議論から S_1' と S_2' は直線で, S_3' と S_4' は円であることがわかる．S_i' 間の接触の関係は, S_i 間の接触の関係と同じである．すなわち, S_1' は S_2' に, S_2' は S_3' に, S_3' は S_4' に, S_4' は $'S_1$ に接する．また, S_1' と S_2' は平行でなければならない．なぜなら, S_1 と S_2 とにはただ 1 つの共通点があり, その共通点はその反転によって無限遠点にうつるからである．このように, f による図 6.15a の像は, 図 6.15b のような配置になる．この問題は, 3 接点 B', C', D' が一直線上にあることを示せばよい—一直線上にあるとは, 3 点 B', C', D' の逆像 B, C, D が A を通る円周上にあるこということだ．

3 点 B', C', D' が一直線上にあることを示そう．S_3 と S_4 との共通接線を S_1' と S_2' と交わるまで描き, S_1' と S_2' との交点をそれぞれ M, N とすると, 三角形 $MC'D'$ と三角形 $NC'B'$ はどちらも 2 等辺三角形 (i.e. $MD' = MC', NB' = NC'$) で, $\angle M = \angle L$ となる．ゆえに, $\angle D'C'M = 1/2(180° - \angle D'MC) = 1/2(180° \angle C'NB) = \angle B'C'N$. したがって, 3 点 B', C', D' は一直線上にある．これで示せた．

問題 54, 55 では, 2 つの曲線が接するとき, 反転によるそれらの曲線の像もまた接するという事実を用いた．練習 147 はこの事実の一般化である．

練習 153. 2 つの円の交点における円の曲線どうしのなす角は, その交点を通る 2 つの円のおのおのの接線がなす角とする．任意の円に関する反転によって, 2 つの円どうしのなす角は保存されることを証明せよ．

6.5　円変換

平面上の反転全体の集合は変換群ではない．この節では, 反転全体によって**生成される**群について学ぼう．この群を**円変換群という**．円変換群は, 2 つの部分からなる: 複素

射影群 $\mathrm{PGL}(1,\mathbb{C})$(p.127 参照) と集合として一致する方向保存の変換全体の部分群と, 方向を逆にする変換からなる剰余類である.

実証となる問題をみよう.

問題 56 C を中心 O 半径 OB の円とし, A を OB の中点とする. また, 次の *2* つの変換を施してよいと仮定する： C に関する反転, A に関する中央対称変換. このとき, これらの変換を連続的に施すことによって, 与えられた点は, 最大何個の異なる点にうつるか.

解答. 問題における 2 つの変換を複素関数で表そう. 点 O に複素座標 0 を, 点 B に 1 を対応させるとする. このとき, 点 A は 1/2 に対応する. A に関する点対称は, 次の関数で表される：

$$f_1(z) = 1 - z.$$

また, 定義より反転による z の像 w は次の関係式をみたす：$|z||w| = 1$, $\arg z = \arg w$.

よって, C に関する反転は, 次のように表される：

$$f_2(z) = 1/\bar{z}.$$

2 つの変換 f_1, f_2 は対合である. したがって, f_1 と f_2 との異なる合成関数は, f_1 と f_2 を代わるがわる施すことによってのみ得られる. z から始めて, まず z に f_1 を施し, それから f_2, そして再び f_1 を施す $\cdots$ と, 次のリストを得る：z, $1-z$, $1/(1-\bar{z})$, $\bar{z}/(\bar{z}-1)$, $1-1/z$, $1/z$, $\bar{z}$, $1-\bar{z}$, $1/(1-z)$, $z/(z-1)$, $1-1/\bar{z}$, $1/\bar{z}$. この後, $1/\bar{z}$ に f_2 を施すと再び z にもどるから, このリストはループ状の列になる. したがって, 反転と中央対称は, 12 個の元で構成される群 (G とする) を生成し, G の任意の軌道の位数は 12 以下であることがわかる. ちょうど 12 個の元を含む軌道の例はあとで述べよう.

練習 154. 上記の軌道の濃度を求めよ. また, 異なる軌道を描け.

G の**基本領域**, すなわち G の作用によるその像が重ならないで平面をおおいつくす平面の一部分を求めよう.

変換 f_1 による C の像は C' であり, 変換 f_2 による C' の像は直線 MM' である (図 6.16 参照).

もっと重要な線は直線 OB である. OB によって分けられる 2 つの領域は $z \mapsto \bar{z}$ $(\in G)$ によって互いにうつり合う. これらの直線は, 平面を群の作用によって互いにうつり合う 12 個の領域に分ける. また, これらの領域のおのおのの内点は, G によって決してその領域の内点にうつらない.

12 個の領域のうちの任意の領域, たとえば領域 1 を G の作用の基本領域としてえらぶことができる. 読者には, G の異なる変換による領域 1 の像が何か確かめてもらいたい.

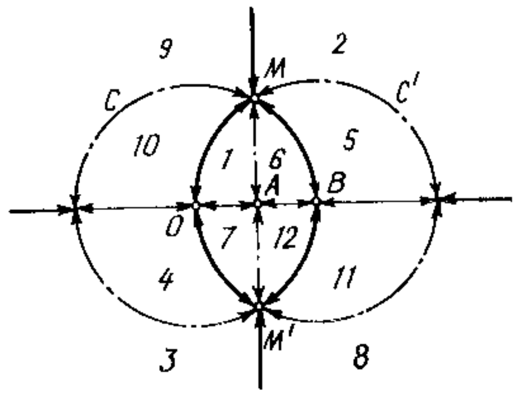

図 6.16: $z \mapsto 1 - z$ と $z \mapsto 1/\bar{z}$ によって生成される複素関数の群 .

図 6.16 に描かれている 4 本の直線の和集合は, G のある自明でない元によって変わらない平面上の点全体の集合である．任意の内点の軌道はちょうど 12 点からなる．交点ではない異なる直線の点の軌道は, 濃度が 6 である．交点は 3 つの軌道に分かれている：長さが 3 の軌道 2 つ $(1/2, 2, -1$ と $0, 1, \infty)$ と長さが 2 の軌道 1 つ $(1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ に対応する点 M, $M')$.

図 6.16 の 4 本の線は, 交差点によって 18 本の線分に分かれる．これらの線分は G の作用によって互いにうつり合い, 長さ 6 の 3 つの軌道に分けられる．図のふつうの直線と太線と破線は, その 3 つの軌道を表している.

さて, 任意の複素係数をもつ分数線形変換 (すなわち, 群 $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{C})$ の元とまた, z を共役変数 $\bar{z}$ でおきかえた同様の関数) によって表される平面変換の幾何学的な意味を学ぼう.

定理 17 $\forall s,\ b,\ c,\ d \in C\ \ s.t.\ \ ad - bc \neq 0$ に対して, 次のことが成り立つ：

1. 関数
$$w = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$
によって定義される変換 (真でない分数線形変換) は, 反転変換と螺旋相似変換との合成である.

2. 関数
$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$
によって定義される変換 (真の分数線形変換) は, 反転変換と螺旋相似変換と対称変換の合成である.

証明 $c = 0$ のとき, 2 の式は線形関数 $a_1 z + b_1$ となる．承知のように, これは相似変換を表している．1 の式は $a_1\bar{z} + b_1$ となり, これは $\bar{z}$ に関する線形関数で, 対称変換 $z \to \bar{z}$ と相似変換の合成である.

$c \neq 0$ のとき, $\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ は

$$\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = p\left(\frac{1}{\bar{z}-z_0} + z_0\right) + r$$

と書ける. ただし, $z_0 = -\bar{d}/\bar{c}$, $p = (bc-ad)c^2$, $r = a/c - pz_0$ である. かっこ内の式は, 変換 $z \mapsto z + z_0$ による (中心 O, 半径 1 の) 標準的な反転の共役である. したがって, それは, 中心 z_0, 半径 1 の反転を表している. その反転を施したあと, 相似変換 $z \mapsto pz + r$ が施されて, 求められるべき合成を得る.　□

真の分数線形変換 $(az+b)/(cz+d)$ は, 変換 $z \mapsto \bar{z}$ によって, 真でない分数線形変換に変わる. そして, この定理の二番目の式が得られる. このとき, 真でない変換は方向を変える変換であるが, 真の変換より扱い易くなるのは奇妙なことである. このことは, この文脈において反転がいかに重要であるかを説明している—そして, 反転は真ではない変換である.

練習 155.　(真および真でない) 分数線形変換全体の集合 G は, 群をなすことを証明せよ. また, 真の分数線形変換全体の集合 H は, G の正規部分群であることを確かめ, 商群 G/H を求めよ.

定理 17 によって, どちらの分数線形変換の族も**円変換**であることがわかる. すなわち, どちらの変換も平面上の一般化された円の集合 (円と直線) を保存する. 任意の円変換は, 真あるいは真でない分数線形変換のどちらかで表されることが知られている. そんなわけでこのような変換全体の群を**円群**という. 分数線形変換のもう 1 つの注目すべき性質は, それらの変換が**等角な**ことである. すなわち, 曲線どうしのなす角がそれらの変換によって変わらない. しかし, 等角な写像全体の集合は, 円変換全体の集合よりも集合として実に大きい. たとえば, 等角な写像には複素関数 $P(z)/Q(z)$ がある. ただし, P, Q は任意の多項式である.

練習 156.　次の式によって与えられる複素平面変換全体の集合は, 群をなすことを証明せよ：

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc > 0, \tag{6.9}$$

$$w = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc < 0. \tag{6.10}$$

6.6　双曲幾何学

6.9, 6.10 式の w は, 上半平面 $y > 0$ からそれ自身への写像であることを確かめよう. $z = x + iy$, $w = u + iv$ とおくと, 簡単な計算で複素式 6.9 は, 次の実数式の組に等しいことがわかる：

$$\begin{aligned} u &= \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+y^2}, \\ v &= \frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+y^2}. \end{aligned}$$

よって, v は y と同符合である. 6.10 も同様である.

L を上半平面 $H = \{(x,y)|y > 0\}$ 上に作用する変換 6.9, 6.10 全体の群とする. H を**双曲平面**または **Lobachevsky 平面** といい, L を H の**双曲的な運動**の群という . この言葉には次のような意味がある.

承知の通り, L の変換によって, 任意の円は円 (あるいは, 円の特別な場合として直線) にうつる. H の点集合で, L の変換によって変わらないものがある. これらは, (半) 円や直線 Ox に垂直な (半) 直線である (図 6.17 参照). H の任意の 2 点を通るただ 1 つの半円があるという理由で, これらの半円を L**-直線**という—これは, Euclid 平面の直線にもある性質である.

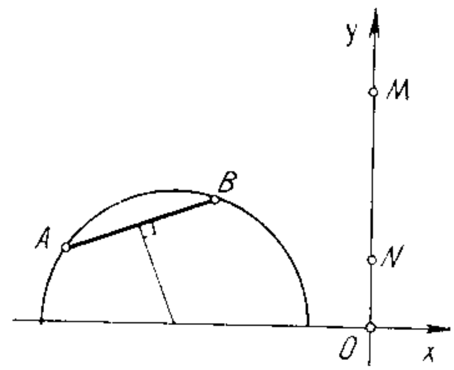

図 6.17: 双曲平面における L– 直線

双曲的な運動の群 L には, Euclid 平面上に作用する平面運動の群と似た性質がある. とくに, 任意の点は他の点に双曲的な運動によってうつることができる. しかし, L-線分 (L-直線の弧) 全体の集合上への L による作用は, 推移的ではない. 双曲平面と, Euclid 平面との幾何学的な主な違いは, 平行直線について考えるとき現れてくる.

ふつうの Euclid 幾何学においては, 2 つの直線が交わらないなら, 平行であるという. 平行線の主な特徴は任意の直線 a と a 上にない任意の点 A に対して, A を通り a に平行な直線がちょうど 1 つ存在することである. 図 6.18 をみてみよう. それは L-直線 l と L-点 A を示している. A を通る 4 直線の中に a と交わる直線が 1 本存在し (直線 l), a と共通点のない直線が 3 本存在する (直線 k, n, m). このように, Lobachevsky 幾何学においては, 与えられた点を通り, 与えられた直線と交差しない多くの直線を描くことができる.

Lobachevsky 幾何学における角の計算をしてみよう. 2 つの L-直線の間の角はその接線間のふつうの Euclid 角として定義される (角の定義より, L-運動によって L-角は変わらないことに注意しよう).

問題 57 図 *74* のように, *3* 点 A, B, C の座標をそれぞれ $(0,7)$, $(4,3)$, $(0,5)$ とする. このとき, *Lobachevsky* 三角形 ABK の頂点角の総和を求めよ. ただし, L– 辺 BK は点 O を中心とする円の弧とし, L– 辺 AB は点 M を中心とする円の弧とする.

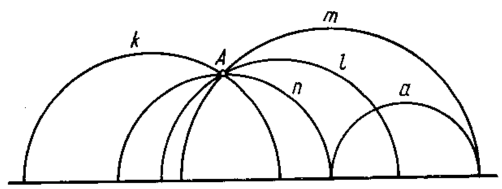

図 6.18: 2 本の $L-$ 直線の相互間にみられる位置

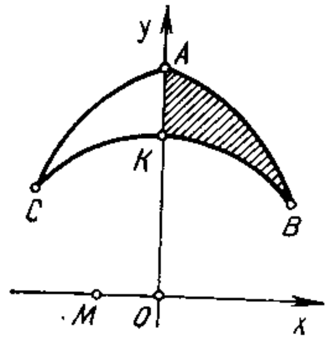

図 6.19: 双曲平面における三角形

解答. $L-$ 三角形 ABK は図 6.14 の斜線の領域である.

辺 AK は軸 Oy 上にある. 辺 KB は O を中心とする円の弧である. 辺 AB は M を中心とする円の弧である.

練習 157. 点 M の座標を求めよ.

頂点 K の角は直角である. なぜなら, その角は円とその半径によって形づけられるからである：

$$\angle K = 90^\circ.$$

2 円のなす角 B はその接線間の角に等しい. したがって, その半径間の角に等しい：

$$\angle B = \angle OBM.$$

同様に

$$\angle A = \angle OMA.$$

M の座標は次のように求められる：

$$\begin{aligned}
\tan\angle OMA &= \frac{7}{3}, \\
\tan\angle OBM &= \tan(\angle BOB_1 - \angle BMB_1) = \frac{9}{37}, \\
\tan(\angle A + \angle B) &= \frac{\frac{7}{3} + \frac{9}{37}}{1 - \frac{7}{3}\cdot\frac{9}{37}} = \frac{143}{24}.
\end{aligned}$$

$\tan\angle A + \angle B > 0$ より, $\angle A + \angle B < 90°$ である. ゆえに, L-三角形 ABK の頂点角の総和は $180°$ よりも小さい. i.e. $\angle A + \angle B + \angle K < 180°$.

興味深いことは, Lobachevsky 三角形が (ある意味で) 大きければ大きい程, 頂点角の総和は小さくなることである. たとえば, 二等辺三角形 ABC の面積は三角形 ABK の面積の 2 倍であるが, 三角形 ABC の頂点角の総和は三角形 ABK の頂点角の総和より小さい.

最後に, 双曲平面における結晶群の例を 1 つあげておく—-いわゆる**モジュラ群**といわれる分数線形変換の集合 U である：

$$U = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \,|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

群 U は, 次の 2 つの元によって生成される：

$$S : z \mapsto -1/z \quad , \quad T : z \mapsto 1+z.$$

練習 158.　関係式 $S^2 = ST^3 = id$ を確かめよ.

図 6.20 は, U の基本領域

$$\Phi = \{z = x+yi \,|\, |z| \geq 1,\ |x| \leq \frac{1}{2}\}$$

と T, S, T^{-1}, TS, ST などによるその像を示している.

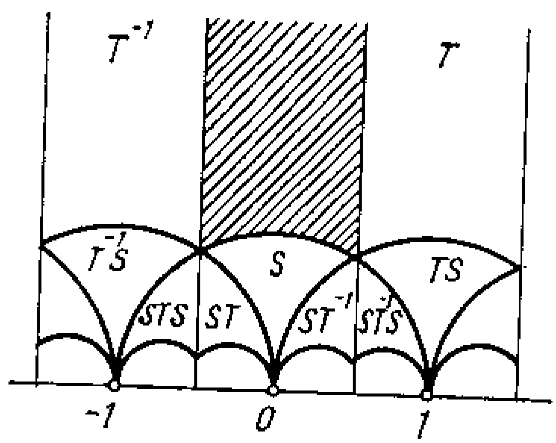

図 6.20: モジュラ群の基本領域

領域 Φ は事実, L-三角形で有限領域をもつ (Lobachevsky 幾何学においてはこの領域を定義していないので, 読者は確かめられない！) Φ のコピーは重ならないように上半平面をすべて覆う. したがって, U は結晶群である. 読者には, あるモチーフを描いてもらい, U の作用を用いて Lobachevsky 平面をすみからすみまで覆うように繰り返しそのモチーフを描いてもらいたい. そうすることによって, **双曲的敷き詰め模様**が得られるからである.