ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 441, № 2, с. 160–161

МАТЕМАТИКА

УДК 515.162.8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ПШИТЫЦКОГО О ПАРНЫХ ДИАГРАММАХ

© 2011 г. С. В. Дужин

Представлено академиком В.А. Васильевым 19.05.2011 г.

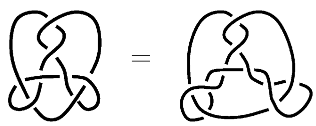
Поступило 08.07.2011 г.

1. ПРОБЛЕМА

Диаграмма узла называется парной, если ее перекрестки можно разбить на пары вида

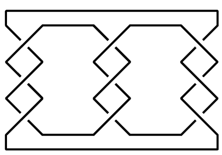
При любом выборе ориентации узла ветви в каждой такой специальной паре будут противонаправлены. Пару, изображенную на рисунке слева, будем называть отрицательной, а справа – положительной.

Легко понять, что, например, все рациональные узлы обладают такими диаграммами (для этого достаточно разложить соответствующее рациональное число в цепную дробь с четными знаменателями). Парными диаграммами обладают и многие другие узлы, например табличный (см. [3]) узел 8_{15}:



В 1987 г. известный математик Йозеф Пшитыцкий [1] высказал гипотезу о том, что существуют узлы, не имеющие парных диаграмм (гипотеза также является частью Проблемы 1.60 в известном сборнике открытых проблем в топологии Р. Кирби [2]). Гипотеза простояла 24 года, несмотря на ряд попыток ее решения, предпринятых разными математиками.

Теорема. *Крендельный узел с параметрами* (3, 3, –3)

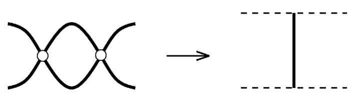


не обладает парной плоской диаграммой.

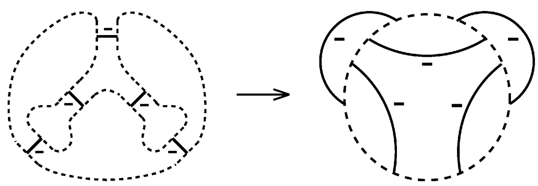
Доказательство этой теоремы основано на построении специальной поверхности Зейферта по парной диаграмме и вытекает из двух лемм, которые изложены ниже. В доказательстве некоторых утверждений принимал участие мой ученик, студент 4 курса М. Школьников, которому я глубоко признателен.

2. ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕЙФЕРТА

Рассмотрим парную диаграмму *D* узла *K*. Заменим каждую пару перекрестков на два параллельных отрезка, направленных так же, как и соответствующие участки узла, и соединенные общим перпендикуляром:



Параллельные отрезки соединяются оставшимися фрагментами диаграммы в простую замкнутую кривую. Если расправить эту кривую в окружность, то упомянутые выше перпендикуляры перейдут в набор непересекающихся хорд, расположенных частью внутри, а частью вне окружности, например, для приведенной выше парной диаграммы узла 8_{15} мы получим:



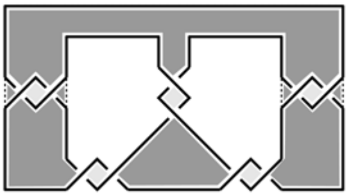
(Внешние и внутренние хорды здесь мы поменяли местами; это равносильно выворачиванию плоской диаграммы и не меняет изотопического типа узла.) Хорды снабжаются знаками, отвечающими знакам соответствующих специальных пар.

Исходный узел легко восстанавливается по такой оснащенной диаграмме: хорды следует удвоить и в середину каждой хорды встроить специальную пару перекрестков соответствующего знака.

По такой диаграмме узла (где специальные пары разбиты на внутренние и внешние) мы построим поверхность Зейферта не стандартным способом (через шахматную раскраску и круги Зейферта), а вот как: заклеим окружность хордо-

*Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской Академии наук*

вой диаграммы диском, вырежем из него узкие полоски вдоль внутренних хорд, соединив полученные куски дважды перекрученной ленточкой нужной ориентации на месте каждой вырезанной полоски. С внешними хордами поступим по-другому: заменим каждую из них на полоску, а к ней где-то посередине приклеим перпендикулярную узкую ленточку, также перекрученную дважды в соответствии со знаком. Вот пример того, что получается для приведенной выше хордовой диаграммы узла 8_{15}:



Здесь сплошная линия – это наш узел, а пунктиром обозначены участки видимого контура поверхности Зейферта, которые не принадлежат ее краю. Разные оттенки серого отвечают двум сторонам поверхности.

3. СПЕЦИАЛЬНАЯ МАТРИЦА АЛЕКСАНДЕРА

Л е м м а 1. *Матрица Зейферта для поверхности, построенной выше, может быть записана в виде* $\begin{pmatrix} E & 0 \\ I & F \end{pmatrix}$, *где* I, 0, E, F – *квадратные матрицы одного размера, причем* I – *единичная матрица*, 0 – *нулевая, а* E *и* F – *некоторые симметрические целочисленные матрицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для получения такой матрицы достаточно в качестве базисных циклов взять набор e_i, f_i, где e_i – цикл, обходящий ленточку, приклеенную к внешней хорде номер i, а f_i – цикл, проходящий вдоль самой этой внешней хорды и замыкающийся внутри внутреннего диска.

Напомним, что одну из матриц Александера данного узла можно построить по матрице Зейферта S как $A = tS - S^T$, где T обозначает транспонирование. Каждый узел обладает целым классом эквивалентных матриц Александера (эквивалентность описывается определенным набором элементарных преобразований, см., например, [4]), при этом определитель матрицы Александера (полином Александера) и идеалы кольца $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, порожденные минорами фиксированного порядка (идеалы Александера), являются инвариантами узла, определенными с точностью до умножения на обратимый элемент этого кольца, т.е. на $\pm t^k$. Известно, что полином Александера всегда выражается через переменную Конвея $z^2 = t + \dfrac{1}{t} - 2$. Для узлов, имеющих парную диаграмму, можно сказать больше.

Л е м м а 2. *Узел с парной диаграммой обладает матрицей Александера, все элементы которой выражаются через переменную Конвея, точнее, матрицей вида* $I + z^2B$, *где* I – *единичная матрица, а* B – *матрица, состоящая из целых чисел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно взять матрицу Александера в виде $tS - S^T$, где матрица Зейферта S описана в лемме 1, и проделать с ней ряд элементарных преобразований.

Из этой леммы сразу следует, что всякий идеал Александера узла, имеющего парную диаграмму, обладает системой образующих в виде многочленов от переменной z^2. Как известно (см. [4]), второй идеал Александера крендельного узла с параметрами (3, 3, –3) порождается в кольце $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ элементами 3 и $t + 1$. Несложное рассуждение показывает, что этот идеал нельзя породить многочленами от $z^2 = t + \dfrac{1}{t} - 2$. Это и доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Przytycki J.H.* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1990. V. 108. P. 55–61.
2. *Kirby K.* Open Problems in Low-Dimensional Topology. math.berkeley.edu/~kirby/problems. ps.gz
3. *Rolfsen D.* Knots and Links. Berkeley: Publish or Perish, 1976.
4. *Lickorish W.B.R.* An Introduction to Knot Theory. Graduate Texts in Math. N.Y.: Springer, 1997. V. 175. P. 57.