

Учреждение Российской академии наук  
Санкт-Петербургское отделение Математического  
института им. В. А. Стеклова РАН

---

На правах рукописи

Дужин Сергей Васильевич

**КОМБИНАТОРНЫЕ АСПЕКТЫ  
ТЕОРИИ ИНВАРИАНТОВ ВАСИЛЬЕВА**

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург 2011



## Оглавление

Глава 1. Введение	5
1.1. Исторические сведения	5
1.2. Узлы и их инварианты	7
1.3. Инварианты конечного типа	10
1.4. Алгебра хордовых диаграмм	16
1.5. Основные результаты диссертации	21
Глава 2. Интеграл Концевича	23
2.1. Простейший интеграл типа Концевича	23
2.2. Конструкция и основные свойства	26
2.3. Интеграл Концевича для связок	28
2.4. Сходимость интеграла	31
2.5. Инвариантность интеграла	32
2.6. Изменение количества критических точек	38
2.7. Универсальный инвариант Васильева	40
Глава 3. Конструкции весовых систем	43
3.1. Построение весовых систем по графу пересечений хордовой диаграммы	43
3.2. Ли-алгебраические весовые системы для хордовых диаграмм	46
3.3. Ли-алгебраические весовые системы для диаграмм Фейнмана	48
3.4. Ли-алгебраические весовые системы для диаграмм Якоби	56
3.5. Клейновы весовые системы	63
3.6. Разложимые кососимметрические функции	70
Глава 4. Оценки размерностей пространств инвариантов	79
4.1. Оценка сверху для размерности пространств хордовых диаграмм	79
4.2. Нижняя оценка на основе весовых систем, определяемых графом пересечений	83
4.3. Нижняя оценка на основе весовых систем, строящихся по алгебрам Ли	84

Глава 5. Разное	93
5.1. Алгебра 3-графов	93
5.2. Игрушечная теория инвариантов Васильева	120
5.3. Ориентация зацеплений и инварианты конечного типа	130
5.4. Разложение Магнуса и полином Конвея	142
5.5. Доказательство гипотезы Пшитыцкого о парных диаграммах	154
5.6. Алгоритм вычисления полинома Конвея по двудольному графу	157
Литература	163

## Введение

Диссертация посвящена исследованию ряда свойств инвариантов конечного типа узлов и зацеплений в трехмерном пространстве (инвариантов Васильева). Полученные результаты носят в основном комбинаторный и алгебраический характер. В настоящей главе мы даем общее введение в предмет; в заключительном параграфе перечислены результаты автора по теме диссертации, доказательства которых распределены по оставшимся четырем главам.<sup>1</sup>

### 1.1. Исторические сведения

Теория узлов появилась в конце XIX века, но вплоть до 1980-х годов воспринималась научной общественностью как уединенная область математики, представляющая интерес лишь для узкого круга специалистов. В последние 15 лет XX века произошла революция, начатая статьей В. Джонса [65] и связанная с работами Э. Виттена, В. Дринфельда, М. Концевича. В результате теория узлов сместилась ближе к магистральному пути развития математики, и были обнаружены ее неожиданные связи с некоммутативной алгеброй, теорией чисел, теоретической физикой. На этой волне и появились инварианты конечного типа.

Инварианты узлов конечного типа были изобретены В. Васильевым в Москве и М. Гусаровым в Петербурге независимо и почти одновременно — в конце 1980-х годов. Первые публикации на эту тему (1990) принадлежат В. Васильеву [114, 115, 116]. В 1990–91 году В. И. Арнольд рассказал об открытии Васильева нескольким математикам в Европе и США, а в 1992 году сделал на эту тему доклад на Европейском математическом конгрессе [29]. С этих пор выражение «инварианты Васильева» стало стандартным, а их исследование превратилось в весьма популярную область исследований, к которой подключились десятки математиков в разных странах.

---

<sup>1</sup>В настоящей версии текста учтены замечания оппонентов В. Васильева, О. Виро, И. Дынникова и А. Омельченко, которым я выражаю благодарность; исправлены и некоторые другие неточности.

Имеет смысл говорить об инвариантах конечного типа со значениями в произвольной абелевой группе; для определенности мы будем обсуждать комплекснозначные инварианты. Они образуют бесконечномерную алгебру  $\mathcal{V}$ , фильтрованную конечномерными подпространствами  $0 = \mathcal{V}_{-1} \subseteq \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \dots$  со свойством  $\mathcal{V}_m \cdot \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_{m+n}$ .

В 1991 году Дж. Бирман и С.-С. Линь [42] показали, что все известные полиномиальные инварианты узлов выражаются через инварианты Васильева<sup>2</sup>, а Д. Бар-Натан [31] ввел на градуированном векторном пространстве  $\text{gr}\mathcal{V} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1}$  две структуры алгебры Хопфа и научился строить линейные функционалы на пространстве  $\text{gr}\mathcal{V}$  (*весовые системы*) по метризованной алгебре Ли и ее конечномерному представлению. В 1992 году М. Концевич [74] определил весовые системы со значениями в универсальной обертывающей метризованной алгебре Ли, а также построил универсальный инвариант конечного типа со значениями в пополненном пространстве  $\overline{\text{gr}\mathcal{V}} = \prod_{n \geq 0} \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1}$ .

Тогда же были поставлены основные проблемы новой теории, остающиеся открытыми до сих пор:

- (1) *Найти размерности пространств  $\mathcal{V}_n$  или хотя бы их асимптотику при  $n \rightarrow \infty$ .*
- (2) *Является ли универсальный инвариант Васильева полным инвариантом (ориентированного) узла? То есть, верно ли, что если два узла  $K_1$  и  $K_2$  различны, то найдется инвариант конечного типа  $v$  такой, что  $v(K_1) \neq v(K_2)$ ?*
- (3) *Верно ли, что инварианты Васильева различают ориентацию узла? Иными словами, существует ли пара взаимно обратных узлов  $K, K'$  и такой инвариант Васильева  $v$ , что  $v(K) \neq v(K')$ ? Известно [72], что такой инвариант, если он существует, должен иметь степень не меньше 13.<sup>3</sup>*

Новая наука быстро стала популярной и оказала сильнейшее воздействие на теорию узлов, зацеплений и 3-мерных многообразий. За 20 лет по этой тематике было опубликовано несколько сотен работ, см. [119]. Среди наиболее значимых продвижений отметим следующие:

- Рациональность интеграла Концевича (доказана Ле и Мураками [82]).

<sup>2</sup>Отчасти это было сделано уже в работе Гусарова [55].

<sup>3</sup>В недавней статье В. Турчина [112] приводятся аргументы в пользу того, что такие инварианты действительно должны существовать, но только в степенях, больших 20.

- Существование инвариантов конечного типа, не являющихся квантовыми инвариантами (П. Вожель [120], Я. Либерум [78]).
- Гауссово-диаграммные формулы, изобретенные М. Поляком и О. Виро [104] и доказательство М. Гусаровым [57] теоремы о том, что любой инвариант Васильева может быть представлен такой формулой.
- Доказательство Д. Бар-Натаном [32] теоремы о том, что инварианты Васильева различают *косы*<sup>4</sup>, а также классифицируют длинные зацепления с точностью до гомотопии.
- Теория класперов Хаби́ро–Гусарова [60, 56].
- Работы В. Васильева [117, 118], в которых описывается общая техника получения комбинаторных формул для классов когомологий в дополнениях к дискриминантам (классы нулевых когомологий — это в точности инварианты конечного типа).
- Явные и неявные формулы для интеграла Концевича некоторых узлов и зацеплений [38, 39, 106, 75, 84].

## 1.2. Узлы и их инварианты

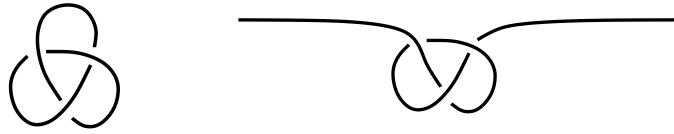
**1.2.1. Определение и примеры.** *Узел* — гладкое вложение окружности  $S^1$  в трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$ , рассматриваемое с точностью до *изотопии*, то есть гладкой деформации, во время которой не допускаются самопересечения кривой. В зависимости от контекста, мы будем понимать под узлом либо индивидуальную гладкую замкнутую кривую в  $\mathbb{R}^3$ , либо класс эквивалентности таких кривых относительно изотопии.

Вместо узлов в  $\mathbb{R}^3$  можно рассматривать узлы в трехмерной сфере  $S^3$ ; одноточечная компактификация пространства индуцирует взаимно-однозначное соответствие изотопических типов тех и других. Кроме того, вместо обычных (замкнутых) узлов можно изучать *длинные* узлы, т. е. вложения  $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , совпадающие вне некоторого компакта со стандартным вложением  $t \mapsto (t, 0, 0)$  и рассматриваемые с точностью до изотопии, неподвижной на бесконечности. Одноточечная компактификация  $\mathbb{R}^3$  приводит, опять же, к взаимно-однозначному соответствию; таким образом, все три варианта теории узлов эквивалентны между собой.

---

<sup>4</sup>Этот факт является также прямым следствием трудной теоремы Т. Коно [73], доказанной еще до введения инвариантов конечного типа.

Пример замкнутого узла и соответствующего ему длинного узла:



При изучении узлов часто возникает необходимость в рассмотрении произвольных *зацеплений*, то есть гладких вложений несвязного объединения  $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , также рассматриваемых с точностью до изотопии.

Чтобы изобразить узел  $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  на бумаге, выберем разложение пространства  $\mathbb{R}^3$  в прямую сумму «горизонтальной» плоскости  $\Pi$  и «вертикальной» прямой  $l$  и рассмотрим проекцию  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$  вдоль  $l$ . При необходимости, отображение  $k$  нужно подвергнуть малому шевелению, с тем чтобы проекция  $\pi(k(S^1))$  оказалась кривой общего положения, то есть гладкой и с конечным числом «перекрестков» (самопересечений кратности два с неколлинеарными касательными векторами). В каждом перекрестке полученной кривой при помощи небольшого разрыва отмечается, какая ветвь узла проходит выше (является «переходом»), а какая ниже (является «проходом») — относительно проекции  $\pi$ .

Получаемая в итоге картинка называется *плоской диаграммой* узла. Мерой сложности узла естественно считать минимальное число перекрестков на его плоской диаграмме.

Тривиальный узел (эквивалентный плоской окружности) имеет сложность 0, сложности 1 и 2 не бывает, а простейший нетривиальный узел — с тремя перекрестками — существует в двух разновидностях и называется *трилистником*.

Приведем несколько примеров узлов:



Тривиальный узел

Левый трилистник

Правый трилистник

Восьмерка

Узел 817

**1.2.2. Ориентация.** Мы считаем окружность  $S^1$  и пространство  $\mathbb{R}^3$  ориентированными. Отражение относительно плоскости меняет ориентацию пространства. Изменение направления обхода кривой на противоположное меняет ориентацию узла. Естественно выделить классы узлов, которые остаются эквивалентными себе при таких преобразованиях.

Узел называется *зеркальным*, если он эквивалентен своему зеркальному отражению.



**Примеры.** (1) Узел «восьмерка» зеркален. Это можно доказать явным построением изотопии. (2) Трилистник не является зеркальным узлом. Это следует, например, из того, что базисный инвариант Васильева третьей степени принимает на левом и правом трилистниках разные значения.

Узел называется *обратимым*, если он эквивалентен своему обратному, т. е. тому же узлу, проходимому в обратном направлении.

**Примеры.** (1) Трилистник обратим, так как направление обхода можно заменить на обратное плавным поворотом на  $180^\circ$  вокруг некоторой оси. (2) Узел  $8_{17}$  необратим: при замене ориентации он переходит в свой зеркальный образ, неэквивалентный исходному узлу (эта нетривиальная теорема была доказана в 1979 году А. Каваути [69]).

**1.2.3. Инварианты узлов.** Для различения узлов используются инварианты, т. е. функции, сопоставляющие узлу некоторый объект (число, многочлен, группу и т. д.) и не меняющиеся при изотопиях. Известно очень много разных инвариантов узлов. Наиболее удобны на практике полиномиальные инварианты, допускающие определение посредством *скейн-соотношений*, т. е. соотношений между значениями инварианта на узлах, отличающихся лишь локально в окрестности некоторого перекрестка. Из множества таких инвариантов мы приведем определение лишь одного: многочлена Конвея (по поводу других инвариантных полиномов см., например, [103]).

**Определение.** Многочлен Конвея  $C$  — это инвариант ориентированных зацеплений (в частности, узлов), принимающий значения в кольце  $\mathbb{Z}[t]$ , удовлетворяющий соотношению

$$(1) \quad C\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right) - C\left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array}\right) = tC\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array}\right)$$

(«скейн-соотношение Конвея») и равный 1 на тривиальном узле.

Три диаграммы, фигурирующие в соотношении Конвея, отличаются друг от друга лишь внутри пунктирной окружности, а снаружи нее совпадают. Поскольку такие перестройки меняют число связных компонент, определение имеет смысл только для совокупности всех зацеплений. Применяя скейн-соотношение достаточно много раз, любое зацепление можно свести к тривиальному узлу, и результат вычислений не зависит от последовательности действий (в этом и состоит теорема Конвея). Можно проверить, что *для узлов* полученный инвариант не меняется ни при замене ориентации, ни при зеркальном

отражении и содержит только четные степени переменной  $t$ . *Примеры:* для трилистника, восьмерки и узла  $8_{17}$  (см. рисунок выше) многочлены Конвея равны соответственно  $1 + t^2$ ,  $1 - t^2$ ,  $1 - t^2 - 2t^4 - t^6$ . Заметим, кстати, что в заключительном параграфе главы 5 будут приведены два новых алгоритма подсчета полинома Конвея для довольно широкого класса парных графов (в который, в частности, попадают все упомянутые).

### 1.3. Инварианты конечного типа

**1.3.1. Определение.** В упрощенном виде идея Васильева заключается в том, что нужно ввести в рассмотрение, помимо обычных узлов, еще так называемые *особые узлы*, и определить продолжение инвариантов, определенных первоначально для обычных узлов, на множество всех особых узлов. Это позволяет заменить альтернированную сумму большого числа обычных узлов одним особым узлом и быстро сводит изучение инвариантов конечного типа к комбинаторике.

*Особым узлом* называется гладкое отображение  $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , являющееся вложением всюду, кроме конечного числа простых двойных точек (т. е. точек самопересечения с трансверсальными касательными векторами).

Обозначим через  $\text{Emb}$  ( $\text{Imm}$ ) пространство всех вложений (погружений) окружности в  $\mathbb{R}^3$ . Разность  $\Sigma = \text{Imm} \setminus \text{Emb}$  есть, по Васильеву, *дискриминант* пространства  $\text{Imm}$ <sup>5</sup>. Дополнение к дискриминанту, т. е. собственно пространство  $\text{Emb}$  состоит из связных компонент, отвечающих изотопическим типам (обычных) узлов; чтобы перейти от одного типа к другому, необходимо пересечь дискриминант. Полезно представлять себе множество всех особых узлов с одной двойной точкой как *главную часть* дискриминанта  $\Sigma$ ; для перехода из одной компоненты связности пространства  $\text{Emb}$  в любую другую достаточно несколько раз пересечь эту главную часть, т. е. сделать несколько замен перекрестков на диаграмме узла.

Множество всех особых узлов с  $n$  двойными точками, рассматриваемых с точностью до изотопии, мы обозначим через  $\mathcal{K}_n$ . В частности,  $\mathcal{K}_0$  — это множество (классов эквивалентности) обычных узлов. Буквой  $\mathcal{K}$  без индекса мы будем обозначать объединение всех  $\mathcal{K}_n$ .

---

<sup>5</sup>Наше изложение сильно упрощено по сравнению с исходным подходом В. Васильева [114] и дает лишь общую картину, достаточную для понимания дальнейшего.

Диаграмма особого узла отличается от диаграммы обычного узла тем, что на ней, кроме точек прохода и перехода, есть еще точки самопересечения, которые на рисунках мы будем изображать жирными точками.

Пусть  $f : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  — некоторый инвариант узлов. *Продолжение инварианта  $f$  на особые узлы* — это функция  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ , совпадающая на  $\mathcal{K}_0$  с  $f$  и удовлетворяющая скейн-соотношению Васильева

$$(2) \quad f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right).$$

В этом соотношении фигурируют три особых узла, диаграммы которых совпадают между собой всюду, кроме указанного фрагмента. Оба узла, стоящие в правой части, имеют на одну двойную точку меньше, чем узел, стоящий в левой части. Пользуясь этим соотношением рекуррентно, всякий инвариант, заданный первоначально на обычных узлах, можно продолжить на множество всех особых узлов. В отличие от рекуррентного определения многочлена Конвея, данного выше, в этом случае вполне очевидно, что продолжение не зависит от порядка, в котором применяется скейн-соотношение Васильева.

Функция  $f : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  называется *инвариантом Васильева* порядка (или степени)  $\leq n$ , если ее продолжение на множество особых узлов обращается в нуль на всех узлах, имеющих более чем  $n$  точек самопересечения.

**1.3.2. Пример.** Коэффициент  $c_n$  при  $t^n$  в многочлене Конвея узла есть инвариант порядка  $\leq n$ . В самом деле, сопоставив скейн-соотношение Конвея (1) со скейн-соотношением Васильева (2), мы видим, что значение продолженного  $C$  на особом узле или зацеплении с  $n + 1$  особой точкой есть многочлен, делящийся на  $t^{n+1}$ ; следовательно, коэффициент при  $t^n$  в нем равен 0. Можно доказать, что для узлов при четном  $n$  порядок инварианта  $c_n$  равен ровно  $n$ .

**1.3.3. Инварианты малых степеней.** Множество  $\mathcal{V}_n$  всех инвариантов Васильева порядка  $\leq n$  со значениями в поле образует векторное пространство, так как линейная комбинация нескольких таких инвариантов всегда принадлежит  $\mathcal{V}_n$ . Нас, в частности, будет интересовать вопрос, чему равна размерность этого пространства, т. е. сколько существует линейно независимых инвариантов Васильева данного порядка.

**Пример.** Пространство  $\mathcal{V}_0$  одномерно и состоит только из констант.

В самом деле, если  $f \in \mathcal{V}_0$ , то  $f$  обращается в нуль на любом особом узле, имеющем хотя бы одну двойную точку. В силу определения, это значит, что значение  $f$  на обычном узле не меняется при замене любого прохода на переход. Но такими действиями любой узел можно распутать, т. е. свести к тривиальному узлу. Значит, значение нашего инварианта  $f$  на любом узле равно его значению на тривиальном узле и, таким образом,  $f$  есть константа.

Аналогичное утверждение имеет место и для инвариантов Васильева порядка 1. Его доказательство не намного сложнее предыдущего.

Оказывается, что пространство  $\mathcal{V}_2$  двумерно. Кроме констант, оно содержит еще один нетривиальный базисный элемент, например второй коэффициент полинома Конвея  $c_2$ . (То, что  $c_2$  не есть константа, видно из приведенных выше значений многочлена Конвея на некоторых узлах.)

Причину, по которой нетривиальные инварианты Васильева появляются только в порядке 2, можно объяснить следующим образом. Пусть  $v$  — инвариант Васильева порядка  $n$ . Рассмотрим его значения на особых узлах, имеющих ровно  $n$  двойных точек. В силу соотношения Васильева и ввиду того, что  $v$  обращается в нуль на любом узле, у которого больше, чем  $n$  двойных точек, значение  $v(K)$  не изменится, если узел  $K$  подвергнуть произвольной деформации (включая замены проходов на переходы и обратно), при которой двойные точки остаются на месте. Следовательно, значение  $v(K)$  зависит лишь от порядка, в котором при обходе узла на нем встречаются двойные точки.


Если двойная точка одна ( $a$ ), то она может встретиться только так:  $aa$ . Если же двойных точек две ( $a$  и  $b$ ), то есть две возможности, а именно,  $aabb$  и  $abab$ , которые не переходят друг в друга при циклических перестановках. Различные варианты чередования двойных точек при обходе узла удобно кодировать посредством хордовых диаграмм.

**1.3.4. Хордовые диаграммы.** *Хордовая диаграмма* степени  $n$  — это ориентированная окружность, в которой проведены  $n$  хорд, все концы которых различны.

Хордовые диаграммы рассматриваются как чисто комбинаторный объект: расстояние между концами хорд и форма хорд не имеют никакого значения, важен лишь порядок, в котором пары точек, соединенных хордами, следуют по кругу. Хордовая диаграмма — это то

же самое, что слово в алфавите из  $n$  букв  $a_1, \dots, a_n$ , в котором каждая буква встречается ровно два раза. Такие слова рассматриваются с точностью до циклических перестановок входящих в них букв и произвольной перенумерации переменных  $a_1, \dots, a_n$ .

**Примеры.** Существует

1. одна хордовая диаграмма степени 1: 

2. две хордовые диаграммы степени 2: 

3. пять хордовых диаграмм степени 3: 

(Здесь и далее подразумевается, что внешняя окружность ориентирована против часовой стрелки.)

Каждому особому узлу  $K$ , имеющему  $n$  двойных точек, отвечает определенная хордовая диаграмма  $\chi(K)$  степени  $n$ , например:

$$\chi\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right) = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array},$$

$$\chi\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right) = \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array}.$$

**1.3.5. Основная теорема.** Пусть  $\mathbf{CD}_n$  — множество всех хордовых диаграмм степени  $n$ . Их число  $\#(\mathbf{CD}_n)$  дает оценку сверху на зазор между размерностью пространства  $\mathcal{V}_n$  и размерностью пространства  $\mathcal{V}_{n-1} \subseteq \mathcal{V}_n$ . В самом деле, мы только что объяснили, как по инварианту Васильева порядка  $n$  построить функцию на множестве хордовых диаграмм порядка  $n$ . Если обозначить пространство всех функций на множестве хордовых диаграмм порядка  $n$  через  $\mathcal{F}_n$ , то мы получаем линейное отображение  $\sigma : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ . По определению, ядро этого отображения состоит в точности из инвариантов Васильева порядка  $\leq n - 1$ , и мы имеем линейное вложение факторпространства

$$\bar{\sigma} : \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \rightarrow \mathcal{F}_n.$$

Отсюда следует, что размерности всех пространств  $\mathcal{V}_n$  конечны, причем

$$\dim \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} = \dim \mathcal{V}_n - \dim \mathcal{V}_{n-1} \leq \dim \mathcal{F}_n = \#(\mathbf{CD}_n).$$

А чему равен образ отображения  $\bar{\sigma}$ ? Как можно охарактеризовать функции на множестве хордовых диаграмм, принадлежащие образу

этого отображения, т. е. происходящие из инвариантов Васильева? Такие функции называются *весовыми системами*, а ответ на заданный вопрос дает следующая теорема Васильева–Концевича.

**ТЕОРЕМА 1.1.** (1) (*В. Васильев*) *Всякая весовая система удовлетворяет*

(а) *одночленным соотношениям:  $f(D) = 0$  для любой диаграммы  $D$ , содержащей изолированную хорду, то есть хорду, не пересекающую никаких других хорд.*

(б) *четырёхчленным соотношениям*

$$(3) \quad f(\text{diag}_1) - f(\text{diag}_2) + f(\text{diag}_3) - f(\text{diag}_4) = 0$$

(фигурирующие здесь хордовые диаграммы отличаются друг от друга положением одной хорды; предполагается, что к пунктирным участкам окружности может быть приложен любой набор хорд, один и тот же во всех четырех случаях).

(2) (*М. Концевич*) *Любая функция на множестве  $\mathcal{CD}_n$ , удовлетворяющая а) и б), происходит из некоторого инварианта Васильева порядка  $\leq n$ .*

Итак, чтобы определить число  $d_n = \dim \mathcal{V}_n - \dim \mathcal{V}_{n-1}$ , нужно составить и решить систему линейных уравнений, в которой неизвестные — это значения весовой системы на хордовых диаграммах степени  $n$ , а уравнения получаются из всевозможных 1- и 4-членных соотношений. Здесь удобно перейти на двойственную точку зрения, определив пространство  $\mathcal{A}_n$  такое, что  $\mathcal{A}_n^*$  есть в точности пространство весовых систем.

*Пространство хордовых диаграмм  $\mathcal{A}_n$*  — это линейное пространство, порожденное всеми хордовыми диаграммами степени  $n$  по модулю одночленных (приравнивание нулю любой диаграммы, содержащей изолированную хорду) и четырехчленных соотношений, определенных выше.

Приведем конкретный пример 4-членного соотношения:

$$\text{diag}_1 - \text{diag}_2 + \text{diag}_3 - \text{diag}_4 = 0 ;$$

его можно переписать так:

$$-\text{diag}_5 + 2\text{diag}_6 - \text{diag}_7 = 0 ,$$

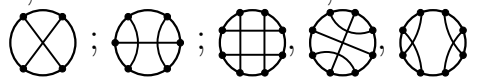
а с учетом одночленных соотношений — так:

$$2 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} = 0 ,$$

В 4-членном соотношении участвуют три участка окружности, показанные сплошными линиями на выше приведенных диаграммах. Нарисовав эти участки в виде трех вертикальных линий, мы можем переписать 4-членное соотношение в следующем виде :

$$(4) \quad (-1)^{\downarrow} f \left( \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right) - (-1)^{\downarrow} f \left( \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right) + (-1)^{\downarrow} f \left( \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right) - (-1)^{\downarrow} f \left( \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right) = 0 .$$

где  $\downarrow$  обозначает количество концов хорд, в которых ориентация вертикальных линий на данной картинке направлена вниз. Такую форму записи 4-членного соотношения мы будем называть *горизонтальным 4-членным соотношением*.<sup>6</sup>

**1.3.6. Размерности и их асимптотика.** Вручную легко сосчитать пространства  $\mathcal{A}_n$  для степеней  $\leq 4$ . Ответ такой. Пространства  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$  имеют размерности 0, 1, 1, 3 соответственно; базисами трех последних могут служить наборы .

С ростом  $n$  число переменных и уравнений в системе для определения размерности пространства  $\mathcal{A}_n$  растет суперэкспоненциально. Используя описанный прямой подход, на компьютере удалось сосчитать размерность и базис  $\mathcal{A}_n$  только для  $n \leq 9$  [31]. Размерности пространств  $\mathcal{A}_n$  для  $n = 10, 11$  и  $12$  были найдены Я. Кнайссером [72], используя более продвинутую технику (алгебру Вожеля  $\Lambda$  [120]). Вот таблица всех известных к настоящему времени точных значений размерностей (здесь  $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$  — примитивное подпространство, см. следующий раздел):

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathcal{P}_n$	0	0	1	1	2	3	5	8	12	18	27	39	55
$\dim \mathcal{A}_n$	1	0	1	1	3	4	9	14	27	44	80	132	232
$\dim \mathcal{V}_n$	1	1	2	3	6	10	19	33	60	104	184	316	548

Асимптотика чисел  $\dim \mathcal{A}_n$  при  $n \rightarrow \infty$  также до сих пор неизвестна. Наилучшая оценка сверху принадлежит Д. Цагиру [123]; в упрощенной форме она утверждает, что  $\dim \mathcal{A}_n$  асимптотически меньше,

<sup>6</sup>Это соотношение под названием *infinitesimal braid relation* появилось впервые в работе Т. Коно [73] еще до провозглашения теории инвариантов Васильева.

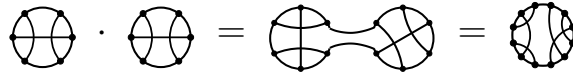
чем  $n!/a^n$  для любой константы  $a < \pi^2/6$ . Рекордную нижнюю оценку получил О. Дасбах [48], использовавший технику работы [3]; он доказал, что  $\dim \mathcal{P}_n$  растет быстрее, чем  $e^{b\sqrt{n}}$  для любого  $b < \pi\sqrt{2/3}$ . Наилучшая оценка снизу на размерности пространств  $\mathcal{A}_n$ , которую удастся отсюда вывести, — это что  $\dim \mathcal{A}_n \gtrsim e^{n/\log c}$  для любой константы  $c < \pi^2/6$ . Во всяком случае, легко видеть, что субэкспоненциальная асимптотика для  $\dim \mathcal{P}_n$  влечет за собой субэкспоненциальную же асимптотику для  $\dim \mathcal{A}_n$ . Таким образом, имеющаяся верхняя оценка факториальна, а нижняя строго меньше экспоненты, и зазор между обеими оценками остается весьма значительным.

## 1.4. Алгебра хордовых диаграмм

**1.4.1. Биалгебра  $\mathcal{A}$ .** Устройство векторных пространств  $\mathcal{A}_n = \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$  помогает понять мультипликативная структура, которая имеется в прямой сумме

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \dots$$

Произведение двух хордовых диаграмм определяется так: две окружности разрываются и склеиваются в одну в соответствии с ориентацией:



Хордовая диаграмма, которая получается в правой части этого соотношения, зависит, вообще говоря, от того места, где разрываются окружности, но с учетом 4-членных соотношений (в факторпространстве  $\mathcal{A}$ ) умножение определено корректно (см. [31, 26]). Таким образом, бесконечномерное пространство  $\mathcal{A}$  является коммутативной градуированной алгеброй (скажем, над полем комплексных чисел).

Поскольку для корректности умножения одночленные соотношения не нужны, имеет смысл определить также бóльшую алгебру  $\mathcal{A}'$ , порожденную всеми хордовыми диаграммами по модулю только 4-членных соотношений. Помимо естественного эпиморфизма  $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ , существует также расщепляющее его вложение  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ , которое проще всего определить, представляя элементы обеих алгебр как полиномы от примитивных элементов (см. ниже).

В алгебрах  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}'$  можно ввести коумножение по правилу

$$\delta(D) = \sum_{J \subseteq [D]} D_J \otimes D_{[D] \setminus J},$$



где  $[D]$  — множество хорд диаграммы  $D$ , а  $D_J$  — диаграмма, содержащая только хорды из подмножества  $J$ . Таким образом  $\mathcal{A}$  (а также  $\mathcal{A}'$ ) превращается в коммутативную кокоммутативную алгебру Хопфа и по теореме Милнора–Мура (см. [89, 26]) совпадает с симметрической алгеброй над своим примитивным подпространством  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ . Примитивное подпространство  $\mathcal{P}$  состоит, по определению, из элементов  $p \in \mathcal{A}$  таких что  $\delta(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1$ ; оно градуировано подпространствами  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap \mathcal{A}_n$ . Выбрав базис в каждом  $\mathcal{P}_n$ , мы сможем однозначно записать любой элемент алгебры  $\mathcal{A}$  в виде многочлена от бесконечного набора градуированных переменных. Примитивное пространство алгебры  $\mathcal{A}'$  отличается от примитивного пространства алгебры  $\mathcal{A}$  добавлением одномерной компоненты  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}'_1$ , порожденной хордовой диаграммой с одной хордой. Линейное вложение  $P(\mathcal{A}) \hookrightarrow P(\mathcal{A}')$  порождает вложение алгебр  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}'$ , односторонне обратное естественной проекции  $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ .

В терминах самих хордовых диаграмм примитивные элементы записываются в виде довольно неуклюжих линейных комбинаций; более удобное описание можно получить при помощи так называемых диаграмм Фейнмана.

**1.4.2. Диаграммы Фейнмана.** *Диаграмма Фейнмана* степени  $n$  — это связный регулярный трехвалентный граф с  $2n$  вершинами, в котором выделен ориентированный цикл, называемый *петлей Уилсона*, и в каждой вершине, не лежащей на петле Уилсона, задан циклический порядок выходящих из нее ребер.

Хордовые диаграммы являются частным случаем диаграмм Фейнмана<sup>7</sup> (у них все трехвалентные вершины лежат на петле Уилсона). Каждую диаграмму Фейнмана  $f$  можно превратить в линейную комбинацию хордовых диаграмм  $\rho(f)$ , многократно применяя следующее соотношение *STU* для разрешения тройных точек, смежных с петлей Уилсона (здесь предполагается, что ребра в трехвалентных вершинах упорядочены против часовой стрелки; при замене порядка в любой вершине диаграмма по определению меняет знак):

$$(5) \quad \text{STU} : \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array}$$

**Пример:**

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} - 2 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

<sup>7</sup>В употреблении терминов «диаграмма Фейнмана» и «петля Уилсона» в данном контексте мы следуем Д.Бар-Натану [31]; в калибровочной теории и теории Черна–Саймонса эти слова имеют иной смысл.

Соотношения STU можно использовать и по-другому, а именно, можно рассмотреть векторное пространство, порожденное всеми диаграммами Фейнмана (включая хордовые диаграммы), и его факторпространство  $\mathcal{C}$  по всем соотношениям STU. Естественное отображение  $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{C}$  является тогда линейным изоморфизмом (см. [31, 26]) и позволяет перенести в  $\mathcal{C}$  из  $\mathcal{A}'$  умножение и коумножение. Ввиду этого, мы можем не различать обе алгебры и использовать для них общее обозначение  $\mathcal{A}'$ . Диаграммы Фейнмана при этом можно понимать как сокращенную запись линейных комбинаций хордовых диаграмм и называть *обобщенными хордовыми диаграммами*.

**1.4.3. Действие перестановок на диаграммах Фейнмана.** Пусть  $k$  — число вершин диаграммы Фейнмана, лежащих на петле Уилсона (то есть ее «ног»). На множестве диаграмм с  $k$  имеется действие группы перестановок  $S_k$ , которое нам понадобится в будущем. Оно определяется как «композиция» диаграммы Фейнмана с диаграммой перестановки, смысл которой ясен из рисунка:

$$k = 4; \quad \sigma = (4132) = \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array}; \quad D = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array};$$

$$\sigma D = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}.$$

**Пример.** Соотношение антисимметрии влечет, что диаграмма с петлей равна нулю. Следовательно, с точностью до знака, существует всего 4 различные ненулевые диаграммы Фейнмана степени 2:







а соотношения STU приводят к тому, что  $\dim \mathcal{C}_2 = \dim \mathcal{A}'_2 = 2$ .

Диаграмма Фейнмана называется *связной*, если соответствующий граф остается связным после отбрасывания петли Уилсона. На предыдущем рисунке связными являются третья и четвертая диаграммы (линейно зависимые между собой).

**ТЕОРЕМА 1.2.** [31, 26] *Пространство примитивных элементов  $\mathcal{P}_n$  алгебры  $\mathcal{A}'$  ( $n \geq 1$ ) совпадает с линейной оболочкой всех связных диаграмм Фейнмана. Примитивное пространство алгебры  $\mathcal{A}$  отличается от этого только в градуировке 1, а именно,  $\mathcal{P}_1(\mathcal{A}) = 0$  в то время как  $\dim \mathcal{P}_1(\mathcal{A}') = 1$ .*

**Примеры.**

Пространства  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{P}_3$  одномерны и порождены, соответственно, диаграммами  и .

В трехмерном пространстве  $\mathcal{A}_4$  примитивное подпространство  $\mathcal{P}_4$  двумерно; в качестве базиса можно взять элементы  и .

Оказывается (см. раздел 5.1), что в пространстве всех примитивных элементов  $\mathcal{P} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$  есть еще внутренняя мультипликативная структура. Именно эта структура позволила Я. Кнайсслеру [72] в 1997 году найти верхнюю оценку для  $\dim \mathcal{P}_n$  при  $n \leq 12$ , удивительным образом совпавшую с известной к тому времени нижней оценкой, и тем самым превзойти вычислительный рекорд Д. Бар-Натана 1993 года, нашедшего на компьютере размерности  $\mathcal{P}_n$  для  $n \leq 9$  прямым методом.

**1.4.4. Диаграммы Якоби.** Сейчас мы опишем введенную Д. Бар-Натаном алгебру диаграмм Якоби  $\mathcal{B}$ , изоморфную как линейное пространство алгебрам  $\mathcal{A}'$  и  $\mathcal{C}$ , но во многих отношениях более удобную в использовании.

По определению, алгебра  $\mathcal{B}$  порождена 1-3-валентными графами с заданным циклическим порядком (полу)ребер в каждой трехвалентной вершине, которые удовлетворяют соотношениям двух видов:

$$\text{AS (антисимметрия): } \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} = - \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array}, \quad \text{ИHX: } \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array}$$

(первое соотношение означает замену циклического порядка ребер, сходящихся в одной вершине). Диаграмма Якоби может быть несвязной, при этом требуется, чтобы в каждой компоненте связности была хотя бы одна одновалентная вершина. Умножение в алгебре  $\mathcal{B}$  определяется через несвязное объединение диаграмм, коумножение — как сумма попарных тензорных произведений по всем способам разбиения множества связных компонент на две части.

Мы уже замечали, что диаграммы Фейнмана с петлей равны нулю по соотношениям AS. То же самое верно, разумеется, и для диаграмм Якоби. Дадим менее тривиальное обобщение этого факта: мы сформулируем его для диаграмм Якоби, но аналог верен и для диаграмм Фейнмана.

**Определение.** *Антиавтоморфизмом* диаграммы Якоби  $b$  называется ее автоморфизм как графа, при котором происходит обращение циклического порядка полуребер в нечетном числе вершин.

**ЛЕММА 1.1.** *Если диаграмма Якоби  $b$  допускает антиавтоморфизм, то  $b = 0$  в векторном пространстве  $\mathcal{B}$  (поскольку характеристика основного поля отлична от 2).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В самом деле, из определения вытекает, что в этом случае  $b = -b$ .  $\square$

Взяв среднее арифметическое по всем способам приклеивания петли Уилсона к одновалентным вершинам (как мы делали выше с колесами), любую диаграмму Якоби можно превратить в линейную комбинацию диаграмм Фейнмана. Можно доказать [31, 26], что полученное отображение  $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  (над полем характеристики 0) является линейным изоморфизмом; оно согласовано с коумножением, но не сохраняет умножения. Соотношение между алгебрами  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  во многом аналогично соотношению между универсальной обертывающей и симметрической алгебрами данной алгебры Ли. В частности, существует аналог изоморфизма Дюфло–Кириллова  $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$  (см. [39, 26]). Работать с диаграммами Якоби удобнее, чем с диаграммами Фейнмана, потому что в пространстве  $\mathcal{B}$ , помимо общей градуировки половиной числа вершин, есть еще две дополнительные градуировки: по числу компонент связности и по числу одновалентных вершин (последняя превращается даже в мультиградуировку, если число компонент связности больше 1).

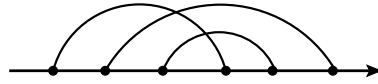
В терминах алгебр  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  можно дать комбинаторную переформулировку проблемы обратимости инвариантов конечного типа, упомянутую на стр. 6 (подробнее об этом см. в [26]):

1. *существует ли хордовая диаграмма, которая неэквивалентна своему зеркальному отражению по модулю 4-членных соотношений?*

2. *существует ли ненулевая диаграмма Якоби с нечетным числом одновалентных вершин?*

Как вы видите, наиболее элегантно эта проблема звучит на языке диаграмм Якоби; заметим, что даже для диаграмм с тремя одновалентными вершинами она до сих пор открыта.

**1.4.5. Линейные хордовые диаграммы.** Как мы отмечали выше (см. стр. 7), теория обычных (замкнутых) узлов эквивалентна теории длинных узлов. Соответственно, для инвариантов Васильева возникают *линейные хордовые диаграммы*, т.е. диаграммы на ориентированной прямой вида



по модулю 4-членных соотношений:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} &= \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \\
 &= \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6}
 \end{aligned}$$

Давайте временно обозначим пространство линейных хордовых диаграмм с  $n$  хордами по модулю 4-членных соотношений через  $(\mathcal{A}'_n)^l$ . Пространство  $(\mathcal{A}')^l = \bigoplus_n (\mathcal{A}'_n)^l$  таких диаграмм всех степеней является биалгеброй; произведение в  $(\mathcal{A}')^l$  определяется простой конкатенацией ориентированных прямых.

При замыкании прямой в окружность линейные 4-членные соотношения превращаются в обычные; таким образом мы получаем корректно определенное линейное отображение  $(\mathcal{A}'_n)^l \rightarrow \mathcal{A}'_n$ . Очевидно, что это эпиморфизм, ибо прообраз круговой хордовой диаграммы можно найти, разорвав окружность в произвольном месте. Этот прообраз зависит, вообще говоря, от точки разрыва, так что может показаться, что рассматриваемое отображение имеет нетривиальное ядро. Например, линейная диаграмма, нарисованная выше, при замыкании дает такую же круговую диаграмму, как и показанная ниже:



Замечательно, что по модулю 4-членных соотношений все прообразы любой круговой хордовой диаграммы в  $(\mathcal{A}')^l$  равны (в частности, обе линейные диаграммы, приведенные выше, представляют собой один и тот же элемент пространства  $(\mathcal{A}'_3)^l$ ). Этот факт доказывается точно так же, как корректность умножения обычных хордовых диаграмм (см. [31, 26]).

Резюмируя, мы получаем:

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.** *Замыкание прямой линии в окружность порождает изоморфизм биалгебр  $(\mathcal{A}')^l \rightarrow \mathcal{A}'$ .*

## 1.5. Основные результаты диссертации

В диссертации представлены следующие результаты, большая часть которых получена автором самостоятельно, а некоторые — в соавторстве. Все результаты, кроме указанного в последнем пункте, имеют прямое отношение к теме работы. Последний же результат, полученный, когда текст диссертация уже начал верстаться, имеет

косвенную связь с инвариантами Васильева, так как там речь идет о полиноме Конвея, коэффициенты которого, как известно, являются инвариантами конечного порядка.

- (1) Введение понятия графа пересечений хордовой диаграммы (раздел 3.1) и получение с его помощью первой нетривиальной нижней оценки на размерность пространства инвариантов Васильева (раздел 4.2).
- (2) Доказательство первой нетривиальной верхней оценки на размерность пространства инвариантов Васильева посредством изучения хребтовых диаграмм (раздел 4.1).
- (3) Получение суперполиномиальной нижней оценки на размерность примитивного пространства в алгебре хордовых диаграмм при помощи весовой системы, построенной по алгебре Ли  $\mathfrak{gl}_N$  (раздел 4.3).
- (4) Полное доказательство теоремы Концевича об универсальном инварианте Васильева с заполнением всех пробелов оригинального доказательства (глава 2).
- (5) Введение и изучение клейновых весовых систем (раздел 3.5). Описание, в связи с этим, разложимых кососимметрических функций (раздел 3.6).
- (6) Введение и изучение алгебры 3-графов (раздел 5.1).
- (7) Построение теории игрушечных инвариантов Васильева, в известном смысле двойственной обычной теории (раздел 5.2).
- (8) Доказательство существования инварианта Васильева, различающего ориентацию двухкомпонентных струнных зацеплений (раздел 5.3).
- (9) Вычисление символа полинома Конвея на трехструнных крашенных косах, полученного с использованием короткого замыкания кос и разложения Магнуса (раздел 5.4).
- (10) Компьютерно-вычислительные результаты: (а) нахождение системы образующих алгебры 3-графов до степени 20 (пункт 5.1.3), (б) нахождение значений Ли-алгебраических весовых систем на образующих алгебр диаграмм Якоби (пункт 3.3), (в) явное разложение логарифма ассоциатора Дринфельда по базису свободной алгебры Ли, состоящему из слов Линдона (упоминается в разделе 5.4.6), (г) доказательство Предложения 5.2 из раздела 5.3.
- (11) Изобретение двух способов вычисления полинома Конвея для парных узлов (раздел 5.6).

## Интеграл Концевича

Интеграл Концевича изобретен в 1992 году [74] как средство доказательства сформулированной выше (с. 14) теоремы Васильева–Концевича. В своей публикации М.Концевич ограничился лишь изложением самой конструкции и привел идеи доказательства основных его свойств. Первое полное доказательство теоремы Концевича было дано в статье С.В.Чмутова и автора [4], вначале появившейся в 1997 как препринт института Макса Планка. Ниже мы в основном следуем обновленному изложению, данному в книге [26] и исправляющему некоторые неточности работы [4].

Интеграл Концевича является далеко идущим обобщением простой интегральной формулы для числа зацепления, которую мы сейчас опишем.<sup>1</sup>

### 2.1. Простейший интеграл типа Концевича

*Число зацепления* двух ориентированных пространственных кривых  $K$  и  $L$  — это, говоря неформально, количество оборотов (со знаком), которое одна кривая совершает вокруг другой. Более строгое определение: затащим одну из кривых ориентированным диском и возьмем коэффициент пересечения второй кривой с этим диском. Для числа зацепления существует комбинаторная формула, которую можно сформулировать так (доказательство см. в [26]). Рассмотрим плоскую диаграмму данного зацепления и рассмотрим сумму знаков тех перекрестков, где  $K$  проходит над  $L$  (она же равна сумме знаков тех перекрестков, где  $L$  проходит над  $K$ , или полусумме знаков всех перекрестков между данными кривыми — самопересечения кривых не учитываются).

Представим трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  как прямое произведение комплексной прямой  $\mathbb{C}$  с координатой  $z$  и вещественной прямой  $\mathbb{R}$  с координатой  $t$ . Вложим зацепление  $L = K \cup L$  в пространство  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$  так, чтобы координата  $t$  была функцией Морса на  $L$ .

---

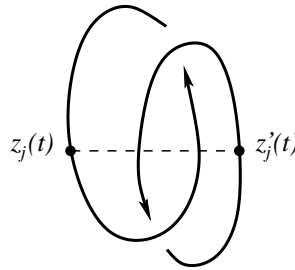
<sup>1</sup>Некоторые говорят, что интеграл Концевича обобщает известную формулу Гаусса, которая выражает индекс зацепления через степень сферического отображения, но это не так.

Это значит, что во всех точках, где  $t$  как функция параметра на кривой имеет нулевую производную, ее вторая производная не должна обращаться в нуль.

**ТЕОРЕМА 2.1.** *Оказывается, что число зацепления можно тогда сосчитать по такой формуле:*

$$lk(K, L) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m < t < M} \sum_j \varepsilon_j \frac{d(z_j(t) - z'_j(t))}{z_j(t) - z'_j(t)},$$

где  $m$  и  $M$  — минимальное и максимальное значение параметра  $t$  на зацеплении  $K \cup L$ ,  $j$  — индекс, перечисляющий все возможности выбрать пару ветвей зацепления в виде функций  $z_j(t)$ ,  $z'_j(t)$ , соответственно для  $K$  и  $L$ , а  $\varepsilon_j = \pm 1$  в зависимости от четности числа выбранных ветвей, которые ориентированы вниз.



Таким образом, мы отслеживаем все те участки, где  $K$  вращается вокруг  $L$ , и суммируем все полученные числа оборотов.

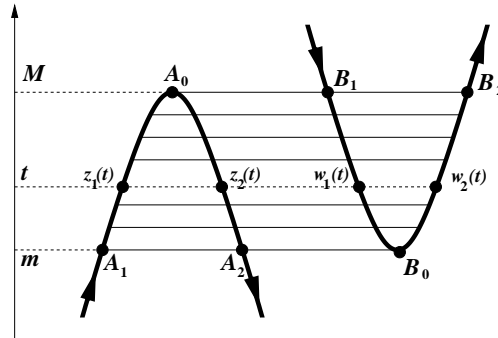
*Замечание* На самом деле, требование, чтобы рассматриваемое зацепление было морсовским, можно ослабить. С таким же успехом можно рассматривать кусочно линейные зацепления без горизонтальных участков, или гладкие зацепления без точек уплощения функции вертикальной координаты (точек, где все производные этой функции зануляются).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство состоит из трех частей, которые — в более продвинутом виде — будут присутствовать и в доказательстве для настоящего интеграла Концевича.

**Шаг 1.** *Значение суммы в правой части равенства — целое.* Заметим, что для строго морсовского зацепления с двумя компонентами  $K$  и  $L$ , конфигурационное пространство всех горизонтальных хорд, соединяющих  $K$  и  $L$ , представляет собой замкнутое одномерное многообразие, то есть несвязное объединение нескольких окружностей.



Например, допустим, что два соседних критических значения  $m$  и  $M$  вертикальной координаты (где  $m < M$ ) соответствуют минимуму на компоненте  $K$  и максимуму на компоненте  $L$ :



Пространство всех горизонтальных хордовых диаграмм, которые соединяют показанные участки  $K$  и  $L$ , состоит из четырех интервалов, которые, соединяясь, образуют окружность. Движение по этой окружности можно начать, скажем, с хорды  $A_1B_0$  и далее двигаться по маршруту

$$A_1B_0 \rightarrow A_0B_1 \rightarrow A_2B_0 \rightarrow A_0B_2 \rightarrow A_1B_0.$$

Заметим, что когда движущаяся хорда проходит критический уровень ( $m$  или  $M$ ), направление движения меняется, и также меняется знак  $(-1)^{\downarrow j}$ .

Теперь становится ясно, что наша интегральная формула считает число полных оборотов, которое делает горизонтальная хорда, пробегая все пространство хорд с одним концом  $(z_j(t), t)$  на компоненте  $K$ , а с другим  $(w_j(t), t)$  — на компоненте  $L$ . Это число, очевидно, целое.

**Шаг 2.** Число в правой части остается неизменным при непрерывной горизонтальной деформации зацепления. (Под горизонтальной деформацией мы понимаем движение каждой точки зацепления внутри определенной горизонтальной плоскости  $t = \text{const.}$ ) Это утверждение очевидно, ибо интеграл меняется непрерывно, оставаясь при этом целым числом. Заметим, что вывод верен, даже если разрешить проход через самопересечения внутри каждой компоненты; это не влияет на значение интеграла, поскольку точки  $z_j(t)$  и  $w_j(t)$  принадлежат разным компонентам.

**Шаг 3.** Сведение к комбинаторной формуле для числа зацепления. Выберем вертикальную плоскость в  $\mathbb{R}^3$  и представим зацепление проекцией общего положения на эту плоскость. Посредством горизонтальной деформации можно сдвинуть зацепление в эту плоскость почти целиком, за исключением маленьких фрагментов вокруг тех

перекрестков диаграммы, где пересекаются разные компоненты (как мы отмечали выше, *самопересечения* каждой компоненты допускаются). Угол поворота горизонтальной хорды вокруг каждого перекрестка равен  $\pm\pi$ , а знаки находятся в полном соответствии с числом ветвей, ориентированных вниз. Для проверки достаточно нарисовать два перекрестка разной направленности и на каждой картинке рассмотреть четыре возможности для расстановки ориентаций на ветвях. При этом окажется, что знак поворота движущейся горизонтальной хорды в каждом случае совпадает с множителем  $(-1)^{\downarrow j}$ . (Напомним, что интеграл в теореме берется по переменной  $t$ , так что речь всюду идет об угле поворота при движении хорд снизу вверх.)  $\square$

Интеграл Концевича можно рассматривать как обобщение этой формулы. Здесь мы следили за оборотами одной горизонтальной хорды, движущейся между двух кривых. Полный интеграл Концевича учитывает, каким образом произвольные конечные наборы горизонтальных хорд вращаются при движении вдоль узла (каждой хорды независимо) в вертикальном направлении.

В следующем разделе мы следуем довольно элементарному подходу. С более продвинутой точки зрения (см., например, [26]) интеграл Концевича интерпретируется как монодромия связности Книжника–Замолодчикова в дополнении к объединению диагональных гиперплоскостей в  $\mathbb{C}^n$  (см., например, [26]).

## 2.2. Конструкция и основные свойства

**Определение.** *Интеграл Концевича* узла  $K$  — это следующий элемент пополнения  $\overline{\mathcal{A}}$  алгебры хордовых диаграмм:

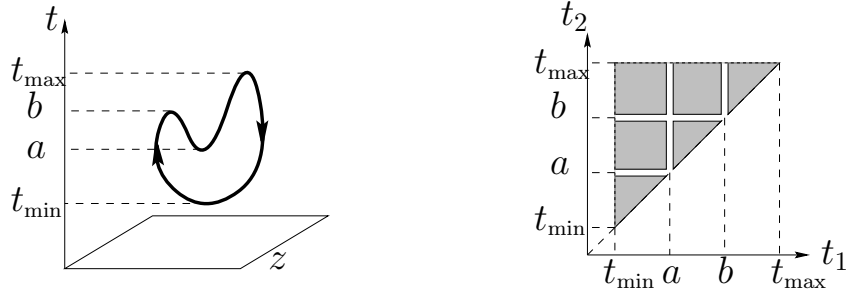
$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\substack{t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max} \\ t_j \text{ не критические}}} \sum_{P=\{(z_j, z'_j)\}} (-1)^{\downarrow D_P} \bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}.$$

Приведем комментарии, необходимые для понимания этого выражения.

*Пополнение  $\hat{\mathcal{A}}$*  алгебры  $\mathcal{A}$  — это, по определению, множество всех бесконечных формальных рядов вида  $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m a_m$ , где  $\lambda_m \in \mathbb{C}$  — численные коэффициенты, а  $a_m \in \mathcal{A}_m$  — элементы пространства хордовых диаграмм степени  $m$ .

Действительные числа  $t_{\min}$  и  $t_{\max}$  суть минимальное и максимальное значения функции  $t$  на  $K$ .

Область интегрирования представляет собой  $m$ -мерный симплекс  $t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}$ , разделенный критическими значениями на некоторое число *связных компонент*. Например, для следующего вложения неузла и  $m = 2$  область интегрирования состоит из шести компонент связности и выглядит так:



Число слагаемых в подынтегральном выражении постоянно для каждой компоненты связности, но может быть различным для разных компонент. Часть узла в полосе, заключенной между двумя критическими уровнями функции  $t$ , представляет собой набор кривых, каждая из которых однозначно параметризована переменной  $t$ . В каждой плоскости  $\{t = t_j\} \subset \mathbb{R}^3$  выберем неупорядоченную пару различных точек  $(z_j, t_j)$  и  $(z'_j, t_j)$ , лежащих на узле  $K$ . Обозначим через  $P = \{(z_j, z'_j)\}$  систему из  $m$  таких пар для  $j = 1, \dots, m$ .

В приведенном выше примере для связной компоненты  $\{t_{\min} < t_1 < a, b < t_2 < t_{\max}\}$  есть лишь одна пара точек на уровнях  $\{t = t_1\}$  и  $\{t = t_2\}$ . Следовательно, для этой компоненты сумма под интегралом состоит только из одного слагаемого. Напротив, для компоненты  $\{t_{\min} < t_1 < a, a < t_2 < b\}$  у нас по-прежнему есть лишь один выбор на уровне  $\{t = t_1\}$ , но плоскость  $\{t = t_2\}$  пересекает узел  $K$  уже по четырем точкам, поэтому мы имеем  $\binom{4}{2} = 6$  возможных пар  $(z_2, z'_2)$ , и общее число слагаемых равно шести.

Для данного выбора системы  $P$  символ ' $\downarrow$ ' обозначает число точек  $(z_j, t_j)$  или  $(z'_j, t_j)$  из  $P$ , в которых координата  $t$  убывает при движении по узлу в положительном направлении.

Зафиксируем систему пар  $P$ . Рассмотрим узел  $K$  как ориентированную окружность и соединим на ней точки  $(z_j, t_j)$  и  $(z'_j, t_j)$  хордами. Получится хордовая диаграмма порядка  $m$ . Эта хордовая диаграмма является элементом алгебры  $\mathcal{A}$ , который мы обозначаем через  $D_P$ .

На каждой компоненте связности переменные  $z_j$  и  $z'_j$  являются гладкими функциями переменной  $t_j$ . Подставляя эти функции в выражение  $\bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$ , мы получаем дифференциальную форму от

переменных  $t_1, \dots, t_m$ , определенную на симплексе в  $m$ -мерном пространстве этих переменных. Ее и следует проинтегрировать. Это даст коэффициент при соответствующей хордовой диаграмме.

Описанная конструкция работает при всех значениях  $m > 0$ . Для  $m = 0$  по определению полагают, что получится хордовая диаграмма порядка 0 (окружность без хорд, представляющая единичный элемент алгебры  $\mathcal{A}$ ) с коэффициентом 1.

Ниже в этой главе мы докажем следующие основные свойства интеграла Концевича:

- Интеграл  $Z(K)$  сходится для любого строго морсовского узла  $K$ .
- Он инвариантен относительно деформаций узла в классе (не обязательно строго) морсовских узлов.
- Он ведет себя совершенно определенным образом при деформациях, которые добавляют к морсовскому вложению пару новых критических точек.

Эти свойства будут доказаны соответственно в разделах 2.4, 2.5 и 2.6. Используя доказанные свойства, в разделе 2.7 мы построим формулу для универсального инварианта Васильева и докажем вторую часть теоремы Васильева–Концевича (стр. 14).

Основным техническим средством для проведения доказательств в этой главе будет служить обобщение интеграла Концевича с узлов на произвольные связки, к которому мы сейчас переходим.

### 2.3. Интеграл Концевича для связок

Связка (tangle) — это часть узла, заключенная внутри некоторого прямоугольного параллелепипеда. Точнее, это произвольное гладкое вложение одномерного компактного многообразия в некоторый координатный параллелепипед пространства  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , причем край многообразия может пересекаться с краем параллелепипеда только в точках верхнего и нижнего основания, и все такие пересечения трансверсальны.

Определение предварительного интеграла Концевича для узлов имеет смысл для произвольной связки  $T$ . Нужно только заменить пополненную алгебру хордовых диаграмм  $\hat{\mathcal{A}}$  на пополненное векторное пространство хордовых диаграмм на скелете связки  $T$  и принимая  $t_{\min}$  и  $t_{\max}$  равными соответственно верхней и нижней плоскостям  $T$ . (*Скелет* — это связка, рассматриваемая как абстрактное одномерное многообразие.) В разделе 2.4 мы покажем, что коэффициенты при

хордовой диаграмме в интеграле Концевича любой (строго морсовской) связки сходятся.

В частности, имеет смысл говорить об интеграле Концевича зацеплений и кос.

Строго говоря, прежде чем описывать свойства интеграла Концевича, мы должны доказать, что он корректно определен. Это будет сделано в следующем параграфе. А пока что мы будем предполагать этот факт верным.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.** *Интеграл Концевича для связок мультипликативен:*

$$Z(T_1 \cdot T_2) = Z(T_1) \cdot Z(T_2)$$

*всегда, когда произведение  $T_1 \cdot T_2$  определено.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $t_{\min}$  и  $t_{\max}$  — значения вертикальной координаты, соответствующие нижней и верхней плоскостям связки произведения  $T_1 \cdot T_2$ , а  $t_{\text{mid}}$  — это верхний уровень  $T_2$  (или, что то же самое, нижний уровень  $T_1$ ). В выражении интеграла Концевича для связки  $T_1 \cdot T_2$  удалим из области интегрирования все точки, у которых хотя бы одна координата  $t$  равна  $t_{\text{mid}}$ . Это множество коразмерности один, поэтому значение интеграла останется неизменным. С другой стороны, связные компоненты новой области интегрирования суть в точности произведения связных компонент для  $T_1$  и  $T_2$ , а подынтегральное выражение для  $T_1 \cdot T_2$  есть внешнее произведение подынтегральных выражений для  $T_1$  и  $T_2$ . Равенство  $Z(T_1 \cdot T_2) = Z(T_1) \cdot Z(T_2)$  вытекает теперь из теоремы Фубини о кратных интегралах.  $\square$

Помимо только что рассмотренного умножения связок «по вертикали», в случае совпадения правой плоскости связки  $T_1$  с левой плоскостью связки  $T_2$  можно говорить о «тензорном умножении», под которым понимается конкатенация по горизонтали. Поведение интеграла Концевича при тензорном умножении связок описывается более сложно. В выражении для  $Z(T_1 \otimes T_2)$  есть члены, которые дают ровно тензорное произведение  $Z(T_1) \otimes Z(T_2)$ : это слагаемые без хорд, соединяющих  $T_1$  и  $T_2$ . Слагаемые с такими хордами в  $Z(T_1 \otimes T_2)$  присутствуют, и у нас нет их эффективного описания. Тем не менее, о них можно кое-что сказать, но для этого нам необходимо новое определение.

**2.3.1. Параметризованные тензорные произведения.** Назовем (горизонтальной)  $\varepsilon$ -перенормировкой пространства  $\mathbb{R}^3$  отображение  $(z, t) \mapsto (\varepsilon z, t)$ , где  $\varepsilon$  — фиксированное положительное число.

Это отображение индуцирует операцию на связках; обозначим через  $\varepsilon T$  результат  $\varepsilon$ -перенормировки, примененной к связке  $T$ . Заметим, что  $\varepsilon$ -перенормировка не меняет интеграл Концевича  $Z(T)$ .

Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — две связки такие, что произведение  $T_1 \otimes T_2$  определено. Для  $0 < \varepsilon \leq 1$  определим  $\varepsilon$ -параметризованное тензорное произведение  $T_1 \otimes_{\varepsilon} T_2$  как результат расположения  $\varepsilon T_1$  слева от  $\varepsilon T_2$  на расстоянии  $1 - \varepsilon$ :

$$T_1 = \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right); \quad T_2 = \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right); \quad T_1 \otimes_{\varepsilon} T_2 = \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right).$$

На более точном языке то же самое можно выразить следующим образом. Обозначим через  $\mathbf{0}_{1-\varepsilon}$  пустую связку ширины  $1 - \varepsilon$  и такой же высоты и глубины, как  $\varepsilon T_1$  и  $\varepsilon T_2$ . Тогда

$$T_1 \otimes_{\varepsilon} T_2 = \varepsilon T_1 \otimes \mathbf{0}_{1-\varepsilon} \otimes \varepsilon T_2.$$

Если  $\varepsilon = 1$ , то мы получаем обычное тензорное произведение. Заметим, что при  $\varepsilon < 1$  параметризованное тензорное произведение, вообще говоря, неассоциативно.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.** *Интеграл Концевича для связок асимптотически мультипликативен по отношению к тензорному умножению:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z(T_1 \otimes_{\varepsilon} T_2) = Z(T_1) \otimes Z(T_2)$$

в случае, когда произведение  $T_1 \otimes T_2$  определено. Более того, разность

$$Z(T_1 \otimes_{\varepsilon} T_2) - Z(T_1) \otimes Z(T_2)$$

при  $\varepsilon$ , стремящемся к 0, есть бесконечно малая того же или большего порядка малости, что и само  $\varepsilon$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как мы отмечали выше, выражение  $Z(T_1 \otimes_{\varepsilon} T_2)$  состоит из двух частей: из членов, не содержащих хорд между  $\varepsilon T_1$  и  $\varepsilon T_2$  и из членов, содержащих такие хорды. Первая часть не зависит от  $\varepsilon$  и равна  $Z(T_1) \otimes Z(T_2)$ , а вторая часть стремится к 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В самом деле, каждое спаривание  $P = \{(z_j, z'_j)\}$  для  $T_1 \otimes T_2$  порождает непрерывное семейство спариваний  $P_{\varepsilon} = \{(z_j(\varepsilon), z'_j(\varepsilon))\}$  для  $T_1 \otimes_{\varepsilon} T_2$ . Рассмотрим одно такое семейство  $P_{\varepsilon}$ . Для всех  $k$  мы имеем

$$dz_k(\varepsilon) - dz'_k(\varepsilon) = \varepsilon(dz_k - dz'_k).$$

Если оба конца хорды номер  $k$  находятся на  $\varepsilon T_1$  или на  $\varepsilon T_2$ , то

$$z_k(\varepsilon) - z'_k(\varepsilon) = \varepsilon(z_k - z'_k)$$

при всех  $\varepsilon$ . Поэтому предел первой части равен  $Z(T_1) \otimes Z(T_2)$ .

С другой стороны, если спаривание  $P_\varepsilon$  содержит хотя бы одну хорду, соединяющую оба сомножителя, то для нее  $|z_k(\varepsilon) - z'_k(\varepsilon)| \rightarrow 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следовательно, интеграл, соответствующий  $P_\varepsilon$ , стремится к нулю, когда  $\varepsilon$  стремится к нулю, и мы видим, что вся вторая часть интеграла Концевича связки  $T_1 \otimes_\varepsilon T_2$  в пределе исчезает как минимум с той же скоростью, что и  $\varepsilon$ :

$$Z(T_1 \otimes_\varepsilon T_2) = Z(T_1) \otimes Z(T_2) + O(\varepsilon) .$$

□

## 2.4. Сходимость интеграла

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.** *Для любой строго морсовской связки  $T$  интеграл Концевича  $Z(T)$  сходится.*

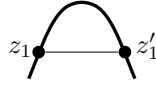
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Подынтегральное выражение в интеграле Концевича может иметь особенности у границ связных компонент области интегрирования. Это случается вблизи критических точек связки, когда спаривание включает «короткую» хорду с концами на двух ветвях, которые соединяются в критической точке.

Допустим, что связка  $T$  имеет всего одну критическую точку. Этого достаточно, поскольку любую строго морсовскую связку можно разложить в произведение таких. Рассуждение, проведенное при доказательстве предложения 2.1, показывает, что интеграл Концевича произведения сходится, если сходятся интегралы для каждого сомножителя.

Без ограничения общности можно предположить, что связка  $T$  имеет единственную точку максимума  $c$ , соответствующую значению вертикальной координаты  $t_c$ . Тогда необходимо рассмотреть лишь спаривания, не содержащие хорд выше уровня  $t_c$ . В самом деле, коэффициент в интеграле Концевича  $Z(T)$  для любого спаривания есть произведение двух интегралов: одного, отвечающего хордам выше уровня  $t_c$ , и второго — для хорд ниже  $t_c$ . Первый интеграл сходится по причине отсутствия особенностей, поэтому остается рассмотреть сомножитель с хордами ниже уровня  $t_c$ .

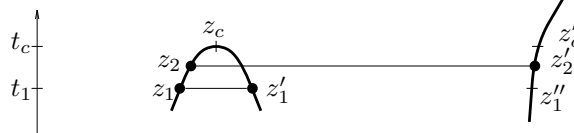
Здесь имеется две разных возможности.

1) Есть изолированная хорда  $(z_1, z'_1)$ , которая стремится к нулю при приближении к критической точке::



В этом случае соответствующая хордовая диаграмма  $D_P$  равна нулю в пространстве  $\mathcal{A}$  в силу одночленного соотношения.

2) Хорда  $(z_1, z'_1)$  стремится к нулю вблизи критической точки, но отделена от этой точки одной или несколькими другими хордами:



Рассмотрим для примера случай, показанный на рисунке, где «короткая» хорда  $(z_1, z'_1)$  отделена от критической точки одной «длинной» хордой  $(z_2, z'_2)$ . Мы имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_c} \frac{dz_2 - dz'_2}{z_2 - z'_2} \right| &\leq C \left| \int_{t_1}^{t_c} d(z_2 - z'_2) \right| \\ &= C |(z_c - z_1) - (z'_c - z'_1)| \leq C' |z_1 - z'_1| \end{aligned}$$

для некоторых положительных констант  $C$  и  $C'$ . Этот интеграл имеет порядок малости величины  $z_1 - z'_1$ , и это компенсирует знаменатель, соответствующий второй хорде.

В общей ситуации по индукции доказывается, что если «короткая» хорда  $(z_1, z'_1)$  отделена от максимума  $j - 1$  хордами, из которых последняя «длинная», то интеграл

$$\int_{t_1 < t_2 < \dots < t_j < t_c} \bigwedge_{i=1}^j \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i}$$

имеет тот же порядок малости, что и величина  $z_1 - z'_1$ .

Сходимость интеграла Концевича тем самым доказана.  $\square$

## 2.5. Инвариантность интеграла

**ТЕОРЕМА 2.2.** *Интеграл Концевича не меняется при деформации узла в классе (необязательно строго) морсовских узлов.*

Доказательство этой теоремы простирается до конца данного раздела.



Всякую деформацию узла в классе морсовских узлов можно представить как последовательность деформаций трех типов: сохраняющие ориентацию перепараметризации узла, горизонтальные деформации и движения критических точек.

Инвариантность интеграла Концевича по отношению к перепараметризациям очевидна, поскольку параметризация как таковая не играет роли в конструкции интеграла: используется лишь ориентация узла, которую она задает.

*Горизонтальная деформация* — это изотопия узла в  $\mathbb{R}^3$ , сохраняющая все горизонтальные плоскости  $\{t = \text{const}\}$  и оставляющая на месте все критические точки, вместе с их малыми окрестностями. Инвариантность относительно горизонтальных деформаций есть наиболее существенный аспект общей инвариантности. Мы докажем ее в следующем пункте.

*Движение критической точки  $c$*  — это изотопия, тождественная вне малой окрестности точки  $c$  и не меняющая числа критических точек. Инвариантность интеграла Концевича по отношению к движениям критических точек будет доказана в пункте 2.5.2.

Как мы уже отмечали, (предварительный) интеграл Концевича может меняться при изотопиях, меняющих число критических точек. Его поведение при таких деформациях будет обсуждаться в разделе 2.6.

**2.5.1. Инвариантность при горизонтальных деформациях.** Разложим данный морсовский узел в произведение связок без критических точек функции  $t$  и тонких полос, содержащих критические уровни. По определению, горизонтальная деформация не двигает окрестности критических точек, поэтому, благодаря мультипликативности, достаточно доказать, что интеграл Концевича не меняется при горизонтальных деформациях связки без критических точек, которая сохраняет границы полосы поточечно.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.** Пусть  $T_0$  — связка без критических точек, а  $T_\lambda$  — горизонтальная деформация  $T_0$  в  $T_1$  с вещественным параметром  $\lambda \in [0, 1]$ , не двигающая точек на верхней и нижней плоскостях связки. Тогда  $Z(T_0) = Z(T_1)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через  $\omega$  подынтегральное выражение степени  $m$  в интеграле Концевича:

$$\omega = \sum_{P=\{z_j, z'_j\}} (-1)^{\downarrow} D_P \bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}.$$

Здесь функции  $z_j, z'_j$  зависят не только от  $t_1, \dots, t_m$ , но и от параметра  $\lambda$ , а все дифференциалы понимаются как полные дифференциалы по отношению ко всем этим переменным. Это значит, что форма  $\omega$  — это не в точности форма, стоящая под знаком интеграла Концевича (она содержит дополнительные члены с  $d\lambda$ ), но это не меняет интегралов по симплексам

$$\Delta_\lambda = \{t_{\min} < t_m < \dots < t_1 < t_{\max}\} \times \{\lambda\},$$

поскольку значение  $\lambda$  на каждом таком симплексе постоянно.

Нам нужно доказать, что интеграл формы  $\omega$  по  $\Delta_0$  равен ее интегралу по  $\Delta_1$ .

Рассмотрим политоп-произведение

$$\Delta = \Delta_0 \times [0, 1] = \begin{array}{c} \text{3D diagram of a prism with triangular bases } \Delta_0 \text{ and } \Delta_1 \text{ and height } [0, 1]. \end{array}$$

По теореме Стокса, 
$$\int_{\partial\Delta} \omega = \int_{\Delta} d\omega.$$

Форма  $\omega$  замкнута:  $d\omega = 0$ . Граница области интегрирования состоит из нескольких частей:  $\partial\Delta = \Delta_0 - \Delta_1 + \sum \{\text{грани}\}$ . Теорема будет вытекать из того факта, что  $\omega|_{\{\text{грани}\}} = 0$ .

Рассмотрим несколько типов граней.

Первый тип описывается уравнениями  $t_m = t_{\min}$  или  $t_1 = t_{\max}$ . В такой ситуации мы имеем  $dz_j = dz'_j = 0$  для  $j = 1$  или  $m$ , поскольку  $z_j$  и  $z'_j$  не зависят от  $\lambda$ .

Грани второго типа задаются соотношениями вида  $t_k = t_{k+1}$  для некоторого  $k$ . В этом случае мы должны выбирать  $k$ -ю и  $(k+1)$ -ю хорды на одном уровне. Концы этих хорд могут совпадать, и мы не получим вообще никакой хордовой диаграммы. Доопределим  $D_P$  на этой грани следующим образом. В случае, когда какие-то концы хорд номер  $k$  и  $(k+1)$  принадлежат одной и той же ветви (и, следовательно, совпадают), мы располагаем  $k$ -ю хорду чуть-чуть выше с тем, чтобы ее концевая точка отличалась от концевой точки  $(k+1)$ -й хорды. Так мы получим корректно определенную хордовую диаграмму.

Все слагаемые в  $\omega$  можно разбить на три части:

- 1)  $k$ -я и  $(k+1)$ -я хорды соединяют одну и ту же пару нитей узла;
- 2)  $k$ -я и  $(k+1)$ -я хорды выбраны так, что их концы лежат на четырех разных нитях;

3)  $k$ -я и  $(k+1)$ -я хорды выбраны так, что их концы принадлежат ровно трем разным нитям.

Рассмотрим эти случаи один за другим.

1) Имеем:  $z_k = z_{k+1}$  и  $z'_k = z'_{k+1}$  (или наоборот). Поэтому,  $d(z_k - z'_k) \wedge d(z_{k+1} - z'_{k+1}) = 0$  и, значит, ограничение формы  $\omega$  на такую грань нулевое.

2) Все выборы наборов хорд в этой части выражения  $\omega$  встречаются парами, которые взаимно уничтожаются. Зафиксируем четверку нитей узла и занумеруем их 1, 2, 3, 4. Допустим, что для некоторого спаривания  $k$ -я хорда соединяет нити 1 и 2, а  $(k+1)$ -я хорда — нити 3 и 4. Тогда существует другое спаривание, в котором  $k$ -я хорда соединяет нити 3 и 4, а  $(k+1)$ -я хорда — нити 1 и 2. Эти два спаривания дают одинаковые хордовые диаграммы, а соответствующие члены в  $\omega$  отличаются знаком:

$$\cdots d(z_k - z'_k) \wedge d(z_{k+1} - z'_{k+1}) \cdots + \cdots d(z_{k+1} - z'_{k+1}) \wedge d(z_k - z'_k) \cdots = 0.$$

3) Это наиболее сложный случай: хорды номер  $k$  и  $(k+1)$  имеют ровно одну общую ветвь узла. Итого мы имеем дело с тремя разными ветвями, которые обозначим цифрами 1, 2 и 3. Пусть  $\omega_{ij}$  есть 1-форма  $\frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}$ . Тогда  $\omega$  представляет собой произведение некоторой  $(m-2)$ -формы и суммы следующих шести 2-форм:

$$\begin{aligned} & (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \\ \hline | \quad | \\ | \quad | \end{array} \omega_{12} \wedge \omega_{23} \quad + \quad (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \\ \hline | \quad | \\ | \quad | \end{array} \omega_{12} \wedge \omega_{13} \\ & + (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \\ \hline | \quad | \\ | \quad | \end{array} \omega_{13} \wedge \omega_{12} \quad + \quad (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \\ \hline | \quad | \\ | \quad | \end{array} \omega_{13} \wedge \omega_{23} \\ & + (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \\ \hline | \quad | \\ | \quad | \end{array} \omega_{23} \wedge \omega_{12} \quad + \quad (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \\ \hline | \quad | \\ | \quad | \end{array} \omega_{23} \wedge \omega_{13} . \end{aligned}$$

Используя тождество  $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ , мы можем переписать эту сумму в виде

$$\begin{aligned} & \left( (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} - (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\ & + \left( (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} - (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{23} \wedge \omega_{31} \\ & + \left( (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} - (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{31} \wedge \omega_{12} \quad . \end{aligned}$$

Из четырехчленных соотношений в горизонтальной форме (см. стр. 15) следует, что выражения в скобках представляют один и тот же элемент пространства  $\mathcal{A}$  и, значит, вся сумма равна

$$\left( (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} - (-1)^\downarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) (\omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{23} \wedge \omega_{31} + \omega_{31} \wedge \omega_{12}).$$

Фигурирующая здесь 2-форма на самом деле равна нулю! Этот простой, но замечательный факт, известный как *тождество Арнольда* (см. [28]), можно записать еще таким образом:

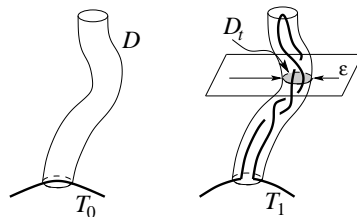
$$f + g + h = 0 \implies \frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g} + \frac{dg}{g} \wedge \frac{dh}{h} + \frac{dh}{h} \wedge \frac{df}{f} = 0$$

(в нашем случае  $f = z_1 - z_2$ ,  $g = z_2 - z_3$ ,  $h = z_3 - z_1$ ) — и проверить прямой выкладкой.

Это завершает доказательство Предложения.  $\square$

*Замечание.* При изменении положения концов связки на граничных плоскостях интеграл Концевича, вообще говоря, меняется. Важный случай, когда он не меняется — это горизонтальная гомотетия, что было использовано нами при обсуждении параметризованных тензорных произведений. У узлов и зацеплений концов вообще нет, поэтому такая проблема там не возникает.

**2.5.2. Движение критических точек.** Рассмотрим две связки  $T_0$  и  $T_1$ , идентичные всюду, за исключением узкого «хвоста» ширины  $\varepsilon$ , который может быть закручен:



Говоря более точно, мы предполагаем, что

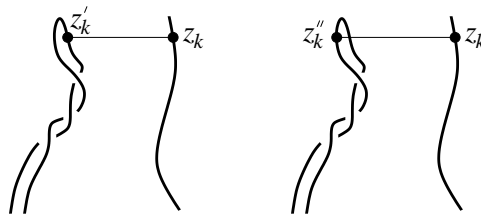
- (1)  $T_1$  отличается от  $T_0$  только внутри области  $D$ , являющейся объединением дисков  $D_t$  диаметра  $\varepsilon$ , лежащих в горизонтальных плоскостях на уровнях  $t \in [t_1, t_2]$ ,
- (2) каждая из связок  $T_0$  и  $T_1$  имеет ровно одну критическую точку в  $D$ , и
- (3) как  $T_0$ , так и  $T_1$  пересекает каждый диск  $D_t$  самое большее в двух точках.

Переход от  $T_0$  к  $T_1$  называется *специальным движением* критической точки. Для доказательства Теоремы 2.2 остается доказать инвариантность интеграла Концевича относительно таких движений. Заметим, что специальные движения критических точек, вообще говоря, выводят строго морсовский узел за пределы этого класса (оставляя его просто морсовским).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.** *Интеграл Концевича остается неизменным при специальных движениях критических точек:  $Z(T_0) = Z(T_1)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Разность между  $Z(T_0)$  и  $Z(T_1)$  может произойти только от членов, содержащих хорду с концом на описанном хвосте.

Рассмотрим такие члены для одной из двух данных связок, например  $T_1$ . Если самая верхняя из таких хорд имеет оба конца на самом хвосте, то соответствующая хордовая диаграмма равна нулю по одночленному соотношению. Поэтому можно предположить, что самая верхняя, скажем  $k$ -я, хорда — «длинная», то есть соединяет хвост с остальной частью связки  $T_1$ . Обозначим конец этой хорды, лежащий на «хвосте», через  $(z'_k, t_k)$ . Тогда существует другой выбор для  $k$ -й хорды, где этот конец смещен в другую точку хвоста  $(z''_k, t_k)$  на том же горизонтальном уровне:



Соответствующие два члена входят в выражение  $Z(T_1)$  с противоположными знаками из-за множителя  $(-1)^\downarrow$ .

Оценим разность интегралов, соответствующих этим  $k$ -м хордам:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_c} d(\ln(z'_k - z_k)) - \int_{t_{k-1}}^{t_c} d(\ln(z''_k - z_k)) \right| &= \left| \ln \left( \frac{z''_{k-1} - z_{k-1}}{z'_{k-1} - z_{k-1}} \right) \right| \\ &= \left| \ln \left( 1 + \frac{z''_{k-1} - z'_{k-1}}{z'_{k-1} - z_{k-1}} \right) \right| \sim |z''_{k-1} - z'_{k-1}| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(здесь  $t_c$  есть значение  $t$  в наивысшей точке хвоста).

Если окажется, что следующая,  $(k-1)$ -я, хорда, тоже длинная, то подобным же образом она может быть взята вместе с парной хордой так, что их совместный вклад в интеграл будет пропорционален  $|z''_{k-2} - z'_{k-2}| \leq \varepsilon$ .

В случае, когда  $(k-1)$ -я хорда короткая, то есть соединяет две точки  $z''_{k-1}$ ,  $z'_{k-1}$ , лежащие на хвосте, можно провести такую оценку двойного интеграла, отвечающего хордам номер  $k$  и  $(k-1)$ :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_{k-2}}^{t_c} \left( \int_{t_{k-1}}^{t_c} d(\ln(z'_k - z_k)) - \int_{t_{k-1}}^{t_c} d(\ln(z''_k - z_k)) \right) \frac{dz''_{k-1} - dz'_{k-1}}{z''_{k-1} - z'_{k-1}} \right| \\ &\leq \text{const} \cdot \left| \int_{t_{k-2}}^{t_c} |z''_{k-1} - z'_{k-1}| \frac{dz''_{k-1} - dz'_{k-1}}{|z''_{k-1} - z'_{k-1}|} \right| \\ &= \text{const} \cdot \left| \int_{t_{k-2}}^{t_c} d(z''_{k-1} - z'_{k-1}) \right| \sim |z''_{k-2} - z'_{k-2}| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

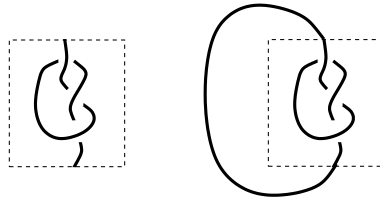
Продолжая это рассуждение, мы убеждаемся, что разность между  $Z(T_0)$  и  $Z(T_1)$  представляет собой величину порядка  $O(\varepsilon)$ . Посредством горизонтальной деформации мы можем устремить  $\varepsilon$  к нулю. Это доказывает теорему и завершает доказательство инвариантности интеграла Концевича в классе узлов с невырожденными критическими точками.  $\square$

## 2.6. Изменение количества критических точек

Мультипликативность интеграла Концевича для связок (Предложения 2.1 и 2.2) немедленно дает несколько следствий для узлов.

**2.6.1. От длинных узлов к обычным узлам.** Длинный (морсовский) узел можно замкнуть таким образом, чтобы получился

(обычный) морсовский узел:



Напомним, что алгебры хордовых диаграмм на прямой и на окружности практически не отличаются: изоморфизм задается стандартным замыканием прямой в окружность.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.** *Интеграл Концевича длинного узла  $T$  совпадает с интегралом его замыкания  $K_T$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $\text{id}$  связку, состоящую из одной вертикальной ветви. Тогда  $K_T$  можно записать как  $T_{max} \cdot (T \otimes_{\varepsilon} \text{id}) \cdot T_{min}$ , где  $T_{max}$  и  $T_{min}$  суть элементарные связки, соответствующие верхнему максимуму и нижнему минимуму, а  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Поскольку интеграл Концевича для  $K_T$  не зависит от  $\varepsilon$ , мы можем устремить  $\varepsilon$  к нулю. Тогда

$$Z(K_T) = Z(T_{max}) \cdot (Z(T) \otimes Z(\text{id})) \cdot Z(T_{min}).$$

Заметим теперь, что интегралы Концевича связок  $T_{max}$ ,  $T_{min}$  и  $\text{id}$  состоят из одной диаграммы степени ноль, то есть являются единицей алгебры  $\hat{\mathcal{A}}$ . Это и завершает доказательство.  $\square$

Следствием этого является формула, описывающая поведение интеграла Концевича при добавлении пары критических точек. В самом деле, добавление пары критических точек к длинному узлу  $T$  — это то же самое, что умножение его на



и из мультипликативности интеграла Концевича для связок вытекает, что

$$(6) \quad Z\left(\left[\begin{array}{c} \text{link with 2 critical points} \\ \hline \end{array}\right]\right) = Z(H) \cdot Z\left(\left[\begin{array}{c} \text{link} \\ \hline \end{array}\right]\right).$$

Здесь первая и третья картинки представляют два вложения узла, которые совпадают вне показанного фрагмента, а

$$H := \left[\begin{array}{c} \text{link} \\ \hline \end{array}\right]$$

есть так называемый *горб*, то есть тривиальный узел, вложенный в пространство указанным способом (с двумя максимумами).

## 2.7. Универсальный инвариант Васильева

Формула (6) позволяет определить *универсальный инвариант Васильева* по любой из формул

$$I(K) = \frac{Z(K)}{Z(H)^{c/2}}$$

или

$$I'(K) = \frac{Z(K)}{Z(H)^{c/2-1}},$$

где  $c$  означает число критических точек узла  $K$  в произвольном морсовском представлении, а дробь — это деление в алгебре  $\hat{\mathcal{A}}$ :  $(1+a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$ . Выражения  $I(K)$  и  $I'(K)$  называются еще «окончательными» интегралами Концевича, в отличие от «предварительного интеграла»  $Z(K)$ .

Любая изотопия узла в  $\mathbb{R}^3$  может быть аппроксимирована последовательностью, состоящей из изотопий в классе (не обязательно строго) морсовских узлов и добавлений или уничтожений «горбов», то есть пар соседних максимумов и минимумов. Инвариантность  $Z(K)$  в классе морсовских узлов и формула (6) влекут инвариантность обоих выражений  $I(K)$  и  $I'(K)$  при произвольных деформациях узла  $K$ . (Точное значение слова «универсальный» будет разъяснено чуть ниже.)

Версия  $I'(K)$  имеет преимущество мультипликативности по отношению к связной сумме узлов; в частности, она принимает значение 1 на тривиальном узле. Тем не менее, версия  $I(K)$  также употребительна, ибо она имеет непосредственную связь с квантовыми инвариантами (см. [98]). В частности, термин «интеграл Концевича от неузла», подразумевает, конечно,  $I$ , а не  $I'$ , ибо последний равен просто единице, а первый вполне нетривиален и выражается бесконечным рядом  $1/Z(H)$ , красивое описание которого было найдено в [38] и приведено также в [26].

**2.7.1. Доказательство теоремы Концевича.** Для начала мы переформулируем теорему Концевича (точнее, вторую часть теоремы Васильева–Концевича (стр. 14) следующим образом.

**ТЕОРЕМА 2.3.** Пусть  $w$  — неоснащенная весовая система степени  $n$ . Тогда найдется инвариант Васильева степени  $n$ , символ которого равен  $w$ .



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемый инвариант задается формулой

$$K \longmapsto w(I(K)).$$

В самом деле, возьмем хордовую диаграмму  $D$  порядка  $n$  и пусть  $K_D$  — какой-то особый узел, отвечающий диаграмме  $D$ . Утверждение теоремы будет следовать из того факта, что  $I(K_D) = D +$  (члены степени  $> n$ ). Поскольку знаменатель дроби  $I(K)$  начинается с единицы алгебры  $\mathcal{A}$ , достаточно доказать, что

$$(7) \quad Z(K_D) = D + (\text{члены степени } > n).$$

Это соотношение проще установить сразу для произвольной особой связки  $T_D$  (вместо узла  $K_D$ ) с диаграммой точек самопересечения  $D$ , которая теперь вместо окружности имеет носитель, диффеоморфный  $T$ .

Если  $n = 0$ , то диаграмма  $D$  не имеет ни одной хорды, и связка  $T_D$  не особа. Для неособой связки разложение интеграла Концевича начинается с пустой диаграммы с коэффициентом 1, так что равенство (7) выполняется очевидным образом.

Заметим, что для любой особой связки (имеющей хотя бы одну особую точку) интеграл Концевича начинается с членов степени как минимум один. Рассмотрим случай  $n = 1$ . Если  $T_D$  представляет собой особую 2-косу, то существует только один член степени 1, а именно хордовая диаграмма с хордой, соединяющей две нити косы. Коэффициент при этой диаграмме в выражениях  $Z(T_+)$  и  $Z(T_-)$ , где  $T_+ - T_-$  есть разрешение двойной точки в  $T_D$ , измеряет число полных оборотов кос  $T_+$  и  $T_-$ , соответственно. Разность этих чисел равна 1, значит, равенство (7) также выполняется.

Пусть теперь  $T_D$  — произвольная особая связка, имеющая ровно одну двойную точку,  $\varepsilon$ -окрестность которой мы обозначим через  $V_\varepsilon$ . При помощи небольшой деформации вблизи данной точки можно свести рассмотрение к случаю, когда пересечение  $T_D$  с  $V_\varepsilon$  есть особая коса на двух нитях, причем разрешение особой точки имеет вид  $T_D = T_+^\varepsilon - T_-^\varepsilon$ , где обе неособые связки  $T_+^\varepsilon$  и  $T_-^\varepsilon$  совпадают с  $T$  вне  $V_\varepsilon$ .

Запишем однородную часть степени 1 выражения  $Z(T_\pm^\varepsilon)$  как сумму  $Z'_\pm + Z''_\pm$ , где  $Z'_\pm$  есть интеграл по наборам хорд, оба конца которых содержатся в  $V_\varepsilon$ , а  $Z''_\pm$  — все остальные слагаемые, то есть интеграл по всем наборам хорд, у которых хотя бы один конец не попадает в  $V_\varepsilon$ . Устремим  $\varepsilon$  к 0, тогда и  $Z''_+ - Z''_-$  будет стремиться к 0. С другой стороны, для всех значений  $\varepsilon$  разность  $Z''_+ - Z''_-$  равна диаграмме  $D$  с коэффициентом 1. Это завершает доказательство в случае  $n = 1$ .

Наконец, если  $n > 1$ , то применением подходящей деформации мы можем всегда достичь того, что  $T_D$  является произведением  $n$  особых связок, каждая с одной особой точкой. Тогда равенство (7) будет следовать из мультипликативности интеграла Концевича для связок.

□

**2.7.2. Универсальность  $I(K)$ .** При доказательстве теоремы Концевича мы видели, что для особого узла  $K$  с  $n$  двойными точками выражение  $I(K)$  начинается с членов степени  $n$ . Обозначим  $n$ -ю однородную компоненту ряда  $I(K)$  через  $I_n(K)$ , тогда отображение  $K \mapsto I_n(K)$  представляет собой инвариант Васильева степени  $n$ .

В определенном смысле все инварианты Васильева относятся к этому типу. Точнее:

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7.** *Любой инвариант Васильева можно представить в виде композиции с  $I$ , а именно, для всякого элемента  $v \in \mathcal{V}$  существует линейная функция  $f$ , определенная на пространстве  $\widehat{\mathcal{A}}$  и такая, что  $v = f \circ I$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $v \in \mathcal{V}_n$ . По теореме Концевича, существует функция  $f_0$  такая, что  $v$  и  $f_0 \circ I_n$  имеют одинаковый символ. Следовательно, разность  $v - f_0 \circ I_n$  принадлежит  $\mathcal{V}_{n-1}$ , и ее старшая часть представляется композицией  $f_1 \circ I_{n-1}$ . Продолжая таким образом, мы в конечном счете получим:

$$v = \sum_{i=1}^n f_i \circ I_{n-i}.$$

□

Конструкция предыдущего доказательства показывает, что универсальный инвариант Васильева индуцирует разложение фильтрованного векторного пространства  $\mathcal{V}$  в прямую сумму подпространств, изоморфных факторам  $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ . Элементы таких подпространств называются *каноническими инвариантами Васильева*.

В качестве следствия Предложения 2.7 мы получаем такое утверждение.

**ТЕОРЕМА 2.4.** *Универсальный инвариант Васильева  $I$  обладает в точности такой же силой, как совокупность всех (комплекснозначных) инвариантов Васильева: для любых двух узлов  $K_1$  и  $K_2$  выполняется эквивалентность*

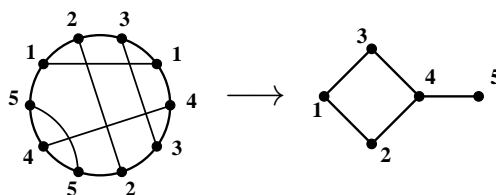
$$I(K_1) = I(K_2) \iff \forall v \in \mathcal{V} \quad v(K_1) = v(K_2).$$

### Конструкции весовых систем

#### 3.1. Построение весовых систем по графу пересечений хордовой диаграммы

**Определение.** ([11]) *Граф пересечений*  $\Gamma(D)$  хордовой диаграммы  $D$  — это граф, вершины которого соответствуют хордам  $D$ , причем две вершины соединяются ребром в том и только том случае, когда эти хорды пересекаются. Кратные ребра и петли при этом не допускаются, а пересечение хорд понимается в комбинаторном смысле: хорды  $a$  и  $b$  считаются пересекающимися, если их концы при обходе окружности чередуются:  $a_1, b_1, a_2, b_2$ .

Например,



В абстрактной теории графов такой класс графов изучался и ранее, там они называются *круговыми*.

Легко проверить, что всякий граф с не более чем пятью вершинами является графом пересечений некоторой хордовой диаграммы. Простейший граф, не являющийся таковым, имеет шесть вершин:



С другой стороны, различные хордовые диаграммы могут иметь одинаковые графы пересечений. Например, есть три различных диаграммы

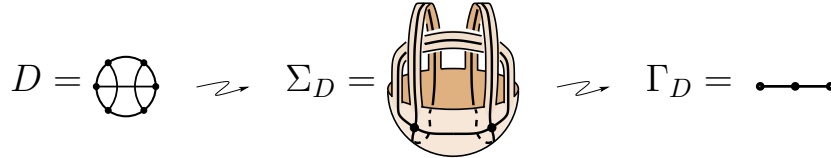


с одним и тем же графом пересечений .

Существует полное описание графов, представимых как графы пересечений хордовых диаграмм, см. [43].

Понятию графа пересечений можно придать прямой топологический смысл. С каждой хордовой диаграммой  $D$  свяжем ориентированную поверхность  $\Sigma_D$ , заклеив диском окружность диаграммы  $D$  и

заменяв хорды ленточками. Протянув вдоль хорд циклы, как показано на рисунке, мы получим базис в гомологиях  $H_1(\Sigma_D, \mathbb{Z}_2)$ . Матрица пересечений этого базиса совпадает с матрицей инцидентности графа  $\Gamma_D$ . В терминологии теории особенностей [30] граф пересечений  $\Gamma_D$  есть не что иное, как диаграмма Дынкина формы пересечений в  $H_1(\Sigma_D, \mathbb{Z}_2)$ , построенная для описанного базиса.



Графы пересечений содержат довольно много информации о своих хордовых диаграммах. В статье [11] автором диссертации была сформулирована следующая экстремистская гипотеза.

**Гипотеза о графах пересечений.** *Если  $D_1$  и  $D_2$  — хордовые диаграммы с одинаковыми графами пересечений, то  $D_1 = D_2$  как элементы пространства  $\mathcal{A}'$  (то есть по модулю четырехчленных соотношений).*

Как вытекает из результата Мортон и Кромвеля [88], эта гипотеза в общем случае не верна. Однако, она выполняется в следующих ситуациях:

(1) для всех диаграмм  $D_1, D_2$ , имеющих не более 10 хорд (прямой компьютерный перебор до 8 хорд был проделан автором [11], а для всех хордовых диаграмм до порядка 10 этот факт был впоследствии доказан Дзюном Мураками [94] без помощи компьютерных вычислений);

(2) когда граф  $\Gamma(D_1) = \Gamma(D_2)$  является деревом (см. [12]);

(3) когда  $\Gamma(D_1) = \Gamma(D_2)$  есть граф с единственным циклом (см. [85]);

— равно как и в некоторых других. Вообще, эта гипотеза породила довольно активную деятельность различных математиков (см., например, [85, 86, 94, 46]). Окончательную точку в обсуждении данной проблемы поставили Чмутов и Ландо [46].

**3.1.1. Хроматический многочлен.** При помощи графов пересечений можно построить нетривиальную весовую систему, используя хроматический многочлен. Это было сделано в работе [11] и привело к исторически первой асимптотической оценке снизу на размерности

пространств инвариантов Васильева. В настоящем разделе мы приводим саму конструкцию этой весовой систем, а доказательство оценки будет дано в разделе 4.2.

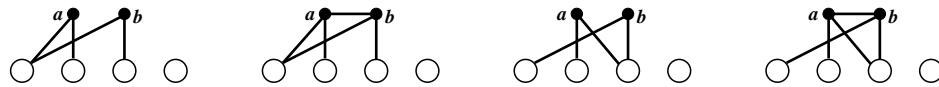
Обозначим через  $\chi(\Gamma) \in \mathbb{Z}[t]$  хроматический многочлен графа  $\Gamma$ , см. [61].

**ТЕОРЕМА 3.1.** *Отображение  $D \mapsto \chi(\Gamma(D))$  удовлетворяет четырехчленным соотношениям и, таким образом, определяет весовую систему со значениями в кольце многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Запишем четырехчленное соотношение в виде

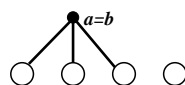
$$\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} .$$

Здесь имеется одна подвижная хорда, обозначим ее  $a$ , и одна выделенная неподвижная, обозначим ее  $b$ . Тогда графы пересечений данных четырех хордовых диаграмм можно схематически изобразить так (в том же порядке):



Здесь все хорды нашей диаграммы, отличные от двух избранных, разбиты на четыре группы по признаку их примыкания к  $a$  и  $b$ , указанному сплошными линиями. Внутри этих групп, а также между ними, смежность может быть произвольной, одной и той же во всех четырех случаях. Заметим, что правило перехода от первого графа к третьему и от второго к четвертому одно и то же, а именно, смежность вершины  $b$  с белыми кружками не меняется, а смежность вершины  $a$  меняется на противоположную с теми и только теми кружками, которые смежны с  $b$ . Это правило легко установить, внимательно рассматривая соответствующие группы хорд в исходных диаграммах.

По основному свойству хроматического многочлена (*deletion-contraction*, см. [61]), разность хроматических многочленов для первых двух графов, равно как и разность для двух последних, получается отождествлением вершин  $a$  и  $b$  и равна, таким образом, одному и тому же выражению, а именно, хроматическому многочлену графа



□

### 3.2. Ли-алгебраические весовые системы для хордовых диаграмм

Сначала несколько вводных слов, относящимся сразу ко всем трем ипостасям нашей основной комбинаторной алгебры; затем мы разберем каждую в подробностях.

По алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ , которая снабжена невырожденной ад-инвариантной билинейной формой, можно построить весовую систему пространства хордовых диаграмм и диаграмм Фейнмана со значениями в центре универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})$ . Подобным образом можно определить отображение пространства диаграмм Якоби  $\mathcal{B}$  в ад-инвариантную часть симметрической алгебры  $S(\mathfrak{g})$ . Эти конструкции принадлежат М. Концевичу [74], а некоторые идеи уже появлялись в работе Р. Пенроуза [100]. Если, вдобавок, у нас задано конечномерное представление алгебры Ли, то, взяв след соответствующего линейного оператора, мы получим весовую систему со значениями в числах. Впрочем, такие весовые системы мы применять не будем (см. по этому поводу [31, 26]), поэтому ограничимся лишь описанием конструкций, связанных с симметрической и универсальной обертывающей алгебрами данной алгебры Ли.

Итак, пусть  $\mathfrak{g}$  — метризованная алгебра Ли над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , то есть алгебра Ли, снабженная невырожденной ад-инвариантной билинейной формой  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Под ад-инвариантностью понимается выполнение тождества  $\langle [x, y], z \rangle + \langle y, [x, z] \rangle = 0$ , что соответствует обычной инвариантности этой формы относительно присоединенного представления соответствующей группы Ли на своей алгебре, см. [124]. Такая форма всегда есть на прямых суммах простых и абелевых алгебр. Для полупростой алгебры в качестве такой формы можно взять форму Киллинга  $\langle x, y \rangle^K = \text{tr}(\text{ad}_x \cdot \text{ad}_y)$ , где  $\text{ad}_x, \text{ad}_y$  — операторы присоединенного представления алгебры Ли (см. [124]).

Пусть  $e_1, \dots, e_m$  — некоторый базис  $\mathfrak{g}$  и  $e_1^*, \dots, e_m^*$  — двойственный ему базис относительно формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Если  $D$  — хордовая диаграмма степени  $n$ , мы выберем произвольно начальную точку на ее окружности Уилсона, отличную от концов хорд. Тогда на множестве концевых точек хорд возникает линейный порядок, определяемый ориентацией петли Уилсона. Сопоставим каждой хорде  $a$  свой индекс, то есть целочисленную переменную  $i_a$ , которая будет меняться в пределах от 1 до  $m = \dim \mathfrak{g}$ . Отметим первый конец каждой хорды символом  $e_{i_a}$ , а второй — символом  $e_{i_a}^*$ .

Запишем произведение всех элементов  $e_{i_a}$  и  $e_{i_a}^*$  в том порядке, в котором они встречаются на петле Уилсона диаграммы  $D$ , и возьмем сумму всех  $m^n$  элементов универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})$ , получаемых подстановкой всевозможных значений индексов  $i_a$  в это произведение. Обозначим через  $\varphi_{\mathfrak{g}}(D)$  полученный элемент алгебры  $U(\mathfrak{g})$ .

Например,

$$\varphi_{\mathfrak{g}}(\bigcirc) = \sum_{i=1}^m e_i e_i^* =: c$$

это *квадратичный элемент Казимира*, ассоциированный с выбранной билинейной формой. Следующая теорема показывает, в частности, что элемент Казимира не зависит от выбора базиса в  $\mathfrak{g}$ . Вот другой пример: если

$$D = \bigcirc_{i,j,k},$$

то

$$\varphi_{\mathfrak{g}}(D) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m e_i e_j e_k e_i^* e_k^* e_j^*.$$

**ТЕОРЕМА 3.2.** *Описанная конструкция обладает следующими свойствами:*

- (1) элемент  $\varphi_{\mathfrak{g}}(D)$  не зависит от выбора начальной точки на диаграмме;
- (2) он не зависит от выбора базиса  $\{e_i\}$  алгебры Ли;
- (3) он принадлежит *ад-инвариантному подпространству*

$$U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \{x \in U(\mathfrak{g}) \mid xy = yx \text{ для всех } y \in \mathfrak{g}\}$$

универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})$ , то есть ее *центру*  $ZU(\mathfrak{g})$ ;

- (4) функция  $D \mapsto \varphi_{\mathfrak{g}}(D)$  удовлетворяет *4-членным соотношениям*;
- (5) возникающее таким образом отображение  $\varphi_{\mathfrak{g}} : \mathcal{A}' \rightarrow ZU(\mathfrak{g})$  является *гомоморфизмом алгебр*.

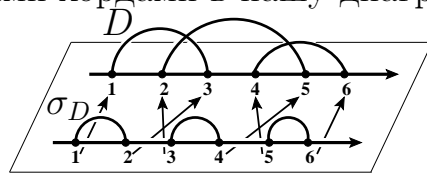
Теорема 3.2 принадлежит М. Концевичу, который дал набросок ее доказательства в [74]. Подробное доказательство изложено в книге [26].

Центр  $ZU(\mathfrak{g})$  универсальной обертывающей алгебры есть в точности  $\mathfrak{g}$ -инвариантное подпространство  $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \subset U(\mathfrak{g})$ , где действие  $\mathfrak{g}$  на  $U(\mathfrak{g})$  состоит во взятии коммутатора. По теореме Хариш-Чандры

(см. [124]), для полупростой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  центр  $ZU(\mathfrak{g})$  изоморфен алгебре многочленов от некоторых переменных  $c_1 = c, c_2, \dots, c_r$ , где  $r = \text{rank}(\mathfrak{g})$ .

**Безбазисная конструкция.** Предыдущая конструкция может быть изложена в более концептуальном виде, без использования каких-либо базисов в алгебре Ли. Вот как это делается.

Хордовая диаграмма  $D$  степени  $n$  с начальной точкой задает перестановку  $\sigma_D$  множества  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  следующим образом. Как мы отмечали ранее, концы хорд диаграммы с начальной точкой линейно упорядочены, так что мы можем упорядочить хорды по их первым концам. Занумеруем хорды от 1 до  $n$ , а их концы от 1 до  $2n$ , в возрастающем порядке. Тогда для  $1 \leq i \leq n$  перестановка  $\sigma_D$  переводит  $2i - 1$  в номер первого конца  $i$ -й хорды, а  $2i$  — в номер второго конца той же хорды. В терминологии раздела 1.4.3 (стр. 18),  $\sigma_D$  — это перестановка, переводящая диаграмму с  $n$  последовательными изолированными хордами в нашу диаграмму  $D$ . Например:



$$\sigma_D = (132546)$$

Билинейную форму  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на  $\mathfrak{g}$  можно рассматривать как тензор из  $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ . Поскольку алгебра  $\mathfrak{g}$  метризована, мы можем отождествить  $\mathfrak{g}^*$  и  $\mathfrak{g}$  и представлять себе форму  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  как элемент пространства  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Перестановка  $\sigma_D$  действует на  $\mathfrak{g}^{\otimes 2n}$ , переставляя местами тензорные сомножители. Значение определяемой весовой системы  $\varphi_{\mathfrak{g}}(D)$  есть тогда образ  $n$ -й тензорной степени  $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\otimes n}$  под действием отображения

$$\mathfrak{g}^{\otimes 2n} \xrightarrow{\sigma_D} \mathfrak{g}^{\otimes 2n} \rightarrow U(\mathfrak{g}),$$

где вторая стрелка изображает естественную проекцию тензорной алгебры векторного пространства  $\mathfrak{g}$  на универсальную обертывающую алгебру.

### 3.3. Ли-алгебраические весовые системы для диаграмм Фейнмана

Поскольку всякая диаграмма Фейнмана представляется линейной комбинацией хордовых, весовую систему  $\varphi_{\mathfrak{g}}$  можно рассматривать как отображение из пространства  $\mathcal{C}$  в универсальную обертывающую  $U(\mathfrak{g})$ . Оказывается, однако, что есть прямой способ находить значение  $\varphi_{\mathfrak{g}}$  на диаграммах Фейнмана, который для связных диаграмм более удобен, чем исходный.



Идея, как это сделать, становится ясной при анализе соотношений STU (см. раздел 1.4.2), определяющих пространство  $\mathcal{C}$ . А именно, если сопоставить элементы  $e_i, e_j$  концам хорд из диаграмм T и U,

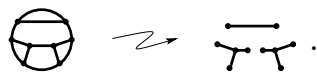
$$\begin{array}{c} e_i^* \quad e_j^* \\ | \quad | \\ \text{T} \quad \text{---} \quad \text{U} \quad \text{---} \quad \text{S} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ e_i \quad e_j \quad e_j \quad e_i \quad [e_i, e_j] \end{array}$$

то естественно будет сопоставить коммутатор  $[e_i, e_j]$  трехвалентной вершине на петле Уилсона диаграммы S.

Вообще говоря, коммутатор  $[e_i, e_j]$  может не быть базисным вектором. Диаграмму, конец которой помечен линейной комбинацией базисных векторов, следует рассматривать как соответствующую линейную комбинацию таких же диаграмм, помеченных в том же месте элементами базиса. По этой причине нам будет удобнее использовать безбазисное описание отображения  $\varphi_{\mathfrak{g}}$ , данное выше. Перейдем к точной конструкции.

Пусть  $C_n$  — диаграмма Фейнмана с начальной точкой и  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  — множество ее внешних вершин, упорядоченное от начальной точки вдоль ориентации петли Уилсона. Мы построим тензор  $T_{\mathfrak{g}}(C) \in \mathfrak{g}^{\otimes m}$ , где  $i$ -й тензорный множитель  $\mathfrak{g}$  соответствует элементу  $v_i$  множества  $V$ . Значение весовой системы  $\varphi_{\mathfrak{g}}$  на диаграмме  $C$  будет образом элемента  $T_{\mathfrak{g}}(C)$  в  $U(\mathfrak{g})$  при естественной проекции.

Чтобы построить тензор  $T_{\mathfrak{g}}(C)$ , рассмотрим внутренний граф диаграммы  $C$  и разрежем посередине все ребра, соединяющие трехвалентные вершины  $C$ . Эта процедура разобьет внутренний граф в объединение элементарных кусков двух видов: хорды и треножники (последние состоят из одной трехвалентной вершины и трех полуребер с заданным циклическим порядком). Вот пример:



Каждому концу хорды или треножника поставим в соответствие экземпляр алгебры  $\mathfrak{g}$ , помеченный этим концом. В духе безбазисной конструкции, изложенной на странице 48, каждой хорде мы сопоставим тензор  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , рассматриваемый как элемент  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , где два экземпляра пространства  $\mathfrak{g}$  маркированы концами рассматриваемой хорды. Аналогично, треножнику мы сопоставим тензор  $-J \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , определяемый следующим образом. Скобка Ли  $[\cdot, \cdot]$  является элементом пространства  $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ . Отождествляя  $\mathfrak{g}^*$  и  $\mathfrak{g}$  посредством нашей невырожденной билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , этот тензор можно перенести в  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , и его образ в этом пространстве мы обозначим

через  $J$ . Порядок трех экземпляров алгебры  $\mathfrak{g}$ , которые здесь участвуют, должен соответствовать циклическому порядку на полурембрах треножника. Легко проверить, что тензор  $J$  кососимметричен по отношению к перестановкам трех тензорных сомножителей, поэтому циклического порядка достаточно для корректности данного определения.

Теперь возьмем тензорное произведение  $\tilde{T}_{\mathfrak{g}}(C)$  всех тензоров, сопоставленных элементарным кускам, с произвольным порядком сомножителей. Это элемент векторного пространства  $\mathfrak{g}^{\otimes(m+2k)}$ , которое содержит по одному экземпляру алгебры  $\mathfrak{g}$  для каждой внешней вершины  $v_i$  диаграммы  $C$  и по два экземпляра  $\mathfrak{g}$  для каждого из  $k$  ребер внутреннего графа, разрезанных пополам. Форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , рассматриваемая теперь как билинейная форма на  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  со значениями в основном поле, индуцирует отображение

$$\mathfrak{g}^{\otimes(m+2k)} \rightarrow \mathfrak{g}^{\otimes m}$$

посредством свертки тензора по всем парам одинаковых меток. Применяя это отображение к тензору  $\tilde{T}_{\mathfrak{g}}(C)$ , мы получим элемент произведения  $\mathfrak{g}^{\otimes m}$ , сомножители которого индексированы вершинами  $v_i$ . Переставив сомножители в соответствии с циклическим порядком вершин на петле Уилсона, мы и получим окончательный результат  $T_{\mathfrak{g}}(C)$ . От циклических перестановок сомножителей он не зависит потому, что когда диаграмма  $C$  — хордовая, последняя конструкция дает тот же результат, что и первоначальная, для хордовых диаграмм этот факт был доказан ранее, а хордовые диаграммы порождают векторное пространство  $\mathcal{C}$ . Из этих же соображений вытекает и тот факт, что построенное отображение является весовой системой на  $\mathcal{C}$ , то есть удовлетворяет соотношениям STU.

*ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что мы сопоставляем тензор  $-J$ , а не  $J$ , каждому треножнику. Это на самом деле не играет большой роли, но отвечает принятому нами соглашению о знаках в соотношении STU.*

Продемонстрируем работу конструкции  $T_{\mathfrak{g}}$  на примере, который пригодится нам в дальнейшем. А именно, мы докажем лемму, связывающую тензор, соответствующий диаграмме «пузыря», с квадратичным элементом Казимира.

*ЛЕММА. Для формы Киллинга  $\langle \cdot, \cdot \rangle^K$  в качестве избранной инвариантной формы тензор  $T_{\mathfrak{g}}$  не меняется при вставке «пузыря» во*

внутреннее ребро диаграммы:

$$T_{\mathfrak{g}}(\text{---}\bigcirc\text{---}) = T_{\mathfrak{g}}(\text{---}\text{---}) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фрагмент фейнмановской диаграммы в левой части получается из двух треножников сверткой двух экземпляров тензора  $-J$ . При этом получится тензор валентности два, который мы запишем в ортонормальном базисе  $\{e_i\}$ :

$$\begin{array}{c} \boxed{e_k \ e_{k'}} \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \\ \boxed{e_j \ e_{j'}} \end{array} \begin{array}{c} e_i \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ e_l \end{array} \rightsquigarrow \sum_{i,l} \sum_{k,j,k',j'} c_{ijk} c_{lk'j'} \langle e_k, e_{k'} \rangle^K \langle e_j, e_{j'} \rangle^K e_i \otimes e_l \\ = \sum_{i,l} \left( \sum_{j,k} c_{ijk} c_{lkj} \right) e_i \otimes e_l ,$$

где  $c_{ijk}$  суть структурные константы:  $J = \sum_{i,j,k=1}^d c_{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k$ .

Чтобы вычислить коэффициент  $\left( \sum_{j,k} c_{ijk} c_{lkj} \right)$ , найдем значение формы Киллинга

$$\langle e_i, e_l \rangle^K = \text{Tr}(\text{ad}_{e_i} \text{ad}_{e_l}) .$$

Поскольку

$$\text{ad}_{e_i}(e_s) = \sum_k c_{isk} e_k \quad \text{и} \quad \text{ad}_{e_l}(e_t) = \sum_k c_{ltk} e_k ,$$

элемент с номером  $(j, r)$  матрицы-произведения  $\text{ad}_{e_i} \text{ad}_{e_l}$  будет  $\sum_k c_{ikj} c_{lrk}$ .

Следовательно,

$$\langle e_i, e_l \rangle^K = \sum_{k,j} c_{ikj} c_{ljk} = \sum_{j,k} c_{ijk} c_{lkj} .$$

Ортогональность базиса  $\{e_i\}$  влечет, что

$$\sum_{j,k} c_{ijk} c_{lkj} = \delta_{i,l} ,$$

а это означает, что тензор в левой части утверждения леммы равен

$$\sum_i e_i \otimes e_i ,$$

что совпадает с элементом Казимира в правой части.

Заметим, что это частное рассуждение моментально обобщается на общий случай.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в этой лемме использовать форму  $\mu\langle \cdot, \cdot \rangle^K$  вместо обычной формы Киллинга, то правило изменится так:

$$T_{\mathfrak{g}}(\text{Wilson loop}) = \frac{1}{\mu} T_{\mathfrak{g}}(\text{straight line}).$$

Наиболее важной для наших приложений является универсальная весовая система для полной матричной алгебры  $\mathfrak{gl}_N$ , к описанию которой мы переходим.

Применим общую процедуру из начала данного раздела к алгебре Ли  $\mathfrak{gl}_N$ , которая рассматривается с невырожденной инвариантной формой, заданной на базисных матрицах (одна единица, остальные нули) правилом  $\langle e_{ij}, e_{kl} \rangle = \delta_{il}\delta_{jk}$ . Отсюда сразу вытекает закон двойственности  $e_{ij}^* = e_{ji}$ . Соответствующая весовая система  $\varphi_{\mathfrak{gl}_N}$  допускает изящное описание при помощи графического исчисления, подобного тому, что придумал Р. Пенроуз [100] еще в 1971 году.

В соответствии с общей процедурой, для построения тензора  $T_{\mathfrak{gl}_N}(C)$  нужно стереть петлю Уилсона диаграммы  $C$ , поместить экземпляр тензора

$$-J = \sum_{i,j,k=1}^N (e_{ij} \otimes e_{jk} \otimes e_{ki} - e_{ij} \otimes e_{ki} \otimes e_{jk})$$

в каждую трехвалентную вершину и провести свертку тензоров вдоль всех ребер. Каждая компонента внутреннего графа, имеющая вид отрезка (то есть хорда), заменяется своим экземпляром билинейной формы, понимаемой как элемент тензорного квадрата  $\sum e_{ij} \otimes e_{ji}$ . Циклический порядок концевых точек при этом запоминается.

Чтобы найти значение  $\varphi_{\mathfrak{gl}_N}(C)$ , нужно взять образ  $T_{\mathfrak{gl}_N}(C)$  в универсальной обертывающей алгебре  $U(\mathfrak{gl}_N)$ ; для этого мы просто стираем символ тензорного произведения в выписанных выражениях:

$$-J = \sum_{i,j,k=1}^N (e_{ij}e_{jk}e_{ki} - e_{ij}e_{ki}e_{jk}).$$

Эта формула имеет следующее графическое изображение:

$$-J = \begin{array}{c} \begin{array}{c} i \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad j \end{array} - \begin{array}{c} j \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \\ \diagup \quad \diagdown \\ k \quad j \end{array} \end{array}$$

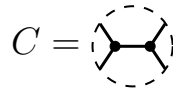
Следует представлять, что каждой паре соседних концов каждой картинки, отмеченных индексами  $i$  и  $j$ , сопоставлен базисный элемент

$e_{ij}$ , если индекс  $i$  написан на линии, направленной наружу, а индекс  $j$  — на линии, направленной внутрь.

Более общим образом, тензоры подобного рода можно графически кодировать следующим образом. Отметим  $k$  пар точек, причем каждая точка соединена с какой-то другой посредством стрелки, и в каждой паре одна стрелка входящая, а другая выходящая. На каждой из  $k$  стрелок написан какой-то индекс, а каждой паре точек приписывается образующая  $e_{ij}$ , где  $i$  — индекс на входящей стрелке, а  $j$  — на выходящей. Тензор, соответствующий такой картинке, получается фиксацией какого-то порядка на множестве пар, взятием произведения  $n$  элементов  $e_{ij}$ , которые соответствуют парам, в выбранном порядке, и суммированием по всевозможным значениям всех индексов (то есть от 1 до  $N$ ).

Вернемся теперь к нашим диаграммам. Для каждой трехвалентной вершины выберем одну из двух элементарных картинок, как наверху (это можно трактовать как «разрешение» трехвалентной вершины в положительном или отрицательном смысле). Свертка вдоль ребер означает склеивание маленьких картинок. Это происходит так. Для каждого ребра, соединяющего две трехвалентные вершины, свертка по билинейной форме всегда дает ноль, кроме того случая, когда  $\langle e_{ij}, e_{ji} \rangle = 1$ . Графически это означает, что нужно соединить концы треножников и написать одну и ту же букву на каждой компоненте связности полученной кривой. Заметим, что ориентации маленьких кусков кривых (происходящие из циклического порядка ребер в вершинах) всегда согласуются друг с другом для любого набора разрешений, так что мы всегда будем получать семейство ориентированных кривых. Далее, мы добавим маленькие отрезки у каждой одновалентной вершины (теперь удвоенной), получая таким образом одну связную ориентированную кривую для каждой связной компоненты внутреннего графа исходной диаграммы. Чтобы превратить такую кривую в элемент универсальной обертывающей алгебры, мы запишем у каждой одновалентной вершины элемент  $e_{ij}$ , индексы которого идут в порядке, согласованном с ориентацией на кривой. Затем мы берем произведение всех таких элементов в соответствии с циклическим порядком на петле Уилсона (при циклических перестановках результат, как мы знаем, не меняется). Затем берется сумма по всем индексам от 1 до  $N$  и, наконец, сумма по всем разрешениям тройных точек.

**Пример.** Вычислим значение  $\varphi_{\mathfrak{gl}_N}$  на диаграмме



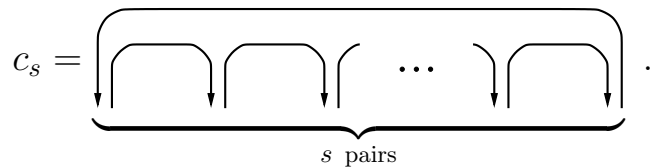
Имеем:

$$\begin{aligned}
 C &\mapsto \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \\
 &\mapsto \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \\
 &\mapsto \sum_{i,j,k,l=1}^N (e_{ij}e_{jk}e_{kl}e_{li} - e_{ij}e_{jk}e_{li}e_{kl} - e_{ij}e_{ki}e_{jl}e_{lk} + e_{ij}e_{ki}e_{lk}e_{jl}) .
 \end{aligned}$$

Как мы знаем, значение  $\varphi_{\mathfrak{gl}_N}$  на любой диаграмме принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{gl}_N)$ , так что оно записывается как многочлен от  $N$  коммутирующих переменных  $c_1, \dots, c_N$  (обобщенные операторы Казимира, см., например, [124]):

$$c_s = \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^N e_{i_1 i_2} e_{i_2 i_3} \dots e_{i_{s-1} i_s} e_{i_s i_1} .$$

В графических обозначениях



В частности, элемент

$$c_1 = \uparrow \downarrow = \sum_{i=1}^N e_{ii}$$

представляет собой единичную матрицу (заметим, что она не является единицей в алгебре  $U(\mathfrak{g})$ ), а элемент

$$c_2 = \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow = \sum_{i,j=1}^N e_{ij} e_{ji}$$

есть квадратичный элемент Казимира.

Удобно включить в список переменных  $c_1, \dots, c_N$  еще переменную  $c_0 = N$ ; ее графическое изображение будет окружностью. Это особенно полезно, если говорить о предельной алгебре  $\mathfrak{gl}_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{gl}_N$ .

Например, первое слагаемое в разложении  $\varphi(C)$  из предыдущего примера — не что иное, как  $c_4$ ; вся альтерированная сумма, после некоторых преобразований, оказывается равной  $c_0^2(c_2 - c_1^2)$ . Выражая значения  $\varphi_{\mathfrak{gl}_N}$  на диаграммах Фейнмана через переменные  $c_i$  составляет, вообще говоря, нетривиальную задачу; гораздо более простая процедура существует для аналога отображения  $\varphi_{\mathfrak{gl}_N}$ , определенного для алгебры диаграмм Якоби, см. раздел 3.4.2.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если получаемая картинка содержит кривые без отмеченных точек (бывших одновалентных вершин), то в соответствующем мономе в  $U(\mathfrak{gl}_N)$  она заменяется на численный множитель. Это происходит оттого, что такая кривая приводит к сумме, в которой один из индексов не фигурирует среди букв  $i_s, j_s$  в произведении вида  $e_{i_1 j_1} \dots e_{i_p j_p}$ , но суммирование по нему все равно необходимо производить.

#### Табличка некоторых значений $\varphi_{\mathfrak{g}}$

Следующая таблица показывает значения весовой системы  $\varphi_{\mathfrak{g}}$  на образующих алгебры диаграмм Фейнмана  $\mathcal{C}$  степени  $\leq 4$ :

$$t_1 = \bigcirc, \quad t_2 = \bigcirc \text{ с одной точкой}, \quad t_3 = \bigcirc \text{ с двумя точками}, \quad t_4 = \bigcirc \text{ с тремя точками}, \quad w_4 = \bigcirc \text{ с четырьмя точками}$$

для простых алгебр Ли  $\mathfrak{g} = A_1, A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, C_3, D_4, G_2$ . Вычисления проделаны А. Каишевым и автором [19, 67].

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$w_4$
$A_1$	$c$	$2c$	$4c$	$8c$	$8c^2$
$A_2$	$c$	$3c$	$9c$	$27c$	$9c^2 + 9c$
$A_3$	$c$	$4c$	$16c$	$64c$	$e$
$A_4$	$c$	$5c$	$25c$	$125c$	$e$
$B_2$	$c$	$3/2c$	$9/4c$	$27/8c$	$d$
$B_3$	$c$	$5/2c$	$25/4c$	$125/8c$	$d$
$C_3$	$c$	$4c$	$16c$	$64c$	$d$
$D_4$	$c$	$3c$	$9c$	$27c$	$3c^2 + 15c$
$G_2$	$c$	$2c$	$4c$	$8c$	$5/2c^2 + 11/3c$

Здесь  $c$  — квадратичный элемент Казимира соответствующей универсальной обертывающей, а  $d$  и  $e$  — следующие по степени независимые образующие центра  $ZU(\mathfrak{g})$  из теоремы Хариш-Чандра. Заметим,

что во всех строках этой таблицы буквы  $d$  и  $e$  обозначают некоторые элементы степени 4, определенные по модулю элементов меньших степеней. Для алгебр серии  $A$  использована инвариантная форма  $\text{tr}(xy)$  в стандартном представлении, для серий  $B, C, D$  — форма  $\frac{1}{2} \text{tr}(xy)$ , а для алгебры  $G_2$  — форма  $\frac{1}{6} \text{tr}(xy)$  в известном представлении  $G_2$  как подалгебры матричной алгебры  $B_3$  (см. [44]). Точные выражения для  $d$  и  $e$  приведены в [67].

Из этой таблицы сразу видно, например, что отображение  $\varphi$  для почти всех простых алгебр Ли имеет нетривиальное ядро. В самом деле, во всех приведенных примерах выполняется равенство  $\varphi_{\mathfrak{g}}(t_1 t_3 - t_2^2) = 0$ .

### 3.4. Ли-алгебраические весовые системы для диаграмм Якоби

Эта конструкция напоминает только что изложенную конструкцию для диаграмм Фейнмана.

Для метризованной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  (см. стр. 46) определяется отображение  $\psi_{\mathfrak{g}} : \mathcal{B} \rightarrow S(\mathfrak{g})$ , определенное на пространстве диаграмм Якоби  $\mathcal{B}$  и принимающее значения в симметрической алгебре векторного пространства  $\mathfrak{g}$  (а на самом деле, в его  $\mathfrak{g}$ -инвариантном подпространстве  $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ ).

Пусть  $D \in \mathcal{B}$  — диаграмма Якоби. Зададим порядок на множестве ее одновалентных вершин; тогда нашу диаграмму можно рассматривать как внутренний граф некоторой диаграммы Фейнмана  $C_D$ . Следуя рецепту параграфа 3.3, построим тензор  $T_{\mathfrak{g}}(C_O) \in \mathfrak{g}^{\otimes m}$ ,  $m$  — число «ног» (одновалентных вершин) диаграммы  $D$ . Теперь  $\psi_{\mathfrak{g}}(O)$  определяется как образ тензора  $T_{\mathfrak{g}}(C_O)$  в пространстве  $S^m(\mathfrak{g})$  при естественной проекции тензорной алгебры  $\mathfrak{g}$  на  $S(\mathfrak{g})$ .

Выбор порядка на множестве ног диаграммы  $D$  не имеет в данном случае значения. В самом деле, это приводит лишь к выбору порядка на тензорных сомножителях пространства  $\mathfrak{g}^{\otimes m}$ , в котором лежит тензор  $T_{\mathfrak{g}}(C_O)$ . Поскольку алгебра  $S(\mathfrak{g})$ , в отличие от  $U(\mathfrak{g})$ , коммутативна, образ  $T_{\mathfrak{g}}(C_O)$  получается всегда одинаковый.

**3.4.1. Формальная теорема PBW.** Соотношение между Ли-алгебраическими весовыми системами для алгебр  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$  выражается следующей теоремой.



**ТЕОРЕМА 3.3.** *Для любой метризованной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{g}}} & S(\mathfrak{g}) \\ \chi \downarrow & & \downarrow \beta_{\mathfrak{g}} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{g}}} & U(\mathfrak{g}) \end{array}$$

*коммукативна.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение теоремы становится очевидным, если вспомнить определения всех объектов, фигурирующих в диаграмме: изоморфизм  $\chi$  между пространствами  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$ , описанный на стр. 20 и состоящий в усреднении по всем способам циклического упорядочения ног диаграммы Якоби, весовых систем  $\varphi_{\mathfrak{g}}$  and  $\psi_{\mathfrak{g}}$ , определенных в параграфах 3.2 и 3.4, и отображения  $\beta_{\mathfrak{g}}$ , изоморфизма Пуанкаре–Биркгоффа–Витта, который переводит элемент симметрической алгебры  $x_1 x_2 \dots x_n$  в среднее арифметическое мономов  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$  по всем перестановкам  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ограничение последнего на ад-инвариантное подпространство  $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$  представляет собой линейный изоморфизм с центром алгебры  $U(\mathfrak{g})$ .  $\square$

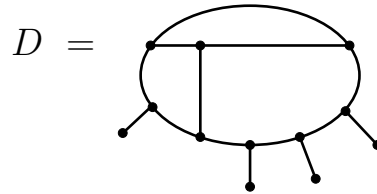
**Пример.** Пусть  $\mathfrak{g}$  — это алгебра Ли  $\mathfrak{so}_3$ . Она обладает базисом  $\{a, b, c\}$ , ортонормальным по отношению к форме Киллинга  $\langle \cdot, \cdot \rangle^K$ , и задается коммутационными соотношениями  $[a, b] = c$ ,  $[b, c] = a$ ,  $[c, a] = b$ . Как метризованная алгебра Ли,  $\mathfrak{so}_3$  изоморфна трехмерному евклидову пространству с векторным произведением в качестве скобки Ли. Тензор, который по нашей конструкции положено вставлять в каждую трехвалентную вершину, таков:

$$\begin{aligned} -J &= -a \wedge b \wedge c \\ &= b \otimes a \otimes c + c \otimes b \otimes a + a \otimes c \otimes b - a \otimes b \otimes c - b \otimes c \otimes a - c \otimes a \otimes b. \end{aligned}$$

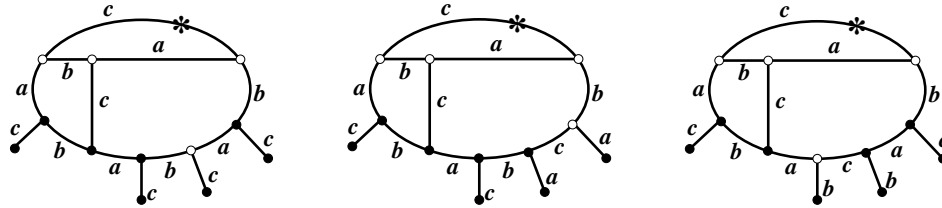
Поскольку базис ортогонален, единственный способ получить ненулевой элемент при свертке вдоль ребер — это выбрать один и тот же элемент на обоих концах одного и того же ребра. С другой стороны, формула для  $-J$  говорит о том, что в каждой вершине можно выбирать только слагаемое с различными базисными элементами на каждом из трех выходящих ребер. Отсюда следует такой алгоритм вычисления тензора  $T_{\mathfrak{so}_3}(O)$  для данной диаграммы  $D$ : нужно перечислить все раскраски ребер графа тремя цветами  $a, b, c$  такие,

что в каждой вершине сходятся три разных цвета, а потом просуммировать тензорные произведения элементов, написанных на одновалентных вершинах, причем каждое такое произведение берется со знаком  $(-1)^s$ , где  $s$  равно числу отрицательных трехвалентных вершин, то есть вершин, где цвета идут в отрицательном порядке:  $a, c, b$  против часовой стрелки (по умолчанию, направление против часовой стрелки есть структурно заданный циклический порядок в вершинах нарисованного на плоскости графа).

Рассмотрим, например, диаграмму



(в остроумной терминологии Оливера Дасбаха [48], это диаграмма *Pont-Neuf* с параметрами  $(1, 3)$ ; мы вернемся к рассмотрению таких диаграмм на стр. 92. У этой диаграммы имеется 18 правильных реберных 3-раскрасок, которые получаются из следующих трех всевозможными перестановками букв  $(a, b, c)$ :



На этих картинках, отрицательные вершины изображены маленькими пустыми кружками. Выписывая тензоры в направлении против часовой стрелки, начиная с отмеченной точки, мы получаем:

$$\begin{aligned}
 & 2(a \otimes a \otimes a \otimes a + b \otimes b \otimes b \otimes b + c \otimes c \otimes c \otimes c) \\
 & + a \otimes b \otimes b \otimes a + a \otimes c \otimes c \otimes a + b \otimes a \otimes a \otimes b \\
 & + b \otimes c \otimes c \otimes b + c \otimes a \otimes a \otimes c + c \otimes b \otimes b \otimes c \\
 & + a \otimes a \otimes b \otimes b + a \otimes a \otimes c \otimes c + b \otimes b \otimes a \otimes a \\
 & + b \otimes b \otimes c \otimes c + c \otimes c \otimes a \otimes a + c \otimes c \otimes b \otimes b.
 \end{aligned}$$

Проекция на симметрическую алгебру дает

$$\psi_{\mathfrak{so}_3}(D) = 2(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Этот пример показывает, что весовая система  $\psi$ , определенная алгеброй Ли  $\mathfrak{so}_3$ , тесно связана с теоремой о 4 красках, о чем подробно написано в [33].

**Пример.** Для произвольной метризованной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  найдем значение  $\psi_{\mathfrak{g}}(w_n)$ , где  $w_n \in \mathcal{B}$  — колесо с  $n$  спицами:

$$w_n := \begin{array}{c} \text{•} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{•} \quad \text{•} \\ \vdots \\ \text{•} \\ \text{\small } n \text{ спиц} \end{array}$$

Будем считать, что число  $n$  четно; в противном случае, по лемме 1.1,  $w_n = 0$ .

Разрежем колесо на  $n$  треножников, свернем полученные 3-валентные тензоры как положено, спроецируем результат на  $S(\mathfrak{g})$  и получим

$$c_{j_1 i_1 j_2} \cdots c_{j_n i_n j_1} \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_n} = \text{Tr}(\text{ad } e_{i_1} \cdots \text{ad } e_{i_n}) \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_n},$$

где  $\{e_i\}$  — произвольный ортонормированный базис  $\mathfrak{g}$  и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

### 3.4.2. Универсальная $\mathfrak{gl}_N$ -весовая система для алгебры $\mathcal{B}$ .

Вычисление весовой системы для диаграмм Якоби со значениями в  $S(\mathfrak{gl}_N)$  производится точно так же, как и для диаграмм Фейнмана; единственная разница состоит в том, что теперь мы рассматриваем переменные  $e_{ij}$  как коммутирующие. Например, диаграмма  $B = \text{•} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{•} \quad \text{•} \end{array} \text{•}$ , которая получается убираанием петли Уилсона у диаграммы  $C$  со стр. 52, переходит в 0 под действием отображения  $\psi_{\mathfrak{gl}_N}$ , ибо все четыре слагаемых соответствующей альтернированной суммы теперь становятся одинаковыми.

Вообще, поскольку нам известно, что инвариантное подпространство  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\mathfrak{gl}_N}$  алгебры  $S(\mathfrak{gl}_N)$  изоморфно центру алгебры  $U(\mathfrak{gl}_N)$ , оно также свободно порождается элементами Казимира  $c_1, \dots, c_N$ . Вот пример, в котором мы, как и выше, пишем  $c_0$  вместо  $N$ :

**Пример.**

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{gl}_N} \left( \begin{array}{c} \square \\ \text{•} \quad \text{•} \\ \text{•} \end{array} \right) &= \begin{array}{c} \square \\ \text{•} \quad \text{•} \\ \text{•} \end{array} - \begin{array}{c} \square \\ \text{•} \quad \text{•} \\ \text{•} \end{array} - \begin{array}{c} \square \\ \text{•} \quad \text{•} \\ \text{•} \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \text{•} \quad \text{•} \\ \text{•} \end{array} \\ &= \square \sqcap \text{•} - \text{•} \sqcap \square - \text{•} \sqcap \square + \square \sqcap \text{•} = 2(c_0 c_2 - c_1^2). \end{aligned}$$

Важным применением данной весовой системы является получение нижних оценок на размерности пространств инвариантов Васильева, см. параграф 4.3.1.

**3.4.3. Инварианты струнных зацеплений и алгебра ожерелий.** Так же, как и в случае обычных узлов (стр. 20), для струнных зацеплений (см. определение на стр. 131) имеются алгебры Фейнмана  $\mathcal{A}(n)$  и алгебры Якоби  $\mathcal{B}(n)$ . Алгебра  $\mathcal{B}(n)$  порождена диаграммами Якоби, у которой одновалентные вершины раскрашены в  $n$  цветов.

*Пространство* крашенных диаграмм Якоби определяется как векторное пространство  $\mathcal{B}(p)$ , формально порожденное всеми  $p$ -цветными диаграммами Якоби и профакторизованное по соотношениям антисимметрии и ИНХ (см. [31, 26]).

Аналогично Теореме 8 в [31] можно доказать, что отображение симметризации  $\chi : \mathcal{B}(p) \rightarrow \mathcal{A}(p)$  является линейным изоморфизмом двух векторных пространств (см. также [82]).

Отображение  $\chi$  определяется так — объясним конструкцию на примере  $p = 2$ . Пусть  $D$  — диаграмма Якоби с  $k$  ‘ногами’ цвета 1 и  $l$  ‘ногами’ цвета 2. Тогда  $\chi(D)$  будет средним по всем  $k!l!$  способам прикрепления ног цвета 1 к первой компоненте носителя и ног цвета два — ко второй, например

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \mapsto \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \vdots \vdots \\ \vdots \vdots \\ \downarrow \downarrow \\ \bullet \bullet \\ \downarrow \downarrow \\ \bullet \bullet \\ \downarrow \downarrow \\ \bullet \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \vdots \vdots \\ \vdots \vdots \\ \downarrow \downarrow \\ \bullet \bullet \\ \downarrow \downarrow \\ \bullet \bullet \\ \downarrow \downarrow \\ \bullet \bullet \end{array} \right)$$

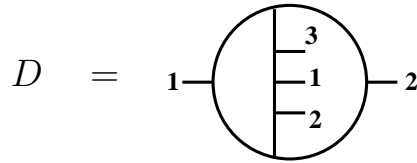
В этом пункте мы опишем весовую систему, обобщающую отображение  $\psi_{\mathfrak{gl}_N} : \mathcal{B} \rightarrow S(\mathfrak{gl}_N)$  до отображения

$$\psi_{\mathfrak{gl}_N}^{(n)} : \mathcal{B}(n) \rightarrow S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes n}.$$

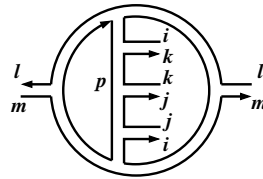
Диаграмма из  $\mathcal{B}(n)$  — это диаграмма Якоби, одновалентные вершины которой помечены числами от 1 до  $n$  (или *покрашены* в  $n$  красок). Векторное пространство, натянутое на такие элементы по модулю соотношений AS и ИНХ и есть то, что мы обозначаем  $\mathcal{B}(n)$ . Операция усреднения  $\chi_n : \mathcal{B}(n) \rightarrow \mathcal{A}(n)$ , определяемая аналогично простейшему случаю  $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  (см. раздел 1.4.4), является линейным изоморфизмом (см. [34]).

Взяв крашеную диаграмму Якоби, рассмотрим положительные и отрицательные разрешения всех ее  $t$  трехвалентных вершин, мы получим альтернированную сумму  $2^t$  картинок как на странице 54, только с цветами, приписанными одновалентным вершинам. Для каждого разрешения, пометим связные компоненты разными переменными  $i, j$  и т.д., затем добавим маленькие дужки вблизи одновалентных вершин и получим набор ориентированных замкнутых кривых. Каждой маленькой дужке, которая раньше была парой одновалентных вершин, соответствует пара индексов, допустим  $i$  и  $j$ . Впишем элемент  $e_{ij}$  в тензорный сомножитель степени  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes n}$ , номер которого равен номеру (цвету) данной одновалентной вершины., а индексы  $i$  и  $j$  следуют в порядке, предписанном ориентацией кривой. Теперь возьмем сумму по всем индексам от 1 до  $N$ .

Приведем для пущей ясности конкретный пример. Рассмотрим цветную диаграмму



(как обычно, предполагается циклический порядок ребер у каждой трехвалентной вершины против часовой стрелки). Разрешая все трехвалентные вершины положительным образом, получим набор направленных кривых:

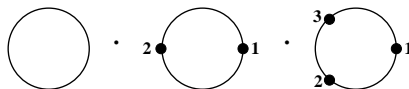


который, согласно описанной выше процедуре, после заклеивания промежутков в одновалентных вершинах, переписывается как следующий элемент тензорной степени  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes 3}$ :

$$\sum_{i,j,k,l,m,p=1}^N e_{lm}e_{jk} \otimes e_{ml}e_{ij} \otimes e_{ki} = N \cdot \sum_{i,j,k=1}^N e_{jk} \otimes e_{ij} \otimes e_{ki} \cdot \sum_{l,m=1}^N e_{lm} \otimes e_{ml} \otimes 1.$$

Мы видим, что всё выражение есть произведение трех элементов, соответствующих трем связным компонентам полученной кривой. В частности, множитель  $N$  отвечает окружности без вершин на ней и может быть при желании записан более однообразным способом как  $\sum_{n=1}^N 1 \otimes 1 \otimes 1$ .

Поскольку выбор обозначений для индексов суммирования не играет никакой роли, полученную формулу можно схематически записать как произведение трех *ожерелий*:



Вообще,  $n$ -цветное ожерелье — это расположение нескольких *бусин*, то есть точек, пронумерованных числами между 1 и  $n$ , вдоль ориентированной окружности (по умолчанию, выбирается ориентация против часовой стрелки).

Ожерелье можно единственным образом обозначить какой-то буквой, скажем  $x$ , с мультииндексом, состоящим из номеров бусинок и выбранном лексикографически наименьшим среди всех циклических сдвигов. Всякое  $n$ -цветное ожерелье соответствует элементу тензорной степени пространства  $S(\mathfrak{gl}_N)$  по следующему правилу. Пометим

каждую дугу на окружности между двумя бусинами особой целочисленной переменной  $i, j$  и т.д. Каждой бусине сопоставим базисный элемент  $e_{ij}$ , если  $i$  написано на входящей дуге, а  $j$  на выходящей. Затем составим элемент тензорное произведения из всех этих  $e_{ij}$ , ставя каждое в тот множитель тензорной степени  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes n}$ , номер которого равен цвету данной бусины, и возьмем сумму по всем целочисленным переменным, независимо пробегающим участок от 1 до  $N$ .

Примеры (для  $n = 3$ ):

$$\begin{aligned}
 x_{123} &:= \begin{array}{c} \bullet 2 \\ \circlearrowleft \\ \bullet 3 \end{array} \begin{array}{c} \bullet 1 \\ \circlearrowleft \\ \bullet 1 \end{array} \mapsto \sum_{i,j,k=1}^N e_{ij} \otimes e_{jk} \otimes e_{ki} \\
 x_{132} &:= \begin{array}{c} \bullet 3 \\ \circlearrowleft \\ \bullet 2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet 1 \\ \circlearrowleft \\ \bullet 1 \end{array} \mapsto \sum_{i,j,k=1}^N e_{jk} \otimes e_{ij} \otimes e_{ki} \\
 x_{12123} &:= \begin{array}{c} \bullet 1 \\ \circlearrowleft \\ \bullet 2 \\ \bullet 2 \\ \bullet 3 \end{array} \begin{array}{c} \bullet 2 \\ \circlearrowleft \\ \bullet 1 \\ \bullet 1 \\ \bullet 3 \end{array} \mapsto \sum_{i,j,k,l,m=1}^N e_{ij}e_{kl} \otimes e_{jk}e_{lm} \otimes e_{mi}
 \end{aligned}$$

(Все окружности ориентированы против часовой стрелки.)

Мы будем называть такие элементы пространства  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes n}$  *жемчужными*. По теореме С. Донкина [49],  $\mathfrak{gl}_N$ -инвариантное подпространство алгебры  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes n}$  порождается жемчужными элементами, причем между этими образующими могут существовать алгебраические соотношения при малых  $N$ , но они исчезают при  $N \rightarrow \infty$ , так что инвариантное подпространство прямого предела  $S(\mathfrak{gl}_\infty)^{\otimes n}$  изоморфно свободной полиномиальной алгебре, порожденной  $n$ -цветными ожерельями.

Подводя итог, сформулируем алгоритм нахождения образа крашеной диаграммы Якоби в пространстве  $S(\mathfrak{gl}_\infty)^{\otimes n}$  сразу в терминах ожерелий. Возьмем альтернированную сумму по всем разрешениям тройных точек. Для каждого разрешения представим полученную картинку как набор ориентированных замкнутых кривых, расположим на них на них бусины соответствующего цвета  $(1, \dots, n)$  в тех местах, где были одновалентные вершины, и получим произведение ожерелий. Например:

$$\begin{array}{c} \leftarrow 1 \\ \circlearrowleft \\ \rightarrow 2 \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow 3 \\ \circlearrowleft \\ \rightarrow 2 \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow 1 \\ \circlearrowleft \\ \rightarrow 1 \end{array} \mapsto x x_{12} x_{132}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно дать прямое доказательство, вообще не используя алгебр Ли, того факта, что отображение  $\psi$  в алгебру ожерелий задает весовую систему, т.е. удовлетворяет соотношениям AS и IHX (в работе [48] это сделано для случая  $n = 1$ ).

### 3.5. Клейновы весовые системы

В этом параграфе, следуя [16], мы вводим семейство весовых систем, в известной степени двойственное семейству Ли-алгебраических весовых систем. Главная компонента нашей конструкции — косая функция трех переменных  $F(x, y, z)$ , удовлетворяющая следующему уравнению (мы называем его *уравнением Клейна*):  $F(x, y, z)F(u, v, z) - F(x, u, z)F(y, v, z) + F(x, v, z)F(y, u, z) = 0$ , являющемуся аналогом тождества Якоби для структурного тензора алгебры Ли. Мы показываем, что аналитические клейновы функции, по существу, ведут к весовым системам, эквивалентным классической весовой системе, связанной с алгеброй Ли  $\mathfrak{sl}_2$ . Неаналитические клейновы функции существуют, но, используя их, нам не удалось ни построить новых независимых весовых функций, ни доказать, что их нет. В качестве побочного продукта этой деятельности, мы изучаем аналог уравнения Клейна от многих переменных и доказываем, в аналитическом случае, критерий разложимости кососимметрических функций любого числа переменных.

**3.5.1. Весовые системы.** Здесь мы даем краткое напоминание того, что такое весовые системы. Подробнее см. в разделе 3.4.

Пусть  $V_n$  — пространство инвариантов Васильева для оснащенных ориентированных узлов степени не выше  $n$  (обратите на небольшое отступление от предыдущих обозначений). По фундаментальной теореме Васильева–Концевича,

$$V_n/V_{n-1} \cong \mathcal{B}_n^*,$$

где  $\mathcal{B}_n^*$ , пространство *весовых систем степени  $n$* , определяется как пространство, двойственное пространству диаграмм Якоби

$$\mathcal{B}_n = \frac{\langle \text{диаграммы степени } n \rangle}{\langle \text{соотношения AS и IHX} \rangle}.$$

Выше (параграф 3.4) мы подробно описывали известную конструкцию Концевича весовой системы со значениями в универсальной обертывающей алгебре метризованной алгебры Ли.

**3.5.2. Полином Матиясевича.** Это конструкция, введенная в [14], возникла у автора при изучении текста Ю. В. Матиясевича [122].

Пусть  $\mu : E(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  — некоторая нумерация множества всех ребер диаграммы  $D$ . (Вообще говоря, правильнее говорить о *полуребрах*, но мы будем говорить только о диаграммах Якоби без петель.) Сопоставим независимые переменные  $x_i, i = 1, \dots, m$ , ребрам в соответствии с нумерацией, а каждой вершине  $v \in V(D)$ , сопоставим полином

$$(8) \quad (v_1 - v_2)(v_2 - v_3)(v_3 - v_1),$$

где  $v_1, v_2, v_3$  — переменные, стоящие на ребрах, инцидентных  $v$ , взятые в порядке, предписанном заданным в вершине  $v$  вращением. Положим

$$\mathbf{M}^\mu(D) = \prod_{v \in V(D)} (v_1 - v_2)(v_2 - v_3)(v_3 - v_1).$$

Это *нумерованный* полином Матиясевича. Чтобы получить инвариантный объект, симметризуем  $\mathbf{M}^\mu(D)$  по всем нумерациям  $\mu$ , то есть по всем перестановкам букв  $x_1, \dots, x_m$ :

$$(9) \quad \mathbf{M}(D) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(m)} \prod_{v \in V(D)} (\sigma(v_1) - \sigma(v_2))(\sigma(v_2) - \sigma(v_3))(\sigma(v_3) - \sigma(v_1)).$$

**ТЕОРЕМА 3.4.** *Полином Матиясевича  $\mathbf{M} : \mathcal{B}_n \rightarrow \text{SQ}[x_1, \dots, x_m]$  есть весовая система на пространстве  $\mathcal{B}_n$  со значениями в пространстве симметрических многочленов от  $m$  переменных.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Соотношение AS, равно как и вообще корректность определения  $\mathbf{M}$ , вытекает из того, что выражение (8) полностью антисимметрично по отношению к перестановкам  $v_1, v_2$  и  $v_3$ . Соотношение ИХ является следствием следующего замечательного полиномиального тождества:

$$(10) \quad (a - b)(c - d) + (b - c)(a - d) + (c - a)(b - d) = 0.$$

□

**ЗАМЕЧАНИЕ.** *Множество всех вершин диаграммы Якоби есть объединение двух несвязных частей:  $E(D) = E_i(D) \cup E_o(D)$ , где  $E_i(D)$  есть множество всех внутренних ребер, соединяющих между собой трехвалентные вершины, а  $E_o(D)$  — множество внешних вершин, один из концов которых одновалентен. В конструкции полинома Матиясевича (см. (9)), вместо симметризации по*



всем перестановкам ребер, можно провести частичную симметризацию, а именно, по подгруппе, которая переставляет внутренние ребра отдельно, а внешние отдельно. Таким образом мы приходим к понятию модифицированного полинома Матиясевича  $\widetilde{\mathbf{M}}(D)$ . Модифицированный полином также удовлетворяет соотношениям AS и IHX — последний факт следует из того, что соотношения IHX никогда не переставляют между собой внутренние и внешние ребра. Заметим, что  $\widetilde{\mathbf{M}}(D)$ , вообще говоря, — более сильный инвариант, чем  $\mathbf{M}(D)$ , поскольку  $\mathbf{M}(D)$  является образом  $\widetilde{\mathbf{M}}(D)$  при кольцевом гомоморфизме.

Аналогия с весовой системой, построенной по  $so(3)$ . В целом весовая система для 3-графов строится из некоторого объекта, кососимметричного по трем переменным. Как в случае алгебры  $so(3)$ , так и в случае конструкции, восходящей к Матиясевичу, мы сопоставляем некоторый элемент тензорного куба  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  каждой трехвалентной вершине графа, причем этот элемент должен быть кососимметричен по отношению к некоторому действию группы перестановок на трех элементах. Но в обоих случаях используются разные действия, а именно:

- В случае  $so(3)$ , пространство  $\mathbb{R}^3$  отождествляется с  $so(3)$ , и группа  $\mathcal{S}_3$  действует в

$$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

перестановками трех сомножителей тензорного произведения.

- В случае Матиясевича, каждое  $\mathbb{R}^3$  есть линейная оболочка трех базисных векторов, а группа переставляет эти векторы одинаковым образом в каждом сомножителе.

**3.5.3. Клейновы весовые системы.** Мы хотим обобщить конструкцию весовой системы Матиясевича из раздела 3.5.2, используя произвольную функцию  $F(v_1, v_2, v_3)$  вместо полинома (8).

Какие ограничение следует наложить на функцию  $F$ , чтобы результат конструкции был весовой функцией?

Для выполнения условия AS функция  $F$  должна быть кососимметричной:

$$(11) \quad F(x, y, z) = F(y, z, x) = -F(y, x, z).$$

Соотношение IHX равносильно следующему тождеству:

$$(12) \quad F(x, y, z)F(u, v, z) - F(x, u, z)F(y, v, z) + F(x, v, z)F(y, u, z) = 0,$$

который мы называем *уравнением Клейна*.

**ТЕОРЕМА 3.5.** *Всякая функция  $F$  трех переменных, удовлетворяющая соотношениям (11) и (12), порождает весовую систему  $K_F$  (симметризация по полной группе перестановок ребер диаграммы) и весовую систему  $\tilde{K}_F$  (симметризация по подгруппе, сохраняющей разделение ребер на внутренние и внешние).*

**ПРИМЕР.** *Для любых функций одной переменной  $f, g, h$  определитель*

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) \end{vmatrix}$$

*есть клейнова функция. В частности, выбор  $f(x) = 1, g(x) = x, h(x) = x^2$  дает в точности симметризованный полином Матиясевича, рассмотренный выше.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Функция трех переменных, представляемая в виде определителя, будет называться разложимой.*

Оказывается, что в аналитическом случае функции, удовлетворяющие соотношениям (11) и (12), задаются в точности определителями описанного выше вида. Доказательство этой теоремы (в обобщенном виде) см. в следующем разделе.

**Замечание.** Предположение аналитичности существенно. Существуют неаналитические функции, удовлетворяющие уравнениям (11) и (12), но неразложимые. Простым примером может служить функция

$$F(x, y, z) = E_{1,2,3} + E_{4,5,6},$$

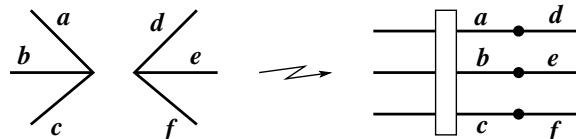
где  $E_{a,b,c}$  обозначает кососимметрическую функцию, равную 1 в точке  $(a, b, c)$ , равную  $\pm 1$  в точках, получаемых из этой перестановками координат, и 0 во всех прочих местах.

Первоначальный интерес для нас представляла попытка построить весовую систему, позволяющую различать ориентацию узлов, то есть такую, которая принимала бы ненулевое значение на какой-то диаграмме Якоби с нечетным числом одновалентных вершин, см. стр. 20. Дело в том, что для инвариантов Васильева в целом этот вопрос открыт, для полиномиальных инвариантов закрыт, а вопрос о том, можно ли клейновы весовые системы свести к полиномиальным,

неясен. В настоящее время (июнь 2011 года) на интернет-сайте Д.Бар-Натана [37] на эту тему ведутся оживленные дискуссии, и есть надежда, что какая-то ясность наступит, скорее всего в отрицательную сторону, то есть похоже, что разложимые клейновы весовые системы отвечают инвариантам, не различающим ориентацию. Что касается неразложимых клейновых систем, ситуация еще менее ясная; сейчас проводится серия компьютерных экспериментов в попытке обнаружить ненулевое значение какой-либо такой системы на какой-нибудь диаграмме с нечетным числом ног.

Опишу последние новости, касающиеся разложимых клейновых функций. Сначала немного переформулируем конструкцию. Пусть у диаграммы  $k$  внутренних и  $l$  внешних ребер. Рассмотрим фиксированный набор 3-мерных векторов  $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l$  и все взаимнооднозначные отображения первого набора на множество внутренних ребер, а второго набора – на множество внешних ребер. В каждой трехвалентной вершине вычислим смешанное произведение трех векторов (тот же определитель), всё перемножим и усредним по взаимнооднозначным отображениям. Легко понять, что результат получится тот же самый, что и при применении клейновой весовой системы согласно исходной конструкции. (Точнее, получится ее значение на конкретном наборе переменных, но поскольку набор этот произвольный, то в целом результат тот же.)

Теперь оказывается, что любую пару трехвалентных вершин можно некоторым образом «упростить». А именно, перемножив два определителя, выражающих смешанные произведения в вершинах, мы получим определитель Грама шести векторов — альтернированную сумму шести слагаемых, каждое из которых есть произведение трех скалярных произведений векторов, записанных по обе стороны точки согласно следующему рисунку:

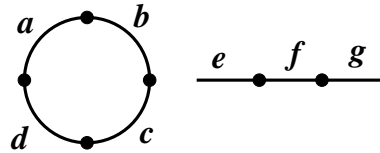


Три линии, проходящие через общий узкий прямоугольник, есть графическое обозначение для альтернированной суммы

$$(a \cdot d)(b \cdot e)(c \cdot f) + (a \cdot e)(b \cdot f)(c \cdot d) + (a \cdot f)(b \cdot d)(c \cdot e) - (a \cdot e)(b \cdot d)(c \cdot f) - (a \cdot f)(b \cdot e)(c \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot f)(c \cdot e),$$

где точка означает скалярное произведение арифметических векторов.

Допустим, наша диаграмма Якоби имеет четное число трехвалентных (или, что то же самое, одновалентных) вершин. Тогда все 3-валентные вершины можно разбить на пары, к каждой применить описанный выше трюк, и тогда значение весовой системы на такой диаграмме развалится в альтернированную сумму  $6^n$  слагаемых в виде окружностей и отрезков, разбитых на ребра. Для каждого такого элемента нужно взять произведение последовательных скалярных произведений векторов, написанных на ребрах, перемножить, потом перемножить по всем компонентам связности и не забыть взять среднее по всем расстановкам векторов на ребрах. Получится нечто сложное, но обозримое. Типичное слагаемое имеет вид



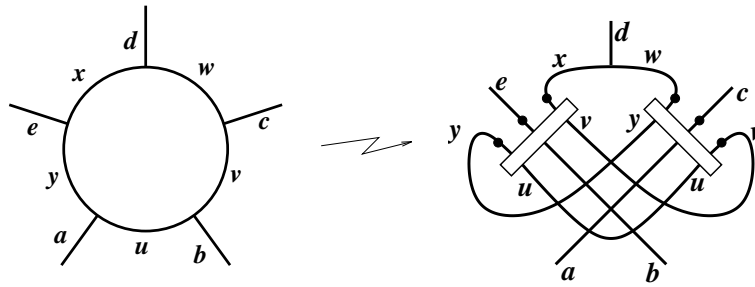
и интерпретируется как усреднение по перестановкам букв (векторов) такого произведения

$$(a \cdot b)(b \cdot c)(c \cdot d)(d \cdot a)(e \cdot f)(f \cdot g)$$

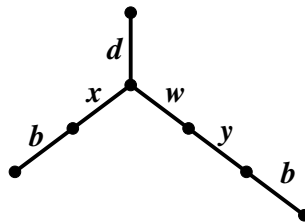
Казалось бы, из этих соображений должно легко выводиться, что клейнова весовая система на диаграмме с нечетным числом ног должна принимать нулевое значение. При применении предыдущего подхода, после разбиения трехвалентных вершин на пары остается одна непарная. Она может входить либо в цикл, либо в треножник. В случае цикла легко доказать, что соответствующий элемент после усреднения даст ноль в силу соотношения антисимметрии (структурного в алгебре диаграмм Якоби). Однако, треножники могут быть и ненулевыми. Другое дело, что они, по-видимому, будут входить в общую сумму сокращающимися парами, но этого пока никто доказывать не умеет.

Мы сейчас приведем один пример. Возьмем колесо с 5 спицами (равное нулю в пространстве  $\mathcal{B}$  в силу соотношений AS) и спарим в нем указанным выше методом вершины, к которым прилегают ребра

$a, c$  и  $b, e$ . Получится:



Одно из слагаемых, которое возникает при разложении последней картинке согласно описанному выше правилу, такое:



Оказывается (и это доказано в [36] посредством компьютерного вычисления), что этот элемент отличен от нуля в алгебре, порожденной помеченными диаграммами Якоби по модулю соотношений, вытекающих из тождества Клейна (12). В данном примере к этому элементу можно найти парный, с которым он сократится, но можно ли сделать это в общем случае, неизвестно.

**3.5.4. Клейновы функции и алгебры Ли.** Есть простой способ построить алгебру Ли по данной клейновой функции  $F$ : если за структурные константы взять набор  $c_{ij}^k = F(a_i, a_j, a_k)$ , где  $a_i$  — фиксированные вещественные числа, то аксиомы (11) и (12) превращаются в косокоммутативность и тождество Якоби.

В случае, когда функция  $F$  есть полином:

$$F(x, y, z) = \sum_{i,j,k} p_{ij}^k x^i y^j z^k,$$

можно найти более естественную связь между клейновыми функциями и алгебрами Ли. В самом деле, уравнения (11) и (12) переписываются как тождества на коэффициенты:

$$p_{ij}^k = p_{jk}^i = -p_{ji}^k,$$

$$\sum_{k+n=\text{const}} (p_{ij}^k p_{lm}^n - p_{il}^k p_{jm}^n + p_{im}^k p_{jl}^n) = 0.$$

Эти уравнения сильно напоминают определяющие свойства структурных констант алгебр Ли:

$$c_{ij}^k = c_{jk}^i = -c_{ji}^k,$$

$$\sum_k (c_{ij}^k c_{lm}^k - c_{il}^k c_{jm}^k + c_{im}^k c_{jl}^k) = 0.$$

Вообще говоря, первая система соотношений непосредственно не влечет за собой вторую, так что простое присваивание  $c_{ij}^k := p_{ji}^k$  не дает еще конструкции алгебры Ли, начиная с произвольного клейнова многочлена. Чувствуется, однако, что какая-то естественная конструкция здесь существует, но ее нужно найти. Тогда появится класс алгебр Ли, который естественно было бы назвать (*клеяновы алгебры Ли*).

Ну, а самый важный вопрос, который остается открытым: возможно ли построить клейнову весовую систему, независимую от весовых систем, происходящих из алгебр Ли, и при помощи таковой, например, научиться различать ориентацию узла.

### 3.6. Разложимые кососимметрические функции

Кососимметрическая функция  $F$  нескольких переменных называется разложимой, если она представима в виде определителя  $\det(f_i(x_j))$ , где каждая из  $f_i$  — функция своей одной переменной. В разделе 3.5, в связи с изучением клейновых весовых систем для инвариантов Васильева, был доказан критерий разложимости аналитических функций трех переменных. Здесь мы обобщаем этот результат на случай функций любого конечного числа переменных.

**3.6.1. Введение.** Я предлагаю здесь формулировку и решение простой проблемы, которая выглядит естественно и старомодно, но не была в должное время рассмотрена классиками, такими как Лагранж, Кэли или Сильвестр. По крайней мере, я, лично пролистав собрания сочинений упомянутых корифеев науки, не нашел в них ничего подобного; и рецензент моей статьи [6], где эти результаты были опубликованы, не смог дать никаких релевантных ссылок.

Надо признать, что 3-членное соотношение (15), рассматриваемое в этой статье, весьма напоминает по форме классическое соотношение Плюккера

$$(13) \quad a_{kl}a_{mn} - a_{km}a_{ln} + a_{kn}a_{lm} = 0,$$

дающее критерий разложимости бивектора  $w = \sum_{ij} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V$ , то есть представимости его как произведения  $w = v_1 \wedge v_2$ . (Т. Мюир в [93] прослеживает историю соотношения Пюккера вплоть до работы Фонтена (Fontaine) 1748 года, где оно появляется в процессе исключения переменных в системах линейных уравнений.)

Точно так же, можно заметить, что наше  $k$ -членное соотношение (17) является аналогом высших соотношений Пюккера (или *квадратичных  $p$ -соотношений*, как они называются в [63], том 1, гл. VII, разд. 6), которые необходимы и достаточны для разложимости поливектора

$$(14) \quad \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}.$$

(На геометрическом языке это называется «пюккерово вложение грассманиана в проективное пространство», см. [54]).

Пюккеро-соотношения встречаются в разных областях математики, например, в обобщении Сильвестром интерполяционной формулы Лагранжа [109] и в теории представлений симметрической и линейной групп [121, 53].

Коэффициенты поливектора  $w \in \Lambda^p V$  составляют кососимметрическую функцию  $p$  переменных на конечном множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Непонятно, однако, каким образом можно вывести нашу теорему об аналитических функциях из аналогичной теоремы о дискретных функциях. Еще один аспект проблемы, отсутствующий в существующей литературе, это тот факт, что в (аналитическом случае) квадратичные  $p$ -соотношения вытекают из 3-членных соотношений типа Пюккера (см. ниже лемму 3.1).

**3.6.2. Проблема и теорема.** Мы формулируем проблему в простейшей постановке, для вещественных функций на пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Легко видеть, что основной результат буквально обобщается на комплексный случай, а также на вещественные или комплексные функции нескольких переменных, принимающих значения в неприводимых вещественных или комплексных аналитических многообразиях.

**Определение.** Функция  $n$  переменных  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется *кососимметрической*, если она меняет знак при любой транспозиции (и, значит, при любой нечетной перестановке) своих аргументов:

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Легко построить кососимметрическую функцию  $n$  переменных из  $n$  произвольных функций одной переменной  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , составив определитель

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Мы будем называть такие кососимметрические функции *разложимыми*. Естественно возникает проблема: дать внутреннее описание класса разложимых кососимметрических функций, в терминах некоторого тождества, наложенного на изучаемую функцию.

**ТЕОРЕМА 3.6.** *Аналитическая кососимметрическая функция  $F$  переменных  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 2$ , является разложимой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству*

$$(15) \quad \begin{aligned} &F(x_1, x_2, \dots)F(x_3, x_4, \dots) - F(x_1, x_3, \dots)F(x_2, x_4, \dots) \\ &+ F(x_1, x_4, \dots)F(x_2, x_3, \dots) = 0, \end{aligned}$$

где точки означают набор  $(n - 2)$  переменных, одинаковый во всех шести случаях.

**3.6.3. Доказательство теоремы.** Теорема состоит из двух частей: легкой (необходимость) и трудной (достаточность).

### Доказательство необходимости

Нужно проверить тождество

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{41} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{41} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Геометрически это означает, что

$$\begin{aligned} &V(v_1, v_2, w)V(v_3, v_4, w) - V(v_1, v_3, w)V(v_2, v_4, w) \\ &+ V(v_1, v_4, w)V(v_2, v_3, w) = 0, \end{aligned}$$

где  $v_i$  есть вектор  $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ , буква  $w$  обозначает набор из  $n - 2$  векторов, стоящих в строках с третьей до последней в каждой матрице, а  $V$  обозначает евклидов объем. Выберем двумерную плоскость



$P$  в  $\mathbb{R}^n$ , ортогональную подпространству  $W$ , натянутому на  $w$ . Объемы не изменятся, если мы заменим все векторы  $v_i$  их ортогональными проекциями  $v'_i$  на  $P$  параллельно подпространству  $W$ . Тогда  $V(v_i, v_j, w) = V(v'_i, v'_j)V(w)$ , и утверждение сводится к двумерному тождеству

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0,$$

которое проверяется прямой выкладкой.

### **$k$ -членные соотношения**

Мы будем называть уравнение 15 *трехчленным соотношением*. Идея доказательства состоит в том, что 3-членные соотношения на кососимметрическую функцию  $n$  переменных влекут за собой  $k$ -членные соотношения для любого  $k \leq n + 1$  (лемма 3.1), а  $(n + 1)$ -членные соотношения немедленно приводят к полной разложимости (лемма 3.2).

Начнем с примера. Четырехчленное соотношение — это уравнение вида

$$(16) \quad \begin{aligned} & F(x_1, x_2, x_3, \dots)F(x_4, x_5, x_6, \dots) \\ & - F(x_1, x_2, x_4, \dots)F(x_3, x_5, x_6, \dots) \\ & + F(x_1, x_2, x_5, \dots)F(x_3, x_4, x_6, \dots) \\ & - F(x_1, x_2, x_6, \dots)F(x_3, x_4, x_5, \dots) = 0 \end{aligned}$$

где точки обозначают один и тот же набор переменных, если  $n > 3$ . Ниже мы будем использовать сокращенную форму записи уравнений такого сорта, а именно, будем писать  $[i_1, \dots, i_k]$  вместо  $F(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, \dots)$ . В этих обозначениях уравнение 16 выглядит так:

$$[1, 2, 3] \cdot [4, 5, 6] - [1, 2, 4] \cdot [3, 5, 6] + [1, 2, 5] \cdot [3, 4, 6] - [1, 2, 6] \cdot [3, 4, 5] = 0.$$

Ввиду косой коммутативности, это можно переписать следующим образом:

$$[1, 2, 3] \cdot [4, 5, 6] = [1, 2, 4] \cdot [3, 5, 6] + [1, 2, 5] \cdot [4, 3, 6] + [1, 2, 6] \cdot [4, 5, 3].$$

Заметим, что три слагаемых в правой части равенства получаются из выражения в левой части всеми возможными транспозициями числа 3 с числами внутри второй пары скобок.

В общем виде, под  $(k + 1)$ -членным соотношением на функцию  $n \geq k$  переменных мы понимаем такое тождество (в сокращенных

обозначениях):

$$\sum_{i=k}^{2k} (-1)^i [1, \dots, k-1, i] \cdot [k, k+1, \dots, \widehat{i}, \dots, 2k] = 0$$

или, что то же самое,

$$(17) \quad [1, \dots, k] \cdot [k+1, \dots, 2k] = \sum_{i=k+1}^{2k} S_k^i [1, \dots, k] \cdot S_i^k [k+1, \dots, 2k],$$

где  $S_i^j$  обозначает подстановку  $j$  вместо  $i$  в последовательности чисел. Подразумевается, что набор  $1, 2, \dots, 2k$  в этих соотношениях можно заменить на любой другой набор из  $2k$  различных чисел. Выбор конкретного разложения типа (17) зависит от выбора *прыгунка*, то есть того числа, которое меняется местами с различными числами из другой пары скобок. В уравнении 17, роль прыгунка играет число  $k$ , и можно переписать это уравнение таким образом:

$$[1, \dots, k] \cdot [k+1, \dots, 2k] = R_k(1, \dots, k; k+1, \dots, 2k),$$

В общем случае, предположим, что множества  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  и  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$  имеют  $s < k$  общих элементов и число  $m$  принадлежит ровно одному из этих множеств. Положим

$$R_m(I; J) = \begin{cases} \sum_{j \in J \setminus I} S_m^j [I] \cdot S_j^m [J], & \text{if } m \in I, \\ \sum_{i \in I \setminus J} S_i^m [I] \cdot S_m^i [J], & \text{if } m \in J. \end{cases}$$

Тогда равенство

$$(18) \quad [i_1, \dots, i_k] \cdot [j_1, \dots, j_k] = R_m(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k),$$

есть общая форма записи  $(k - s + 1)$ -членного соотношения.

### Доказательство достаточности

Доказательство того, что 3-членные соотношения влекут за собой  $k$ -членные соотношения при  $k > 3$ , будем вести индукцией по  $k$ .

**ЛЕММА 3.1.** *Если  $F$  — кососимметричная функция от  $n \geq k$  переменных, удовлетворяющая  $s$ -членным соотношениям для всех  $s \leq k$ , то  $F$  удовлетворяет и  $(k+1)$ -членным соотношениям.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Начнем с двух примеров.

**Пример 1:** Как вывести 4-членные соотношения из 3-членных?

Умножим левую часть уравнения 16 на  $[1, 3, 5]$ :

$$\begin{aligned} & [1, 3, 5] \cdot [1, 2, 3] \cdot [4, 5, 6] - [1, 3, 5] \cdot [1, 2, 4] \cdot [3, 5, 6] \\ & + [1, 3, 5] \cdot [1, 2, 5] \cdot [3, 4, 6] - [1, 3, 5] \cdot [1, 2, 6] \cdot [3, 4, 5]. \end{aligned}$$

В силу 3-членных соотношений,

$$\begin{aligned} [1, 3, 5] \cdot [1, 2, 3] \cdot [4, 5, 6] &= [1, 2, 3]([1, 4, 5] \cdot [3, 5, 6] + [1, 6, 5] \cdot [4, 5, 3]) \\ [1, 3, 5] \cdot [1, 2, 4] \cdot [3, 5, 6] &= [3, 5, 6]([1, 4, 5] \cdot [1, 2, 3] + [1, 3, 4] \cdot [1, 2, 5]) \\ [1, 3, 5] \cdot [1, 2, 5] \cdot [3, 4, 6] &= [1, 2, 5]([1, 3, 4] \cdot [3, 5, 6] + [1, 3, 6] \cdot [3, 4, 5]) \\ [1, 3, 5] \cdot [1, 2, 6] \cdot [3, 4, 5] &= [3, 4, 5]([1, 6, 5] \cdot [1, 2, 3] + [1, 3, 6] \cdot [1, 2, 5]), \end{aligned}$$

и альтернированная сумма правых частей, очевидно, равна нулю.

**Пример 2:** Как вывести 5-членные соотношения из 3-членных и 4-членных?

В сокращенной нотации, 5-членное соотношение гласит, что комбинация

$$\begin{aligned} & [1, 2, 3, 4] \cdot [5, 6, 7, 8] - [1, 2, 3, 5] \cdot [4, 6, 7, 8] + [1, 2, 3, 6] \cdot [4, 5, 7, 8] \\ & - [1, 2, 3, 7] \cdot [4, 5, 6, 8] + [1, 2, 3, 8] \cdot [4, 5, 6, 7] \end{aligned}$$

равна 0. Умножим эту комбинацию на  $[1, 3, 5, 7]$ , а затем выразим каждое слагаемое поочередно через 3- или 4-членное соотношение, используя в качестве прыгунка последовательно числа 4, 5, 6, 7, 8:

$$\begin{aligned} & [1, 3, 5, 7] \cdot [1, 2, 3, 4] \cdot [5, 6, 7, 8] \\ &= [5, 6, 7, 8]([1, 3, 4, 7] \cdot [1, 2, 3, 5] + [1, 3, 5, 4] \cdot [1, 2, 3, 7]); \\ & [1, 3, 5, 7] \cdot [1, 2, 3, 5] \cdot [4, 6, 7, 8] \\ &= [1, 2, 3, 5]([1, 3, 4, 7] \cdot [5, 6, 7, 8] + [1, 3, 6, 7] \cdot [4, 5, 7, 8] \\ &+ [1, 3, 8, 7] \cdot [4, 6, 7, 5]); \\ & [1, 3, 5, 7] \cdot [1, 2, 3, 6] \cdot [4, 5, 7, 8] \\ &= [4, 5, 7, 8]([1, 3, 5, 2] \cdot [1, 7, 3, 6] + [1, 3, 5, 6] \cdot [1, 2, 3, 7]); \\ & [1, 3, 5, 7] \cdot [1, 2, 3, 7] \cdot [4, 5, 6, 8] \\ &= [1, 2, 3, 7]([1, 3, 5, 4] \cdot [7, 5, 6, 8] + [1, 3, 5, 6] \cdot [4, 5, 7, 8] \\ &+ [1, 3, 5, 8] \cdot [4, 5, 6, 7]); \\ & [1, 3, 5, 7] \cdot [1, 2, 3, 8] \cdot [4, 5, 6, 7] \\ &= [4, 5, 6, 7]([1, 3, 8, 7] \cdot [1, 2, 3, 5] + [1, 3, 5, 8] \cdot [1, 2, 3, 7]). \end{aligned}$$

Легко видеть, что правые части этих уравнений, взятые с чередующимися знаками, дают в сумме 0.

В общем виде нам необходимо доказать соотношение

$$\sum_{i=k}^{2k} (-1)^i [1, \dots, k-1, i] \cdot [k, k+1, \dots, \widehat{i}, \dots, 2k] = 0,$$

предполагая, что данная функция удовлетворяет  $s$ -членным соотношениям для всех  $s \leq k$ . Умножим левую часть этого уравнения на  $[1, 3, \dots, 2k-1]$  и покажем, что результат будет нулевым. В сумме всех членов с нечетным  $i$  мы ставим множитель  $[1, \dots, k-1, i]$  налево и выражаем произведение двух остальных скобок, пользуясь подходящим  $s$ -членным соотношением (в форме уравнения 18), используя  $i$  как прыгунок:

$$\sum_{\text{odd } i \in [k, 2k]} [1, \dots, k-1, i] \cdot R_i(1, 3, \dots, 2k-1; k, k+1, \dots, \widehat{i}, \dots, 2k).$$

В слагаемых с четным номером  $i$  мы выделяем множитель  $[k, k+1, \dots, \widehat{i}, \dots, 2k]$ , а произведение двух остальных выражаем через  $s$ -членное соотношение, также используя  $i$  как прыгунок:

$$\sum_{\text{четн } i \in [k, 2k]} [k, k+1, \dots, \widehat{i}, \dots, 2k] \cdot R_i(1, 3, \dots, 2k-1; 1, \dots, k-1, i).$$

(Значение  $s$  определяется числом совпадающих элементов в двух группах индексов длины  $k$  в аргументе  $R_i$ ; оно зависит от четности  $k$  и равно  $k/2 + 1$  при четном  $k$  и  $(k+1)/2$  или  $(k+3)/2$  при нечетном.) Теперь не требуется больших усилий, чтобы понять, что обе суммы состоят на самом деле из одних и тех же членов, только некоторые последовательности отличаются друг от друга циклической перестановкой нечетной длины (и тем самым равны между собой ввиду косой симметрии). Следовательно, альтернированная сумма есть 0. Разделив полученное выражение на  $[1, 3, \dots, 2k-1]$  (что возможно в силу аналитичности), мы и получим требуемый результат.  $\square$

**ЛЕММА 3.2.** *Если  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — аналитическая кососимметрическая функция  $n$  переменных, удовлетворяющая  $(n+1)$ -членным соотношениям, то  $F$  разложима, то есть выражается через  $n$  функций одной переменной как определитель  $\det(f_i(x_j))$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $p_i^j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n-1$  — некоторый набор чисел. Полагая

$$f_i(x) = F(p_i^1, \dots, p_i^{n-1}, x).$$

для  $i = 1, \dots, n$ , мы получаем  $n$  функций одной переменной. Докажем, что числа  $p_i^j$  можно подобрать так, что будет иметь место тождество

$$F(x_1, \dots, x_n) = c \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

для подходящей константы  $c \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим матрицу размера  $(n+1) \times (n+1)$

$$M = \begin{pmatrix} F(x_1, \dots, x_n) & -F(x_0, x_2, \dots, x_n) & \dots & (-1)^n F(x_0, \dots, x_{n-1}) \\ f_1(x_0) & f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_0) & f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

В силу  $(n+1)$ -членных соотношений, первая строка этой матрицы ортогональна всем остальным. Вскоре мы убедимся, что при правильном подборе чисел  $p_i^j$  для общих значений переменных  $x_i$  строки со 2-й до  $(n+1)$ -й будут составлять матрицу ранга  $n$ ; следовательно, их векторное произведение должно быть пропорционально первой строке матрицы:

$$F(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) = c \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

A priori,  $c$  может зависеть от  $x_0, \dots, x_n$ . Однако выписанное выше соотношение с данным  $i$  означает, что  $c$  не может зависеть от  $x_i$ . Поскольку  $i$  принимает все значения от 0 до  $n$ , мы заключаем, что  $c \in \mathbb{R}$  есть константа. Заметим, наконец, что множитель  $c$  можно превратить в единицу, используя две операции: замену знака (которая достигается, например, транспозицией  $f_1$  и  $f_2$ ) и умножение на  $\lambda^n$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$  (что получается заменой  $f_1 \mapsto \lambda f_1$ ).

Осталось проверить ранее заявленное утверждение о том, что строки матрицы  $M$  со второй по  $(n+1)$ -ю можно считать линейно независимыми в  $\mathbb{R}^n$ . Это утверждение достаточно очевидно из соображений общего положения, поэтому мы проиллюстрируем его только в частном случае  $n = 4$ . Мы утверждаем, что самый левый

минор размера  $4 \times 4$  в строках 2–5:

$$\begin{vmatrix} F(p_1^1, p_1^2, p_1^3, x_1) & F(p_1^1, p_1^2, p_1^3, x_2) & F(p_1^1, p_1^2, p_1^3, x_3) & F(p_1^1, p_1^2, p_1^3, x_4) \\ F(p_2^1, p_2^2, p_2^3, x_1) & F(p_2^1, p_2^2, p_2^3, x_2) & F(p_2^1, p_2^2, p_2^3, x_3) & F(p_2^1, p_2^2, p_2^3, x_4) \\ F(p_3^1, p_3^2, p_3^3, x_1) & F(p_3^1, p_3^2, p_3^3, x_2) & F(p_3^1, p_3^2, p_3^3, x_3) & F(p_3^1, p_3^2, p_3^3, x_4) \\ F(p_4^1, p_4^2, p_4^3, x_1) & F(p_4^1, p_4^2, p_4^3, x_2) & F(p_4^1, p_4^2, p_4^3, x_3) & F(p_4^1, p_4^2, p_4^3, x_4) \end{vmatrix}$$

может вполне считаться ненулевым. В самом деле, полагая

$$x_1 = p_4^1 = p_3^2 = p_2^3,$$

$$x_2 = p_4^2 = p_3^3,$$

$$x_3 = p_4^3,$$

мы делаем матрицу треугольной, и ее определитель будет равен выражению

$$F(p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_2^3)F(p_2^1, p_2^2, p_2^3, p_3^3)F(p_3^1, p_3^2, p_3^3, p_4^3)F(p_2^3, p_3^3, p_4^3, x_4),$$

которое не может быть тождественно равно нулю в силу аналитичности.

Это завершает доказательство леммы и, тем самым, теоремы.  $\square$

## Оценки размерностей пространств инвариантов

### 4.1. Оценка сверху для размерности пространств хордовых диаграмм

**4.1.1. Постановка задачи и формулировка теоремы.** В этом разделе мы излагаем результат, полученный в совместной статье С.Чмутова и автора 1994 года [1], а именно:

$$(19) \quad d_n := \dim V_n/V_{n-1} \leq (n-1)!$$

Это неравенство значительно усиливает очевидную априорную оценку  $d_n < (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ , представляющую собой полное число способов провести  $n$  хорд в окружности (учитывая вращения окружности, это число можно уменьшить примерно в  $n$  раз, но наша оценка все равно лучше). Неравенство (19) было впоследствии усилено разными авторами, но на момент публикации оно являлось мировым рекордом.

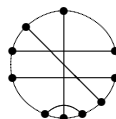
Пусть, как и выше,  $\mathcal{A}_n$  — пространство хордовых диаграмм порядка  $n$ , то есть векторное пространство, порожденное всеми диаграммами из  $n$  хорд по модулю одночленных и четырехчленных соотношений (см. стр. 14). Как мы знаем, имеет место неравенство

$$d_n \leq \dim \mathcal{A}_n,$$

так что для получения верхней оценки на числа  $d_n$  достаточно получить таковую на размерности пространств  $\mathcal{A}_n$ .

**Определение.** Назовем хордовую диаграмму *хребтовой*, если в ней есть хорда, пересекающая все остальные хорды данной диаграммы.

Например,



есть хребтовая диаграмма порядка 5.

*Замечание.* Мы понимаем пересечение хорд в чисто комбинаторном смысле: хорда, соединяющая точки  $a_1$  и  $a_2$ , *пересекает* хорду,

соединяющую  $b_1$  и  $b_2$ , если и только если при обходе окружности точки  $a_1, a_2$  перемежаются точками  $b_1, b_2$ .

**ТЕОРЕМА 4.1.** *Классы эквивалентности хребтовых диаграмм по модулю одно- и четырехчленных соотношений порождают  $\mathcal{A}_n$  как векторное пространство.*

Из этой теоремы немедленно вытекает искомая оценка, поскольку хребтовая диаграмма однозначно определяется взаимно-однозначным соответствием  $(n-1)$  точки с одной стороны от хребта и  $(n-1)$  точки с другой стороны и, следовательно, их общее число не превосходит  $(n-1)!$

#### 4.1.2. Доказательство теоремы.

Теорема будет доказана нисходящей индукцией по *валентности* диаграммы.

*Определение.* Пусть  $D$  — хордовая диаграмма. *Валентность*  $\text{val}(c)$  хорды  $c \in D$  — это число хорд в  $D$ , которые пересекают  $c$ . *Валентность*  $\text{val}(D)$  хордовой диаграммы есть максимум валентностей ее хорд:

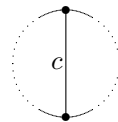
$$\text{val}(D) = \max_{c \in D} \text{val}(c).$$

**База индукции.** Если  $\text{val}(D) = n-1$ , то  $D$  является хребтовой диаграммой.

*Индукционное предположение.* Допустим, что всякая диаграмма  $D$  валентности выше  $d$  равна линейной комбинации хребтовых диаграмм по модулю 1- и 4-членных соотношений.

*Шаг индукции.* Нужно показать, что диаграмма валентности  $d$  выражается в виде линейной комбинации диаграмм бóльших степеней.

Пусть  $D$  — диаграмма валентности  $\text{val}(D) = d$  и  $c \in D$  — такая хорда, что  $\text{val}(c) = d$ . Изобразим эту хорду вертикально:

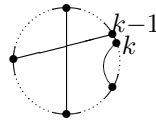


Поскольку  $d < n-1$  и мы имеем право повернуть всю диаграмму на  $180^\circ$ , можно предполагать, что в правой части диаграммы есть две точки, соединенные хордой.

**3.4.1** Занумеруем концы хорд, находящихся с правой стороны, сверху вниз. Пусть  $k$  — минимальный номер точки, соединенной хордой с какой-то точкой левой части. Мы сведем задачу к случаю, когда  $k = 1$ .



Если  $k \neq 1$ , то диаграмма  $D$  выглядит как-то так:



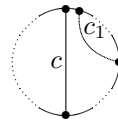
Применяя 4-членное соотношение, мы получаем:

$$D = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}$$

Степени последних двух диаграмм в этом соотношении больше  $d$ , поэтому, по предположению индукции, они эквивалентны линейным комбинациям хордовых диаграмм. Поэтому

$$D = \text{Diagram 1} \sim \text{Diagram 2}$$

Продолжая таким образом, мы придем к диаграмме с  $k = 1$ , так что без ограничения общности можно предположить, что  $D$  имеет форму



Теперь мы хотим сдвинуть вниз второй конец хорды  $c_1$  (то есть увеличить его порядковый номер). Мы сделаем это индукцией по следующему параметру.

**Определение.** Нижний конец хорды, которая пересекает  $c_1$ , но не пересекает  $c$ , будет называться *связанным*. Точка, лежащая на нижней дуге между  $c$  и  $c_1$  и не являющаяся связанной, будет именоваться *свободной*.

Пусть  $l$  — число свободных точек в хордовой диаграмме, а  $b$  — число связанных точек между нижним концом хорды  $c_1$  и первой свободной точкой. Будем называть пару  $(l, b)$  *индексом* хордовой диаграммы и использовать его как индукционный параметр по отношению к лексикографическому порядку:  $(l_1, b_1) > (l_2, b_2)$  тогда и только тогда, когда либо  $l_1 > l_2$ , либо  $l_1 = l_2$  и  $b_1 > b_2$ .

*База индукции I.* Если обе компоненты индекса нулевые,  $(l, b) = (0, 0)$ , то диаграмма  $D$  имеет вид

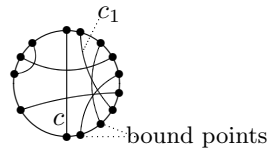
$$D = \text{Diagram 1}$$

По 4-членному соотношению, эту диаграмму можно представить так:й

$$D = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3}$$

и степени обеих диаграмм в правой части больше  $d$ .

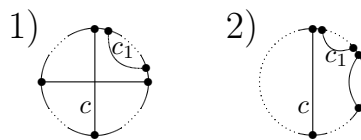
*База индукции II.* Допустим, что  $l = 0$ , но  $b \neq 0$ . Тогда диаграмма выглядит примерно так:



Здесь всякая хорда, пересекающая  $c$ , также пересекает  $c_1$ , значит, степень такой диаграммы больше  $d$ .

*Предположение индукции.* Предположим, что всякая диаграмма  $D$ , индекс которой меньше, чем  $(l, b)$ , эквивалентна линейной комбинации диаграмм, степени которых больше  $d$ .

*Шаг индукции I.* Пусть  $D$  — диаграмма индекса  $(l, b)$ , где  $b = 0$ . Точка, соседняя с нижним концом хорды  $c_1$ , свободна, и есть две возможности для соответствующей хорды:



В первом случае, по 4-членному соотношению и по предположению индукции

$$D = \text{Diagram 4} \sim \text{Diagram 5}$$

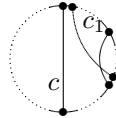
где последняя диаграмма выглядит как  $D$ , но имеет на единицу меньше свободных точек.

Второй случай тоже несложен, поскольку 4-членное соотношение влечет:

$$D = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}$$

Каждая из трех диаграмм в правой части имеет меньше, чем  $l$ , свободных точек.

*Шаг индукции II.* Теперь мы предположим, что диаграмма  $D$  имеет индекс  $(l, b)$ , где  $b > 0$ , так что она имеет такой типичный вид:



(точка, ближайшая к нижнему концу хорды  $c_1$  связана). Нам нужно выразить  $D$  по модулю 4-членных соотношений, через диаграммы, имеющих либо бóльшую степень, либо индекс, лексикографически меньший, чем  $(l, b)$ .

Применяя 4-членное соотношение, мы получаем:

$$D = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}$$

Индексы двух последних диаграмм в правой части равны  $(l, b - 1)$ . Обозначим первую диаграмму справа через  $D'$ . Имеем:

$$D' = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}$$

Здесь степени последних двух диаграмм в правой части больше, чем  $d$ . Первая диаграмма в правой части похожа на  $D$ , только ее первая связанная точка сдвинулась вниз, так что значение параметра  $b$  уменьшилось.

Это завершает доказательство теоремы.  $\square$

## 4.2. Нижняя оценка на основе весовых систем, определяемых графом пересечений

В этом параграфе мы докажем результат, впервые полученный в нашей совместной статье [13]. Здесь мы доказываем этот результат несколько упрощенным и более ясным способом.

**ТЕОРЕМА 4.2.** *Для каждого  $n \geq 1$  в пространстве  $\mathcal{A}_n$  есть хотя бы один ненулевой примитивный элемент. Отсюда, по теореме Харди–Рамануджана, следует асимптотическая нижняя оценка на  $\dim \mathcal{A}_n$  с главным членом вида  $\exp(\pi\sqrt{2n/3})$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В самом деле, по структурной теореме алгебр Хопфа [89], каждое пространство  $\mathcal{A}_n$  есть прямая сумма примитивного и разложимого подпространств:  $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n \oplus R_n$ , где  $R_n$  порождено произведениями элементов положительной степени. Рассмотрим хордовую диаграмму  $K_n$  степени  $n$  с полным графом пересечений (все хорды пересекаются между собой). Его хроматический многочлен равен  $t! = t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-n+1)$  и имеет ненулевой коэффициент при первой степени  $t$ . Пусть  $P_n$  — проекция  $K_n$  на примитивное подпространство вдоль подпространства разложимых. Тогда  $P_n = K_n \pm r_1 \pm \dots \pm r_k$ , где  $r_i$  — разложимые диаграммы. У каждой диаграммы  $r_i$  коэффициент в хроматическом многочлене при  $t$  равен нулю. Поэтому у диаграммы  $P_n$  он отличен от нуля и, тем самым, эта диаграмма ненулевая.  $\square$

### 4.3. Нижняя оценка на основе весовых систем, строящихся по алгебрам Ли

Мировые рекорды асимптотических нижних оценок на размерность примитивного пространства  $\mathcal{P}_n$  следовали в следующем порядке:

- (1) (1994)  $\dim \mathcal{P}_n \geq 1$  («лесные элементы» Чмутова, Дужина и Ландо [13]).
- (2) (1995)  $\dim \mathcal{P}_n \geq \lfloor n/2 \rfloor$  (из крашеного полинома Джонса — см. работы Мелвина–Мортонна [87] Чмутова–Варченко [47]).
- (3) (1996)  $\dim \mathcal{P}_n \gtrsim n^2/96$  (Дужин [14]).
- (4) (1997)  $\dim \mathcal{P}_n \gtrsim n^{\log n}$ , то есть рост быстрее любого полинома (Чмутов–Дужин [3]).
- (5) (1997)  $\dim \mathcal{P}_n > e^{\pi\sqrt{n/3}}$  (М.Концевич, частное сообщение).
- (6) (1997)  $\dim \mathcal{P}_n > e^{c\sqrt{n}}$  для любой константы  $c < \pi\sqrt{2/3}$  (Dasbach [48]).

Любопытно отметить, что последняя оценка на размерность  $\mathcal{P}_n$  практически такая же, что и оценка на размерность  $\mathcal{A}_n$ , вытекающая из исторически первой оценки  $\dim \mathcal{P}_n \geq 1$  по формуле Харди–Рамануджана. Вообще, всякая оценка размерности примитивного

пространства  $p_n = \dim \mathcal{P}_n$  влечет за собой некую оценку на размерности градуированных компонент всей алгебры  $a_n = \dim \mathcal{A}_n$ . В частности, рекордная оценка дает следующее.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.** *Имеет место асимптотическое неравенство:  $a_n \gtrsim e^{n/\log_b n}$  для любой константы  $b < \pi^2/6$ .*

**НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.** Выберем базис в каждом пространстве  $\mathcal{P}_k$ , предположим, что  $n = kt$  и рассмотрим элементы  $\mathcal{A}_n$ , являющиеся произведениями  $t$  базисных элементов  $\mathcal{P}_k$ . Находя максимум этого числа по  $k$  при фиксированном  $n$ , мы получим заявленную нижнюю оценку.  $\square$

Заметим, что наилучшие известные асимптотические оценки сверху и снизу на размерности  $\mathcal{A}_n$  весьма далеки друг от друга. В самом деле, используя соотношений между производящими функциями

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)^{-p_k} = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k|n} p_k \right) t^n,$$

можно доказать (см. [108]), что любая субэкспоненциальная нижняя оценка на  $p_n$  приводит только к субэкспоненциальной оценке на  $a_n$ , тогда как имеющаяся верхняя оценка (см. стр. 16) по существу факториальна.

**4.3.1. Доказательство нижней оценки.** Мы приведем доказательство нижней оценки, данное С.Чмутовым и автором в [3], а затем объясним, каким образом О.Дасбаху [48], удалось улучшить оценку и установить рекорд, который держится до сих пор (2011).

Идея доказательства проста: мы строим большое семейство диаграмм Якоби, линейная независимость которых в алгебре  $\mathcal{B}$  следует из линейной независимости значений на этих диаграммах некоторого полиномиального инварианта  $P$ , который получается упрощением универсальной весовой системы со значениями в центре  $U(\mathfrak{gl}_N)$ .

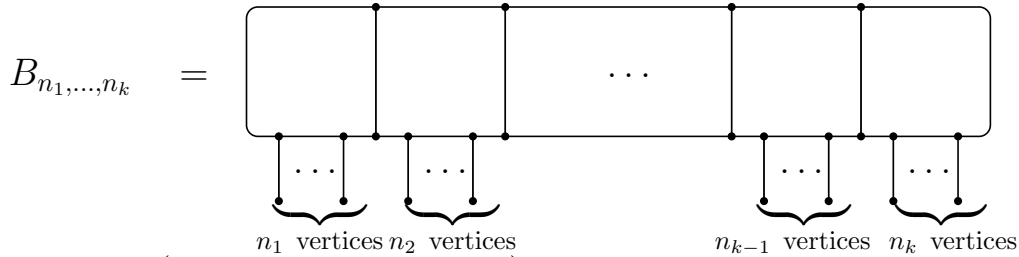
Как мы знаем из раздела 3.3, значение  $\mathfrak{gl}_N$ -инварианта  $\psi_{\mathfrak{gl}_N}$  на диаграмме Якоби есть многочлен от обобщенных элементов Казимира  $x_0, x_1, \dots, x_N$ . Этот многочлен однороден в смысле градуировки, определенной правилом  $\deg x_m = m$ . Однако, вообще говоря, он неоднороден, если все буквы  $x_m$  рассматриваются как переменные степени 1.

**Определение.** Полиномиальная весовая система  $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_N]$  есть старшая часть многочлена  $\psi_{\mathfrak{gl}_N}$ , если все переменные рассматриваются со степенью 1.

Например, если для некоторой диаграммы  $C$  мы имеем  $\psi_{\mathfrak{gl}_N}(C) = x_0^2 x_2 - x_1^2$ , то для нее  $P(C) = x_0^2 x_2$ .

Сейчас мы определим семейство диаграмм Якоби, для которого впоследствии мы докажем линейную независимость.

**Определение.** *Багет-диаграмма*  $B_{n_1, \dots, n_k}$  — это диаграмма вида



У нее всего  $2(n_1 + \dots + n_k + k - 1)$  вершин, из которых  $n_1 + \dots + n_k$  одновалентных.

Чтобы записать формулу для значения  $P(B_{n_1, \dots, n_k})$ , нам потребуются некоторые определения.

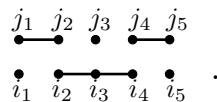
**Определение.** Рассмотрим  $k$  пар точек, расставленных в два горизонтальных ряда:  $\cdot \cdot \dots \cdot$ . Выберем одно из  $2^{k-1}$  подмножеств множества  $\{1, \dots, k-1\}$ . Если число  $s$  принадлежит выбранному подмножеству, мы соединим горизонтальной чертой точки номер  $s$  и  $(s+1)$  в нижнем ряду, в противном случае соединим точно так же точки в верхнем ряду. Комбинаторный объект такого рода мы будем называть *двухстрочной схемой* порядка  $k$ .

**Пример.** Вот схема, соответствующая значению  $k = 5$  и подмножеству  $\{2, 3\}$ :



Число компонент связности в схеме порядка  $k$  равно  $k + 1$ .

**Определение.** Пусть  $\sigma$  — двухстрочная схема;  $i_1, \dots, i_k$  — неотрицательные числа:  $0 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq i_k \leq n_k$ . Сопоставим число  $i_s$  нижней точке  $s$ -й пары схемы  $\sigma$ , а число  $j_s = n_s - i_s$  — верхней точке той же пары. Например:



Тогда *моном, соответствующий*  $\sigma$ , есть  $x_{\sigma_0} x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_k}$  где  $\sigma_t$  — сумма чисел, сопоставленных всем вершинам, входящим в связную компоненту номер  $t$ .

**Пример.** Для схемы, изображенной выше, мы получим моном

$$x_{i_1} x_{j_1+j_2} x_{i_2+i_3+i_4} x_{j_3} x_{j_4+j_5} x_{i_5} \cdot$$

Теперь формулу для  $P$  можно сформулировать следующим образом.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.** *Если  $N > n_1 + \dots + n_k$ , то*

$$P_{gl_N}(B_{n_1, \dots, n_k}) = \sum_{i_1, \dots, i_k} (-1)^{j_1 + \dots + j_k} \binom{n_1}{i_1} \dots \binom{n_k}{i_k} \sum_{\sigma} x_{\sigma_0} x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_k},$$

где внешняя сумма распространяется на все наборы целых чисел  $i_1, \dots, i_k$  такие что  $0 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq i_k \leq n_k$ ; внутреннее суммирование проводится по всевозможным  $2^{k-1}$  схемам,  $j_s = n_s - i_s$ , и  $x_{\sigma_0} x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_k}$  есть моном, ассоциированный со схемой  $\sigma$  и целыми числами  $i_1, \dots, i_k$ .

### Примеры.

(1) Для багет-диаграммы  $B_2$  мы имеем  $k = 1$ ,  $n_1 = 2$ . Есть ровно одна схема, соответствующая пустому множеству:  $\cdot$ . Соответствующий моном есть  $x_{i_1} x_{j_1}$ , и мы получаем:

$$\begin{aligned} P_{gl_N}(B_2) &= \sum_{i_1=0}^2 (-1)^{j_1} \binom{2}{i_1} x_{i_1} x_{j_1} \\ &= x_0 x_2 - 2x_1 x_1 + x_2 x_0 = 2(x_0 x_2 - x_1^2) \end{aligned}$$

в полном соответствии с примером, приведенным выше (глава 3, стр. 59).

(2) Для диаграммы  $B_{1,1}$  мы имеем  $k = 2$ ,  $n_1 = n_2 = 1$ . Есть две схемы:  $\overleftarrow{\cdot}$  and  $\overrightarrow{\cdot}$ . Соответствующие мономы равны  $x_{i_1} x_{i_2} x_{j_1+j_2}$  и  $x_{i_1+i_2} x_{j_1} x_{j_2}$ . Находим значения  $P$ :

$$\begin{aligned} P_{gl_N}(B_{1,1}) &= \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 (-1)^{j_1+j_2} x_{i_1} x_{i_2} x_{j_1+j_2} + \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 (-1)^{j_1+j_2} x_{i_1+i_2} x_{j_1} x_{j_2} \\ &= x_0 x_0 x_2 - x_0 x_1 x_1 - x_1 x_0 x_1 + x_1 x_1 x_0 + x_0 x_1 x_1 - x_1 x_0 x_1 - x_1 x_1 x_0 + x_2 x_0 x_0 \\ &= 2(x_0^2 x_2 - x_0 x_1^2) \end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.2.** Диаграмма  $B_{n_1, \dots, n_k}$  имеет  $k$  частей, разделенных  $k - 1$  перегородкой. Каждая перегородка (или «стена») представляет собой ребро, соединяющее две трехвалентные вершины, которые мы будем называть *стенными вершинами*. Остальные трехвалентные вершины (смежные с одновалентными) мы будем называть *ножными вершинами*.

Доказательство состоит из трех частей.

Напомним (см. раздел 3.4), что для вычисления универсальной  $\mathfrak{gl}_N$ -весовой системы на данной диаграмме Якоби мы можем использовать графическую процедуру «разрешения» трехвалентных вершин и приписывания определенного тензора каждому разрешению, см. пункты 3.3 и 3.4.2. На первом шаге мы изучаем результат разрешения стенных вершин. Мы доказываем, что моном, полученный разрешениями этих вершин, может иметь максимальную степень только в том случае, если оба конца каждой стены разрешаются одинаково. Знаки разрешений связаны с определенными выше двухстрочными схемами следующим образом. Если мы выбираем положительные разрешения обоих концов стенки номер  $s$ , то мы соединяем нижние точки  $s$ -й и  $(s + 1)$ -й пар в схеме. Если берутся отрицательные разрешения, то, наоборот, следует соединять верхние точки.

На втором шаге мы изучаем эффект от разрешения «ножных» вершин. Мы показываем, что результат зависит лишь от числа вершин в каждой части, разрешенных положительно или отрицательно, и не зависит от того, какие именно вершины в данной части были разрешены положительно или отрицательно. Обозначим через  $i_s$  число положительных разрешений ножных вершин в части  $s$ . Это даст биномиальный коэффициент  $\binom{n_s}{i_s}$  в формуле Предложения 4.2. Суммарное число  $j_1 + \dots + j_k$  отрицательных разрешений ножных вершин дает знак  $(-1)^{j_1 + \dots + j_k}$ .

Первые два шага доказательства позволяют рассматривать только такие случаи, в которых разрешения  $i_s$  ножных вершин, находящихся в части  $s$  слева, положительны, разрешения остальных  $j_s$  ножных вершин в той же части отрицательны, а оба разрешения парных стенных вершин имеют одинаковый знак. На третьем шаге мы доказываем, что такие разрешения приводят в точности к мономам, ассоциированным с соответствующими схемами в соответствии с их определением (см. стр. 86).

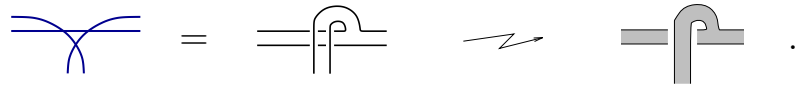
Мы прокомментируем подробнее только первый шаг доказательства, так как это именно то место, где Оливер Дасбах [48] смог найти улучшение оригинального рассуждения статьи [3].

Выберем некоторые разрешения всех трехвалентных вершин багет-диаграммы  $B_{n_1, \dots, n_k}$ . Обозначим полученную картинку из  $n = n_1 + \dots + n_k$  пар точек и  $n$  стрелок (см. стр. 52) через  $T$ . После подходящей перестановки пар диаграмма  $T$  будет выглядеть как несвязное объединение графических образующих  $x_m$ . Следовательно, она задает моном от переменных  $x_m$ , который мы обозначим через  $t(T)$ .

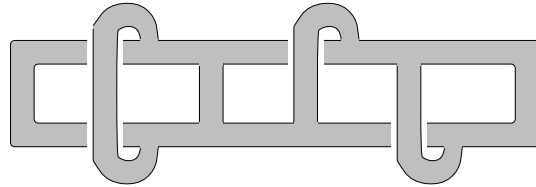


Замкнем все стрелки полученной диаграммы, соединив парные точки маленькими отрезками. Мы получим набор замкнутых кривых, которые можно изобразить на плоскости так, чтобы они имели по три точки попарного пересечения в окрестности каждой вершины, разрешенной отрицательно, и не имели других пересечений. Каждая переменная  $x_m$  дает в точности одну такую кривую, так что степень монома  $m(T)$  равна числу этих замкнутых кривых.

Рассмотрим ориентированную поверхность  $S$  в  $\mathbb{R}^3$ , граница которой совпадает с полученным набором кривых (поверхность Зейферта). Вот как она строится в окрестности отрицательного разрешения:



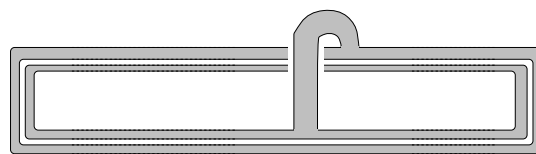
Степень монома  $m(T)$  равна числу компонент края  $b$  поверхности  $S$ . Вся поверхность  $S$  состоит из кольца, отвечающего большому циклу в диаграмме  $B_{n_1, \dots, n_k}$ , и  $k - 1$  лент, отвечающих «стенкам». Например:



Здесь у двух стенок слева разрешения обеих концевых точек одинаковые, а у стенок справа — разные. Разрешения «ножных» вершин не влияют на топологию поверхности  $S$ .

Эйлерову характеристику  $\chi$  поверхности  $S$  легко сосчитать. Поверхность  $S$  стягивается к окружности с  $k - 1$  перемычкой, так что  $\chi = -k + 1$ . С другой стороны  $\chi = 2 - 2g - b$ , где  $g$  и  $b$  — род и число компонент края поверхности  $S$ . Следовательно,  $b = k + 1 - 2g$ . Таким образом, степень монома  $m(T)$ , равная  $b$ , достигает своего наибольшего значения  $k + 1$ , когда род поверхности  $S$  равен 0.

Мы утверждаем, что если найдется стенка, концы которой разрешены в противоположном смысле, то род поверхности  $S$  не может быть нулем. Действительно, в этом случае легко провести на  $S$  замкнутую кривую, которая не делит ее на части (независимо от всех остальных разрешений):



Мы убедились в том, что вклад в полином  $P(B_{n_1, \dots, n_k})$  состоит в точности из мономов, происходящих из разрешений парных стенных вершин в одинаковом смысле.

В приведенном доказательстве опущены некоторые подробности, которые можно найти в оригинальной публикации [3].  $\square$

Из Предложения 4.2 легко теперь вывести главный результат этого параграфа.

**ТЕОРЕМА 4.3.** Пусть  $n = n_1 + \dots + n_k$  and  $d = n + k - 1$ . Багет-диаграммы  $\{B_{n_1, \dots, n_k}\}$  линейно независимы в пространстве  $\mathcal{B}$ , если числа  $n_1, \dots, n_k$  все четные и удовлетворяют следующим условиям:

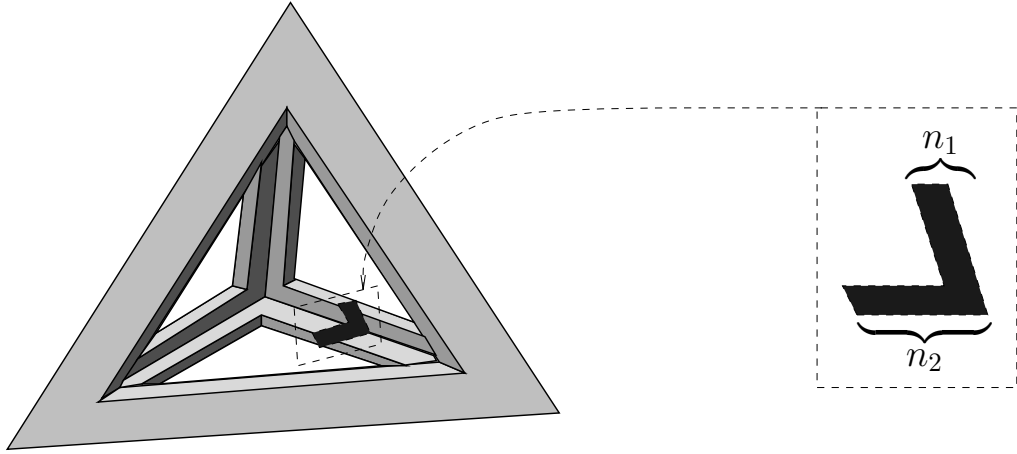
$$\begin{aligned} n_1 &< n_2 \\ n_1 + n_2 &< n_3 \\ n_1 + n_2 + n_3 &< n_4 \\ &\dots\dots\dots \\ n_1 + n_2 + \dots + n_{k-2} &< n_{k-1} \\ n_1 + n_2 + \dots + n_{k-2} + n_{k-1} &< n/3. \end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство основано на изучении носителей полиномов  $P(B_{n_1, \dots, n_k})$  — подмножеств  $\mathbb{Z}^k$ , отвечающих ненулевым членам полиномов. Мы разберем подробно показательный случай  $k = 3$ , поддающийся наглядной геометрической интерпретации. Если эту геометрию переписать на языке алгебры, она автоматически обобщается на произвольный случай и дает полное доказательство теоремы.

В случае  $k = 3$  носитель полинома  $P_{gl_N}(B_{n_1, n_2, n_3})$ , то есть множество показателей всех его ненулевых мономов  $x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta$ , можно рассматривать как подмножество правильного тетраэдра

$$\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0, \alpha + \beta + \gamma + \delta = \text{const}\} \subset \mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{Z}^4,$$

составленного из 24 параллелепипедов со сторонами  $n_1, n_2, n_3$ . Если параметры  $n_1$  и  $n_2$  достаточно малы по сравнению с  $n_3$ , то получаемое тело расположено вдоль ребер тетраэдра и имеет такую форму:



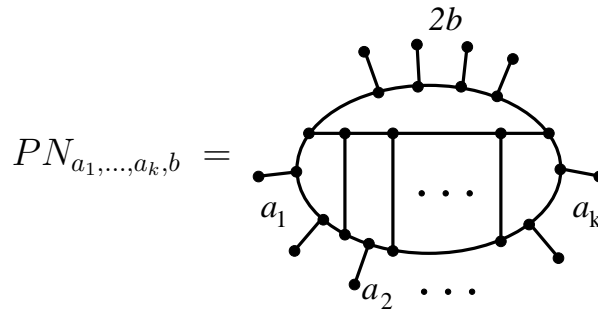
Пересечение этого тела с плоскостью симметрии тетраэдра в окрестности его ребра является фигурой в форме буквы  $L$  (на рисунке справа), чья высота и ширина пропорциональны  $n_1$  и  $n_2$ , соответственно. Когда  $n_1$  и  $n_2$  меняются, мы получаем двухпараметрическое семейство линейных независимых многочленов.

В общем случае необходимо рассмотреть *носитель среднего сечения*, то есть множество целых точек  $(a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1}$  таких, что коэффициент при  $x_{a_1} \cdots x_{a_{k-1}} x_{(n-a_1-\dots-a_{k-1})/2}^2$  в многочлене  $P$  отличен от нуля. Легко доказать, что семейство носителей среднего сечения для многочленов  $P$  от диаграмм, описанных в теореме, обозначим его  $\{M_i\}$  (оно счетно), обладает таким свойством независимости: его можно упорядочить так, что для любого  $i$  множество  $M_i \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_{i-1}) \neq \emptyset$ , из чего сразу следует линейная независимость соответствующих многочленов.

Подсчитав количество диаграмм, описанных в условии теоремы, мы получим асимптотическую нижнюю оценку вида  $n^{\log(n)}$  на размерность подпространства  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}$ .  $\square$

Главная трудность в приведенном доказательстве состоит в необходимости рассматривать  $2^k$  разрешений стенных вершин багет-диаграммы, которые только и дают поверхность Зейферта рода 0. О. Дасбаху в работе [48] удалось избежать этой трудности, рассматривая другое семейство диаграмм, добавив ровно одно ребро к нашим

багет-диаграммам. Для диаграмм Дасбаха, которые он остроумно назвал *Pont-Neuf diagrams*:



существует всего два способа разрешения стенных вершин, которые приводят к поверхности минимального рода! (Здесь числа  $a_1, \dots, a_k, 2b$  относятся к числу ног, присоединенных к соответствующим сторонам внутренней диаграммы).

Это свойство диаграмм типа Pont-Neuf проверяется точно так же, как мы это делали выше для багетных диаграмм. Замечательно, что семейство Дасбаха не только приводит к упрощению доказательства — оно оказывается асимптотически гораздо более многочисленным; на самом деле для них реализуется оценка с тем же главным членом, что и в асимптотике чисел разбиений Харди–Рамануджана (и ее обоснование примерно такое же). Точная формулировка теоремы Дасбаха такова:

**ТЕОРЕМА 4.4.** *Для фиксированных  $n$  и  $k$ , все диаграммы  $PN_{a_1, \dots, a_k, b}$  с условиями  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq b$ ,  $a_1 + \dots + a_k + 2b = 2n$  линейно независимы.*

Подсчитав количество таких разбиений числа  $2n$ , мы получим в точности асимптотическую оценку, объявленную без доказательства Концевичем в [74].

**СЛЕДСТВИЕ.**  $\dim \mathcal{P}_n$  растет асимптотически быстрее, чем  $e^{c\sqrt{n}}$  для любой константы  $c < \pi\sqrt{2/3}$ .

## Разное

## 5.1. Алгебра 3-графов

**5.1.1. Введение.** Регулярные трехвалентные графы, то есть графы, у которых из каждой вершины выходит ровно три ребра, — объект, часто встречающийся в математике. Помимо собственно теории графов, где такие графы называются «кубическими», они естественным образом возникают в теории инвариантов Васильева узлов и трехмерных многообразий и в связи с теоремой о четырех красках. При этом во всех перечисленных приложениях трехвалентные графы оказываются снабженными дополнительной структурой, состоящей в том, что в каждой вершине выбран один из двух возможных циклических порядков на множестве трех ребер, ей инцидентных.

На пространстве 3-графов имеется коммутативное умножение, определяемое связной суммой и аналогичное умножению хордовых диаграмм, но почему-то ранее никем не отмеченное и не изученное, хотя подобные структуры вводились многими авторами (например, [31, 113, 47, 120]). Определению алгебры 3-графов мы посвящаем второй пункт настоящего раздела.

В пункте 3 мы приводим таблицы, показывающие устройство алгебры графов в малых размерностях, и описываем компьютерные вычисления, проделанные для построения этих таблиц.

В четвертом пункте обсуждается конструкция инвариантов, определенных на алгебре 3-графов и строящихся по алгебре Ли с заданной ад-инвариантной билинейной невырожденной формой (по аналогии с аналогичной конструкцией для алгебр хордовых диаграмм и их аналогов, см 3). Здесь же приведены таблицы значений этих инвариантов на образующих.

Пункт 5, написанный под влиянием статьи Бар-Натана [35], посвящен теореме о четырех красках. В качестве гипотезы эта теорема была сформулирована Ф. Гатри (Francis Guthrie) в 1852 году. Доказана теорема в 1976 году К. Appelем и В. Хакеном. Доказательство опирается на компьютерные вычисления, описание которых составляет книгу размером 741 страниц [27]. Наша цель — показать, что алгебра 3-графов является правильным объектом в исследованиях,

связанных с теоремой о четырех красках, и позволяет придать им какую-то концептуальную ясность.

В шестом пункте мы обсуждаем роль алгебры 3-графов в теории инвариантов Васильева. Здесь самое любопытное явление состоит в том, что умножение графов позволяет определить структуру некоммутативной алгебры в пространстве примитивных элементов градуированной алгебры  $\mathcal{C}$  инвариантов Васильева. Таким образом, пространство примитивных элементов  $\mathcal{P}$ , которое свободно порождает алгебру  $\mathcal{C}$ , само по себе наделено другой, внутренней, операцией умножения.

**5.1.2. Пространство 3-графов и структура алгебры в нем.** Прежде всего дадим точное описание основного объекта, с которым мы будем работать.

**Определение.** *3-графом* называется связный регулярный трехвалентный граф<sup>1</sup>, в котором задано *вращение*. *Вращение* — это выбор в каждой вершине графа одного из двух возможных циклических порядков трех ребер, инцидентных этой вершине, т. е. одной из двух перестановок, представляющих цикл длины 3.

В этом определении *графам* разрешается иметь кратные ребра и петли. Для графов с петлями понятие вращения требует уточнения. А именно, циклический порядок нужно задавать не на множестве *ребер*, инцидентных данной вершине, а на множестве смежных с ней *полуребер*.

Свободное от топологии определение множества полуребер можно дать следующим образом. Пусть  $E, V$  — множества ребер и вершин данного графа, соответственно. Тогда множество полуребер — это «двойное расслоение»  $E \xleftarrow{\alpha} H \xrightarrow{\beta} V$ , то есть множество  $H$  с двумя проекциями  $\alpha : H \rightarrow E$  и  $\beta : H \rightarrow V$  такими, что (а) прообраз любого ребра  $\alpha^{-1}(e)$  состоит из двух точек, (б) мощность каждого множества  $\beta^{-1}(v)$  равна степени вершины  $v$ , (в) для любой точки  $h \in H$  вершина  $\beta(h)$  является одним из концов ребра  $\alpha(h)$ . Тогда вращение — это циклическая перестановка в прообразе каждой вершине  $\beta^{-1}(v)$ .

Можно вообще забыть о ребрах и вершинах и дать такое, менее наглядное, но более четкое определение 3-графа: это множество  $H$  мощности, кратной 6, в котором заданы две перестановки: одна с циклической структурой  $(3)(3) \dots (3)$ , другая с циклической структурой  $(2)(2) \dots (2)$ . Связь с предыдущим определением такова:  $H$  — это

<sup>1</sup>Заметим, что число вершин такого графа всегда четно, а число ребер кратно трем.

множество полуребер, первая перестановка соответствует вращению в вершинах, а вторая — переходу от одного конца ребра к другому.

**Определение.** Два 3-графа называются *изоморфными*, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между их множествами полуребер, которое сохраняет вращение и индуцирует обычный изоморфизм графов — или, что то же самое, сохраняет обе структурные перестановки.

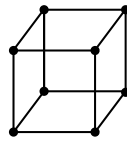
### Замечания.

1. Удобно причислить окружность к множеству 3-графов. Мы будем считать ее трехвалентным графом с нулевым числом вершин.

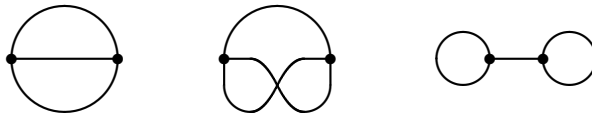
2. Хотя 3-графы являются абстрактными графами, мы будем рисовать их на плоскости. Поскольку не всякий граф планарен, ребра на рисунках могут пересекаться. Мы не принимаем во внимание такие пересечения и не рассматриваем их как вершины графа. Кроме того, мы будем предполагать, что в каждой вершине полуребра упорядочены против часовой стрелки.

### Примеры.


1. Вот типичный пример 3-графа (у него 8 вершин и 12 ребер):

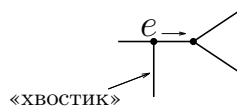


2. С точностью до изоморфизма существует три различных 3-графа порядка 2:



**Определение.** Пространство  $\Gamma_n$  — это факторпространство линейного пространства над  $\mathbb{R}$ , порожденного 3-графами с  $2n$  вершинами, по модулю соотношений антисимметрии и ИНХ, см. стр. 19.

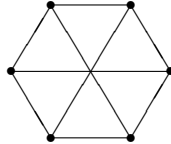
Для соотношения ИНХ мы будем также употреблять название «соотношение Кирхгофа» в связи со следующей мотивировкой. Будем представлять себе фрагмент  данного 3-графа как участок электрической цепи, а переменную вершину — как электрон  $e$  (с «хвостиком» — третьим входящим в  $e$  ребром, начало которого закреплено). Пусть электрон  $e$  движется к узлу электрической цепи:



Тогда соотношение (ИХ) выражает известное правило Кирхгофа: *сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из него*. Эта электротехническая аналогия будет полезна при доказательстве корректности умножения 3-графов (см. ниже).

По определению, пространство  $\Gamma_0$  одномерно и порождено окружностью.

**Пример.** Следующий граф равен нулю как элемент пространства  $\Gamma_3$ :



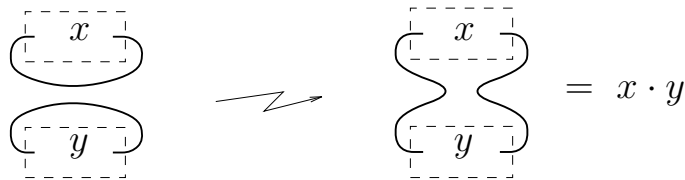
### Умножение.

В градуированном пространстве

$$\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \dots$$

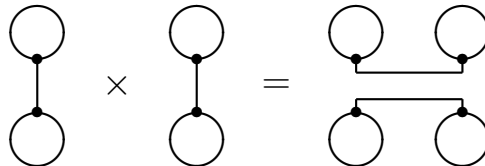
имеется естественная структура коммутативной алгебры.

**Определение.** Произведением двух 3-графов  $x$  и  $y$  называется 3-граф, полученный следующим образом. Выберем произвольным образом по ребру в  $x$  и  $y$ . Разорвем эти ребра и приклеим концы, возникшие на одном ребре, к концам, возникшим на другом:



Произведение 3-графов можно понимать как результат вставки одного 3-графа, например  $x$ , вместо ребра в 3-граф  $y$ .

**Замечание.** 3-графы по определению связны. Однако, при перемножении двух связных графов может получиться несвязный граф, например:



Тем не менее, легко видеть, что это явление имеет место только в том случае, когда каждый из графов-сомножителей распадается при удалении некоторого ребра, а в этом случае оба они равны 0 как элементы алгебры (см. лемму 5.2 на странице 97).



ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Произведение 3-графов, рассматриваемое как элемент пространства  $\Gamma$ , определено корректно.*

□ Заметим сразу, что если умножение определено корректно, то оно очевидным образом коммутативно.

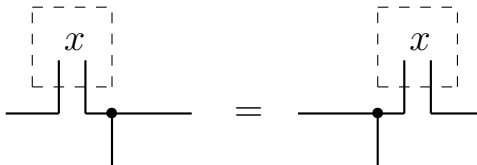
Для доказательства корректности нужно установить два факта. Первый — что по модулю соотношений (AS) и (IHX) произведение не зависит от *выбора* ребер  $x$  и  $y$ , которые разрываются и склеиваются между собой. Второй — что оно не зависит от *способа склейки* (ясно, что два конца одного ребра можно приклеить к двум концам другого ребра двумя разными способами).

Эти два факта составляют содержание следующих двух лемм. В формулировке первой леммы «подграфом» мы называем часть 3-графа, прикрепленную к оставшейся части двумя ребрами (как сомножитель в произведении).

ЛЕММА 5.1. (а) «Хвост» можно пронести через подграф:

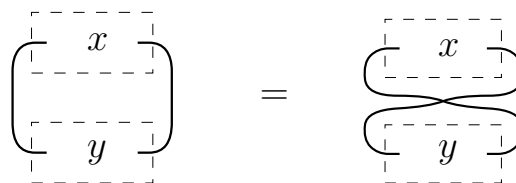


(б) Подграф можно пронести сквозь соседнюю вершину:



Присмотревшись к рисункам, читатель поймет, что две формулировки леммы 5.1 ничем друг от друга не отличаются и означают, что результаты вставки 3-графа  $x$  в соседние ребра 3-графа  $y$  равны между собой. В силу связности  $y$ , отсюда вытекает, что произведение не зависит от выбора разрываемого ребра в  $y$ .

ЛЕММА 5.2. *Два разных способа соединения двух графов с разорванными ребрами приводят к одному и тому же результату в пространстве  $\Gamma$ :*



Переходим к доказательству лемм. Лемма 5.1 является частным случаем, при  $k = 1$ , следующего более общего утверждения.

ЛЕММА 5.3. В пространстве  $\Gamma$  выполняется общий закон Кирхгофа:

$$\text{Diagram 1} = \sum_{i=1}^k \text{Diagram 2}$$

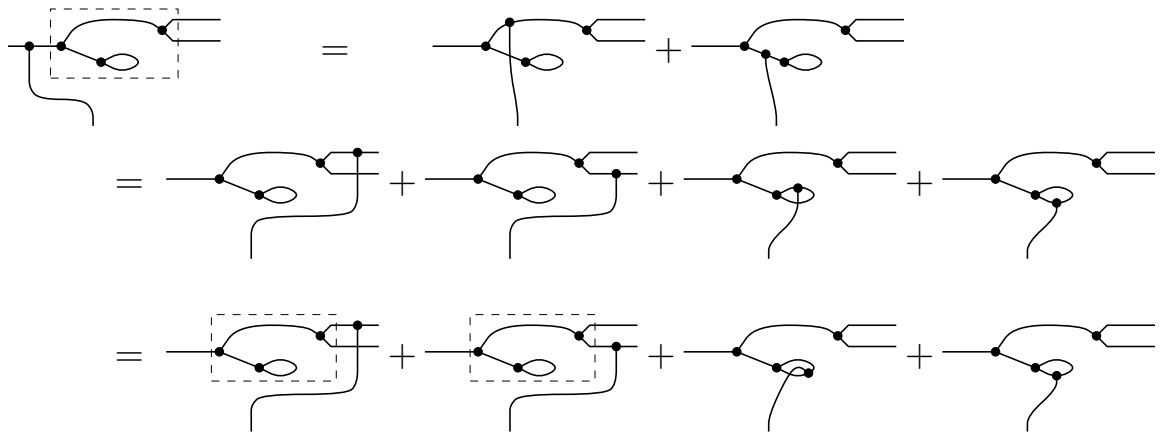
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем горизонтальную прямую на плоскости, в которую вложен граф, и рассмотрим проектирование на нее общего положения. Мы предполагаем, что все вершины нашего 3-графа проектируются в попарно различные точки горизонтальной прямой, а ограничение проектирования на произвольное ребро имеет только морсовские критические точки. Кроме того, можно считать, что все критические значения попарно различны и отличны от образов вершин.

Бифуркационными точками назовем образы вершин и критические значения ограничения проектирования на ребра. Лемма 5.3 доказывается индукцией по числу бифуркационных точек. Если имеется ровно одна бифуркационная точка, то она должна быть образом вершины графа. Равенство Леммы 3 в этом случае совпадает с ИНХ-соотношением, и доказывать нечего. Предположим, что Лемма 5.3 доказана для числа бифуркационных точек  $s$ . При переходе через  $(s + 1)$ -ю бифуркационную точку встречается одна из следующих шести ситуаций:

1) 2) 3) 4) 5) 6)

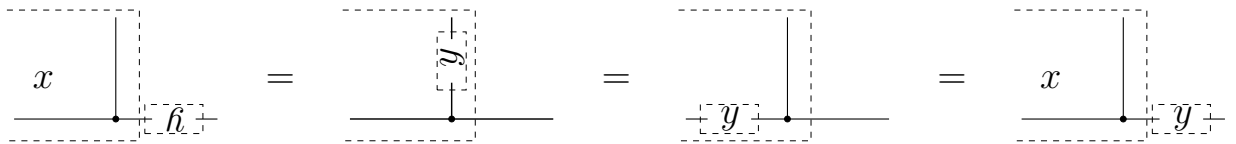
В первых двух случаях лемма следует из соотношения (ИНХ), в двух следующих — из соотношения (AS) (см. пример ниже); наконец, последние два случая деформацией вложения графа в плоскость сводятся к предыдущим. Лемма 5.3 доказана.  $\square$

**Пример.**

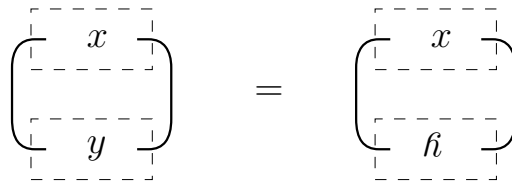


Два последних слагаемых взаимно уничтожаются ввиду соотношения антисимметрии.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2.** Если 3-граф  $x$  является окружностью, то доказывать нечего. Поэтому можно считать, что  $x$  содержит хотя бы одну трехвалентную вершину. Выберем из них ближайшую к правому выходу из  $y$ . Тогда по Лемме 5.1 можно осуществить следующие маневры:



Следовательно,



Теперь, поворачивая  $y$  на  $180^\circ$  в плоскости рисунка, получаем правую часть требуемого равенства. Лемма 5.2 доказана. Это завершает доказательство корректности умножения 3-графов.  $\square$

**Следствие.** Произведение произвольных элементов  $\Gamma$  определено корректно.

Это вытекает из того, что произведение 3-графов определено корректно, а при умножении на произвольный граф линейных комбинаций, отвечающих соотношениям (AS) и (IH), получаются линейные комбинации того же вида.

### 5.1.3. Зоопарк. Некоторые тождества

Приведем несколько простых тождеств, которые помогают понять устройство алгебры  $\Gamma$ . Они непосредственно вытекают из определяющих соотношений.

Первое из этих тождеств (Лемма 5.4) устанавливает связь между двумя операциями, определенными на множестве 3-графов: *вставка треугольника вместо вершины* и *вставка пузыря на ребро*. Вставить пузырь на ребро графа — это все равно, что умножить его на элемент  $b = \bigcirc \in \Gamma_1$ . Из корректности умножения в алгебре  $\Gamma$  вытекает, что результат вставки пузыря не зависит от выбора ребра, а тогда из Леммы 5.4 следует, что при замене вершины на треугольник результат не зависит от выбора вершины.

ЛЕММА 5.4. *Треугольник равен половине пузыря:*

$$\begin{array}{c} \text{triangle} \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{bubble on edge 1} \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{bubble on edge 2} \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{bubble on edge 3} \end{array} .$$

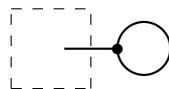
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{array}{c} \text{triangle} \end{array} = \begin{array}{c} \text{triangle with bubble on edge 1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{triangle with bubble on edge 2} \end{array} = \begin{array}{c} \text{triangle with bubble on edge 1} \end{array} - \begin{array}{c} \text{triangle with bubble on edge 2} \end{array} .$$

□

Следующая лемма описывает два класса 3-графов, равных нулю в алгебре  $\Gamma$ .

ЛЕММА 5.5. (а) *Граф с петлей равен нулю:*



(б) *Если реберная связность 3-графа  $\gamma$  равна 1, т.е. при выбрасывании некоторого ребра граф становится несвязным, то  $\gamma = 0$ :*

$$\gamma = \begin{array}{c} \text{graph with bridge} \end{array} = 0 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Граф с петлей равен нулю вследствие антисимметрии. Действительно, изменение вращения в вершине петли дает 3-граф, с одной стороны, изоморфный данному, а с другой стороны, отличающийся от него знаком.

(б) По Лемме 5.1  $\gamma$  равен графу с петлей:

$$\gamma = \begin{array}{c} \text{graph with bridge} \end{array} = \begin{array}{c} \text{graph with bridge and bubble} \end{array} = 0 ,$$

и утверждение следует из пункта (а).  $\square$

### Площадка молодняка

Компьютерные вычисления показали, что мультипликативными образующими алгебры 3-графов до степени 11 являются: пузырь  $b = \textcirclearrowleft$ , колеса  $w_k$  для  $k = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11$  (например,  $w_4 = \textcircled{\textcirclearrowleft}$ ) и додекаэдр  $d = \textcircled{\textcirclearrowleft}$ . Между образующими есть нетривиальные соотношения, поэтому в следующей таблице мы приводим базисы векторных пространств  $\Gamma_n$  для  $n \leq 11$ .

$n$	$\dim \Gamma_n$	аддитивные образующие
1	1	$b$
2	1	$b^2$
3	1	$b^3$
4	2	$b^4, w_4$
5	2	$b^5, bw_4$
6	3	$b^6, b^2w_4, w_6$
7	4	$b^7, b^3w_4, bw_6, w_7$
8	5	$b^8, b^4w_4, b^2w_6, bw_7, w_8$
9	6	$b^9, b^5w_4, b^3w_6, b^2w_7, bw_8, w_9$
10	8	$b^{10}, b^6w_4, b^4w_6, b^3w_7, b^2w_8, bw_9, w_{10}, d$
11	9	$b^{11}, b^7w_4, b^5w_6, b^4w_7, b^3w_8, b^2w_9, bw_{10}, bd, w_{11}$

**Гипотеза.** Алгебра  $\Gamma$  порождается плоскими графами.

### Соотношения.

Внимательный читатель, рассмотрев приведенную выше таблицу аддитивных образующих алгебры графов, мог заметить, что в ней отсутствуют элементы  $w_4^2$  степени 8 и  $w_4w_6$  степени 10. Это не случайно. Оказывается, что в алгебре  $\Gamma$  выполняются соотношения

$$w_4^2 = \frac{5}{384}b^8 - \frac{5}{12}b^4w_4 + \frac{5}{2}b^2w_6 - \frac{3}{2}bw_7,$$

$$w_4w_6 = \frac{305}{27648}b^{10} - \frac{293}{864}b^6w_4 + \frac{145}{72}b^4w_6 - \frac{31}{12}b^3w_7 + 2b^2w_8 - \frac{3}{4}bw_9.$$

Имеет место общее утверждение, которое доказал О. Дасбах (см. [26]): *Произведение любых двух однородных элементов алгебры 3-графов положительной градуировки принадлежит идеалу, порожденному  $b$ .*

Поскольку между образующими есть нетривиальные соотношения, алгебра 3-графов, в отличие от алгебры диаграмм Якоби, не свободна, и, значит, не обладает структурой алгебры Хопфа.

### Вычисления.

Экспериментальные результаты, приведенные в предыдущем пункте, получены при помощи компьютерного счета. Пакет программ, написанных на C/C++, набор вспомогательных shell-скриптов и файлы данных, полученные их выполнением, доступны на анонимном ftp-сервере math.botik.ru (см. [66]).

Основной объект, с которым работают наши программы: регулярный трехвалентный граф без кратных ребер и петель, заданный своей матрицей смежности, составленной из 0 и 1. Матричное представление предполагает, что вершины графа как-то занумерованы. Пусть  $a < b < c$  — номера вершин, соседних с данной. Тогда вращение в этой вершине определяется циклом  $(abc)$ . Если известен список всех графов с данным числом вершин  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , то любой граф с вращением  $y$ , как элемент алгебры  $\Gamma$ , будет равен  $\pm x_i$  (для определения номера и знака нужно вначале найти некоторый изоморфизм абстрактных графов  $y$  и  $x_i$ , а затем подсчитать четность числа вершин, в которых этот изоморфизм нарушает циклический порядок ребер).

Вычисление образующих и соотношений алгебры 3-графов до градуировки 10 (20 вершин) проводилось в два этапа:

**1. Подготовка материала.** На этом этапе составляется список всех регулярных трехвалентных графов данного порядка.

Поскольку всякий граф с кратными ребрами (т. е. содержащий пузырь), а также всякий граф с треугольником представляется в виде произведения графов меньшего порядка, для изучения алгебры  $\Gamma$  достаточно иметь списки всех связных графов без кратных ребер и треугольников.

Список 3-графов с заданным числом вершин создает программа `gr3g`, состоящая логически из двух основных модулей: генератор «сырого» потока графов, работающий на основе перебора с возвратом, и фильтр, отсеивающий из этого потока графы, изоморфные уже отобранному.

**2. Составление и решение уравнений.** При составлении уравнений для графов данного порядка мы предполагаем, что для всех меньших порядков уже известно множество образующих и полиномиальное выражение через них всех графов без треугольников и кратных ребер.

Программа `relgr` находит соотношения Кирхгофа для всех графов с заданным числом вершин. В правых частях соотношений могут появляться графы с треугольниками, которые по Лемме 5.1 раздела 2.1 выражаются через графы с меньшим числом вершин, они к моменту запуска программы должны быть известны. Кроме того, можно выбрать и ввести обозначения для предполагаемых новых образующих данного порядка.

Составив систему линейных уравнений, та же программа приступает к их решению. При этом преследуются две цели: (1) найти выражение всех графов через образующие порядка, меньшего или равного текущему, (2) отыскать, если они есть, соотношения между образующими.

Если предполагаемые новые образующие в данном порядке не заданы, программа обнаружит, что система не имеет единственного решения, и сама примет какой-нибудь граф за новую образующую.

Два самых трудных момента вычислений были организованы так:

**1.** Составление списка графов с 20 вершинами было осуществлено нами в июле 1996 года на сети из 40 рабочих станций в университете Айдзу (Япония). Один из компьютеров (самый быстрый) генерировал сырой список, а остальные пропускали его через фильтр проверки на изоморфизм. Вычисления заняли около недели, что позволило нам применить прием, необычный в мультипроцессорной практике: ручное динамическое распараллеливание.

**2.** Составление и решение системы уравнений для графов с 20 вершинами было проведено в мае 1997 года на самом мощном компьютере, к которому мы смогли найти доступ (Pentium Pro 200 с 256 Мб оперативной памяти). Мы признательны Б. Сегалу (B. Segal) из ЦЕРНа, Женева, за оказанное содействие.

Полные списки 3-графов, имеющих  $\leq 20$  вершин, приведены в [66]. В каждом порядке имеются списки матриц инцидентности и полиномы, дающие выражение соответствующих графов через мультипликативные образующие.

Помимо набора программ для нахождения мультипликативных образующих алгебры  $\Gamma$ , на том же ftp-сервере имеется еще две программы `sl_inv` и `so_inv`, которые служат для нахождения инвариантов заданного графа, связанных с алгебрами Ли. В них реализован простейший алгоритм: перебор всех возможных расстановок знаков в

вершинах (для  $sl$ ) и ребрах (для  $so$ ) с подсчетом числа компонент полученной кривой.

Описание мультипликативной структуры алгебры графов в градуировке 11 было получено нами косвенным образом, используя недавний результат Яна Кнайсслера [72] о том, что  $\dim \Gamma_{11} = 9$ . Используя  $sl$ - и  $so$ -инварианты, мы проверили, что мономы градуировки 11 от найденных нами образующих линейно независимы.

**5.1.4. Алгебра графов и алгебры Ли.** Для изучения устройства алгебры полезно располагать достаточным запасом гомоморфизмов из нее в основное поле.

По аналогии с весовыми системами, описанными в разделах 3.2, 3.3 и 3.4, мы здесь опишем конструкцию, как по метризованной алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  с заданной билинейной формой  $B$  построить функцию  $K_{\mathfrak{g}}^B$  на множестве 3-графов, удовлетворяющую соотношениям (AS) и (IHX) и тем самым порождающую линейную функцию на алгебре 3-графов со значениями в поле. Для простой алгебры Ли (например, с формой Киллинга), поделив эту функцию на размерность алгебры Ли, мы получим гомоморфизм алгебр  $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Конструкция инварианта $K_{\mathfrak{g}}^B$

Вначале определим тензор  $J \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Рассмотрим скобку Ли данной алгебры  $[\cdot, \cdot]$  как элемент пространства  $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ . Отождествление  $\mathfrak{g}^*$  с  $\mathfrak{g}$  при помощи заданной билинейной формы  $B$  переводит этот тензор в  $J \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Благодаря свойствам коммутатора  $[\cdot, \cdot]$  и формы  $B$  тензор  $J$  кососимметричен по отношению к перестановкам трех сомножителей тензорного произведения. Этот факт нам сейчас пригодится.

Напомним, что 3-граф можно рассматривать как множество  $H$  мощности  $6n$  («полуредра графа»), снабженное двумя разбиениями: на трехэлементные подмножества, в каждом из которых задан циклический порядок, и на двухэлементные подмножества. Трехэлементные подмножества отвечают вершинам графа, а двухэлементные — ребрам; соответствующие разбиения множества  $H$  можно по этой причине назвать *вершинным* и *реберным*.

Рассмотрим три линейных пространства:

- $\bigotimes_H \mathfrak{g}$  — тензорное произведение  $6n$  экземпляров алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , сомножители которого отвечают полуредрам графа,



- $\bigotimes_V (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$  — тензорное произведение  $2n$  экземпляров пространства  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , сомножители которого отвечают вершинам графа,
- $\bigotimes_E (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$  — тензорное произведение  $3n$  экземпляров пространства  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , сомножители которого отвечают ребрам графа.

Вершинное разбиение множества  $H$  задает изоморфизм

$$\alpha : \bigotimes_V (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \rightarrow \bigotimes_H \mathfrak{g},$$

а реберное разбиение — изоморфизм

$$\beta : \bigotimes_H \mathfrak{g} \rightarrow \bigotimes_E (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}).$$

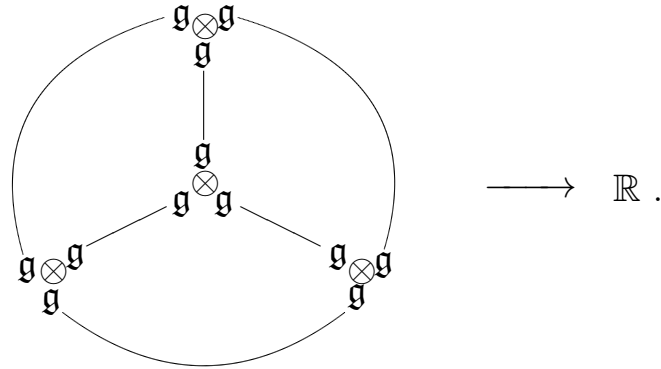
Конкретный выбор изоморфизма  $\alpha$  фиксируется упорядочиванием тройки полуребер вокруг каждой вершины — мы будем считать его произвольным, но согласованным с вращением в графе  $G$ . Точно так же, конкретный выбор изоморфизма  $\beta$  зависит от выбора порядка в каждой паре полуребер, отвечающих концам одного ребра; мы будем считать его произвольным.

Рассмотрим композицию этих двух изоморфизмов и отображения в поле, индуцированного заданной билинейной формой  $B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\bigotimes_V (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \xrightarrow{\alpha} \bigotimes_H \mathfrak{g} \xrightarrow{\beta} \bigotimes_E (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Значение  $K_{\mathfrak{g}}^B(G)$  функции  $K_{\mathfrak{g}}^B$  на данном графе  $G$  равно, по определению, значению этого сквозного отображения на элементе  $J \otimes J \otimes \dots \otimes J$ . Несмотря на произвол, имеющийся в построении гомоморфизмов  $\alpha$  и  $\beta$ , конечный результат определен корректно благодаря тому, что тензор  $J$  инвариантен относительно четных перестановок, а билинейная форма  $B$  симметрична.

Говоря образно, мы подвешиваем в каждой вершине графа тензорный куб алгебры Ли с выделенным элементом  $J$ , затем рассматриваем произведение по всем вершинам и, наконец, берем полную свертку полученного тензора валентности  $6n$ , применяя билинейную форму  $B$  к каждой паре сомножителей, отвечающих концам одного ребра:



Заметим еще, что для любого 3-графа порядка  $2n$  мы рассмотрим один и тот же элемент тензорного произведения  $6n$  экземпляров алгебры Ли, но отображение из нее в поле, определяемое разбиением на пары сомножителей тензорного произведения, зависит от выбора конкретного графа.

**Проверка соотношений.** Соотношение (AS) следует из того, что тензор  $J$  меняет знак при нечетных перестановках сомножителей. Соотношение (ИХ) вытекает из тождества Якоби.

**Зависимость от выбора формы.** Билинейная форма  $B$  сохраняет все необходимые свойства при умножении на константу. Проследив шаг за шагом всю конструкцию, легко понять, что функция  $K_{\mathfrak{g}}^B$  при этом меняется следующим образом:  $K_{\mathfrak{g}}^{\lambda B}(G) = \lambda^{-n} K_{\mathfrak{g}}^B(G)$  для  $G \in \Gamma_n$ .

**Мультипликативность.** Имеет место следующее утверждение: для простой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  размерности  $r$  функция  $\frac{1}{r} K_{\mathfrak{g}}^B : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  мультипликативна (при любом выборе билинейной формы  $B$ ).

Этот факт вытекает из свойств элемента Казимира простой алгебры Ли.

Начнем с того, что построение функции  $K_{\mathfrak{g}}^B$  проходит не только для 3-графов, но и для графов, имеющих, наряду с трехвалентными, еще и одновалентные вершины. В этом случае сворачиваются только те пары сомножителей большого тензорного произведения, которые отвечают ребрам, соединяющим трехвалентные вершины, и в результате остается не число, а элемент пространства  $\bigotimes_U \mathfrak{g}$ , где  $U$  — множество одновалентных вершин рассматриваемого графа. Этот элемент всегда ад-инвариантен. В частности, если алгебра простая, а одновалентных вершин у графа всего две, то мы обязательно получим тензор, пропорциональный квадратичному элементу Казимира

$c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ . Напомним, что элемент Казимира для данной формы  $B$  — это элемент  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , отвечающий  $B \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$  и  $\text{id} \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$  при изоморфизмах, индуцированных формой  $B$ . Обычно при этом берут форму Киллинга, но для нас это роли не играет. При любом выборе формы ее значение на элементе Казимира будет равно следу тождественного оператора, т.е. размерности алгебры Ли.

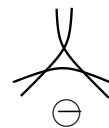
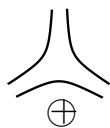
Перейдем к доказательству утверждения. Разорвем произвольное ребро графа  $G_1$  и рассмотрим тензор, отвечающий полученному графу с двумя одновалентными вершинами. Этот тензор будет пропорционален квадратичному элементу Казимира  $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  с коэффициентом пропорциональности  $\frac{1}{r}K_{\mathfrak{g}}(G_1)$ . Для второго графа  $G_2$  подобным образом получим тензор  $\frac{1}{r}K_{\mathfrak{g}}(G_2) \cdot c$ . Если теперь склеить разрезанные графы  $G_1$  и  $G_2$  по одной одновалентной вершине, то частичная свертка элемента  $c \otimes c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  даст снова элемент Казимира  $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , а коэффициенты пропорциональности перемножатся. Это и доказывает мультипликативность функции  $\frac{1}{r}K_{\mathfrak{g}}$ .

### Алгоритм вычисления $sl_N$ - и $so_N$ -полиномов

Для классических алгебр Ли  $sl$  и  $so$  построенный только что инвариант допускает изящное комбинаторное описание, которое мы сейчас приведем. Доказательство для  $sl_N$  (или, что то же самое, для  $gl_N$ ) можно найти, например, в [31] и [3]. Доказательство для  $so_N$  основано на аналогичных рассуждениях. См. также [100], [35].

### Вычисление $K_{\mathfrak{g}}^B$ для $\mathfrak{g} = sl_N$ с формой $B(x, y) = \text{tr}(xy)$ .

*Разметка вершин* графа — это расстановка в вершинах чисел  $\pm 1$ . Если вершин  $2n$ , то всего различных разметок существует  $2^{2n}$ . Для каждой разметки рассмотрим плоскую кривую, которая получается из графа, погруженного в плоскость (вращение согласовано с ориентацией), удвоением всех ребер. При этом в окрестности вершины кривая ведет себя одним из двух способов в зависимости от знака вершины:



Пусть  $|\mu|$  — число отрицательных вершин в разметке  $\mu$ , а  $b(\mu)$  — число компонент связности полученной кривой. Тогда

$$K_{sl_N}(G) = \sum_{\mu \in MV} (-1)^{|\mu|} N^{b(\mu)}$$

где  $MV$  — множество всех вершинных разметок. Сумма состоит из  $2^{2n}$  слагаемых.

Если параметр  $N$  считать переменным, то получится многочлен от  $N$ , который мы будем называть *sl-полиномом* и обозначать  $sl(G)$ .

Этот полином делится нацело на размерность алгебры  $N^2 - 1$ , и частное является мультипликативной функцией на алгебре 3-графов, которую мы назовем *приведенный sl-полином* и обозначим через  $\tilde{sl}(G)$ .

**Вычисление  $K_{\mathfrak{g}}^B$  для  $\mathfrak{g} = so_N$  с формой  $B(x, y) = \text{tr}(xy)$ .**

Для вычисления *so*-полинома от данного 3-графа нужно проделать аналогичные действия, заменив вершины графа на ребра. Вот точное описание.

*Разметка ребер* графа — это расстановка чисел  $\pm 1$  на ребрах. Для каждой реберной разметки рассмотрим плоскую кривую, которая получается удвоением всех ребер, причем ребра, отмеченные минусом, берутся с перекруткой:



При этом в окрестности каждой вершины берется прямой способ соединения этих линий, как в положительных вершинах для  $sl_N$ . Обозначая через  $|\mu|$  число отрицательных ребер в разметке  $\mu$ , а через  $b(\mu)$  — число компонент связности соответствующей кривой, мы можем написать следующую формулу:

$$K_{so_N}(G) = \sum_{\mu \in ME} (-1)^{|\mu|} N^{b(\mu)}$$

где  $ME$  — множество всех реберных разметок. Сумма состоит из  $2^{3n}$  слагаемых.

Разделив *so*-полином на размерность алгебры  $N(N - 1)/2$ , мы получим *приведенный so-полином*  $\tilde{so}(G)$ , представляющий собой гомоморфизм алгебр  $\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}[N]$ .

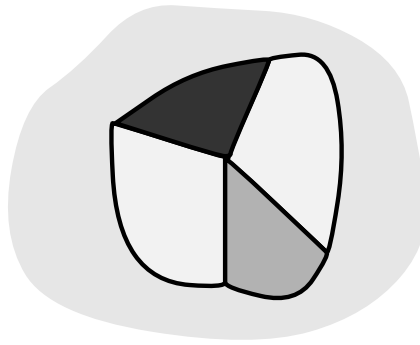
### Таблица значений на образующих

В следующей таблице даны найденные на компьютере значения приведенных *sl*- и *so*-полиномов на наших образующих; для алгебры

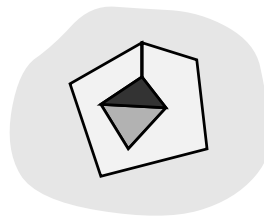
so выражение дается через переменную  $M = N - 2$ . В первой строке таблицы буква  $n$  означает степень, а буква  $x$  — базисный элемент.

$n$	$x$	$\tilde{sl}$ -полином	$\tilde{so}$ -полином
1	$b$	$2N$	$2M$
4	$w_4$	$2N^4 + 24N^2$	$2M^4 - 6M^3 + 60M^2 - 48M$
6	$w_6$	$2N^6 + 64N^4 + 96N^2$	$2M^6 - 10M^5 + 160M^4 - 368M^3 + 816M^2 - 576M$
7	$w_7$	$2N^7 + 128N^5 + 128N^3$	$2M^7 - 12M^6 + 308M^5 - 816M^4 + 1328M^3 - 768M$
8	$w_8$	$2N^8 + 256N^6 + 256N^4 + 384N^2$	$2M^8 - 14M^7 + 588M^6 - 1688M^5 + 3216M^4 - 4256M^3 + 9152M^2 - 6912M$
9	$w_9$	$2N^9 + 512N^7 + 512N^5 + 512N^3$	$2M^9 - 16M^8 + 1128M^7 - 3376M^6 + 7104M^5 - 11200M^4 + 12672M^3 + 12288M^2 - 18432M$
10	$w_{10}$	$2N^{10} + 1024N^8 + 1024N^6 + 1024N^4 + 1536N^2$	$2M^{10} - 18M^9 + 2184M^8 - 6656M^7 + 14880M^6 - 26432M^5 + 36096M^4 - 35840M^3 + 111360M^2 - 95232M$
10	$d$	$2N^{10} + 22N^8 + 228N^6 - 232N^4$	$2M^{10} - 18M^9 + 88M^8 - 188M^7 + 1254M^6 + 1038M^5 - 4948M^4 - 21832M^3 + 60144M^2 - 35520M$
11	$w_{11}$	$2N^{11} + 2048N^9 + 2048N^7 + 2048N^5 + 2048N^3$	$2M^{11} - 20M^{10} + 4268M^9 - 13072M^8 + 30240M^7 - 58240M^6 + 91008M^5 - 110080M^4 + 97536M^3 + 290816M^2 - 331776M$

**5.1.5. Алгебра графов и теорема о четырех красках.** Теорема о четырех красках утверждает, что всякую карту на плоскости можно покрасить четырьмя красками так, что любые две страны, имеющие общий участок границы, будут окрашены в разные цвета. Например:



При этом, конечно, предполагается, что страна не может граничить сама с собой, как на рисунке:



где самая светлая страна является своим собственным соседом.

Цель настоящего параграфа показать, что алгебра 3-графов имеет непосредственное отношение к теореме о четырех красках, раскрывая ее алгебраический смысл.

### Предварительные результаты

**ЛЕММА 5.6.** (А. Кэли [45], А. Кемпе [70], 1879). *Теорему о четырех красках достаточно доказать для карт, у которых в одной точке сходится не более трех стран.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что мы умеем правильно раскрашивать любую карту, удовлетворяющую условиям леммы. Пусть дана карта, у которой в какой-то точке сходится более трех стран. Окружив каждую такую точку новой маленькой страной, мы получим карту, которая удовлетворяет условиям леммы. Раскраска этой новой карты, как видно из рисунка



индуцирует требуемую раскраску исходной карты.  $\square$

Пусть  $G$  — граф границ карты, т. е. граф, вершинами которого служат точки, общие для трех и более стран, а ребрами — границы стран. Согласно предыдущей лемме, можно считать  $G$  регулярным

трехвалентным графом. Таким образом, лемма Кэли–Кемпе служит причиной появления 3-графов в теореме о четырех красках.

**Определение.** *Реберной 3-раскраской* трехвалентного графа называется раскраска его ребер в три цвета такая, что в любой вершине сходятся ребра трех различных цветов.

ЛЕММА 5.7. (П. Тейт [110], 1880) *Раскраски плоской карты в четыре цвета с фиксированным цветом одной из стран находятся во взаимно-однозначном соответствии с реберными 3-раскрасками графа границы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать четыре цвета, в которые раскрашена карта, элементами  $0, a, b, c$  группы Клейна  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Построим реберную 3-раскраску графа  $G$  цветами  $a, b$  и  $c$ . А именно, ребро, разделяющее страны, покрашенные в цвета  $\alpha$  и  $\beta$ , покрасим цветом  $\alpha + \beta$ .



Обратная процедура: построение раскраски карты по данной раскраске графа — заключается в том, что мы сначала красим выбранную страну в фиксированный цвет, а затем, путешествуя от этой страны по всей карте с набором кистей и пересекая границу цвета  $x$ , всякий раз прибавляем этот  $x$  к текущему цвету.

Корректность и взаимная обратность этих двух отображений вытекают из свойств операции сложения в группе  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

Важным моментом в истории теоремы о четырех красках было введение П. Хивудом в 1898 году понятия знака вершины для реберной 3-раскраски плоского графа [62]. Отсюда сразу видно, что наша алгебра 3-графов имеет непосредственное отношение к теореме о 4 красках.

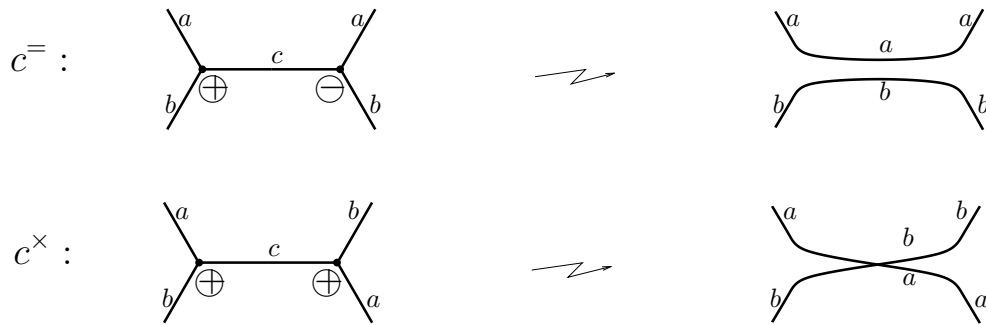
**Определение.** Вершине плоского графа приписывается знак «+», если при ее обходе против часовой стрелки цвета встречаются в порядке  $a, b, c$ . Если цвета встречаются в противоположном порядке  $a, c, b$ , то вершине приписывается знак «−».



Следующая теорема была известна в 1950-х годах Р. Пенроузу, который привел ее в [100] с замечанием, что известное ему доказательство этого простого факта слишком сложно, чтобы рассказывать о нем другим. Мы изложим доказательство теоремы Пенроуза, следуя Л. Кауффману [68].<sup>2</sup>

**ТЕОРЕМА 5.1.** *Произведение знаков вершин реберной 3-раскраски плоского графа не зависит ни от раскраски, ни от графа с данным числом вершин  $2n$  и равно  $(-1)^n$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $V$  — множество вершин графа  $G$ ,  $\#(V) = 2n$ , а  $\varepsilon_v$  — знак вершины  $v$ . Тогда  $\prod_{v \in V} \varepsilon_v = \prod_{(v_1, v_2) \in c} \varepsilon_{v_1} \varepsilon_{v_2}$ , где последнее произведение берется по всем ребрам  $(v_1, v_2)$ , покрашенных цветом  $c$  ( $c$ -ребер). Легко видеть, что число  $c$ -ребер равно  $\#(c) = \#(V)/2 = n$ . Они разбиваются на два класса  $c^=$  и  $c^\times$  в зависимости от того, разные ли знаки концов ребра или одинаковые:



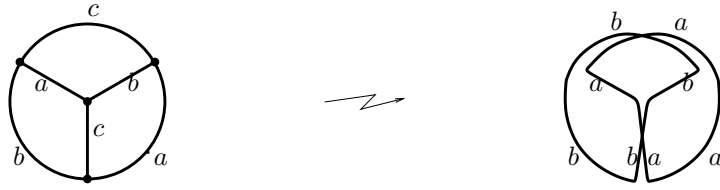
Следовательно, произведение знаков вершин равно

$$(-1)^{\#(c^=)} = (-1)^{2n} (-1)^{\#(c^\times)} = (-1)^n (-1)^{\#(c^\times)}.$$

Остается показать, что число  $\#(c^\times)$  четно. Это делается следующим трюком Кауффмана. Разрешим все  $c$ -ребра, как показано на рисунке выше. Тогда мы получим набор окружностей, часть которых покрашена цветом  $a$ , а часть — цветом  $b$ . Окружности одного цвета не пересекаются. Видно, что число ребер типа  $c^\times$  равно числу пересечений окружностей цвета  $a$  с окружностями цвета  $b$ . А это число четно по теореме Жордана (каждая окружность разбивает плоскость на две связные компоненты). Вот пример:

<sup>2</sup>Я предлагал эту теорему в качестве задачи на зональном туре Российской математической олимпиады школьников в 1995 году [77]. Школьники нашли по крайней мере два решения, отличных от решения Кауффмана.





□

**Число раскрасок 3-графа** Рассмотрим функцию, определенную на множестве плоских графов,

$$\chi(G) = \sum_{\substack{\text{реберные} \\ \text{3-раскраски } G}} \prod_{v \in V} \varepsilon_v .$$

По предыдущей теореме, все слагаемые в этой сумме одинаковы и равны  $(-1)^n$ . Значит,  $\chi(G)$  равно, с точностью до знака, числу реберных 3-раскрасок  $G$ . Теорема о четырех красках теперь может быть переформулирована как утверждение, что  $\chi(G) \neq 0$  для плоского графа  $G$ .

Для определения знака вершин по Хивуду ( $\varepsilon_v$ ) графу вовсе не обязательно быть плоским. Достаточно фиксировать *вращение* в каждой вершине графа, т. е. рассмотреть *3-граф* в терминологии параграфа 1. В этой ситуации знак вершины определяется в зависимости от того, согласован ли циклический порядок цветов ребер с вращением в данной вершине или нет. Следовательно, можно расширить область определения функции  $\chi(G)$ , задав ее той же формулой на всем множестве 3-графов.

**Утверждение 1.** *Функция  $\chi$  удовлетворяет соотношениям*

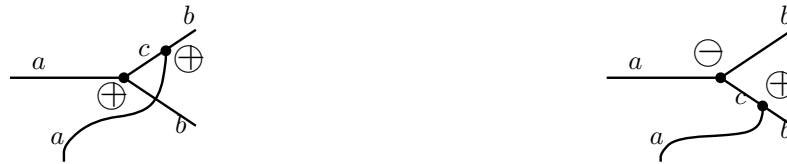
$$(AS): \quad \chi \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \right) = - \chi \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \\ | \end{array} \right) ;$$

$$(IHX): \quad \chi \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \right) = \chi \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) + \chi \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) .$$

Следовательно, функция  $\chi$  корректно определена на алгебре  $\Gamma$ . При этом ее значение на окружности (единичном элементе алгебры) естественно считать равным 3.

**Доказательство.** Соотношение (AS) очевидно. Действительно, при смене вращения в одной из вершин 3-графа  $G$  ровно один из знаков вершин в каждой реберной 3-раскраске поменяется на противоположный. Следовательно, все слагаемые в формуле, определяющей  $\chi(G)$ , поменяют знак.

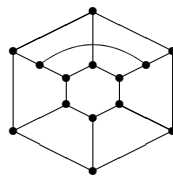
Докажем соотношение (ИHX). Без ограничения общности можно считать, что среднее ребро в левой части соотношения покрашено цветом  $c$ . Тогда для оставшихся четырех ребер имеет место либо возможность  $c^=$ , либо  $c^\times$  из пункта 5.1. В первом случае соответствующая раскраска индуцирует раскраску первого слагаемого правой части соотношения, во втором — второго. Таким образом, каждое слагаемое  $\chi(G)$  для левой части представлено либо в первом, либо во втором слагаемом правой части. Дополнительные члены, возникающие в правой части, взаимно уничтожаются, так как их можно разбить на пары вида



Утверждение 1 доказано.

**Следствие.** Число раскрасок  $\chi(G)$  графа  $G$ , равно нулю как элемент алгебры  $\Gamma$ , равно нулю.<sup>3</sup>

**Замечания. 1.** Приведем пример графа  $G$ , отличного от нуля в алгебре  $\Gamma$ , но такого, что  $\chi(G) = 0$ :



**2.** Функция  $\chi$  на алгебре  $\Gamma$  удовлетворяет более сильному, чем (ИHX), но неоднородному в смысле градуировки  $\Gamma$  соотношению:

$$(L) : \quad \chi \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) = \chi \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) - \chi \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) ,$$

которое доказывается подобно (ИHX).

<sup>3</sup>Отсюда вытекает такой априори неочевидный факт: *плоский граф не может быть равен нулю в алгебре  $\Gamma$* . Интересно найти доказательство этого факта, не опирающееся на теорему о четырех красках.

Это соотношение было известно Лагранжу (быть может, и Эйлеру), как тождество  $a \times (b \times c) = b(a, c) - c(a, b)$  для обычного векторного произведения<sup>4</sup>. Оно было переоткрыто Р. Пенроузом [100] в контексте теории графов и алгебр Ли, а затем в [47] в контексте теории инвариантов Васильева.

Соотношение (L), вообще говоря, выводит из класса связных графов. В этом случае надо считать  $\chi$  равным произведению соответствующих значений на связных компонентах.

Приведенные соотношения дают следующий подход к доказательству теоремы о четырех красках. Нужно представить плоский граф  $G$  в виде линейной комбинации плоских графов с меньшим числом вершин по модулю последнего соотношения. Если все коэффициенты линейной комбинации имеют один и тот же знак и все графы линейной комбинации имеют одно и то же число вершин по модулю 4, то исходный граф не может служить минимальным контрпримером к проблеме 4 красок ( $\chi(G)$  не равно нулю ввиду соотношения и минимальности контрпримера). Это действительно удается сделать, если граф  $G$  содержит двуугольник, треугольник или четырехугольник. А именно, пользуясь соотношением (L), легко доказать следующие равенства [100]:

$$\begin{aligned} \chi \left( \text{---} \diamond \text{---} \right) &= -2\chi \left( \text{---} \right) \\ \chi \left( \text{---} \triangle \text{---} \right) &= -\chi \left( \text{---} \vee \text{---} \right) \\ \chi \left( \text{---} \square \text{---} \right) &= \chi \left( \text{---} \right) \left( \text{---} \right) + \chi \left( \text{---} \bowtie \text{---} \right) \end{aligned}$$

Для полного доказательства теоремы о четырех красках достаточно вывести аналогичное соотношение для графов с пятиугольником. Однако, полученная нами формула (см. также [100])

$$\chi \left( \text{---} \pentagon \text{---} \right) = \chi \left( \text{---} \vee \text{---} \right) + \chi \left( \text{---} \vee \text{---} \right) + \chi \left( \text{---} \vee \text{---} \right) + \chi \left( \text{---} \vee \text{---} \right)$$

<sup>4</sup>Чтобы понять связь между этими формулировками, нужно посмотреть на обе части тождества Лагранжа с переменными  $a, b, c$  как на элементы четвертой тензорной степени алгебры Ли  $so_3$ .

не приводит к доказательству теоремы о четырех красках, ибо графы в правой части имеют разное по модулю 4 число вершин (т. е. соответствующие значения  $\chi$  различаются знаком).

### 3-раскраски и алгебра Ли $so_3$

Рассмотрим трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения как алгебру Ли  $so_3(\mathbb{R})$ .<sup>5</sup>

Фиксируем ад-инвариантную невырожденную форму  $B(x, y) = -\frac{1}{2} \text{tr}(xy)$ . Тогда функция числа раскрасок  $\chi$  совпадает с функцией  $K_{so_3}^B$ , построенной в параграфе 4. Действительно, выберем в  $so_3$  ортонормированный (относительно нашей формы) базис, состоящий из матриц

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из соотношений коммутации  $[a, b] = c$ ,  $[b, c] = a$ ,  $[c, a] = b$  следует, что тензор  $J$ , приписываемый вершине графа, равен

$$J = a \otimes b \otimes c + b \otimes c \otimes a + c \otimes a \otimes b - b \otimes a \otimes c - c \otimes b \otimes a - a \otimes c \otimes b.$$

Сворачивание  $3n$ -й степени этого тензора в соответствии с правилом параграфа 4.1 в точности равносильно подсчету числа реберных 3-раскрасок графа (вдоль ребра цвет должен быть одинаков, а каждая вершина дает множитель 1 или  $-1$  в зависимости от циклического порядка трех «цветов»  $a, b, c$ ). Таким образом, функция числа раскрасок является частным случаем общей конструкции функций на алгебре  $\Gamma$ , построенных по алгебре Ли. Отсюда и из общего свойства мультипликативности, доказанного в 4.1, вытекает следующее утверждение.

**Предложение.** *Функция  $\chi(\cdot)/3$  на алгебре  $\Gamma$  мультипликативна, т.е. является гомоморфизмом алгебр  $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ .*

Используя введенные термины, мы можем переформулировать теорему о четырех красках таким образом: *значение  $so_3$ -инварианта на любом плоском 3-графе отлично от 0.*

**5.1.6. Алгебра графов и инварианты Васильева.** Мы укажем связь алгебры 3-графов с инвариантами узлов конечного порядка, основываясь непосредственно на рассмотрении фильтрации Васильева в пространстве, порожденном изотопическими классами узлов.

<sup>5</sup>Вместо  $so_3$  можно рассматривать изоморфную ей над  $\mathbb{C}$  алгебру  $sl_2$ .

Множество всех особых узлов с  $n$  двойными точками мы обозначим через  $\mathcal{K}_n$ . Полное разрешение особого узла  $K \in \mathcal{K}_n$  — это линейная комбинация  $2^n$  неособых узлов

$$\sigma(K) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} (-1)^{|\varepsilon|} K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n},$$

где  $|\varepsilon|$  обозначает число минус единиц в наборе  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , а узел  $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$  получается из  $K$  разрешением всех двойных точек, причем  $i$ -я точка разрешается в положительном или отрицательном смысле в зависимости от знака  $\varepsilon_i$ .

**Пример.**

$$\sigma\left(\text{Knot with 2 double points}\right) = \text{Res}_1^+ \text{Res}_2^+ - \text{Res}_1^+ \text{Res}_2^- - \text{Res}_1^- \text{Res}_2^+ + \text{Res}_1^- \text{Res}_2^-$$

Рассмотрим линейное пространство  $\mathcal{X}$ , свободно порожденное изотопическими классами (неособых) узлов в  $\mathbb{R}^3$ , и в нем убывающую фильтрацию

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \supseteq \mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \mathcal{X}_3 \supseteq \dots,$$

где  $\mathcal{X}_n$  — подпространство, порожденное полными разрешениями особых узлов с  $n$  двойными точками, т. е. линейная оболочка образа  $\sigma(\mathcal{K}_n)$ .

Как мы знаем, факторпространство  $\mathcal{X}_n/\mathcal{X}_{n+1}$  изоморфно пространству хордовых диаграмм  $\mathcal{A}_n$ .

Связь между особыми узлами и хордовыми диаграммами осуществляется посредством следующей конструкции.

**Определение.** Хордовая диаграмма  $\varphi(K)$  особого узла  $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — это окружность  $S^1$  с набором  $n$  хорд, соединяющих пары точек, которые имеют один и тот же образ при отображении  $K$ .

**Пример.** Для особого узла, приведенного выше в качестве примера, имеем:

$$\varphi\left(\text{Knot with 2 double points}\right) = \text{Circle with 2 chords}$$

Как мы знаем, вместо пространства хордовых диаграмм можно использовать чуть более широкое пространство диаграмм Фейнмана  $\mathcal{C}$  (см. пункт 1.4.2), которое также является алгеброй Хопфа и отличается от  $\mathcal{A}$  наличием ненулевого примитивного элемента степени 1.

Другими словами,  $\mathcal{A}$  есть факторалгебра  $\mathcal{C}$  по идеалу, порожденному диаграммой Фейнмана  $b = \bigcirc$  (т.н. «пузырь»).

**ТЕОРЕМА 5.2.** *Соответствие  $\sigma(K) \mapsto [\varphi(K)] \in \tilde{\mathcal{C}}_n$  продолжается до корректно определенного линейного отображения  $\mathcal{X}_n \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_n$ , ядро которого совпадает с  $\mathcal{X}_{n+1}$ . Таким образом, для всех  $n > 1$  имеет место изоморфизм линейных пространств  $\mathcal{X}_n/\mathcal{X}_{n+1} \cong \mathcal{C}_n$ .*

Этот факт является одной из переформулировок теоремы Васильева–Концевича (1.1), подробное доказательство которой приведено в главе 2.

### Связные диаграммы Фейнмана и 3-графы

Алгебра Фейнмана  $\mathcal{C}$  обладает еще коумножением (и умножение, и коумножение согласованы с соответствующими операциями в пространстве  $\mathcal{K}$ , см. [31, 26, 11]) и на самом деле представляет собой коммутативную и кокоммутативную градуированную алгебру Хопфа.

Хорошо известно, что коммутативная и кокоммутативная алгебра Хопфа совпадает с симметрической алгеброй над своим пространством примитивных элементов, т. е. представляет собой алгебру многочленов от примитивных образующих. Для градуированной алгебры подпространство примитивных элементов также градуировано:  $\mathcal{P} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ , где  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap \mathcal{C}_n$ . В случае алгебры диаграмм Фейнмана  $\mathcal{P}_1$  одномерно и порождено элементом  $\bigcirc$ . Факторалгебра  $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/(\bigcirc)$  также является алгеброй Хопфа, а ее пространство примитивных элементов естественно отождествляется с прямой суммой  $\bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathcal{P}_n$ .

По построению, пространство примитивных элементов  $\mathcal{P}$ , рассматриваемое само по себе, не обладает никакой структурой алгебры. Примитивные элементы лишь порождают алгебру  $\mathcal{C}$  подобно тому как переменные  $x_1, \dots, x_n$  порождают алгебру многочленов  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Однако, выявление связи пространства  $\mathcal{P}$  с алгеброй графов  $\Gamma$  позволяет ввести в  $\mathcal{P}$  естественное (некоммутативное) умножение. Сейчас мы объясним, как это делается.

Связь между линейными пространствами  $\Gamma$  и  $\mathcal{P}$  заключается в следующем:

1. Имеет место вложение  $i : \Gamma_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ , которое строится так: у графа разрывается произвольное ребро, и к его концам приклеивается петля Уилсона. Ориентация на петле Уилсона берется произвольная.

2. Имеет место проекция  $\pi : \mathcal{P}_n \rightarrow \Gamma_n$ , которая заключается в забывании того, что петля Уилсона выделена, и во введении вращения в вершинах на петле Уилсона по принципу «вперед–вбок–назад».

Композиция двух указанных гомоморфизмов, т. е. сквозное отображение  $\Gamma \rightarrow \Gamma$  в последовательности

$$\Gamma \xrightarrow{i} \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \Gamma$$

есть умножение на пузырь  $g \mapsto bg$ .

Мультипликативная структура алгебры графов приводит к тому, что имеется действие  $\Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , которое порождает умножение  $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ .

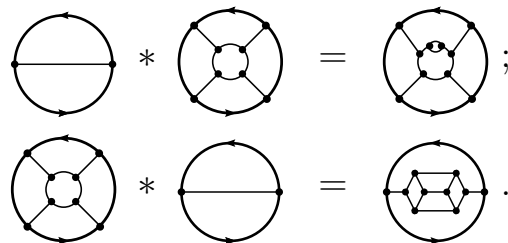
Определим сначала действие  $*' : \Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ . Для данных элементов  $g \in \Gamma$  и  $p \in \mathcal{P}$  построим их произведение  $g *' p$  следующим образом. Разорвем в  $g$  какое-нибудь (произвольное) ребро. А в  $p$  разорвем ребро, не лежащее на петле Уилсона. И склеим у двух полученных объектов образовавшиеся концы (точно так, как определялось умножение в самой алгебре  $\Gamma$ ). Результат  $g *' p$  имеет одну петлю Уилсона и связан, стало быть, принадлежит  $\mathcal{P}$ .

Теперь определим умножение  $*$  связанных диаграмм Фейнмана  $p, q \in \mathcal{P}$  по формуле

$$p * q = \pi(p) *' q,$$

где  $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \Gamma$  — определенный выше гомоморфизм забывания петли Уилсона.

**Пример.** Умножение  $*$ , вообще говоря, некоммутативно:



Эти два элемента пространства  $\mathcal{P}$  различаются, например,  $sl_2$ -инвариантом, построенным в [47].

Корректность данных определений можно проверить подобно тому, как это было сделано в параграфе 1 для алгебры  $\Gamma$ .

**Гипотеза.** В алгебре примитивных элементов  $\mathcal{P}$  нет делителей нуля.

*Замечание.* Эта гипотеза, по всей видимости, неверна. П. Вожель (частное сообщение в электронном письме автору, 2006) построил ненулевой элемент алгебры диаграмм Якоби с линейным порядком на вершинах, состоящий из альтернированной суммы 720 диаграмм степени 11, который зануляется умножением на «пузырь». Хотя этот пример живет в другом пространстве, нам представляется, что его можно модифицировать и для алгебры  $\Gamma$ , и для алгебры  $\mathcal{B}$ .

## 5.2. Игрушечная теория инвариантов Васильева

Здесь мы развиваем теорию инвариантов конечного типа для гладких гиперповерхностей  $\mathbb{R}^n$ . В случаях  $n = 1, 2, 3$  эти инварианты допускают полное описание: они образуют полиномиальную алгебру с одной образующей.

**5.2.1. Постановка задачи.** Методы, развитые В. Васильевым для изучения дополнений к дискриминантам, оказались полезными в различных контекстах. Похоже, однако, что успех той или иной теории зависит в известной степени от везения. В то время как в одних случаях возникают богатые и загадочные теории (например, в классическом случае узлов), в других случаях инварианты конечного типа не порождают почти никакой интересной информации. В данном разделе этот тезис будет продемонстрирован на примере *коузлов*.

Коузлы — это гладкие функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , стремящиеся к бесконечности на бесконечности; мы будем понимать это последнее требование в следующем точном смысле:  $f(x) \sim |x|^2$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Коузел называется *особым*, если 0 является его критическим значением; особые коузлы образуют *дискриминант*  $\Sigma$  в пространстве  $\mathcal{F}$  всех коузлов. Мы будем считать два коузла эквивалентными, если они лежат в одной связной компоненте дополнения  $\mathcal{F} - \Sigma$ . Неособый коузел определяется своим нулевым уровнем с точностью до эквивалентности; таким образом, классы эквивалентности коузлов находятся во взаимно-однозначном соответствии с гладкими гиперповерхностями в  $\mathbb{R}^n$ , рассматриваемыми с точностью до изотопии.

Под инвариантом коузлов мы понимаем локально постоянную функцию на пространстве  $\mathcal{F} - \Sigma$ . Инварианты конечного типа определяются так же, как и в стандартном случае узлов, а именно, функция  $\varphi$  есть инвариант Васильева степени  $< m$ , если альтернированная



сумма

$$\varphi(f) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m} (-1)^{|\varepsilon|} \varphi(f_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m})$$

равна нулю для любой функции  $f \in \Sigma$ , имеющей  $m$  невырожденных критических точек с критическим значением 0. Здесь  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  — это последовательность знаков  $\pm$ , ее модуль  $|\varepsilon|$  — число минусов в ней и  $f_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m} \in \mathcal{F} - \Sigma$  обозначает функцию, полученную из  $f$  малым возмущением вблизи критических точек в соответствии со знаком  $\varepsilon_i$ .

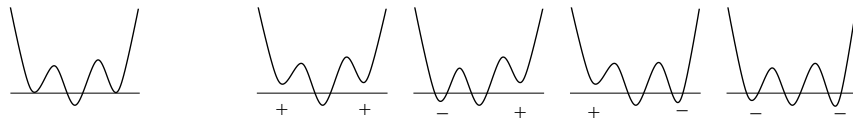
Теория узлов в  $\mathbb{R}^3$  может рассматриваться как подмножество теории коузлов с  $n = 3$ : заузленные торы можно рассматривать и как узлы и как коузлы. Тем не менее, как мы покажем ниже, инварианты Васильева коузлов при  $n = 3$  совершенно не различают заузленность: все, что они чувствуют, это Эйлерова характеристика. (Подобная же картина наблюдается и в случаях  $n = 1, 2$ .) Как мы видим, теория инвариантов конечного типа для коузлов оказывается в итоге очень простой, и поэтому мы назвали ее игрушечной.

**5.2.2. Формулировка результатов.** Начнем с обсуждения простейшего случая  $n = 1$ . Одномерный (неособый) коузел — это функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , которая стремится к  $+\infty$  при  $|x| \rightarrow \pm\infty$  и не имеет критического значения 0. Классы эквивалентности таких функция определяются числом нулей, которое является четным целым числом 0, 2, 4, ... Пусть  $\varphi_k$  — значение инварианта  $\varphi$  на коузле с  $2k$  нулями. Условие, что  $\varphi$  есть инвариант конечного типа степени  $< m$  переписывается как тождество

$$\varphi_k - m\varphi_{k+1} + \frac{m(m-1)}{2}\varphi_{k+2} - \dots + (-1)^m \varphi_{k+m} = 0$$

для всех  $k = 0, 1, 2, \dots$

Вот иллюстрация для частного случая  $n = 2, k = 1$ :



Здесь показана точка дискриминанта и ее четыре разрешения, дающие тождество  $\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 = 0$  на инвариант  $\varphi$  степени 1.) Введем разностный оператор  $\Delta$  в пространстве вещественных последовательностей равенством  $\Delta(\varphi)_k := \varphi_k - \varphi_{k+1}$ , тогда условие на инварианты степени  $\leq n$  приобретает компактную запись  $(\Delta - 1)^m(\varphi) = 0$ . Общее решение этого уравнения есть произвольная последовательность  $\{\varphi_k\}$ , которая зависит от  $k$  как многочлен степени  $< m$ .

Алгебра вещественнозначных инвариантов конечного типа представляет собой в этом случае алгебру многочленов  $\mathbb{R}[k]$ , где образующая  $k$  есть инвариант, принимающий значение  $k$  на неособых функциях (коузлах) с  $2k$  нулями.

В случаях  $n = 2$  и  $n = 3$  ответ вполне аналогичен. Напомним, что плоский коузел  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  определяется неособой кривой  $f^{-1}(0)$ , представляющей собой конфигурацию овалов, в то время как пространственный коузел  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  описывается неособой конфигурацией замкнутых поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ .

**ТЕОРЕМА 5.3.** *Для заданной конфигурации овалов на плоскости раскрасим плоскость в шахматном порядке, начиная с белого цвета на бесконечности и меняя цвет при каждом пересечении линии. Пусть  $e = b - w$ , где  $b$  — число компактных белых, а  $w$  — число компактных черных областей. Тогда: (1)  $e$  есть инвариант конечного типа степени 1, (2) вся алгебра инвариантов конечного типа 2-мерных коузлов равна  $\mathbb{R}[e]$ .*

**ТЕОРЕМА 5.4.** *Пусть  $\chi$  — эйлерова характеристика неособой компактной гиперповерхности в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда (1)  $\chi$  есть инвариант коузлов конечного типа степени 1, (2) вся алгебра вещественнозначных инвариантов конечного типа совпадает с  $\mathbb{R}[\chi]$ .*

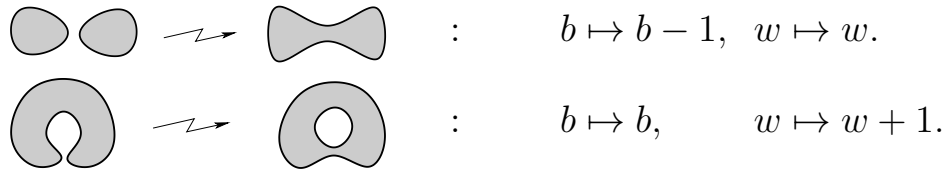
**5.2.3. Доказательство в размерности 2.** Инвариант коузлов в размерности 2 — это функция конфигураций плоских овалов, рассматриваемых с точностью до топологической эквивалентности. Главный страт дискриминанта состоит из кривых с конечным числом особенностей двух типов: изолированные точки и трансверсальные самопересечения. Классы эквивалентности коузлов находятся, очевидно, во взаимно-однозначном соответствии с корневыми деревьями, но мы не будем использовать этот язык, поскольку все необходимые факты легко формулируются непосредственно в терминах овалов.

Как обычно, пространство инвариантов степени 0 одномерно и состоит из констант, поскольку такие инварианты не меняются при любом проходе сквозь дискриминант.

**ЛЕММА 5.8.** *Функция  $e$ , описанная теореме 5.3, есть инвариант степени 1.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нужно доказать тождество  $e(K_{++}) - e(K_{+-}) = e(K_{-+}) - e(K_{--})$ , где буквы  $K$  с индексами обозначают коузлы, получаемые всеми разрешениями из особого коузла с двумя особыми

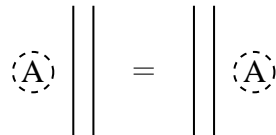
точками. Говоря попросту, это значит, что скачок функции  $e$ , соответствующий изменению второго индекса с  $+$  на  $-$ , не зависит от значения первого индекса ( $+$  или  $-$ ). Вспомним, что  $e = b - w$ , где  $b$  (соответственно  $w$ ) есть число черных (соответственно белых) связанных компонент дополнения к кривой. Тот факт, что скачок функции  $e$  определяется локальным поведением коузла в окрестности рассматриваемой точки, очевиден для изолированных особых точек, где происходит рождение или смерть овала. Для особых точек второго рода, соответствующих седловой перестройке, необходимо рассмотреть два случая, в зависимости от того, существуют или нет две области, сливающиеся при прохождении дискриминанта. Следующий рисунок показывает, что в каждом из этих случаев скачок величины  $b - w$  получается одинаковый:



□

Для того чтобы доказать, что *любой* инвариант конечного типа плоских коузлов есть полином от  $e$ , мы вначале опишем два локальных преобразования коузлов, которые не меняют значений инвариантов конечного типа. Назовем два коузла *КТ-эквивалентными*, если они неразличимы инвариантами конечного типа.

**ЛЕММА 5.9.** *Локальный набор овалов может свободно проходить через двойную стенку: если  $K$  и  $K'$  — конфигурации овалов, которые отличаются как показано на рисунке ( $A$  есть произвольная конфигурация овалов внутри некоторого диска, то  $K$  и  $K'$  КТ-эквивалентны.*



**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\varphi$  — инвариант степени  $< t$ . Заменим параллельные линии двумя линиями, примерно параллельными, но имеющими  $t$  точек пересечения, и воспользуемся определением инвариантов конечного типа. Мы получим две линейные комбинации, которые обе равны нулю и совпадают во всех членах, кроме одного, который как раз и отвечает коузлам  $K$  and  $K'$ . Это проиллюстрировано на рисунке, где мы взяли  $t = 3$ . Слева изображается особый

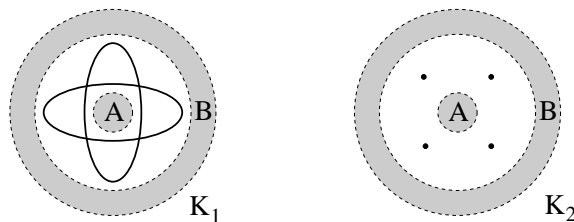
коузел, справа — соответствующее тождество для значений функции  $\varphi$  (для упрощения обозначений мы пишем  $x$  вместо  $\varphi(x)$ ):

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{A} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad \Bigg| \quad \textcircled{A} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} - 3 \textcircled{A} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} + 3 \textcircled{A} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} - \textcircled{A} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = 0 \\
 \\
 \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \textcircled{A} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \textcircled{A} - 3 \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \textcircled{A} + 3 \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \textcircled{A} - \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \textcircled{A} = 0
 \end{array}$$

□

**ЛЕММА 5.10.** *Концентрические окружности аннигилируют парами: если  $K$  — конфигурация, содержащая две окружности, одну внутри другой, так что кольцо между ними пусто, а конфигурация  $K'$  получается из  $K$  стиранием этой пары окружностей, то  $K$  и  $K'$  КТ-эквивалентны. В частности, конфигурация, состоящая из двух концентрических окружностей, КТ-эквивалентна пустой плоскости.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство аналогично предыдущей лемме. Пусть  $\varphi$  — инвариант степени  $< t$ . Введем вспомогательные коузлы  $K_1, K_2$ , заменяя концентрические окружности на (1) круговую кривую (из одной или двух компонент) с  $t$  самопересечениями (2)  $t$  изолированных точек. Распишем (равные нулю) линейные комбинации значений инварианта  $\varphi$  на полных разрешениях особых коузлов  $K_1$  и  $K_2$ . Как и выше, мы увидим, что в этих разложениях есть только по одному различающемуся члену, и эти члены суть в точности  $\varphi(K)$  и  $\varphi(K')$ . Рисунок показывает особые коузлы  $K_1$  и  $K_2$ , построенные для инвариантов степени  $\leq 3$ :

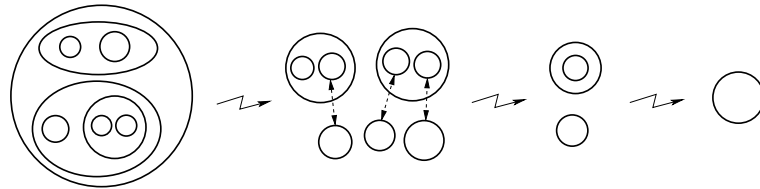


В каждом случае, области  $A$  и  $B$ , отмеченные серым, обозначают один и тот же набор овалов. □

**ЛЕММА 5.11.** *Если  $p = e(K) \geq 0$ , то конфигурация  $K$  КТ-эквивалентна набору  $p$  окружностей, лежащих снаружи друг друга*

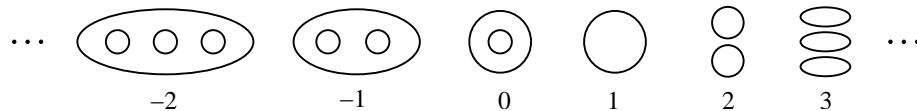
(в случае  $p = 0$  это просто пустое множество). Если  $p = e(K) < 0$ , то конфигурация  $K$  КТ-эквивалентна окружности, содержащей внутри себя  $1 - p$  маленьких окружностей, расположенных снаружи по отношению друг к другу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. К данному набору овалов будем применять движение из леммы 5.9, вытаскивая внутренние овалы наружу через две линии за раз. Таким образом получится конфигурация глубины максимум 1, то есть набор пустых окружностей, которые ни в чем не содержатся (назовем их, «внешними») плюс какие-то окружности, содержащие внутри себя какие-то («внутренние») овалы. Если есть хотя бы одна пара, состоящая из внутреннего и внешнего овалов, мы можем задвинуть один внутрь другого, после чего они аннигилируют по лемме 5.10. Этот процесс проиллюстрирован на рисунке, где аннигилирующие пары для ясности соединены стрелками:



□

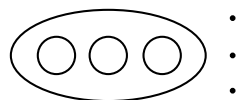
Таким образом, функция  $e$  устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами КТ-эквивалентности и всеми целыми числами:



Поэтому инвариант  $\varphi$  — это все равно, что числовая последовательность  $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Следующая лемма завершает доказательство теоремы 5.3.

ЛЕММА 5.12. *Функция  $\varphi(e)$  определяет инвариант конечного типа тогда и только тогда, когда это многочлен от переменной  $e$ . Степень многочлена совпадает со степенью инварианта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что  $\varphi(e)$  — инвариант степени  $< t$ . Обозначим через  $N_p$  набор овалов, описанный в лемме 5.11 с  $e(N_p) = p$ . Рассмотрим семейство особых коузлов  $S_{m,p}$ , состоящих из кривой  $N_p$  и  $t$  изолированных точек — вот, например коузел  $S_{3,-2}$ :



Распишем условие конечности типа для  $\varphi$  в этой точке дискриминанта. Мы сразу видим, что оно равносильно тождеству  $\Delta^m(\varphi) = 0$ , где  $\Delta$  — разностный оператор на пространстве последовательностей целых чисел, определенный в пункте 5.2.2. Это тождество, в свою очередь, эквивалентно тому факту, что функция  $\varphi$  полиномиальна.  $\square$

**5.2.4. Доказательство в размерности 3.** В этом пункте мы докажем теорему 5.4 об инвариантах конечного типа пространственных коузлов, то есть гладких замкнутых поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ . Всякая такая поверхность в  $\mathbb{R}^3$  есть объединение конечного числа связных поверхностей  $Q_g$  рода  $g \geq 0$ . Разумная классификация вложений  $Q_g$  в  $\mathbb{R}^3$  известна только для  $g = 0, 1$  (см. проблему 3.11 в известном списке Кирби открытых проблем в топологии [citeKir](#)). Представление о том, как может выглядеть подобное вложение, дает такой пример: возьмите шар, просверлите в нем два заузленных и зацепленных туннеля, добавьте тор, проходящий через оба туннеля и присоедините его к краю предыдущего ручкой. Хотя эта картина выглядит довольно устрашающе, мы увидим, что инварианты конечного типа нечувствительны к подобным патологиям.

Рассуждение, при помощи которого мы сейчас расклассифицируем инварианты конечного типа, подобно использованному в пункте 5.2.3: мы введем некоторые движения коузлов, не выводящие их из класса КТ-эквивалентности, и, используя эти движения, приводим любой коузел к нормальной форме, однозначно определяемой эйлеровой характеристикой.

*ЛЕММА 5.13. Эйлерова характеристика  $\chi(S)$  поверхности  $S$  есть инвариант степени 1.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как и в лемме 5.8, необходимо проверить, что скачок Эйлеровой характеристики при простом прохождении дискриминанта не зависит от устройства поверхности вдали от этой точки. Для изолированных точек, где происходит рождение или уничтожение малой сферы, это ясно. Для особенностей второго рода (конических точек, где маленький двуполостный гиперboloид становится однополостным) следует рассмотреть два случая:

- (1) Две сливающиеся части принадлежат разным связным компонентам. Это преобразование  $Q_g \cup Q_h \mapsto Q_{g+h-1}$ .
- (2) Обе части принадлежат одной и той же компоненте  $Q_g$ , которая превращается в  $Q_{g+1}$ .

Мы видим, что в любом случае суммарная эйлерова характеристика изменяется на 2, то есть ее изменение определяется чисто локально.  $\square$

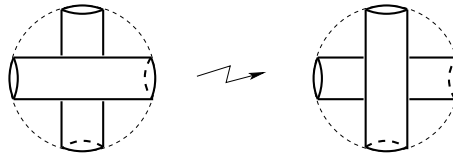
Оказывается, что любой инвариант конечного типа 3-мерных узлов на самом деле является функцией величины  $\chi$ .

Пусть  $S$  — поверхность, вложенная в  $\mathbb{R}^3$ . *Трубкой* в  $S$  мы называем вложенный полный цилиндр  $T \subset \mathbb{R}^3$  такой что  $S \cap T$  есть в точности боковая сторона  $T$ . Предположим, что  $S, S'$  — две поверхности и  $T, T'$  — трубки в  $S$  и  $S'$  соответственно, обе лежащие внутри или обе снаружи соответствующих поверхностей. Если цилиндры  $T$  и  $T'$  имеют одинаковые основания и

$$S - S \cap T = S' - S' \cap T',$$

то мы будем говорить, что поверхность  $S'$  получается из  $S$  посредством *перенаправления трубки*  $T$ .

Простейшим примером перенаправления трубки является «замена перекрестка»:



**ЛЕММА 5.14.** *Посредством перенаправления трубок всякую поверхность в  $\mathbb{R}^3$  можно преобразовать в объединение незацепленных (но возможно вложенных друг в друга) поверхностей, каждая из которых ограничивает шар или шар с ручками в  $\mathbb{R}^3$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для краткости назовем свойство поверхности из формулировки леммы «развязываемость». Утверждение леммы неявно содержится в статье Фокса [52], хотя и не сформулировано там в явном виде. Пусть  $S$  — необязательно связная поверхность, которая может быть «развязана» перенаправлением трубок, и пусть  $A$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  такая, что  $S = \partial A$ . Предположим, что  $A'$  получается из  $A$  посредством либо «просверливания туннеля» внутри  $A$ , либо приклеивания ручки к  $A$ . Тогда поверхность  $S' = \partial A'$  тоже может быть «развязана». Фокс доказывает, что любая область, ограниченная поверхностью в  $\mathbb{R}^3$ , может быть получена из области, ограниченной объединением сфер, посредством просверливания туннелей и приклеивания ручек. Отсюда и вытекает утверждение лемма 5.14.  $\square$

Следующая лемма означает, что перенаправление трубок не влияет на значения инвариантов конечного типа.

**ЛЕММА 5.15.** *Два трехмерных коузла, отличающихся перенаправлением трубок, КТ-эквивалентны.*

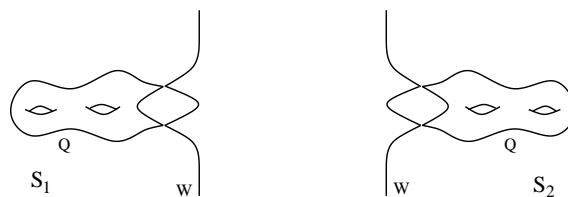
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что поверхность  $S_-$  получена из  $S_+$  перенаправлением трубки. Чтобы доказать, что  $\varphi(S_+) = \varphi(S_-)$  для любого инварианта  $\varphi$  степени  $< n$ , рассмотрим особый коузел  $S_{\pm}^*$ , полученный из  $S_{\pm}$  сжатием цилиндра  $T$  в  $n$  местах, так что получатся  $n$  конических точек. Условие конечности типа на  $\varphi$  гарантирует, что соответствующие суммы  $2^n$  слагаемых обе обращаются в нуль. Легко видеть, однако, что в этих суммах все слагаемые идентичны, за исключением одного, а именно, в первом случае это будет  $\varphi(S_+)$ , в во втором  $\varphi(S_-)$ .  $\square$

По леммам 5.14 и 5.15, любая поверхность внутри ее класса КТ-эквивалентности может быть преобразована в набор поверхностей  $Q_g$  рода  $g$ , вложенных в  $\mathbb{R}^3$  стандартным образом (с точностью до изотопии) и незацепленных между собой, хотя, возможно, вложенных друг в друга.

В случае коузлов в  $\mathbb{R}^2$  лемма 5.9 утверждала, что подобъект может пройти сквозь двойную стенку. В 3-мерном пространстве даже одиночные стенки оказываются прозрачными:

**ЛЕММА 5.16.** *Пусть  $S$  и  $S'$  — два пространственных коузла, которые отличаются только расположением одной связной компоненты: в  $S$  она находится с одной стороны некоторой поверхности, в то время как в  $S'$  — с другой стороны. Тогда коузлы  $S$  и  $S'$  КТ-эквивалентны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $Q$  — подвижная компонента и  $W$  — «стена». Пользуясь тем же аргументом, что и выше, рассмотрим два особых коузла: один ( $S_1$ ), полученный соединением компоненты  $Q$  со стеной  $W$  с одной стороны, другой ( $S_2$ ) — соединением с другой стороны, посредством множества трубок, стянутых в середине в коническую точку:





Тождества конечного типа для  $S_1$  (соответственно  $S_2$ ) состоят из  $S$  (соответственно  $S'$ ) и набора поверхностей, где  $Q$  и  $W$  соединены в одну связную компоненту и чей род одинаков в обоих случаях, а вложение в  $\mathbb{R}^3$  не представляет интереса в силу предыдущих лемм. Следовательно,  $S$  и  $S'$  КТ-эквивалентны.  $\square$

Используя эти три леммы, любую конфигурацию поверхностей (возможно заузленную, зацепленную и содержащую одни компоненты внутри других) можно преобразовать в набор стандартных, не вложенных, поверхностей рода  $g$ . Дальнейшая редукция осуществляется при помощи следующей «леммы о слиянии».

**ЛЕММА 5.17.** *Пусть  $Q_g$  — замкнутая поверхность рода  $g$ , вложенная в  $\mathbb{R}^3$  стандартным образом. Если хотя бы одно из чисел  $g, h$  больше нуля, то несвязное объединение  $Q_g \cup Q_h$  КТ-эквивалентно единой поверхности  $Q_{g+h-1}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Соединим поверхности  $Q_g$  и  $Q_h$  набором из  $t$  трубок, где каждая имеет посередине коническую особую точку. Приклеим аналогичные ручки к поверхности  $Q_{g+h-1}$ . Сравнивая тождества на инвариант конечного типа для этих двух поверхностей, мы получим требуемый результат.  $\square$

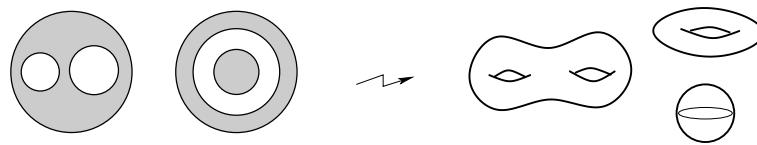
Отсюда вытекает, что любой коузел в  $\mathbb{R}^3$  эквивалентен, по модулю инвариантов конечного типа, либо набору нескольких несвязных сфер, либо одной стандартной поверхности рода  $g > 1$  (тор эквивалентен пустому пространству, то есть пустому множеству сфер — это следует из сравнения тора с  $t$  перетяжками и набора  $t$  изолированных точек. Перечисленные нормальные формы имеют разные Эйлеровы характеристики (принимающие все четные целые значения), поэтому все они неэквивалентны. Следовательно, *любой* инвариант конечного типа является функцией величины  $\chi$ . Рассуждение, аналогичное проведенному при доказательстве Леммы 5.12, доказывает следующее утверждение и тем самым завершает доказательство Теоремы 5.4.

**ЛЕММА 5.18.** *Функция  $\varphi(\chi)$  определяет инвариант конечного типа тогда и только тогда, когда она является многочленом от  $\chi$ . Степень многочлена равна степени инварианта.*

### 5.2.5. Комментарии и вопросы.

**Полнота игрушечных теорий.** Инварианты конечного типа различают коузлы в размерности 1 и не различают в размерностях 2 и 3.

**Связь между теориями в размерностях 1, 2 и 3.** Игрушечные теории во всех трех размерностях, где мы их изучали, изоморфны между собой. Изоморфизм между плоской теорией ( $n = 2$ ) и пространственной теорией ( $n = 3$ ) допускает изящную геометрическую интерпретацию. Взяв конфигурацию овалов, покрасим плоскость в шахматном порядке, как выше. Вложим плоскость в 3-пространство и, с каждой стороны плоскости, накроем черные области гладкими шапочками, которые взаимно-однозначно проектируются на плоскость. Мы получим набор замкнутых поверхностей, эйлерова характеристика которого равна удвоенному инварианту  $e$  (разности между числом компактных черных и компактных белых областей) исходной конфигурации овалов.



**Другие теории инвариантов конечного типа.** Существуют другие подходы к построению теории инвариантов конечного типа для гиперповерхностей, в частности, для гиперповерхностей в  $\mathbb{R}^3$ . Теория инвариантов для вложений фиксированной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  развивается в работах [96, 97]. Она сильно отличается от нашей игрушечной теории, но имеет с ней одну общую черту: все инварианты конечного типа оказываются функциями инвариантов степени 1.

### 5.3. Ориентация зацеплений и инварианты конечного типа

**5.3.1. Введение.** Хорошо известно, что классические инвариантные полиномы (Джонса, HOMFLY и т.д.) и вообще квантовые инварианты узлов принимают одинаковые значения на узлах, отличающихся сменой ориентации. Класс инвариантов Васильева строго шире [120], и вопрос о том, могут ли они различать ориентацию, по сей день не решен. В этом разделе мы изучаем соответствующую проблему для зацеплений с более чем одной компонентой.

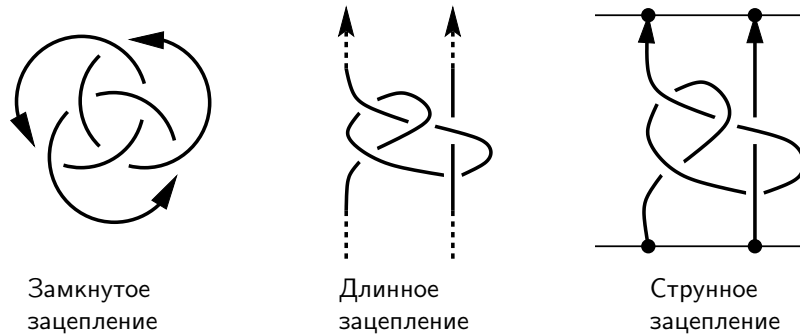
Напомним определения.

Пусть  $S_p^1$  — дизъюнктное объединение  $p$  пронумерованных экземпляров ориентированной окружности,  $\mathbb{R}_p^1$  — дизъюнктное объединение  $p$  пронумерованных экземпляров вещественной прямой, а  $I_p^1$  — дизъюнктное объединение  $p$  пронумерованных ориентированных отрезков  $[0, 1]$ .

**Определение.** Назовем  $p$ -компонентным *замкнутым* зацеплением гладкое вложение  $S_p^1$  в ориентированное трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$ , рассматриваемое с точностью до изотопии, сохраняющей компоненты.

*Длинным*  $p$ -компонентным зацеплением называется гладкое вложение  $R_p^1$  в ориентированное трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  с фиксированной асимптотикой на бесконечности:  $x_i(t) = [i, 0, t]$  при  $|t| > C$ , рассматриваемое с точностью до изотопии, тождественной вне шара достаточно большого радиуса, и евклидова движения пространства.

*Струнным*  $p$ -компонентным зацеплением назовем гладкое вложение  $I_p^1$  в полосу  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$  с закрепленными концами:  $x_i(t) = [i, 0, t]$  для  $t = 0, 1$ , рассматриваемое с точностью до изотопии, тождественной на границе, и евклидова движения пространства.



Очевидно, что теории длинных и струнных зацеплений эквивалентны. В случае узлов ( $p = 1$ ) обе эти теории также эквивалентны теории замкнутых зацеплений, но это становится неверным в случае  $p > 1$ .

*Вопрос об обратимости* в этом случае ставится следующим образом. Пусть  $L$  — некоторое зацепление и  $L'$  — его обращение, т.е. то же зацепление с той же нумерацией компонент, но с противоположной ориентацией. Может ли так случиться, что зацепления  $L$  и  $L'$  не эквивалентны? Если ответ утвердителен, то какие инварианты могут их различать?

В случае узлов этот вопрос оставался нерешенным долгое время, пока Троттер [111] в 1964 году не доказал необратимость некоторых узлов (например, крендельного узла  $P_{3,5,7}$ ). Простейшим необратимым узлом является узел  $8_{17}$  ([69]). Инварианты, использованные в работах [111, 69] и др. для доказательства неэквивалентности узла своему обратному, довольно сложны, и до сих пор не известно, можно ли различить какую-то пару взаимно обратных узлов при помощи инвариантов конечного типа.

В случае зацеплений единственным опубликованным результатом по данной проблеме является теорема Линя [81], которая утверждает, что инварианты Васильева различают ориентацию замкнутых зацеплений с 6 или более компонентами. Имеется еще несколько работ, имеющих к этой задаче лишь косвенное отношение, например, Бар-Натан в [32] изучает *гомотопические* инварианты струнных зацеплений, а Линь [80] и Фидлер [51] используют классы инвариантов, отличные от классических инвариантов конечного типа.

Настоящий параграф посвящен вопросу определения ориентации с помощью инвариантов конечного типа для *струнных* (или длинных) зацеплений. Переформулировка проблемы в терминах хордовых диаграмм немедленно показывает, что ответ утвердителен для  $p > 2$ . В случае 2-компонентных зацеплений ( $p = 2$ ) вопрос нетривиален; ниже мы даем доказательство следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 5.5.** *Существует инвариант Васильева  $f$  порядка, не превосходящего 7, и двухкомпонентное струнное зацепление  $L$ , такие, что  $f(L') \neq f(L)$ .*

Мы дадим два доказательства этой теоремы. Оба будут основаны на прямых вычислениях. Первое доказательство (разд. 5.3.3, предложение 5.2 на стр. 136) использует хордовые диаграммы и требует привлечения компьютерного счета. Второе (разд. 5.3.5, предложение 5.3 на стр. 140) — использует диаграммы Якоби; необходимые для него вычисления выполняются вручную. Оба доказательства на самом деле относятся к *оснащенным* зацеплениям, но в разделе 6 мы покажем, каким образом результат переносится на неоснащенный случай, что и завершит доказательство теоремы.

Вопрос об обращении ориентации  $p$ -компонентных струнных зацеплений на уровне инвариантов конечного типа тесно связан с вопросом о коммутативности алгебры хордовых диаграмм на  $p$  нитях. А именно, некоммутативность алгебры  $\mathcal{A}(p)$  влечет существование элементов, неинвариантных относительно замены ориентации. В самом деле, операция замены ориентации  $\tau$  (см. ниже) является антиавтоморфизмом. Если предположить симметричность всех элементов  $\mathcal{A}(p)$ , то мы бы получили:  $xy = \tau(xy) = \tau(y)\tau(x) = yx$  для любых  $x, y \in \mathcal{A}(p)$ .

Некоммутативность алгебры  $\mathcal{A}(p)$  при  $p > 2$  очевидна, а при  $p = 2$ , хотя и считалась известной как фольклорный факт, но нигде до сих пор не была доказана. Предложение 5.2 настоящего параграфа содержит, в частности, первое строгое доказательство этого утверждения.

**5.3.2. Сведение к хордовым диаграммам.** Инварианты конечного типа для различных типов зацеплений определяются так же, как и в классическом случае узлов, см. [107, 26].

Пусть  $\mathcal{F}$  — поле характеристики 0, например  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{C}$ . Обозначим символом  $V_n(p)$  пространство  $\mathcal{F}$ -значных инвариантов Васильева для  $p$ -компонентных длинных зацеплений степени не более чем  $n$ , через  $\mathcal{A}_n(p)$  — пространство, порожденное хордовыми диаграммами степени  $n$  на  $p$  нитях с точностью до 4-членных соотношений<sup>6</sup> и через  $W_n(p) = \mathcal{A}_n^*(p) = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}_n(p), \mathcal{F})$  — соответствующее пространство *весовых систем*. Существует линейное отображение  $\sigma_n^p : V_n(p) \rightarrow W_n(p)$  (взятие *символа* инварианта Васильева), ядро которого совпадает с  $V_{n-1}(p)$ , а образ состоит из весовых систем, обращающихся в 0 при применении их к хордовым диаграммам с изолированными хордами. (Для случая оснащенных зацеплений образ совпадает с  $W_n(p)$ .)

Как и прежде, обозначим через  $L'$  зацепление, обращенное по отношению к  $L$ . Полагая  $\tau_V(f)(L) = f(L')$  для  $f \in V$ , мы получаем инволюцию  $\tau_V$  пространства инвариантов Васильева. В терминах хордовых диаграмм соответствующая операция  $\tau_A$  действует так:

$$\tau_A : \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} \mapsto \begin{array}{c} | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ | \quad | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array},$$

то есть она меняет ориентацию всех компонент носителя хордовой диаграммы, или, что то же самое, отражает изображенную в плоскости диаграмму относительно горизонтальной линии, считая, что компоненты носителя ориентированы вертикально (ориентация компонент при этом сохраняется).

То же самое пространство  $\mathcal{A}(p)$  можно получить как линейную оболочку всех крашенных диаграмм Фейнмана (одноцветные были определены в 1.4.2), то есть 1-3-валентных графов, одновалентные вершины которых отождествлены с точками на многообразии  $\mathbb{R}_p^1$  с циклическим порядком полуребер, сходящихся в каждой трехвалентной вершине, и по модулю соотношений STU.

<sup>6</sup>Заметьте, что здесь мы не употребляем штриха, который использовался в аналогичной ситуации в главах 1 и 2.

Для диаграмм Фейнмана определение инволюции  $\tau_A$  несколько усложняется. Распространение операции  $\tau_A$  посредством соотношений STU приводит к следующему правилу:

$$\tau_A : \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} \mapsto - \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array}$$

т.е. необходимо поменять ориентацию на каждой компоненте носителя и *умножить результат на  $\pm 1$*  в зависимости от четности количества трехвалентных вершин, или, что то же самое, просто отразить плоское изображение диаграммы относительно горизонтальной прямой, не меняя ориентации носителя.

**ЛЕММА 5.19.** *Инволюция  $\tau_A$  есть градуированный аналог инволюции  $\tau_V$ , т.е. следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} V_n(p) & \xrightarrow{\sigma_n^p} & W_n(p) \\ \downarrow \tau_V & & \downarrow \tau_A^* \\ V_n(p) & \xrightarrow{\sigma_n^p} & W_n(p) \end{array}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для обычных хордовых диаграмм это немедленно следует из определения  $\sigma$  ([31, 26]). На диаграммы Фейнмана распространение происходит как объяснено выше.  $\square$

Проблема существования необратимых струнных зацеплений с помощью инвариантов конечного типа преобразуется в следующую: существует ли хордовая диаграмма на  $p$  нитях, отличная от своей обратной по модулю соотношений 4T. При  $p \geq 3$  соответствующий пример легко построить:

$$\tau_A : \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \end{array} \neq \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \end{array}$$

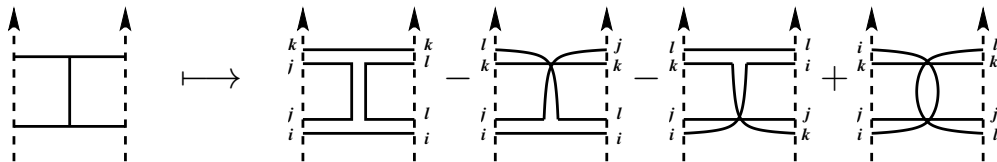
При  $p = 2$  проблема нетривиальна, поскольку, как легко убедиться, хордовые диаграммы малых степеней (например, диаграммы на стр. 133) все  $\tau_A$ -инвариантны. В следующем разделе мы предъявим диаграмму, не являющуюся  $\tau_A$ -инвариантной.

**5.3.3. Первое доказательство теоремы.** Для того, чтобы доказать, что некоторый элемент пространства  $\mathcal{A}(p)$  отличен от нуля,

естественно использовать весовые системы, то есть линейные функционалы на этом пространстве. Одной из наиболее часто применяемых весовых систем является гомоморфизм Концевича  $\varphi = \varphi_{\mathfrak{g}} : \mathcal{A}(p) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes p}$ , который строится по метризованной алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  (см. [74, 26]). В действительности,  $\varphi$  принимает значения в  $\mathfrak{g}$ -инвариантной подалгебре  $U(p) = [U(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$ . Мы дадим описание действия этой весовой системы для случая  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ , используя стандартный базис  $e_{ij}$  (матрица с 1 на месте  $(i, j)$  и остальными нулями) и метрику, определенную правилом сопряжения  $e_{ij}^* = e_{ji}$ .

Опишем конструкцию гомоморфизма  $\varphi$  подробнее. Пусть  $D \in \mathcal{A}(p)$  — диаграмма Фейнмана на  $p$  нитях. Элемент  $\varphi(D) \in U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$  может быть получен следующей процедурой. Возьмем альтернированную сумму по всем возможным вариантам разрешения [31] внутренних тройных точек диаграммы  $D$ . Для каждого варианта разрешения необходимо обозначить компоненты связности полученной диаграммы различными независимыми индексами; затем заменить каждую пару сходящихся индексов на  $e_{ij}$  и взять сумму по всем встречающимся индексам от 1 до  $N$ . (Если встречаются замкнутые компоненты, то они переходят в умножение на  $N$ .)

Доказательство этого утверждения в точности повторяет аналогичное для случая  $p = 1$ , которое можно найти в [31, 26]. Приведем лишь пример:



Следовательно, образ этой диаграммы при применении к ней весовой системы  $\varphi$  равен

$$\sum_{i,j,k,l=1}^N (e_{ij}e_{jk} \otimes e_{li}e_{kl} - e_{ij}e_{kl} \otimes e_{li}e_{jk} - e_{ij}e_{kl} \otimes e_{jk}e_{li} + e_{ij}e_{ki} \otimes e_{jl}e_{lk}).$$

Заметим, что порядок сомножителей  $e_{ij}$  согласуется с ориентацией каждой из компонент носителя, но порядок индексов  $i, j$  соответствует «правилу обхода по кругу» (в нашем случае это снизу вверх на левой компоненте и сверху вниз на правой).

Обозначим через  $\tau_U$  оператор на  $U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ , который обращает порядок сомножителей в каждом из мономов и меняет местами индексы у каждого базисного элемента  $e_{ij}$ , например  $\tau_U(e_{12}e_{23} \otimes e_{13}e_{24}) =$

$e_{32}e_{21} \otimes e_{42}e_{31}$ . Этот оператор является инволюцией, сохраняющей ад-инвариантную часть  $U(p) = [U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$ .

Следующая лемма непосредственно вытекает из конструкции отображения  $\varphi$ .

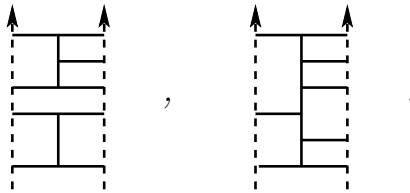
ЛЕММА 5.20. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(p) & \xrightarrow{\varphi} & U(p) \\ \downarrow \tau_A & & \downarrow \tau_U \\ \mathcal{A}(p) & \xrightarrow{\varphi} & U(p) \end{array}$$

*коммукативна.*

Из леммы следует, что необратимость хордовой диаграммы может быть замечена на уровне универсальной обертывающей алгебры: если  $\varphi$ -образ диаграммы не  $\tau_U$ -инвариантен, то и сама диаграмма не инварианта относительно  $\tau_A$ . Таким образом, следующее предложение доказывает заявленную Теорему.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Каждая из приведенных ниже диаграмм отлична от своего образа при применении инволюции  $\tau_A$ :*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисленные с помощью компьютера  $\varphi$ -образы диаграмм и их обращенных различны, если в качестве алгебры Ли брать  $\mathfrak{gl}_4$  (и, следовательно, любую  $\mathfrak{gl}_N$  с  $N \geq 4$ ).

Вычисления проводились так: фиксируем лексикографический порядок на множестве базисных элементов  $e_{ij}$  и преобразуем выражение для  $\varphi(D)$ , полученное по вышеизложенному алгоритму, с использованием коммутационных соотношений, так, чтобы порядок сомножителей в каждом из мономов становился лексикографическим. Программы, использованные для расчетов, а также входные и выходные данные имеются на Интернет-странице [6]. Например, образ диаграммы, изображенной слева, состоит из 58378 слагаемых; его вычисление занимает несколько часов с использованием современного компьютера средней мощности. Поскольку эта диаграмма является произведением двух  $\tau$ -симметричных диаграмм, мы заодно доказали некоммутативность алгебры  $\mathcal{A}(2)$ .  $\square$



**5.3.4. Сведение к диаграммам Якоби.** Крашенные диаграммы Якоби (стр. 59) можно рассматривать как симметрические элементы пространства  $\mathcal{A}(p)$  — ровно в том же смысле, как полиномы на пространстве  $\mathfrak{g}^*$  отождествляются с симметрическими элементами универсальной обертывающей алгебры  $U(\mathfrak{g})$  в силу теоремы Пуанкаре-Биркгоффа-Витта.

Изоморфизм  $\chi$  чрезвычайно полезен для наших нужд, поскольку инволюция  $\tau_A$ , перенесенная в  $\mathcal{B}(p)$  через этот изоморфизм, в терминах диаграмм Якоби приобретает особенно простой вид. А именно, справедливо следующее утверждение.

**ЛЕММА 5.21.** *Определим  $\tau_B : \mathcal{B}(p) \rightarrow \mathcal{B}(p)$  как линейный оператор, тождественный на всех диаграммах Якоби с четным числом ног и умножающий на  $-1$  каждую диаграмму с нечетным числом ног. Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(p) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{A}(p) \\ \downarrow \tau_B & & \downarrow \tau_A \\ \mathcal{B}(p) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{A}(p) \end{array}$$

*коммутативна.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Этот факт очевидным образом вытекает из определений  $\tau_A$  и  $\tau_B$ , данных выше. Приведем простой пример, иллюстрирующий ход рассуждений. Пусть

$$D = \text{diag} \begin{array}{c} \text{circle with 2 legs (1, 2)} \end{array}^2.$$

Тогда, по определению,

$$\tau_B(D) = - \text{diag} \begin{array}{c} \text{circle with 2 legs (1, 2)} \end{array}^2.$$

Далее,

$$\chi(D) = \frac{1}{2} \text{diag} \begin{array}{c} \text{circle with 2 legs (1, 2)} \\ \uparrow \uparrow \end{array} + \frac{1}{2} \text{diag} \begin{array}{c} \text{circle with 2 legs (1, 2)} \\ \uparrow \uparrow \end{array}$$

и, следовательно,

$$\tau_A(\chi(D)) = -\frac{1}{2} \text{diag} \begin{array}{c} \text{circle with 2 legs (1, 2)} \\ \downarrow \downarrow \end{array} - \frac{1}{2} \text{diag} \begin{array}{c} \text{circle with 2 legs (1, 2)} \\ \downarrow \downarrow \end{array} = -\frac{1}{2} \text{diag} \begin{array}{c} \text{circle with 2 legs (1, 2)} \\ \uparrow \uparrow \end{array} - \frac{1}{2} \text{diag} \begin{array}{c} \text{circle with 2 legs (1, 2)} \\ \uparrow \uparrow \end{array} = \chi(\tau_B(D)).$$

□

Проблема обратимости 2-компонентных струнных зацеплений, с учетом приведенной выше леммы, переформулируется таким образом: *существует ли ненулевая двухцветная диаграмма Якоби с нечетным числом ног?* В следующем разделе мы приведем пример такой диаграммы.

**5.3.5. Второе доказательство теоремы.** Возьмем метризованную алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  и обозначим через  $S(\mathfrak{g})$  симметрическую алгебру векторного пространства  $\mathfrak{g}$ . Конструкция весовой системы  $\mathcal{B}(1) \rightarrow S(\mathfrak{g})$ , описанная в разделе 3.4, допускает обобщение на случай произвольного значения  $p$ , позволяя получить гомоморфизм  $\psi : \mathcal{B}(p) \rightarrow S(\mathfrak{g})^{\otimes p}$ , образ которого лежит в  $\mathfrak{g}$ -инвариантной подалгебре  $p$ -й симметрической степени  $S(p) = [S(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$ .

ЛЕММА 5.22. *Отображение  $\psi$  делает коммутативной следующую диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(p) & \xrightarrow{\psi} & S(p) \\ \downarrow \chi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{A}(p) & \xrightarrow{\varphi} & U(p) \end{array}$$

где  $\chi$  — изоморфизм, определенный в предыдущем разделе,  $\varphi$  — весовая система Концевича для алгебры  $\mathcal{A}(p)$ , а  $\pi$  —  $p$ -я тензорная степень изоморфизма Пуанкаре-Биркгоффа-Витта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство полностью повторяет аналогичное для случая  $p = 1$ . □

Для случая алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$  существует графический алгоритм нахождения  $\psi$ -образа, аналогичный процедуре применения оператора  $\varphi$ , описанной в разделе 5.3.3. Единственное отличие состоит в том, что теперь базисные элементы  $e_{ij}$  коммутируют, и мы можем не заботиться о порядке сомножителей в мономах. Приведем пример:

$$\begin{aligned} \psi : \quad & \begin{array}{c} \text{2} \\ | \\ \text{1} \text{---} \text{2} \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{c} j \quad i \\ || \quad 2 \\ i \text{---} \quad \text{2} \\ | \quad | \\ k \quad k \end{array} \quad - \quad \begin{array}{c} j \quad i \\ || \quad 2 \\ k \text{---} \quad \text{2} \\ | \quad | \\ i \quad j \end{array} \\ & \longmapsto \quad \sum_{i,j,k=1}^N (e_{jk} \otimes e_{ij}e_{ki} - e_{ki} \otimes e_{ij}e_{jk}) = 0. \end{aligned}$$

Преимущество отображения  $\psi$  состоит в том, что  $\mathfrak{g}$ -инвариантная часть  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$  обладает более прозрачной структурой по сравнению

с  $U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ . Напомним (см. пункт 3.4.3), что  $p$ -цветное ожерелье порядка  $n$  — это комбинаторный объект, определенный как последовательность из  $n$  чисел от 1 до  $p$ , рассматриваемая с точностью до циклических перестановок членов последовательности; визуализацией этого объекта являются расположенные на ориентированной окружности  $n$  бусин  $p$  цветов. Каждому ожерелью можно сопоставить ад-инвариантный элемент  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$  следующим образом. Сопоставим каждой дуге ожерелья свой переменный индекс ( $i, j$  и т.д.); каждой бусине сопоставим элемент  $e_{ij}$ , где  $i$  — индекс на входящей дуге, а  $j$  — индекс на выходящей, и поставим элемент  $e_{ij}$  в тензорный сомножитель, номер которого совпадает с номером цвета соответствующей бусины. Эти элементы перемножим, а потом просуммируем по всем встречающимся индексам от 1 до  $N$ . Например:

$$\text{Diagram} \mapsto \text{Diagram} \mapsto \sum_{i,j,k,l=1}^N (e_{ij}e_{kl} \otimes e_{jk}e_{li}) =: x_{1212} .$$

Здесь и ниже мы обозначаем элемент пространства  $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ , отвечающий какому-то ожерелью, через  $x_\mu$ , где  $\mu$  — последовательность цветов, лексикографически наименьшая среди всех циклических сдвигов.

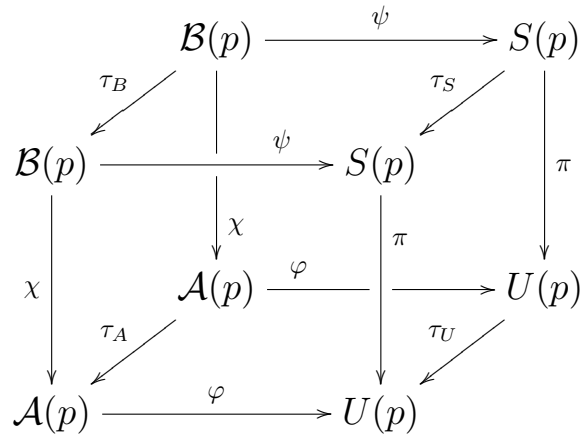
В случае алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ , как мы знаем (см. 3.4.3),  $\mathfrak{g}$ -инвариантная часть  $S(\mathfrak{g})^{\otimes p}$ , совпадает с алгеброй, порожденной всеми ожерельями. Алгебраические соотношения между ожерельями, имеющие место при малых  $N$ , исчезают при  $N \rightarrow \infty$ .

**Замечание.** Весовую систему со значениями в алгебре ожерелий можно определить непосредственно, вовсе не апеллируя к алгебрам Ли. Для одноцветных ожерелий это сделано в работе [48].

В алгебре, порожденной ожерельями, существует инволюция  $\tau_S$ , обращающая ориентацию каждого ожерелья. Для двухцветных ожерелий она действует тождественно вплоть до степени 5; ожерелье наименьшей степени, не инвариантное относительно  $\tau_S$ , есть  $x_{112122}$ . Оказывается, что операция  $\tau_S$  согласуется со всеми остальными операциями обращения, обозначенными выше буквой  $\tau$  с различными индексами.

**ЛЕММА 5.23.** *Инволюции изменения ориентации в пространствах  $\mathcal{A}(p), \mathcal{B}(p), S(p), U(p)$  коммутируют с четырьмя стрелками диаграммы в лемме (5.22). Точнее, имеет место коммутативный*

куб

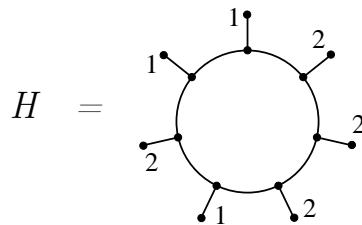


(напомним, что  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ ,  $S(p) = [S(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$ ,  $U(p) = [U(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$ ; все отображения были определены выше, в частности,  $\pi$  — это изоморфизм Пуанкаре-Биркгоффа-Витта).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На самом деле, единственное, что еще не было доказано — это коммутативность верхней грани куба. Поскольку все вертикальные стрелки — изоморфизмы, этот факт вытекает из коммутативности остальных пяти граней, которая была доказана ранее в различных местах текста.  $\square$

В силу коммутативности верхней грани куба, для доказательства не- $\tau_B$ -инвариантности какой-то диаграммы Якоби (элемента  $\mathcal{B}(p)$ ), достаточно показать не- $\tau_S$ -инвариантность его  $\psi$ -образа в алгебре ожерелий. Поскольку минимальная степень необратимого ожерелья равна 6, а мы хотим найти необратимую диаграмму с нечетным числом ног, это число должно быть не менее 7. Оказывается, что существует ненулевая диаграмма, имеющая ровно 7 ног, и это дает второе доказательство Теоремы.

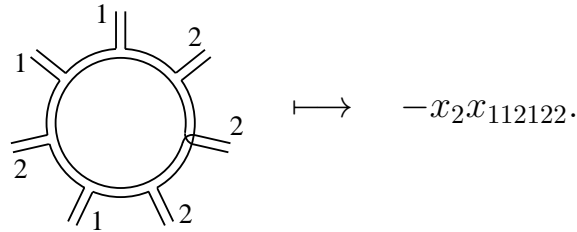
ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Следующая диаграмма отлична от 0 как элемент пространства  $\mathcal{B}(2)$ :



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычисление показывает, что образ этой диаграммы в алгебре  $S(2)$  (для достаточно большого  $N$ ), выраженный через ожерелья, равен

$$N(x_{1121222} - x_{1122212}) + 3x_2(x_{112212} - x_{112122}),$$

то есть отличен от 0. Выражение для  $\psi(H)$  содержит 128 слагаемых (по числу разрешений трехвалентных вершин  $2^7$ ), из которых только 8 содержат необратимые ожерелья, например



$$\text{Diagram} \longmapsto -x_2 x_{112122}.$$

Этот результат также может быть получен с помощью компьютерной программы, доступной по ссылке [6].  $\square$

**Замечание 1.** Диаграмма  $H$  была впервые обнаружена Д. Бар-Натаном: она фигурирует в файле `table.m` на его веб-сайте (см. [33]) как один из базисных элементов пространства двухцветных диаграмм. Однако, в препринте [33], содержащей комментарии к этой таблице, сказано, что программа, при помощи которой она была получена, не готова к публикации по причине ее «запутанности» и ввиду наличия некоторых недостатков в алгоритме.

**Замечание 2.** Из той же таблицы следует, что 7 — минимальная степень инварианта Васильева, способного различать ориентацию 2-компонентных струнных зацеплений. Необходимые для проверки вычисления можно провести вручную.

**5.3.6. Переход к неоснащенному случаю.** Как упоминалось во введении, результаты, полученные в разделах 3 и 5, на самом деле относятся к оснащенным зацеплениям, поскольку мы не принимали во внимание одночленные соотношения. Вообще говоря, определение ориентации оснащенного зацепления является более простой задачей, поскольку в теории с оснащениями есть дополнительная структура, которая (в принципе) может менять свои свойства при обращении. В этом разделе мы докажем, что основная теорема остается верной и в случае обычных (неоснащенных) зацеплений.

Действительно, обозначим через  $\mathcal{A}'(2)$  фактор пространства  $\mathcal{A}(2)$  по одночленным соотношениям, то есть по идеалу, порожденному диаграммами  $a_1$  (одна хорда, прикрепленная к первой компоненте носителя) и  $a_2$  (соответственно, одна хорда на второй компоненте носителя):  $\mathcal{A}'(2) = \mathcal{A}(2)/\langle a_1, a_2 \rangle$ , где угловые скобки обозначают двусторонний идеал с указанными в них образующими. Факторалгебра  $\mathcal{A}'(2)$  может быть вложена в  $\mathcal{A}(2)$  как подалгебра: по структурной теореме для кокоммутативных алгебр Хопфа алгебра  $\mathcal{A}(2)$  является

универсальной обертывающей алгебры Ли своих примитивных элементов  $P$ . Поэтому, если мы возьмем подпространство в  $P$ , порожденное всеми примитивными диаграммами, за исключением  $a_1$  и  $a_2$ , мы получим вложение  $\mathcal{A}'(2) \subset \mathcal{A}(2)$ . Поскольку диаграммы, фигурирующие в Предложении 1, принадлежат этому подпространству, мы заключаем, что необратимость имеет место и для неоснащенных зацеплений.

Покажем теперь, что второе доказательство (разд. 5) также проходит в неоснащенном случае. Пусть  $\chi : \mathcal{A}(2) \rightarrow \mathcal{B}(2)$  — определенный выше изоморфизм.

**ЛЕММА 5.24.** *Подпространство  $\chi^{-1}(\mathcal{A}'(2)) = \mathcal{B}'(2)$  совпадает с подалгеброй в  $\mathcal{B}(2)$ , порожденной всеми связными диаграммами Якоби, за исключением  $b_1 = \overset{1}{\cdot} \text{---} \overset{1}{\cdot}$  и  $b_2 = \overset{2}{\cdot} \text{---} \overset{2}{\cdot}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Этот факт не вполне очевиден по той причине, что изоморфизм линейных пространств  $\chi$  не является гомоморфизмом алгебр, а подалгебры  $\mathcal{A}'(2)$  и  $\mathcal{B}'(2)$  определяются своими образующими в смысле разных операций умножения. Тем не менее, легко усмотреть непосредственно, что  $\chi$ -образ диаграммы Якоби, отличной от  $b_1$  и  $b_2$ , является линейной комбинацией произведений связных хордовых диаграмм, отличных от  $a_1$  и  $a_2$ .  $\square$

Лемма показывает, что семиногая диаграмма  $H$ , фигурирующая в Предложении 2, является элементом подалгебры  $\mathcal{B}'(2)$ , ответственной за инварианты Васильева неоснащенных длинных зацеплений. Поскольку эта диаграмма не равна 0, существование инварианта седьмого порядка, различающего ориентацию, вторично доказано.

## 5.4. Разложение Магнуса и полином Конвея

**5.4.1. Введение.** Разложение Магнуса представляет собой универсальный инвариант конечного типа крашенных кос со значениями в пространстве горизонтальных хордовых диаграмм. Композиция многочлена Конвея с отображением короткого замыкания кос в узлы порождает серию инвариантов конечного типа крашенных кос и, следовательно, пропускается через разложение Магнуса. Мы явно описываем получаемое отображение горизонтальных хордовых диаграмм в целочисленные многочлены от одной переменной и вычисляем его значение на ассоциаторе Дринфельда, оказывающееся замечательным бесконечным рядом, коэффициенты которого суть (гипотетически) альтернированные суммы кратных дзета-значений.

Короткое замыкание [91] порождает отображение из группы крашенных кос во множество (топологических типов) ориентированных узлов. Всякий инвариант Васильева узлов можно превратить, таким образом, в инвариант конечного типа крашенных кос. Существует универсальный инвариант конечного типа крашенных кос, задаваемый разложением Магнуса. В этом параграфе мы дадим явное описание (через значения на базисных элементах) отображения пространства горизонтальных хордовых диаграмм на трех нитях, получаемого при пропуске многочлена Конвея, перенесенного на косы, через разложение Магнуса. Главный результат описывается занятным комбинаторным отображением из множества упорядоченных разбиений данного натурального числа во множество обычных (неупорядоченных) разбиений того же числа.

В разделе 5.4.2 мы напоминаем некоторые сведения о группе крашенных кос и вводим разложение Магнуса. Раздел 5.4.3 посвящен конструкции короткого замыкания, связывающего косы и узлы. В разделе 5.4.4 мы говорим о многочлене Конвея, перенесенном на косы посредством короткого замыкания, и формулируем основную теорему, доказательство которой дается в разделе 5.4.5. В разделе 5.4.6 мы делаем попытку сосчитать значение отображения, описанного в основной теореме, на ассоциаторе Дринфельда, и формулируем гипотезу, основанную на компьютерных вычислениях.

**5.4.2. Крашенные косы и разложение Магнуса.** Пусть  $P_m$  — группа крашенных кос на  $m$  занумерованных вертикальных нитях с умножением, заданным как конкатенация сверху вниз. Группа  $P_m$  порождена элементами  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , каждый из которых представляет собой положительную перекрутку  $i$ -й и  $j$ -й нитей, причем все остальные нити строго вертикальны и проходят сзади двух данных:

$$x_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} i \qquad j \\ \dots \quad | \quad | \quad \dots \\ \dots \quad | \quad | \quad \dots \\ i \qquad j \end{array} \end{array}$$

Существует полупрямое разложение [40]

$$P_m \cong F_{m-1} \rtimes \dots \rtimes F_2 \rtimes F_1,$$

где  $F_k$  — свободная группа с  $k$  образующими, в нашем случае реализованная как подгруппа в  $P_m$ , порожденная множеством  $x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, \dots, x_{k,k+1}$ .

Это разложение показывает, что любую крашеную косу можно однозначно записать в *причесанном виде*  $\prod_s x_{i_s j_s}^{a_s}$  with  $j_1 \geq j_2 \geq \dots$  где  $a_s$  — ненулевые целые числа, причем одинаковые образующие не встречаются в произведении рядом (то есть, слово является приведенным). *Разложение Магнуса* — это отображение  $P_m$  в  $\mathbb{Z}$ -алгебру формальных степенных рядов от  $\binom{m}{2}$  некоммутирующих переменных  $t_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , определенное правилом

$$\mu_m(\beta) = \prod_s (1 + t_{i_s j_s})^{a_s},$$

если  $\prod_s x_{i_s j_s}^{a_s}$  есть причесанный вид косы  $\beta$ . Отрицательные степени здесь понимаются в соответствии с общим правилом  $(1 + t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$ , — именно поэтому для определения  $\mu_m$  требуются бесконечные ряды, а не просто многочлены.

**Пример.** Чтобы вычислить значение  $\mu_3(x_{12}x_{23})$ , мы сначала причесываем косу:

$$x_{12}x_{23} = x_{13}x_{23}x_{13}^{-1}x_{12},$$

а затем пишем:

$$\begin{aligned} \mu_3(x_{12}x_{23}) &= (1 + t_{13})(1 + t_{23})(1 - t_{13} + t_{13}^2 - \dots)(1 + t_{12}) \\ &= 1 + t_{12} + t_{23} + t_{13}t_{23} - t_{23}t_{13} + t_{23}t_{12} + \dots \end{aligned}$$

С более широкой точки зрения имеет смысл считать, что отображение  $\mu_m$  принимает значения в пополненной факторалгебре полиномиальной алгебры  $\mathbb{Z}[\{t_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq m}]$  по идеалу, порожденному элементами  $[t_{ij}, t_{kl}]$  и  $[t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}]$ , где все индексы различны и мы понимаем  $t_{pq}$  как  $t_{qp}$ , если  $p > q$ . Обозначим эту факторалгебру через  $\mathcal{A}^h(m)$ . Аддитивно порождающие ее мономы можно представлять себе наглядно как горизонтальные хордовые диаграммы на  $m$  вертикальных нитях (каждая переменная  $t_{ij}$  представляет хорду, соединяющую  $i$ -ю и  $j$ -ю нити; произведение переменных понимается как вертикальная конкатенация сверху вниз). Пример:

$$t_{13}t_{23}^2t_{12} = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} .$$

Пополнение алгебры  $\mathcal{A}^h(m)$ , то есть соответствующую алгебру формальных рядов, мы будем обозначать через  $\hat{\mathcal{A}}^h(m)$ .



Назовем горизонтальную хордовую диаграмму *нисходящей*, если она представляется мономом вида  $\prod_s t_{i_s j_s}^{a_s}$ , где  $j_1 \geq j_2 \geq \dots$ . По определению, множество нисходящих диаграмм находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством положительных причесанных кос  $P_m^+$  (то есть кос, причесанная форма которых содержит только положительные степени образующих  $x_{ij}$ ). Нисходящие диаграммы образуют базис свободной абелевой группы  $\mathcal{A}^h(m)$  (см. [92], раздел 3-2)<sup>7</sup>, поэтому мы имеем изоморфизм модулей  $\mathbb{Z}P_m^+ \cong \mathcal{A}^h(m)$ .

Под *инвариантами кос* мы понимаем произвольные отображения из группы кос в какое-либо множество (здесь имеется в виду инвариантность относительно изотопий геометрических кос; эквивалентность по модулю изотопий автоматически входит в определение группы  $P_m$ ). Для (крашенных) кос, так же как и в классическом случае узлов, можно ввести понятие инвариантов конечного типа (инвариантов Васильева), см. [34, 92, 26]. Разложение Магнуса, урезанное в образе до слагаемых степени  $\leq n$ , оказывается инвариантом Васильева порядка  $n$ . Более того, имеет место такая теорема.

**ТЕОРЕМА 5.6.** ([92, 99, 26]) *Отображение  $\mu_m : P_m \rightarrow \hat{\mathcal{A}}^h(m)$  является универсальным инвариантом конечного типа крашенных кос в том смысле, что любого инварианта  $f : P_m \rightarrow \mathbb{Z}$  порядка  $n$  существует отображение  $g : \hat{\mathcal{A}}^h(m) \rightarrow \mathbb{Z}$ , зануляющееся на всех мономах степени больше  $n$  и такое, что  $f = g \circ \mu_m$ .*

**Замечание.** На самом деле, универсальный инвариант Васильева крашенных кос можно определить более общим образом, сопоставляя каждой образующей  $x_{ij}$  в причесанном виде косы элемент  $1 + c_{ij}t_{ij} + T_{ij}$ , где  $c_{ij}$  — любые ненулевые константы, а  $T_{ij}$  — произвольные ряды из  $\hat{\mathcal{A}}^h(m)$ , начинающиеся с членов степени выше первой. Замечательным примером этой конструкции (со значениями в  $\hat{\mathcal{A}}^h(m) \otimes \mathbb{C}$ ) является интеграл Концевича (см. стр. 29, а также [34, 26]). По сравнению со стандартным разложением Магнуса он имеет важное преимущество, заключающееся в его мультипликативности. Однако, определение интеграла Концевича гораздо сложнее, его трудно вычислять в явном виде и, кроме того, его значение зависит от расположения конечных точек косы. Например, если верхние и нижние концы нитей расположены на параллельных прямых и отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии, то интегралы Концевича, взятые от образующих группы  $P_3$ , представляются

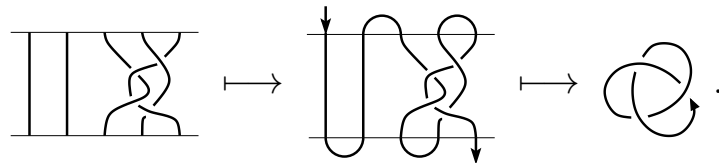
<sup>7</sup>Этот факт, даже в большей общности, является простым следствием теоремы 3.1 из [99].

следующими рядами до степени 2:

$$\begin{aligned} I(x_{12}) &= 1 - A + \frac{1}{2}A^2 - \frac{i \ln 2}{2\pi}[B, C] + \dots, \\ I(x_{13}) &= 1 - C + \frac{1}{2}C^2 + \frac{1}{2}[A, B] + \dots, \\ I(x_{23}) &= 1 - B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{i \ln 2}{2\pi}[C, A] + \dots, \end{aligned}$$

где  $A = t_{12}$ ,  $B = t_{23}$ ,  $C = t_{13}$ . Напомним, что  $[A, B] = [B, C] = [C, A]$  в соответствии с определением алгебры  $\hat{\mathcal{A}}^h(3)$ . Читатель может в качестве упражнения проверить на этом примере мультипликативность, то есть согласованность этих формул с коммутационными соотношениями в группе  $P_3$  (кратко выражаемыми одним фактом: элемент  $x_{12}x_{13}x_{23}$  является центральным, см. [50]).

**5.4.3. Короткое замыкание кос.** Наряду с обычным (Артиновским) замыканием кос, которое превращает их в зацепления, существует другая операция замыкания крашенных кос в ориентированные узлы, называемая *коротким замыканием* (short-circuit closure, см. [91, 26]). Она определяется попарным соединением короткими дугами верхних концов косы с номерами  $2i$  и  $2i + 1$  и нижних концов с номерами  $2i - 1$  и  $2i$ , что превращает косу в длинный узел. При желании два свободных конца длинного узла можно соединить дополнительной дугой и получить обычный компактный узел. Ориентация узла порождается ориентацией сверху вниз первой (крайней левой) нити косы. Например:



Неориентированный вариант этой операции, известный как *plat closure*, изучался ранее (см., например, [41].)

Легко видеть, что короткие замыкания кос с разным числом нитей согласованы с вложениями  $P_m \rightarrow P_{m+1}$  (добавление одной вертикальной нити справа), так что имеется корректно определенное отображение  $\varkappa$  из группы  $P_\infty := \cup_{m \geq 1} P_m$  в множество ориентированных узлов  $\mathcal{K}$ . Теорема Мостового и Стэнфорда утверждает, что это отображение сюръективно и позволяет отождествить  $\mathcal{K}$  с множеством двойных

смежных классов группы  $P_\infty$  по двум специальным подгруппам, см. [91].

В частном случае  $m = 3$  образ  $\varkappa_3 = \varkappa|_{P_3}$  совпадает с множеством всех 2-мостовых (рациональных) узлов (подробное введение в теорию рациональных узлов можно найти в [95]). В самом деле, короткое замыкание косы  $x_{13}^{a_1}x_{23}^{b_1}\dots x_{13}^{a_k}x_{23}^{b_k}$ , соответственно  $x_{13}^{a_1}x_{23}^{b_1}\dots x_{13}^{a_k}x_{23}^{b_k}x_{13}^{a_{k+1}}$ , где все числа  $a_i, b_i$  ненулевые целые, есть рациональный узел, соответствующий непрерывной дроби со знаменателями

$$(2a_1, -2b_1, \dots, 2a_k, -2b_k + 1),$$

соответственно,

$$(2a_1, -2b_1, \dots, 2a_k, -2b_k, 2a_k + 1).$$

Простое теоретико-числовое рассуждение показывает, что любое рациональное число с нечетным знаменателем (то есть отвечающее узлу, а не двухкомпонентному зацеплению) имеет разложение в цепную дробь указанного вида (последний знаменатель нечетен, а все предыдущие четны).

**5.4.4. Символ многочлена Конвея.** Композиция с отображением короткого замыкания превращает всякий инвариант узлов в инвариант крашенных кос. Например, многочлен Конвея узлов  $\nabla : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}[t]$  порождает многочлен Конвея крашенных кос  $\nabla \circ \varkappa_m : P_m \rightarrow \mathbb{Z}[t]$ . Для каждого  $n$  коэффициент этого многочлена при  $t^{2n}$  является инвариантом Васильева порядка  $2n$ . В силу универсальности разложения Магнуса, найдется отображение  $\chi_m : \hat{\mathcal{A}}^h(m) \rightarrow \mathbb{Z}[t]$  («символ многочлена Конвея») такое, что  $\nabla \circ \varkappa_m = \chi_m \circ \mu_m$ .

Нам удалось найти явное описание отображения  $\chi_m$  только для  $m = 3$ . В следующей теореме указаны значения  $\chi = \chi_3$  на нисходящих хордовых диаграммах из  $\mathcal{A}^h(3)$  (составляющих, как мы уже говорили, аддитивный базис этой свободной абелевой группы). Примем обозначения  $A = t_{12}, B = t_{23}, C = t_{13}$ .

**ТЕОРЕМА 5.7.** *Всякая нисходящая хордовая диаграмма на трех нитях представляет собой (положительное) слово в алфавите  $\{A, B, C\}$ , в котором все буквы  $A$  находятся в конце. Мы утверждаем, что для любых слов  $w, w_1, w_2$ :*

- (1)  $\chi(wA) = 0$ .
- (2)  $\chi(Bw) = 0$ .
- (3)  $\chi(w_1B^2w_2) = 0$ .

Перечисленные свойства означают, что ненулевые значения  $\chi$  может принимать лишь на словах одного из двух видов:

$$C^{c_1} B \cdot \dots \cdot C^{c_{k-1}} B C^{c_k}$$

и

$$C^{c_1} B \cdot \dots \cdot C^{c_{k-1}} B C^{c_k} B,$$

которые мы закодируем соответственно как  $[c_1, \dots, c_k]$  и  $[c_1, \dots, c_k]'$ .

(4) Значение  $\chi$  на элементах второго вида выражается через его значения на элементах первого вида по формуле

$$\chi([c_1, \dots, c_k]') = t^{-2} \chi([c_1, \dots, c_k, 1]).$$

Остается, таким образом, описать значения  $\chi$  на элементах вида  $[c_1, \dots, c_k]$ .

(5) Мы имеем:

$$\chi([c_1, \dots, c_k]) = (-1)^{k-1} \left( \prod_{i=1}^{k-1} p_1 p_{c_i-1} \right) \cdot p_{c_k},$$

где  $p_s = \chi([s])$  есть последовательность многочленов от  $t$ , определяемая рекуррентно по правилам  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = t^2$  и  $p_{s+2} = t^2(p_s + p_{s+1})$  для  $s \geq 0$ . В частности, значение  $\chi$  на пустой диаграмме (единичном элементе алгебры  $\hat{\mathcal{A}}^h(3)$ ) равно 1.

**Замечание 1.** Многочлен  $p_k = \chi([k])$  равен  $t^k \nabla(T_{k+1,2})$ , где буква  $T$  означает торическое зацепление с указанными параметрами (в случае 2-компонентного зацепления нужно при этом правильно выбрать ориентации компонент), и может быть явно записано как

$$p_k = \sum_{k/2 \leq j \leq k} \binom{j}{2j-k} t^{2j}.$$

**Замечание 2.** Образ  $\chi$  лежит в коммутативной алгебре, порожденной элементами  $p_1, p_2$  и т.д., занумерованными натуральными числами. Аддитивный базис этой алгебры можно отождествить с множеством (обычных комбинаторных) разбиений. В такой постановке отображение  $\chi$  определяется преобразованием упорядоченных разбиений в неупорядоченные (обычные) по правилу

$$[c_1, \dots, c_k] \mapsto (1^{k-1}, c_1 - 1, \dots, c_{k-1} - 1, c_k).$$

**Примеры.**

$$\begin{aligned}
\chi(1) &= 1, \\
\chi(B) &= 0, \\
\chi(C) &= t^2, \\
\chi(CB) &= -t^2, \\
\chi(BC) &= 0, \\
\chi(C^3BC^3) &= -p_1p_2p_3 = -t^2(t^4 + t^2)(t^6 + 2t^4).
\end{aligned}$$

**5.4.5. Доказательство теоремы.** Нам нужно найти отображение  $\chi$ , замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
P_3 & \xrightarrow{\mu_3} & \hat{\mathcal{A}}^h(3) \\
\downarrow \nu & & \downarrow \chi \\
\mathcal{K} & \xrightarrow{\nabla} & \mathbb{Z}[[t]]
\end{array}$$

Продолжим разложение Магнуса по линейности до отображения  $\widehat{\mathbb{Z}P_3} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}^h(3)$ , которое будем обозначать той же буквой  $\mu_3$ . Мы докажем теорему, используя левое обратное к  $\mu_3$ , то есть отображение  $\nu_3 : \hat{\mathcal{A}}^h(3) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}P_3}$ , что  $\nu_3 \circ \mu_3 = \text{id}$ . Такое отображение существует. В самом деле, множество нисходящих хордовых диаграмм на трех нитях находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством положительных кос  $P_3^+$ . Это соответствие задается простой подстановкой  $x_{ij} \leftrightarrow t_{ij}$ . Отождествляя слово  $w$  от букв  $x_{ij}$  с соответствующим словом от букв  $t_{ij}$ , мы видим, что для положительных слов

$$\mu_3(w) = \sum_{w' \subseteq w} w'.$$

Это отображение в подходящем базисе задается треугольной матрицей с единицами на главной диагонали и, следовательно, определяет автоморфизм абелевой группы  $\widehat{\mathbb{Z}P_3^+} \cong \hat{\mathcal{A}}^h(3)$ . Обратный автоморфизм, как легко видеть, выражается формулой

$$\nu_3(w) = \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w|-|w'|} w',$$

где модуль слова обозначает его длину (или суммарный показатель).  
 Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{Z}P_3} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu_3} \\ \xleftarrow{\nu_3} \end{array} & \hat{\mathcal{A}}^h(3) \\ \downarrow \varkappa & & \downarrow \chi \\ \widehat{\mathbb{Z}\mathcal{K}} & \xrightarrow{\nabla} & \mathbb{Z}[[t]] \end{array}$$

показывает, что  $\chi = \nabla \circ \varkappa \circ \nu_3$  и, следовательно,

$$\chi(w) = \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w|-|w'|} \nabla(\varkappa(w')),$$

где  $w'$ , слово от букв  $t_{ij}$ , понимается, в силу упомянутого отождествления, как слово от букв  $x_{ij}$ , то есть как положительная крашенная коса.

Мы докажем последовательно все пять утверждений теоремы, применяя это выражение для  $\chi$  и разбивая сумму по всем  $2^n$  под-словам  $w' \subseteq w$  на подходящие частичные суммы, состоящие из 2, 4, ...,  $2^k$  слагаемых.

(1). Разобьем сумму на пары  $\pm(\nabla(\varkappa(w'A)) - \nabla(\varkappa(w')))$  и заметим, что узлы  $\varkappa(w'A)$  и  $\varkappa(w')$  изотопны.

(2). То же рассуждение для пар узлов  $\varkappa(Bw')$  и  $\varkappa(w')$ .

(3). Сумма, задающая  $\chi(w_1 B^2 w_2)$ , состоит из четверок, определяемых выбором подслов  $w'_1 \subseteq w_1$ ,  $w'_2 \subseteq w_2$ :

$$\pm(\nabla(\varkappa(w'_1 B^2 w'_2)) - 2\nabla(\varkappa(w'_1 B w'_2)) + \nabla(\varkappa(w'_1 w'_2))).$$

Докажем, что каждая такая четверка дает нуль.

В самом деле, определяющее соотношение для многочлена Конвея приводит к равенствам

где косы, соответствующие словам  $w'_1$  и  $w'_2$ , изображены в виде прямоугольных ящиков. Поэтому

как и требовалось.

(4). Достаточно доказать, что для любого слова  $w$  мы имеем  $\chi(wBC) = t^2\chi(wB)$ . Действительно,

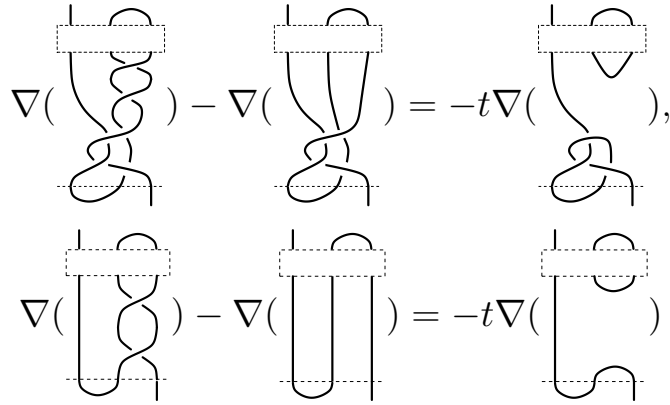
$$\chi(wB) = \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w|-|w'|} (\nabla(w'B) - \nabla(w')),$$

$$\chi(wBC) = \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w|-|w'|} (\nabla(w'BC) - \nabla(w'B) - \nabla(w'C) + \nabla(w')).$$

Теперь видно, что требуемое утверждение вытекает из тождества

$$\nabla(w'BC) - \nabla(w'C) = (t^2 + 1)(\nabla(w'B) - \nabla(w')),$$

которое доказывается применением определяющего соотношения Конвея



с учетом того обстоятельства, что взятие связной суммы зацепления с узлом-трилистником (как на картинках справа) приводит к умножению соответствующего многочлена на  $(t^2 + 1)$ .

(5). Здесь нам предстоит показать, что  $\chi(C^n Bw) = -p_1 p_{n-1} \chi(w)$  где  $w$  — произвольное слово от  $C$  и  $B$ . Разобьем альтернированную сумму, выражающую  $\chi(C^n Bw)$  на части, отвечающие фиксированному подслову  $w' \subseteq w$ :

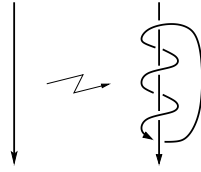
$$\sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w|-|w'|} \sum_{l=1}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} (\nabla \chi(C^l Bw') - \nabla \chi(C^l w')).$$

Используя соотношение Конвея в подходящем перекрестке, получаем:

$$\nabla \chi(C^l Bw') - \nabla \chi(C^l w') = -t \nabla(K_{(l)}),$$

где  $K = \chi(w')$ , а  $K_{(l)}$  обозначает ориентированное 2-компонентное зацепление, получаемое из ориентированного узла  $K$  добавлением незаузленной компоненты, зацепленной с данным узлом согласно рисунку

(на котором взято  $l = 3$ ):



ЛЕММА 5.25. Для любого узла  $K$  и любого натурального числа  $l$

$$\nabla(K_{(l)}) = t(q_0 + q_1 + \dots + q_{l-1})\nabla(K),$$

где  $q_s$  есть многочлен Конвея торического узла типа  $(2, 2s + 1)$ , задаваемый формулой

$$q_s = \sum_{j=0}^s \binom{s+j}{s-j} t^{2j}.$$

Это равенство доказывается, как и выше, рекуррентным применением соотношения Конвея. Подставляя его в предыдущую формулу для  $\chi(C^n Bw)$ , получаем:

$$-t^2 \cdot \sum_{l=1}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} \sum_{s=0}^{l-1} q_s \cdot \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w|-|w'|} \nabla(\mathcal{K}(w')),$$

и остается показать, что средний сомножитель в этом произведении равен  $p_{n-1}$ . В самом деле, его можно преобразовать так:

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-1-s} \binom{n-1}{s} q_s$$

или, вспоминая выражение для  $q_s$ , привести к виду

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{j=0}^s (-1)^{n-1-s} \binom{n-1}{s} \binom{s+j}{s-j} t^{2j}.$$

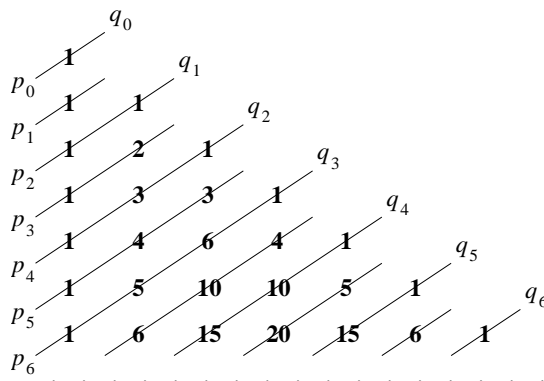
Меняя здесь порядок суммирования, получаем:

$$(-1)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \sum_{s=j}^{n-1} (-1)^s \binom{n-1}{s} \binom{s+j}{2j} \right] t^{2j}.$$

Применение формулы суммирования произведений (5.24) из [59] к внутренней сумме по  $s$  дает  $(-1)^{n-1} \binom{j}{2j-n+1}$  и тем самым доказывает требуемое утверждение.



**Замечание.** Коэффициенты многочленов  $p_n$  и  $q_n$  можно прочесть в треугольнике Паскаля по косым диагоналям:



**5.4.6. Значение на ассоциаторе.** Ассоциатор Дринфельда [50, 83] — это замечательный элемент алгебры  $\hat{\mathcal{A}}^h(3)$ , имеющий вид бесконечного ряда от (некоммутирующих) переменных  $a = A/(2\pi i)$ ,  $b = B/(2\pi i)$  с коэффициентами в алгебре кратных дзета-значений [64]:

$$\begin{aligned} \Phi = & 1 - \zeta_2[a, b] - \zeta_3([a, [a, b]] + [b, [a, b]]) \\ & - \zeta_4[a, [a, [a, b]]] - \zeta_{3,1}[b, [a, [a, b]]] - \zeta_{2,1,1}[b, [b, [a, b]]] + \frac{1}{2}\zeta_2^2[a, b]^2 \dots \end{aligned}$$

(явное разложение  $\Phi$  до членов степени 12 приведено в [5]).

Беря значение комплексификации найденного нами отображения  $\chi_{\mathbb{C}} : \hat{\mathcal{A}}^h(3) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[t]$  на этом элементе, мы получаем следующий результат:

ГИПОТЕЗА.

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{C}}(\Phi) = & -\zeta_2 T^2 + (-\zeta_3 + \zeta_{2,2})T^4 + (-\zeta_4 + \zeta_{2,3} + \zeta_{3,2} - \zeta_{2,2,2})T^6 + \dots \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n (-1)^k \zeta_{n+k}^{(k)} \right) T^{2n}, \end{aligned}$$

где  $T = t/(2\pi i)$ , числа  $\zeta_{l_1, \dots, l_k} = \zeta(l_1, \dots, l_k)$  суть кратные дзета-значения, а  $\zeta_m^{(k)}$  представляет собой краткую форму записи для суммы всех чисел  $\zeta_{l_1, \dots, l_k}$ , где  $l_i \geq 2$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и  $l_1 + l_2 + \dots + l_k = m$ .

Эта формула проверена до степени  $T^{10}$  путем компьютерных вычислений (см. [5]) с использованием таблицы соотношений между кратными дзета-значениями, приведенной в [101]. Любопытно отметить, что численные значения коэффициентов этого многочлена

$$\begin{aligned} & -1.644934 T^2 - 0.390314 T^4 - 0.332698 T^6 - 0.312405 T^8 \\ & -0.303958 T^{10} - 0.300153 T^{12} - 0.298365 T^{14} - 0.297505 T^{16} + \dots \end{aligned}$$

кажутся стремящимися к некоторому пределу, природа которого остается загадочной.

### 5.5. Доказательство гипотезы Пшитыцкого о парных диаграммах

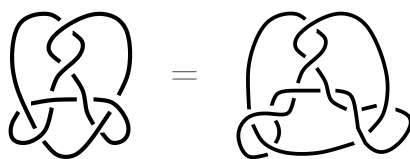
**5.5.1. Введение.** Здесь мы доказываем гипотезу, сформулированную Йозефом Пшитыцким [102] в 1987 году (она также является частью Проблемы 1.60 в известном сборнике открытых проблем в топологии Р. Кирби [71]). По ходу дела мы приводим два алгоритма вычисления полинома Конвея узла, заданного парной диаграммой, которые могут представлять и самостоятельный интерес.

**5.5.2. Проблема.** Диаграмма узла называется *парной*, если ее перекрестки можно разбить на пары вида



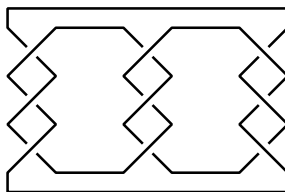
При любом выборе ориентации узла ветви в каждой такой *специальной* паре будут противонаправлены. Пару, изображенную на рисунке слева, будем называть отрицательной, а ту, что справа, — положительной.

Легко понять, что, например, все рациональные узлы обладают такими диаграммами (для этого достаточно разложить соответствующее рациональное число в цепную дробь с четными знаменателями). Парными диаграммами обладают и многие другие узлы, например, табличный (см. [105]) узел  $8_{15}$ :



В 1987 году известный математик Йозеф Пшитыцкий [102] высказал гипотезу о том, что существуют узлы, не имеющие парных диаграмм. Гипотеза простояла 24 года, несмотря на ряд попыток ее решения, предпринятых разными математиками.

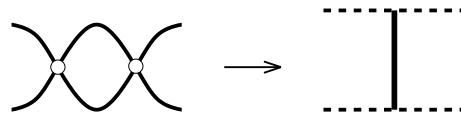
**ТЕОРЕМА 5.8.** *Крендельный узел с параметрами  $(3, 3, -3)$*



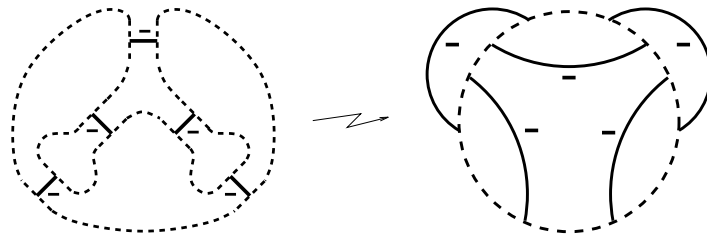
не обладает парной плоской диаграммой.

Доказательство этой теоремы основано на построении специальной поверхности Зейферта по парной диаграмме и вытекает из двух лемм, которые изложены ниже. В доказательстве некоторых утверждений принимал участие мой ученик, студент 3 курса М. Школьников, которому я глубоко признателен.

**5.5.3. Построение поверхности Зейферта.** Рассмотрим парную диаграмму  $D$  узла  $K$ . Заменяем каждую пару перекрестков на два параллельных отрезка, направленных так же, как и соответствующие участки узла, и соединенные общим перпендикуляром:



Параллельные отрезки соединяются оставшимися фрагментами диаграммы в простую замкнутую кривую. Если расправить эту кривую в окружность, то упомянутые общие перпендикуляры перейдут в набор непересекающихся хорд, расположенных частью внутри, а частью вне окружности, например, для приведенной выше парной диаграммы узла  $8_{15}$  мы получим:

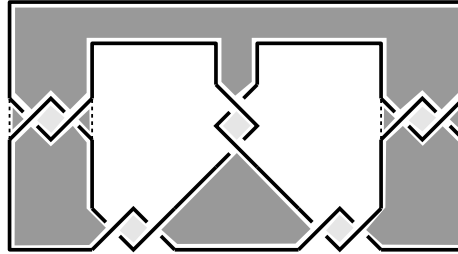


(Внешние и внутренние хорды здесь поменяны местами; это равносильно выворачиванию плоской диаграммы и не меняет изотопического типа узла.) Хорды снабжаются знаками, отвечающими знакам соответствующих специальных пар.

Исходный узел легко восстанавливается по такой оснащенной диаграмме: хорды следует удвоить и в середину каждой хорды встроить специальную пару перекрестков соответствующего знака.

По такой диаграмме узла (где специальные пары разбиты на внутренние и внешние) мы построим поверхность Зейферта не стандартным способом (через шахматную раскраску и круги Зейферта), а вот как. Заклеим окружность хордовой диаграммы диском, вырежем из него узкие полоски вдоль внутренних хорд, соединив полученные куски дважды перекрученной ленточкой нужной ориентации

на месте каждой вырезанной полоски. С внешними хордами поступим по-другому: заменим каждую из них на полоску, а к ней где-то посередине приклеим перпендикулярную узкую ленточку, также перекрученную дважды в соответствии со знаком. Вот пример того, что получается для приведенной выше хордовой диаграммы узла  $\delta_{15}$ :



Здесь сплошная линия — это наш узел, а пунктиром обозначены участки видимого контура поверхности Зейферта, которые не принадлежат ее краю. Разные оттенки серого отвечают двум сторонам поверхности.

#### 5.5.4. Специальная матрица Александера.

ЛЕММА 5.26. *Матрица Зейферта для поверхности, построенной выше, может быть записана в виде  $\begin{pmatrix} E & 0 \\ I & F \end{pmatrix}$ , где  $I, 0, E, F$  — квадратные матрицы одного размера, причем  $I$  — единичная матрица,  $0$  — нулевая, а  $E$  и  $F$  — некоторые симметрические целочисленные матрицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения такой матрицы достаточно в качестве базисных циклов взять набор  $e_i, f_i$ , где  $e_i$  — цикл, обходящий ленточку, приклеенную к внешней хорде номер  $i$ , а  $f_i$  — цикл, проходящий вдоль самой этой внешней хорды и замыкающийся внутри внутреннего диска. Заметим, что матрица  $E$  на самом деле диагональная с числами  $\pm 1$  на диагонали, а матрица  $f$  состоит из коэффициентов зацепления циклов  $f_i, f_j$ , которые определяются теми закрутками внутри основного круга специальной поверхности Зейферта, которые они проходят вместе.  $\square$

Напомним, что одну из матриц Александера данного узла можно построить по матрице Зейферта  $S$  как  $A = tS - S^*$ , где звездочка обозначает транспонирование. Каждый узел обладает целым классом эквивалентных матриц Александера (эквивалентность описывается определенным набором элементарных преобразований, см., например, [79]), при этом определитель матрицы Александера (полином Александера) и идеалы кольца  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , порожденные минорами

фиксированного порядка (идеалы Александера) являются инвариантами узла, определенными с точностью до умножения на обратимый элемент этого кольца, то есть на  $\pm t^k$ . Известно, что полином Александера всегда выражается через переменную Конвея  $z^2 = t + t^{-1} - 2$ . Для узлов, имеющих парную диаграмму, можно сказать больше.

**ЛЕММА 5.27.** *Узел с парной диаграммой обладает матрицей Александера, все элементы которой выражаются через переменную Конвея, точнее, матрицей вида  $I + z^2 B$ , где  $I$  — единичная матрица, а  $B$  — матрица, состоящая из целых чисел.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно взять матрицу Александера в виде  $tS - S^*$ , где матрица Зейферта  $S$  описана в лемме 1, и проделать с ней поблочно ряд элементарных преобразований: сначала умножить вторую строку на  $t^{-1}$ , затем обратить в ноль левый верхний блок и правый нижний блок при помощи правого верхнего:

$$\begin{pmatrix} E(t-1) & -I \\ tI & F(t-1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I + EFt^{-1}(t-1)^2 & 0 \end{pmatrix} \sim (I + EFz^2).$$

□

Из этой леммы сразу следует, что всякий идеал Александера узла, имеющего парную диаграмму, обладает системой образующих в виде многочленов от переменной  $z^2$ . Как известно (см. [79]), второй идеал Александера крендельного узла с параметрами  $(3, 3, -3)$  порождается в кольце  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  элементами 3 и  $t + 1$ . Несложное рассуждение показывает, что этот идеал нельзя породить многочленами от  $z^2 = t + t^{-1} - 2$ . Это и доказывает теорему.

На самом деле тот же способ применим ко всем узлам, второй идеал Александера которых имеет две образующие вида  $\langle a, t + 1 \rangle$ , где  $a$  — нечетное целое число, отличное от 1.

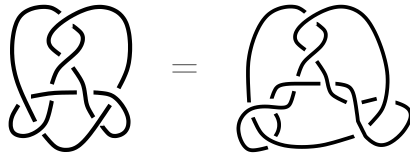
**СЛЕДСТВИЕ 5.1.** *Узлы из таблицы Рольфсена  $9_{35}, 9_{37}, 9_{41}, 9_{46}, 9_{47}, 9_{48}, 9_{49}, 10_{74}, 10_{75}, 10_{103}, 10_{155}, 10_{157}$  не являются двудольными.*

## 5.6. Алгоритм вычисления полинома Конвея по двудольному графу

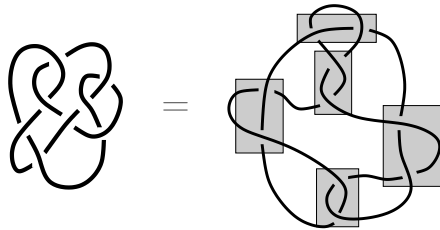
В этом параграфе речь пойдет о вычислении полинома Конвея для *парных* узлов (см. определение выше) Этот класс довольно широк. Узлы с малым числом перекрестков почти все оказываются парными. Например, среди 35 табличных узлов, имеющих на минимальной диаграмме не более 8 перекрестков, 34 узла являются парными, а про

один узел, а именно  $\delta_{18}$  в обозначениях Рольфсена (см. [105]), до сих пор не известно, является ли он парным. Гипотеза о существовании непарных узлов, сформулированная в 1987 году [102], лишь недавно была доказана (см. предыдущий параграф).

**5.6.1. Парные диаграммы.** Табличные диаграммы узлов редко бывают парными, но их часто удается привести к парному виду путем изотопии (непрерывной деформации в пространстве). Например, для табличного узла  $\delta_{15}$  это делается очень просто:



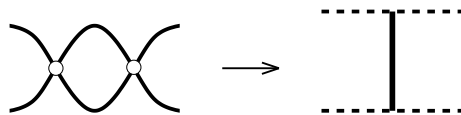
(достаточно сделать две подкрутки в левой нижней и правой нижней частях диаграммы). Для табличного узла  $\delta_{14}$  соответствующее преобразование менее тривиально:



— и доказать эквивалентность этих двух диаграмм можно, например, при помощи компьютерной программы Knotscape [76]. На последней диаграмме мы отметили серыми прямоугольниками специальные пары перекрестков.

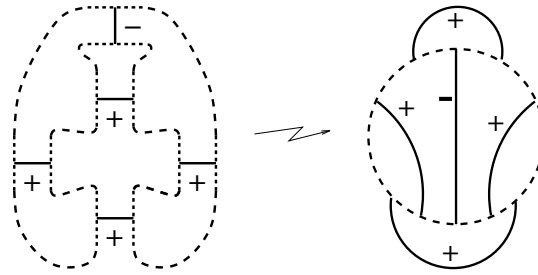
Целью настоящей заметки является формулировка и доказательство двух алгоритмов вычисления полинома Конвея для узла, заданного парной диаграммой.

**5.6.2. Двудольный граф парного узла.** Рассмотрим парную диаграмму  $D$  узла  $K$ . Заменим каждую пару перекрестков на два параллельных отрезка, направленных так же, как и соответствующие участки узла, и соединенные общим перпендикуляром:



Параллельные отрезки соединяются оставшимися фрагментами диаграммы в простую замкнутую кривую. Если расправить эту кривую в окружность, то упомянутые общие перпендикуляры перейдут в набор непересекающихся хорд, расположенных частью внутри, а частью

вне окружности, например, для приведенной выше парной диаграммы узла  $8_{14}$  мы получим:

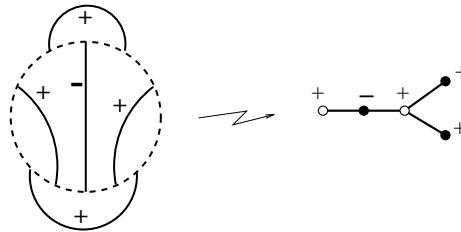


Хорды снабжены знаками, отвечающими знакам соответствующих специальных пар перекрестков.

Исходный узел легко восстанавливается по такой оснащенной диаграмме: хорды следует удвоить и в середину каждой хорды встроить специальную пару перекрестков соответствующего знака.

Значительная часть информации о хордовой диаграмме заключается в ее графе пересечений, см. раздел 3.1. Напомним, что каждой хорде сопоставляется вершина графа, причем ребрами соединяются те и только те вершины, для которых соответствующие хорды пересекаются, если их провести в виде прямых отрезков внутри круга.

Вот пример построения графа по хордовой диаграмме:



В нашем случае граф пересечений является двудольным, и его вершины отмечены белым и черным цветом в соответствии с принадлежности к соответствующей доле.

Заметим, что обратная операция не вполне однозначна: одному и тому же графу могут отвечать неэквивалентные хордовые диаграммы и, по-видимому, неэквивалентные узлы (явных примеров последнего у автора нет, поскольку они могут возникать только при достаточно большом количестве вершин). Замечательно, что при этом для вычисления полинома Конвея получаемого узла вполне достаточно знания только графа пересечений (со знаками).

### 5.6.3. Основные результаты.

**ТЕОРЕМА 5.9.** *Полином Конвея парного узла вычисляется по соответствующему оснащённому двудольному графу  $G$  как сумма мономов  $\varepsilon z^n$  по всем подграфам графа  $G$ , которые состоят из связных компонент с чётным числом вершин, причем для каждой компоненты матрица смежности имеет ненулевой определитель по модулю 2. Здесь  $n$  — порядок подграфа, то есть число вершин в нем, а  $\varepsilon = \pm 1$  — произведение знаков всех вершин.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Применим основное соотношение, определяющее полином Конвея, к узлу, изображенному в виде парной диаграммы. Мы получим, что  $\nabla(K)$  — это сумма  $2^k$  слагаемых, где  $k$  — число хорд в диаграмме, причем в каждом слагаемом стоит степень переменной  $z$  со знаком  $\pm$ , умноженным на значение  $\nabla$  на тривиальном зацеплении, состоящем из некоторого числа компонент. Как известно, это значение равно 1 для узла, состоящего из одной компоненты, и равно 0 для зацепления, состоящего из большего числа компонент. Остается воспользоваться критерием связности, доказанным в статье [90].  $\square$

Заметим, что при удвоении хорд в хордовой диаграмме получается всегда кривая, число компонент в которой имеет четность, противоположную четности числа вершин графа пересечений. Именно поэтому мы оставляем в результате только графы с чётным числом вершин.

Например, для узла  $8_{14}$  и изображенного выше графа у нас получатся 4 слагаемых с двумя вершинами и со знаками  $-, -, +, +$ , что даст коэффициент 0 при  $z^2$ , и два слагаемых степени 4, отвечающих линейным подграфам порядка 4, оба со знаком  $-$ . Итого, полином Конвея данного узла получается  $1 - 2z^4$ .

**ТЕОРЕМА 5.10.** *Полином Конвея можно вычислить по двудольному графу еще таким способом. Выбираем одну из двух долей, допустим в ней  $k$  вершин, и составляем матрицу  $A$  размера  $k \times k$ , в которой элемент  $a_{ij}$  равен сумме чисел  $\pm 1$  всех вершин из второй доли, смежных с вершинами  $i$  и  $j$ . Тогда полином Конвея будет равен определителю матрицы, полученной сложением единичной матрицы размера  $k$  и матрицы  $A$ , умноженной на  $z^2$ , в которой строки, отвечающие вершинам со знаком минус, домножены на  $-1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Это утверждение является прямым следствием лемм 5.26 и 5.27 из предыдущего пункта.  $\square$



Любопытно, что последняя теорема может применяться двояким образом, как к первой доле графа, так и ко второй. При этом матрицы будут иметь, вообще говоря, разный размер, но одинаковый определитель. Например, для нашего примера  $\delta_{14}$ , если выбрать долю, состоящую из двух вершин, то получится

$$\det \begin{pmatrix} 1 - z^2 & -z^2 \\ -z^2 & 1 + z^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 - 2z^2 & -z^2 & -z^2 \\ z^2 & 1 + z^2 & z^2 \\ z^2 & z^2 & 1 + z^2 \end{pmatrix} = 1 - 2z^4.$$



## Литература

### Публикации автора по теме диссертации в изданиях из перечня ВАК:

- [1] S. Chmutov, S. Duzhin. *An upper bound for the number of Vassiliev knot invariants*, J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), 141–151.
- [2] С.В.Дужин, А.И.Каишев, С.В.Чмутов. *Алгебра 3-графов*. Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, т. 221 (1998), с. 168–196.
- [3] S. Chmutov, S. Duzhin, *A lower bound for the number of Vassiliev knot invariants*. Topology and its Applications **92** (1999) 201–223.
- [4] S. Chmutov, S. Duzhin. *The Kontsevich integral*, Acta Appl. Math. **66** (2001), 155–190.
- [5] S. Duzhin, *Lectures on Vassiliev knot invariants*, Lectures in Mathematical Sciences, vol. 19, The University of Tokyo Press, 2002. 123 pp. (монография).
- [6] S. Duzhin. *Decomposable skew-symmetric functions*. Moscow Mathematical Journal, v. 3, no. 3 (2003), p. 881–888.
- [7] S. Duzhin, J. Mostovoy. *A toy theory of Vassiliev invariants*. Moscow Mathematical Journal **6**(1), p. 85–93 (2006).
- [8] С. В. Дужин, М. В. Карев. *Определение ориентации струнных зацеплений при помощи инвариантов конечного типа*. Функц. анализ и его приложения, т. 41, вып. 3, стр. 48–59, 2007).
- [9] С. В. Дужин. *Многочлен Конвея и разложение Магнуса*. Алгебра и Анализ, том 23 (2011), вып. 3, с. 175–188, 5 стр.
- [10] С. В. Дужин. *Алгоритмы вычисления полинома Конвея по двудольному графу*. Информационно-управляющие системы, N4 (2011), стр. 89–91.

### Другие публикации автора по теме диссертации

- [11] S. Chmutov, S. Duzhin and S. Lando. *Vassiliev knot invariants I. Introduction*, Singularities and bifurcations, Adv. Soviet Math. **21** 117–126, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [12] S. Chmutov, S. Duzhin and S. Lando, *Vassiliev knot invariants II. Intersection graph conjecture for trees*, Singularities and bifurcations, Adv. Soviet Math. **21** 127–134, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [13] S. Chmutov, S. Duzhin and S. Lando, *Vassiliev knot invariants III. Forest algebra and weighted graphs*, Singularities and bifurcations, Adv. Soviet Math. **21** 135–145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [14] S. Duzhin. *A quadratic lower bound for the number of primitive Vassiliev invariants*. Extended abstract, KNOT'96 Conference/Workshop report, Waseda University, Tokyo, July 1996, p. 52–54.
- [15] S. Duzhin. *The Matiyasevich polynomial, four colour theorem and weight systems*. In: Art of low-dimensional topology VI (ed. T. Kohno), Kyoto, 2000, pp. 9–14. Available on-line at <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers>.
- [16] S. Duzhin. *On the Kleinian weight systems*. In: Low-Dimensional Topology of Tomorrow, Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku 1272, June 2002, p. 84–90. Available on-line at <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers>.
- [17] С. В. Дужин. *Инварианты Васильева–Гусарова*. В сборнике: Математика XX века. Взгляд из Петербурга. Под редакцией А.М.Вершика. М.: МЦНМО, 2010, стр. 87–116.
- [18] С. В. Дужин, С. В. Чмутов. *Узлы и их инварианты*, «Математическое просвещение», вып. 3, 1999, с. 59–93.
- [19] S. V. Duzhin, A. I. Kaishev. *Calculation of central generators of the universal enveloping algebras and Vassiliev–Kontsevich weight systems*.// Proceedings of the international workshop

- «New Computer Technologies in Control Systems» (editors: M.G.Dmitriev, Yu.L.Sachkow). Pereslavl-Zalessky, August 13-16, 1995.
- [20] С. В. Дужин, А. И. Каишев. *Реализация в T-системе программы вычисления  $sl$ - и  $so$ -полиномов для 3-графов*. В сборнике «Программные системы» (труды Института Программных Систем), Москва, Наука, Физматлит, 1999, с. 214–223.
- [21] S. Chmutov, S. Duzhin. *The Kontsevich integral*. Encyclopedia of Mathematical Physics, eds. J.-P.Francoise, G.L.Naber and S.T.Tsou. Oxford: Elsevier, 2006 (ISBN 978-0-1251-2666-3), volume 3, pp. 231–239.

#### Материалы по диссертации, размещенные в Интернете

- [22] С. Дужин. *Программы и файлы данных, относящиеся к вычислению весовых систем  $\varphi$  и  $\psi$* . 2009. <http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/dataprogram/OrLinks/>.
- [23] S. Duzhin, *Program and data files related to the Drinfeld associator*, 2009, online at <http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/dataprogram/associator/>.
- [24] S. Duzhin, M. Shkolnikov. *Bipartite knots*. <http://arxiv.org/abs/1105.1264>.
- [25] С. В. Дужин. *Доказательство гипотезы Пуштыцкого о парных диаграммах*. Препринт ПОМИ 2011-9.
- [26] S. Chmutov, S. Duzhin and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot invariants*, Web publication, 512 pp. [arXiv:1103.5628/](http://arxiv.org/abs/1103.5628).

#### Публикации других авторов

- [27] K. I. Appel, W. Naken, *Every planar map is four colorable*, Contemp. Math. **98**, Amer. Math. Soc., Providence, 1989.
- [28] В. И. Арнольд, *Кольцо когомологий группы крашенных кос*, Мат. Заметки **5** (1969) 227–231.
- [29] V. I. Arnold, *Vassiliev's theory of discriminants and knots*. First European Congress of Mathematicians, (Paris, July 1992), Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, **1**, 3–29 (1994).
- [30] В. Арнольд, А. Варченко, С. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*. том. 2: Монодромия и асимптотики интегралов. М., 1984.
- [31] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*. Topology, V. 34, 1995. P. 423–472. Online at <http://www.math.toronto.edu/~drorbn/papers>.
- [32] D. Bar-Natan, *Vassiliev Homotopy String Link Invariants*. Journal of Knot Theory and its Ramifications 4-1 (1995) 13–32.
- [33] D. Bar-Natan, *Some Computations Related to Vassiliev Invariants*, Web document (1996), <http://www.math.toronto.edu/~drorbn/papers>.
- [34] D. Bar-Natan, *Vassiliev and Quantum Invariants of Braids*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **51** (1996) 129–144.
- [35] D. Bar-Natan, *Lie algebras and the four color theorem*, Combinatorica 17-1 (1997) 43–52.
- [36] D. Bar-Natan, *BBS on knots*, Web site, <http://katlas.math.toronto.edu/drorbn/bbs/>, 2011, May–June.
- [37] D. Bar-Natan, *AcademicPensieve*, Web site, <http://katlas.math.toronto.edu/drorbn/AcademicPensieve/>, 2011, May–June.
- [38] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky, D. Thurston, *Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot*. Israel Journal of Mathematics 119 (2000) 217–237.
- [39] D. Bar-Natan, T. Q. T. Le, D. P. Thurston, *Two applications of elementary knot theory to Lie algebras and Vassiliev invariants*. Geometry and Topology 7(1) (2003) 1–31, [arXiv:math.QA/0204311](http://arxiv.org/abs/math.QA/0204311).
- [40] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 1974.
- [41] J. S. Birman, *Plat presentations for link groups*, Commun. Pure Appl. Math. **26** (1973), 673–678.
- [42] J. S. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*. Invent. Math. 111 (1993) 225–270.
- [43] A. Bouchet, *Circle graph obstructions*, J. Combin. Theory Ser. B, **60** (1994) 107–144.
- [44] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*. Главы 1–3. М.: Мир, 1976. Главы 4–6. М.: Мир, 1972. Главы 7–8. М.: Мир, 1978.
- [45] A. Cayley, *On the colouring of maps*, Proc. Royal Geographical Soc. (New Series), **1** (1879) 259–261.

- [46] S. Chmutov and S. Lando, *Mutant knots and intersection graphs*, *Algebr. Geom. Topol.* **7** (2007) 1579–1598.
- [47] S. Chmutov, A. Varchenko, *Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from  $sl_2$* , *Topology* **36** (1997) 153–178.
- [48] O. Dasbach, *On the Combinatorial Structure of Primitive Vassiliev Invariants III — A Lower Bound*. *Communications in Contemporary Mathematics*, Vol. 2, No. 4, 2000, pp. 579–590. Also [arXiv:math.GT/9806086](https://arxiv.org/abs/math.GT/9806086).
- [49] S. Donkin, *Invariant functions on matrices*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **113** (1993), p. 23–43.
- [50] В. Г. Дринфельд, *О квазитреугольных квазилопфовых алгебрах и одной группе, тесно связанной с  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* . *Алгебра и анализ*, **2**, N. 4, 149–181 (1990).
- [51] T. Fiedler, *Isotopy invariants for closed braids and almost closed braids via loops in stratified spaces*. [arxiv:/math.GT/0606443](https://arxiv.org/abs/math.GT/0606443).
- [52] R. H. Fox, *On the imbedding of polyhedra in 3-space*. *Ann. Math.*, **49** (1948), 462–470.
- [53] W. Fulton. *Young tableaux*. Camb. Univ. Press, 1997.
- [54] Ph. Griffiths, J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience, 1978.
- [55] М. Н. Гусаров, *Новая форма многочлена Конвея–Джонса ориентированных зацеплений*. *Записки научных семинаров ПОМИ* **193** (1991), 4–9.
- [56] М. Н. Гусаров, *Вариации заузленных графов. Геометрическая техника  $n$ -эквивалентности*. *Алгебра и Анализ* **12** (2000), вып. 4, 79–125.
- [57] М. Н. Гусаров, *Инварианты конечного типа представимы гауссовыми диаграммами*. Препринт ПОМИ, 1997.
- [58] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, *Finite type invariants of classical and virtual knots*. *Topology*, **39** (2000) 1045–1068. Preprint [arXiv:math/9810073v2](https://arxiv.org/abs/math/9810073v2) .
- [59] R. Graham, D. Knuth and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1994.
- [60] К. Хабири, *Claspers and finite type invariants of links*. *Geom. Topol.*, **4** (2000) 1–83.
- [61] Ф. Харари, *Теория графов*. «Мир», 1983.
- [62] P. J. Heawood, *Map-colour theorem*, *Quarterly J. of Pure and Applied Math.*, **24** (1890) 332–338.
- [63] W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge, 1954.
- [64] M. E. Hoffman, *Multiple harmonic series*, *Pacific J. Math.* **152** (1992), 275–290.
- [65] V. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)* **12** (1985) 103–111.
- [66] А. И. Каишев, *Программы и данные, расположенные на анонимном ftp-сервере <ftp://math.botik.ru/pub/a3g>*.
- [67] А. Каишев, *Система программ для исследования комбинаторно-алгебраических инвариантов топологических объектов малой размерности*, кандидатская диссертация, Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский, 2000.
- [68] L. H. Kauffman, *Map coloring and the vector cross-product*, *J. Comb. Theory. B*, **48** (1990) 145–154.
- [69] A. Kawachi, *The invertibility problem on amphicheiral excellent knots*. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), no. 10, 399–402.
- [70] A. В. Кемпе, *On the geographical problem of the four colours*, *Amer. J. of Math.*, **2** (1879) 193–200.
- [71] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, Web publication, available online at <http://math.berkeley.edu/~kirby/>.
- [72] Jan Kneissler, *The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve*. Preprint [arXiv:math.QA/9706022](https://arxiv.org/abs/math.QA/9706022), June 1997.
- [73] T. Kohno, *Monodromy representations of braid groups and Yang–Baxter equations*. *Ann. Inst. Fourier* **37** (1987) 139–160.
- [74] M. Kontsevich, *Vassiliev’s knot invariants*. *Adv. in Soviet Math. Vol. 16, Part 2*, 1993. P. 137–150.
- [75] A. Kricker, *The lines of the Kontsevich integral and Rozansky’s rationality conjecture*. Preprint [arXiv:math.GT/0005284](https://arxiv.org/abs/math.GT/0005284).

- [76] J. Hoste and M. Thistlethwaite, *Knotscape*, computer program available from [www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html](http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html).
- [77] *XXI Российская олимпиада школьников по математике*. Квант, 1995, №5, 46–49 (см. также *Задачник Кванта*, М1509).
- [78] J. Lieberum, *On Vassiliev invariants not coming from semisimple Lie algebras*. Jour. of Knot Theory and its Ramifications 8-5 (1999) 659–666, [arXiv:math.QA/9706005](https://arxiv.org/abs/math/9706005).
- [79] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Math. **175**, Springer-Verlag, New York, 1997, 201 pp.
- [80] X.-S. Lin, *Finite type link invariants and the invertibility of links*, Math. Res. Letters 3 (1996), no. 3, pp. 405–417. Online at [arXiv:q-alg/9601019](https://arxiv.org/abs/q-alg/9601019).
- [81] X.-S. Lin, *Finite type link-homotopy invariants*, l'Enseignement Mathématique 47 (2001), pp. 315–327. Online at [arXiv:math.GT/0012095](https://arxiv.org/abs/math.GT/0012095).
- [82] T. Q. T. Le, J. Murakami, *The universal Vassiliev–Kontsevich invariant for framed oriented links*. Compositio Math. **102** (1996) 41–64.
- [83] T. Q. T. Le, J. Murakami, *The Kontsevich integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Mathematical Journal **142** (1996) 39–65.
- [84] Julien Marché. *A computation of Kontsevich integral of torus knots*. Preprint [arXiv:math.GT/0404264](https://arxiv.org/abs/math.GT/0404264).
- [85] B. Mellor, *The intersection graph conjecture for loop diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000) 187–211.
- [86] B. Mellor, *A few weight systems arising from intersection graphs*, Michigan Math. J. **51** (2003) 509–536.
- [87] P. M. Melvin and H. R. Morton, *The coloured Jones function*, Comm. Math. Phys. **169** (1995) 501–520.
- [88] H. R. Morton and P. R. Cromwell, *Distinguishing mutants by knot polynomials*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996) 225–238.
- [89] J. Milnor, J. Moore, *On the Structure of Hopf Algebras*. Ann. of Math. (2) **81** (1965), 211–264.
- [90] G. Moran, *Chords in a circle and linear algebra over  $GF(2)$* , J. Combin. Theory Ser. A **37** (1984) 239–247.
- [91] J. Mostovoy, T. Stanford, *On a map from pure braids to knots*, Journal of Knot Theory and its Ramifications, **12** (2003), 417–425.
- [92] J. Mostovoy, S. Willerton, *Free groups and finite-type invariants of pure braids*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **132** (2002) 117–130.  
См. также <http://www.matcuer.unam.mx/~jacob/works.html>.
- [93] Th. Muir. *The theory of determinants in the historical order of development*. Vol. 1. London, MacMillan and Co., 1918.
- [94] J. Murakami, *Finite type invariants detecting the mutant knots*, Knot Theory. A volume dedicated to Professor Kunio Murasugi for his 70th birthday. Editors: M. Sakuma et al., Osaka University, March 2000.
- [95] K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*, Birkhäuser, 1996.
- [96] T. Nowik, *Order One Invariants of Immersions of Surfaces into 3-Space*, Math. Ann. **328** (2004), 261–283.
- [97] T. Nowik, *Higher Order Invariants of Immersions of Surfaces into 3-Space*, Pacific J. Math. **223** (2006), no. 2, 333–347.
- [98] T. Ohtsuki, *Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds and their sets*. Series on Knots and Everything, **29**, World Scientific, 2002.
- [99] S. Papadima, *The universal finite-type invariant for braids, with integer coefficients*, Topology Appl. **118** (2002) 169–185.
- [100] R. Penrose, *Applications of negative dimensional tensors*, In: Combinatorial mathematics and its applications (ed. D. J. A. Welsh), New York, London: Academic Press, 1971.
- [101] M. Petitot, *Tables of relations between MZV up to weight 16*, Online at <http://www2.lifl.fr/~petitot/>.
- [102] T. M. Przytycka, J. H. Przytycki. *Signed dichromatic graphs of oriented link diagrams and matched diagrams*. Preprint. University of British Columbia, 1987.
- [103] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*. М: МЦНМО, 1997.

- [104] M. Polyak and O. Viro, *Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants*. Int. Math. Res. Notes **11** (1994) 445–454.
- [105] D. Rolfsen, *Knots and links*. Publish or Perish, Berkeley, 1976, 439 pp.
- [106] L. Rozansky, *A rationality conjecture about Kontsevich integral of knots and its implications to the structure of the colored Jones polynomial*. Topology and its Applications **127** (2003) 47–76. Preprint [arXiv:math.GT/0106097](https://arxiv.org/abs/math.GT/0106097).
- [107] T. Stanford, *Finite-type invariants of knots, links and graphs*. Topology, Vol. 35, no. 4, pp. 1027–1050.
- [108] A. Stoimenow, *Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants*, J. Knot Theory Ramifications **7** (1998) 94–114.
- [109] J. J. Sylvester. *Collected Mathematical Papers*, Vols. 1–4, Cambridge Univ. Press, 1904–1912.
- [110] P. G. Tait, *Remarks on the colouring of maps*, Proc. Royal Soc. Edingburgh, **10** (1880) 729.
- [111] H. F. Trotter, *Non-invertible knots exist*. Topology 2 (1964), 275–280.
- [112] Victor Turchin, *Hodge decomposition in the homology of long knots*. [arXiv:0812.0204v2](https://arxiv.org/abs/math.AT) (math.AT).
- [113] A. Vaintrob, *Melvin-Morton conjecture and primitive Feynman diagrams*, University of Utah preprint, also known as q-alg/9605028, May 1996.
- [114] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*. Theory of Singularities and Its Applications (ed. V. I. Arnold), Advances in Soviet Math. Vol. 1, 1990. P. 23–69.
- [115] В. А. Васильев, *Гомологические инварианты узлов: алгоритмы и вычисления*. Препринт ИПМ 90, 1990.
- [116] В. А. Васильев, *Когомологии пространства узлов*. Препринт ИПМ 91, 1990.
- [117] V. A. Vassiliev, *On combinatorial formulas for cohomology of spaces of knots*. Moscow Mathematical Journal, v. 1, no. 1, pp.91–123 (2001).
- [118] В. А. Васильев, *Комбинаторное вычисление комбинаторных формул инвариантов узлов*. Труды Моск. Матем. Общества, том 66 (2005), 3–82.
- [119] VasBib, *online bibliography of papers on Vassiliev invariants*, compiled by D. Bar-Natan and S. Duzhin, <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/VasBib/>.
- [120] P. Vogel, *Algebraic structures on modules of diagrams*. Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication 32, August 1995, revised in 1997. Online at <http://www.math.jussieu.fr/~vogel/>.
- [121] A. Young. *On Quantitative Substitutional Analysis II*. Proc. Lond. Math. Soc., v. XXXIII, p. 97. Also in: Collected works. Univ. of Toronto Press, 1977.
- [122] Yu. Matiyasevich, *A Polynomial related to Colourings of Triangulation of Sphere*. <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/Journal/journal.htm>
- [123] D. Zagier, *Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function*. Topology **40**(5) (2001) 945–960.
- [124] Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Москва, Наука, 1970.