

ИНВАРИАНТЫ ВАСИЛЬЕВА–ГУСАРОВА

С. В. Дужин

АННОТАЦИЯ. В обзорной статье, предназначенной широкому кругу математиков, даются основные определения, примеры, главные теоремы и формулировки открытых проблем в теории инвариантов узлов конечного порядка. Кратко освещаются и некоторые совсем недавние достижения в этой области.

1. ВВЕДЕНИЕ

Инварианты узлов конечного типа были изобретены М. Гусаровым в Петербурге и В. Васильевым в Москве независимо и почти одновременно — в конце 1980-х годов. Васильеву принадлежат первые публикации [V1, V2, V3] на эту тему (1990), но Гусаров, по свидетельству О. Я. Виро, приводил свое определение инвариантов конечного типа на семинаре Рохлина еще в 1987 году, хотя его первая публикация [G1] относится лишь к 1991 году, а ее английский перевод вышел только в 1994 году. В 1990–91 году В. И. Арнольд рассказал об открытии Васильева нескольким математикам в Европе и США, а в 1992 году сделал на эту тему доклад на Европейском математическом конгрессе [Arn]. С этих пор выражение “инварианты Васильева” стало стандартным, а их исследование превратилось в весьма популярную область исследований, к которой подключились десятки математиков в разных странах.

Имеет смысл говорить об инвариантах конечного типа со значениями в произвольной абелевой группе; для определенности мы будем обсуждать комплекснозначные инварианты. Они образуют бесконечномерную алгебру \mathcal{V} , фильтрованную конечномерными подпространствами $0 \subseteq \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \dots$ со свойством $\mathcal{V}_m \cdot \mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{V}_{m+n}$.

В 1991 году Дж. Бирман и С.-С. Лин [BL] показали, что все известные полиномиальные инварианты узлов выражаются через инварианты Васильева¹, а Д. Бар-Натан [BN1] ввел на градуированном векторном пространстве $\text{gr}\mathcal{V} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1}$ две структуры алгебры Хопфа и научился строить линейные функционалы на пространстве $\text{gr}\mathcal{V}$ (*весовые системы*) по метризованной алгебре Ли и ее конечномерному представлению. В 1992 году М. Концевич [Kon] определил весовые системы со значениями в универсальной обертывающей метризованной алгебры Ли, а также построил универсальный инвариант конечного типа со значениями в пополненном пространстве $\overline{\text{gr}\mathcal{V}} = \prod_{n \geq 0} \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1}$.

Тогда же были поставлены основные проблемы новой теории, остающиеся открытыми до сих пор:

- (1) *Найти размерности пространств \mathcal{V}_n или хотя бы их асимптотику при $n \rightarrow \infty$.*
- (2) *Является ли универсальный инвариант Васильева полным инвариантом (ориентированного) узла? То есть, верно ли, что если два узла K_1 и K_2*

Работа поддержана грантами 08-01-00379-а, НШ-709.2008.1, РФФИ 06-01-72551-НЦНИЛ-а.

¹Отчасти это было сделано уже в работе Гусарова [G1].

различны, то найдется инвариант конечного типа v такой, что $v(K_1) \neq v(K_2)$?

- (3) Верно ли, что инварианты Васильева различают ориентацию узла? Иными словами, существует ли пара взаимно обратных узлов K, K' , неэквивалентных друг другу, и такой инвариант Васильева v , что $v(K) \neq v(K')$? Известно [Kn], что такой инвариант, если он существует, должен иметь степень не меньше 13.²

Новая наука быстро стала популярной и оказала революционное воздействие на теорию узлов, зацеплений и 3-мерных многообразий. За 17 лет по этой тематике было опубликовано несколько сотен работ, см. [ViB]. Среди наиболее значимых продвижений отметим следующие:

- Рациональность интеграла Концевича (доказана Ле и Мураками [LM]).
- Существование инвариантов конечного типа, не являющихся квантовыми инвариантами (П. Вожель [Vo], Я. Либерум [Lieb]).
- Гауссово-диаграммные формулы, изобретенные М. Поляком и О. Виро [PV] и доказательство М. Гусаровым [G4] теоремы о том, что любой инвариант Васильева может быть представлен такой формулой.
- Доказательство Д. Бар-Натаном [BN2] теоремы о том, что инварианты Васильева различают *косы*³, а также классифицируют длинные зацепления с точностью до гомотопии.
- Теория класперов Хабиро–Гусарова [Ha, G3].
- Работы В. Васильева [V4, V5], в которых описывается общая техника получения комбинаторных формул для классов когомологий в дополнениях к дискриминантам (классы нулевых когомологий — это в точности инварианты конечного типа).
- Явные формулы для интеграла Концевича некоторых узлов и зацеплений [BGRT, BLT, Roz, Kri, Mar].

2. Узлы и их инварианты

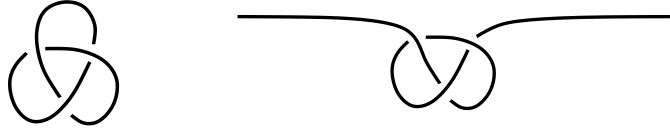
2.1. Определение и примеры. Узел — гладкое вложение окружности S^1 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 , рассматриваемое с точностью до *изотопии*, то есть гладкой деформации, во время которой не допускаются самопересечений кривой. В зависимости от контекста, мы будем понимать под узлом либо индивидуальную гладкую замкнутую кривую в \mathbb{R}^3 , либо класс эквивалентности таких кривых относительно изотопии.

Вместо узлов в \mathbb{R}^3 можно рассматривать узлы в трехмерной сфере S^3 ; одноточечная компактификация пространства индуцирует взаимно-однозначное соответствие изотопических типов тех и других. Кроме того, вместо обычных (замкнутых) узлов можно изучать *длинные* узлы, т.е. вложения $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, совпадающие вне некоторого компакта со стандартным вложением $t \mapsto (t, 0, 0)$ и рассматриваемые с точностью до изотопии, неподвижной на бесконечности. Одноточечная компактификация \mathbb{R}^3 приводит, опять же, к взаимно-однозначному соответствию; таким образом, все три варианта теории узлов эквивалентны между собой.

²В недавней статье В. Турчина [Tur] приводятся аргументы в пользу того, что такие инварианты действительно должны существовать, но только в степенях, больших 20.

³Этот факт является также прямым следствием трудной теоремы Т. Коно [Koh], доказанной еще до введения инвариантов конечного типа.

Пример замкнутого узла и соответствующего ему длинного узла:



При изучении узлов часто возникает необходимость в рассмотрении произвольных *зацеплений*, то есть гладких вложений несвязного объединения $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, также рассматриваемых с точностью до изотопии.

Чтобы изобразить узел $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ на бумаге, выберем разложение пространства \mathbb{R}^3 в прямую сумму “горизонтальной” плоскости Π и “вертикальной” прямой l и рассмотрим проекцию $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$ вдоль l . При необходимости, отображение k нужно подвергнуть малому шевелению с тем, чтобы проекция $\pi(k(S^1))$ оказалась кривой общего положения, то есть гладкой и с конечным числом “перекрестков” (трансверсальных самопересечений кратности два). В каждом перекрестке полученной кривой при помощи небольшого разрыва отмечается, какая ветвь узла проходит выше (является “проходом”), а какая ниже (является “переходом”) — относительно проекции π .

Получаемая в итоге картинка называется *плоской диаграммой* узла. Мерой сложности узла естественно считать минимальное число перекрестков на его плоской диаграмме.

Тривиальный узел (эквивалентный плоской окружности) имеет сложность 0, сложности 1 и 2 не бывает, а простейший нетривиальный узел — с тремя перекрестками — существует в двух разновидностях и называется *трилистником*.

Приведем несколько примеров узлов:



Тривиальный узел Левый трилистник Правый трилистник Восьмерка Узел 8_{17}

2.2. Ориентация. Мы считаем окружность S^1 и пространство \mathbb{R}^3 ориентированными. Отражение относительно плоскости меняет ориентацию пространства. Изменение направления обхода кривой на противоположное меняет ориентацию узла. Естественно выделить классы узлов, которые остаются эквивалентными себе при таких преобразованиях.

Узел называется *зеркальным*, если он эквивалентен своему зеркальному отражению.

Примеры. (1) Узел «восьмерка» зеркален. Это можно доказать явным построением изотопии. (2) Трилистник не является зеркальным узлом: Это следует, например, из того, что базисный инвариант Васильева третьей степени принимает на левом и правом трилистниках разные значения.

Узел называется *обратимым*, если он эквивалентен своему обратному, т. е. тому же узлу, проходимому в обратном направлении.

Примеры. (1) Трилистник обратим, так как направление обхода можно заменить на обратное плавным поворотом на 180° вокруг некоторой оси. (2) Узел 8_{17} необратим: при замене ориентации он переходит в свой зеркальный образ, неэквивалентный исходному узлу (эта нетривиальная теорема была доказана в 1979 году А. Каваути [Kaw]).

2.3. Инварианты узлов. Для различения узлов используются инварианты, т.е. функции, сопоставляющие узлу некоторый объект (число, многочлен, группу и т.п.) и не меняющиеся при изотопиях. Известно очень много разных инвариантов узлов. Наиболее удобны на практике полиномиальные инварианты, допускающие определение посредством *скейн-соотношений*, т.е. соотношений между значениями инварианта на узлах, отличающихся лишь локально в окрестности некоторого перекрестка. Из множества таких инвариантов мы приведем определение лишь одного: многочлена Конвея (по поводу других инвариантных полиномов см., например, [PS]).

Определение. *Многочлен Конвея C — это инвариант ориентированных зацеплений (в частности, узлов), принимающий значения в кольце $\mathbb{Z}[t]$, удовлетворяющий соотношению*

$$(1) \quad C\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \diagdown \\ \diagup \\ \curvearrowleft \end{array}\right) - C\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \diagup \\ \diagdown \\ \curvearrowleft \end{array}\right) = tC\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \cdot \\ \cdot \\ \curvearrowleft \end{array}\right)$$

(“скейн-соотношение Конвея”) и равный 1 на тривиальном узле.

Три диаграммы, фигурирующие в соотношении Конвея, отличаются друг от друга лишь внутри пунктирной окружности, а снаружи нее совпадают. Поскольку такие перестройки меняют число связных компонент, определение имеет смысл только для совокупности всех зацеплений. Применяя скейн-соотношение достаточное много раз, любое зацепление можно свести к тривиальному узлу, и результат вычислений не зависит от последовательности действий (в этом и состоит теорема Конвея). Можно проверить, что для узлов полученный инвариант не меняется ни при замене ориентации, ни при зеркальном отражении и содержит только четные степени переменной t . *Примеры:* для трилистника, восьмерки и узла 8_{17} (см. рисунок выше) многочлены Конвея равны соответственно $1 + t^2$, $1 - t^2$, $1 - t^2 - 2t^4 - t^6$.

3. ИНВАРИАНТЫ КОНЕЧНОГО ТИПА

3.1. Определение Гусарова. Пусть f — инвариант узлов со значениями в некоторой абелевой группе. Рассмотрим, для данного узла K , какую-нибудь плоскую диаграмму D и выберем некоторое подмножество ее перекрестков S , состоящее из m элементов. Тогда можно рассмотреть следующую альтернированную сумму:

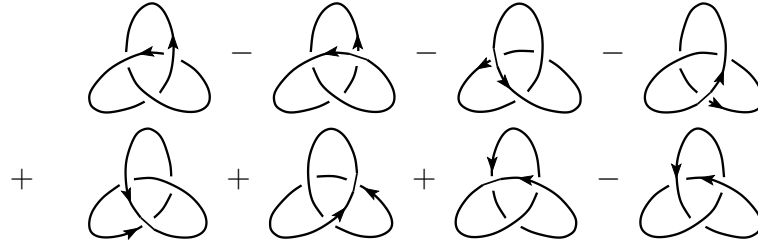
$$(2) \quad \Delta_S(f, D) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m} (-1)^{|\varepsilon|} f(K_{\varepsilon, D}),$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ — набор нулей и единиц, $|\varepsilon| = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m$, а $K_{\varepsilon, D}$ — узел, который строится по диаграмме D , видоизмененной в малой окрестности перекрестков из S по такому правилу: если $\varepsilon_i = 0$, то i -й перекресток не меняется, а если $\varepsilon_i = 1$, то меняется на противоположный.

Функция f называется, по Гусарову [G1], *инвариантом конечного типа* степени не выше n , если выписанная линейная комбинация равна нулю для каждого набора из $n + 1$ перекрестка произвольной плоской диаграммы D (с числом перекрестков не меньше $n + 1$) любого узла K .

Приведем пример. Для упрощения записи будем считать инварианты узлов продолженными по линейности на абелеву группу целочисленных комбинаций узлов. Тогда любой инвариант степени не выше 2 должен обращаться в ноль, в

частности, на такой линейной комбинации:

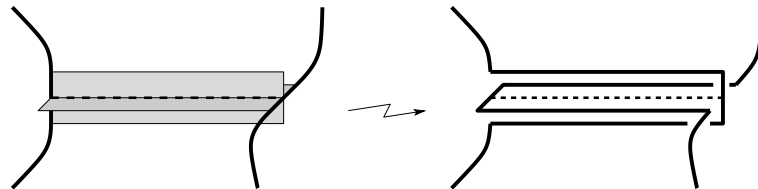


Поскольку все слагаемые в этой сумме, кроме первого и последнего, представляют собой тривиальные узлы, это условие означает, что инвариант степени 2 принимает равные значения на левом и правом трилистниках.

Приведенное определение может на первый взгляд показаться искусственным, ибо апеллирует к плоским диаграммам. На самом деле можно дать эквивалентное ему чисто геометрическое определение. Для этого мы рассмотрим обобщенную операцию замены перекрестка, введенную Гусаровым в [G2].

Выберем на узле несколько пар точек и соединим точки каждой пары между собой произвольным набором гладких непересекающихся кривых γ_i , расположенных в дополнении к узлу и трансверсально подходящих к нему в выбранных точках. Вдоль каждой кривой γ_i проведем пару узких полосок, трансверсально пересекающихся между собой ровно по γ_i и таких, что на одном конце узел проходит по краю первой полоски, а на другом конце — по краю второй. Такой набор кривых и полосок Гусаров называет *вариативной схемой*; заметим, что каждая кривая γ_i определяет свою пару полосок с точностью до выбора целого числа, так как полоски при движении вдоль кривой могут произвольным образом вращаться вокруг оси.

Обобщенная замена перекрестка — это изменение узла в окрестности данной кривой γ согласно следующему рисунку:



По вариативной схеме можно составить альтернированную сумму значений инварианта, подобную (2). Если для любой схемы, состоящей из $n + 1$ кривых, такая сумма равна нулю, то мы имеем дело с инвариантом степени не выше n . Легко понять, что это определение эквивалентно предыдущему.

3.2. Подход Васильева. В упрощенном виде идея Васильева заключается в том, что нужно ввести в рассмотрение, помимо обычных узлов, еще так называемые *особые узлы*, и определить продолжение инвариантов, определенных первоначально для обычных узлов, на множество всех особых узлов. Это позволяет заменить альтернированную сумму большого числа обычных узлов одним особым узлом и быстро сводит изучение инвариантов конечного типа к комбинаторике.

Особым узлом называется гладкое отображение $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, являющееся вложением всюду, кроме конечного числа простых двойных точек (т. е. точек трансверсального самопересечения).

Обозначим через Emb (Imm) пространство всех вложений (погружений) окружности в \mathbb{R}^3 . Разность $\Sigma = \text{Imm} \setminus \text{Emb}$ есть, по Васильеву, *дискриминант*

пространства Emb . Дополнение к дискриминанту, т.е. собственно пространство Emb состоит из связных компонент, отвечающих изотопическим типам (обычных) узлов; чтобы перейти от одного типа к другому, необходимо пересечь дискриминант. Полезно представлять себе множество всех особых узлов с одной двойной точкой как *главную часть* дискриминанта Σ ; для перехода из одной компоненты связности пространства Emb в любую другую достаточно несколько раз пересечь эту главную часть, т.е. сделать несколько замен перекрестков на диаграмме узла.

Множество всех особых узлов с n двойными точками, рассматриваемых с точностью до изотопии, мы обозначим через \mathcal{X}_n . В частности, \mathcal{X}_0 — это множество (классов эквивалентности) обычных узлов. Буквой \mathcal{X} без индекса мы будем обозначать объединение всех \mathcal{X}_n .

Диаграмма особого узла отличается от диаграммы обычного узла тем, что на ней, кроме точек прохода и перехода, есть еще точки самопересечения, которые на рисунках мы будем изображать жирными точками.

Пусть $f : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ — некоторый инвариант узлов. *Продолжение инварианта f на особые узлы* — это функция $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$, совпадающая на \mathcal{X}_0 с f и удовлетворяющая скейн-соотношению Васильева

$$(3) \quad f\left(\begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \end{array} \right) = f\left(\begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \end{array} \right) - f\left(\begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \end{array} \right).$$

В этом соотношении фигурируют три особых узла, диаграммы которых совпадают между собой всюду, кроме указанного фрагмента. Оба узла, стоящие в правой части, имеют на одну двойную точку меньше, чем узел, стоящий в левой части. Пользуясь этим соотношением рекуррентно, всякий инвариант, заданный первоначально на обычных узлах, можно продолжить на множество всех особых узлов. В отличие от рекуррентного определения многочлена Конвея, данного выше, в этом случае вполне очевидно, что продолжение не зависит от порядка, в котором применяется скейн-соотношение Васильева.

Функция $f : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ называется *инвариантом Васильева* порядка (или степени) $\leq n$, если ее продолжение на множество особых узлов обращается в нуль на всех узлах, имеющих более чем n точек самопересечения. Это определение эквивалентно определению Гусарова, поскольку по разрешению всех двойных точек мы получаем, с точностью до знака, альтернированную сумму (2).

3.3. Пример. Коэффициент c_n при t^n в многочлене Конвея есть инвариант порядка $\leq n$. В самом деле, сопоставив скейн-соотношение Конвея (1) со скейн-соотношением Васильева (3), мы видим, что значение продолженного на особом узле с $n + 1$ особой точкой есть многочлен, делящийся на t^{n+1} ; следовательно, коэффициент при t^n в нем равен 0. Можно доказать, что порядок инварианта c_n равен ровно n .

3.4. Инварианты малых степеней. Множество \mathcal{V}_n всех инвариантов Васильева порядка $\leq n$ со значениями в поле образует *векторное пространство*, так как линейная комбинация нескольких таких инвариантов всегда принадлежит \mathcal{V}_n . Нас, в частности, будет интересовать вопрос, чему равна размерность этого пространства, т.е. сколько существует линейно независимых инвариантов Васильева данного порядка.

Пример. Пространство \mathcal{V}_0 одномерно и состоит только из констант.

В самом деле, если $f \in \mathcal{V}_0$, то f обращается в нуль на любом особом узле, имеющем хотя бы одну двойную точку. В силу определения, это значит, что значение f на обычном узле не меняется при замене любого прохода на переход. Но такими действиями любой узел можно распутать, т. е. свести к тривиальному узлу. Значит, значение нашего инварианта f на любом узле равно его значению на тривиальном узле и, таким образом, f есть константа.

Аналогичное утверждение имеет место и для инвариантов Васильева порядка 1. Его доказательство ненамного сложнее предыдущего.

Оказывается, что пространство \mathcal{V}_2 двумерно. Кроме констант, оно содержит еще один нетривиальный базисный элемент, например c_2 . (То, что c_2 не есть константа, видно из приведенных выше значений многочлена Конвея на некоторых узлах.)


Причину, по которой нетривиальные инварианты Васильева появляются только в порядке 2, можно объяснить следующим образом. Пусть v — инвариант Васильева порядка n . Рассмотрим его значения на особых узлах, имеющих ровно n двойных точек. В силу соотношения Васильева и ввиду того, что v обращается в нуль на любом узле, у которого больше, чем n двойных точек, значение $v(K)$ не изменится, если узел K подвергнуть произвольной деформации (включая замены проходов на переходы и обратно), при которой двойные точки остаются на месте. Следовательно, значение $v(K)$ зависит лишь от порядка, в котором при обходе узла на нем встречаются двойные точки.

Если двойная точка одна (a), то она может встретиться только так: aa . Если же двойных точек две (a и b), то есть две циклически различных возможности, а именно, $aabb$ и $abab$. Различные варианты чередования двойных точек при обходе узла удобно кодировать посредством хордовых диаграмм.

3.5. Хордовые диаграммы. Хордовая диаграмма степени n — это ориентированная окружность, в которой проведены n хорд, все концы которых различны.

Хордовые диаграммы рассматриваются как чисто комбинаторный объект: расстояние между концами хорд и форма хорд не имеют никакого значения, важен лишь порядок, в котором пары точек, соединенных хордами, следуют по кругу. Хордовая диаграмма — это то же самое, что слово в алфавите из n букв a_1, \dots, a_n , в котором каждая буква встречается ровно два раза. Такие слова рассматриваются с точностью до циклических перестановок входящих в них букв и произвольной перенумерации переменных a_1, \dots, a_n .

Примеры. Существует

1. одна хордовая диаграмма степени 1: 

2. две хордовые диаграммы степени 2: 

3. пять хордовых диаграмм степени 3: 

(Здесь и далее подразумевается, что внешняя окружность ориентирована против часовой стрелки.)

Каждому особому узлу K , имеющему n двойных точек, отвечает определенная хордовая диаграмма $\chi(K)$ степени n , например:

$$\begin{aligned} \chi\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \\ \chi\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}. \end{aligned}$$

3.6. Основная теорема. Пусть \mathbf{CD}_n — множество всех хордовых диаграмм степени n . Их число $\#(\mathbf{CD}_n)$ дает оценку сверху на зазор между размерностью пространства \mathcal{V}_n и размерностью пространства $\mathcal{V}_{n-1} \subseteq \mathcal{V}_n$. В самом деле, мы только что объяснили, как по инварианту Васильева порядка n построить функцию на множестве хордовых диаграмм порядка n . Если обозначить пространство всех функций на множестве хордовых диаграмм порядка n через \mathcal{F}_n , то мы получаем линейное отображение

$$\sigma : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{F}_n.$$

По определению, ядро этого отображения состоит в точности из инвариантов Васильева порядка $\leq n-1$, и мы имеем линейное вложение факторпространства

$$\bar{\sigma} : \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \rightarrow \mathcal{F}_n.$$

Отсюда следует, что размерности всех пространств \mathcal{V}_n конечны, причем

$$\dim \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} = \dim \mathcal{V}_n - \dim \mathcal{V}_{n-1} \leq \dim \mathcal{F}_n = \#(\mathbf{CD}_n).$$

А чему равен образ отображения $\bar{\sigma}$? Как можно охарактеризовать функции на множестве хордовых диаграмм, принадлежащие образу этого отображения, т. е. происходящие из инвариантов Васильева? Такие функции называются *весовыми системами*, а ответ на заданный вопрос дает следующая теорема Васильева–Концевича.

Теорема. (1) (В. Васильев⁴) *Всякая весовая система удовлетворяет*

(а) *одночленным соотношениям: $f(D) = 0$ для любой диаграммы D , содержащей хорду, не пересекающую никаких других хорд.*

(б) *четырёхчленным соотношениям*

$$(4) \quad f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) + f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = 0$$

(фигурирующие здесь хордовые диаграммы отличаются друг от друга положением одной хорды; предполагается, что к пунктирным участкам окружности может быть приложен любой набор хорд, один и тот же во всех четырех случаях).

(2) (М. Концевич) *Любая функция на множестве \mathbf{CD}_n , удовлетворяющая а) и б), происходит из некоторого инварианта Васильева порядка $\leq n$.*

Итак, чтобы определить число $d_n = \dim \mathcal{V}_n - \dim \mathcal{V}_{n-1}$, нужно составить и решить систему линейных уравнений, в которой неизвестные — это значения весовой системы на хордовых диаграммах степени n , а уравнения получаются из всевозможных 1- и 4-членных соотношений. Здесь удобно перейти на двойственную точку зрения, определив пространство \mathcal{A}_n такое, что \mathcal{A}_n^* есть в точности пространство весовых систем.

⁴Часть 1 была независимо доказана М. Гусаровым.

Пространство хордовых диаграмм \mathcal{A}_n — это линейное пространство, порожденное всеми хордовыми диаграммами степени n по модулю одночленных (приравнение нулю любой диаграммы, содержащей изолированную хорду) и четырехчленных соотношений вида

$$(5) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} = 0.$$

Вот конкретный пример 4-членного соотношения:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} = 0 ;$$

его можно переписать так:

$$-\begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} = 0 ,$$

а с учетом одночленных соотношений — так:

$$2 \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} = 0 ,$$

3.7. Размерности и их асимптотика. Вручную легко сосчитать пространства \mathcal{A}_n для степеней ≤ 4 . Ответ такой. Пространства $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ имеют размерности 0, 1, 1, 3 соответственно; базисами трех последних могут служить наборы $\begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} ; \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} ; \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} ; \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} ; \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \end{array} .$

С ростом n число переменных и уравнений в системе для определения размерности пространства \mathcal{A}_n растет суперэкспоненциально. Используя описанный прямой подход, на компьютере удалось сосчитать размерность и базис \mathcal{A}_n только для $n \leq 9$ [BN1]. К настоящему времени точные значения размерности пространств \mathcal{A}_n и, следовательно, \mathcal{V}_n , известны до $n = 12$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathcal{P}_n$	0	0	1	1	2	3	5	8	12	18	27	39	55
$\dim \mathcal{A}_n$	1	0	1	1	3	4	9	14	27	44	80	132	232
$\dim \mathcal{V}_n$	1	1	2	3	6	10	19	33	60	104	184	316	548

Ответ для $n = 10, 11$ и 12 получен Яном Кнайслером [Kn] в 1997 году с использованием более тонкой техники, а именно, через изучение мультипликативной структуры в примитивном пространстве $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$ (см. следующий раздел).

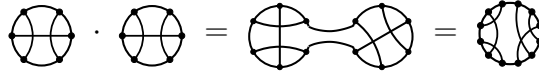
Асимптотика чисел $\dim \mathcal{A}_n$ при $n \rightarrow \infty$ также до сих пор неизвестна. Наилучшая оценка сверху принадлежит Д. Цагиру [Zag]; в упрощенной форме она утверждает, что $\dim \mathcal{A}_n$ асимптотически меньше, чем $n!/a^n$ для любой константы $a < \pi^2/6$. Рекордную нижнюю оценку получил О. Дасбах [Das], использовавший технику работы [CD1]; он доказал, что $\dim \mathcal{P}_n$ растет быстрее, чем $e^{b\sqrt{n}}$ для любого $b < \pi\sqrt{2/3}$. Наилучшая оценка снизу на размерности пространств \mathcal{A}_n , которую нам удалось отсюда вывести [CD1], — это что $\dim \mathcal{A}_n \gtrsim e^{n/\log_c n}$ для любой константы $c < \pi^2/6$. Во всяком случае, легко видеть, что субэкспоненциальная асимптотика для $\dim \mathcal{P}_n$ влечет за собой субэкспоненциальную асимптотику для $\dim \mathcal{A}_n$. Таким образом, имеющаяся оценка сверху факториальная, а оценка снизу строго меньше экспоненты, и зазор между обеими оценками остается весьма значительным.

4. АЛГЕБРА ХОРДОВЫХ ДИАГРАММ

4.1. **Биалгебра \mathcal{A} .** Устройство векторных пространств $\mathcal{A}_n = \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ помогает понять мультипликативная структура, которая имеется в прямой сумме

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \dots$$

Произведение двух хордовых диаграмм определяется так: две окружности разрываются и склеиваются в одну:



Хордовая диаграмма, которая получается в правой части этого соотношения, зависит, вообще говоря, от того места, где разрываются окружности, но с учетом 4-членных соотношений (в факторпространстве \mathcal{A}) умножение определено корректно.

Таким образом, бесконечномерное пространство \mathcal{A} является коммутативной градуированной алгеброй (скажем, над полем комплексных чисел).

В этой алгебре можно ввести коумножение по правилу

$$\delta(D) = \sum_{J \subseteq [D]} D_J \otimes D_{\bar{J}},$$

где $[D]$ — множество хорд диаграммы D , D_J — диаграмма, содержащая только хорды из подмножества J , а \bar{J} — дополнение к J в $[D]$. Таким образом \mathcal{A} превращается в коммутативную кокоммутативную алгебру Хопфа и по теореме Милнора–Мура (см. [ММ, СДМ]) совпадает с симметрической алгеброй над своим примитивным подпространством $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$. Примитивное подпространство \mathcal{P} состоит, по определению, из элементов $p \in \mathcal{A}$ таких что $\delta(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1$; оно градуировано подпространствами $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap \mathcal{A}_n$. Выбрав базис в каждом \mathcal{P}_n , мы сможем однозначно записать любой элемент алгебры \mathcal{A} в виде многочлена от бесконечного набора переменных.

В терминах самих хордовых диаграмм примитивные элементы записываются в виде довольно неуклюжих линейных комбинаций; более удобное описание можно получить при помощи так называемых диаграмм Фейнмана.

4.2. **Диаграммы Фейнмана.** *Диаграмма Фейнмана* степени n — это регулярный трехвалентный граф с $2n$ вершинами, в котором выделен некоторый ориентированный цикл, называемый *петлей Уилсона*, и в каждой вершине, не лежащей на петле Уилсона, задан циклический порядок выходящих из нее ребер.

Хордовые диаграммы являются частным случаем диаграмм Фейнмана (у них все трехвалентные вершины лежат на петле Уилсона). Каждую диаграмму Фейнмана f можно превратить в линейную комбинацию хордовых диаграмм $\rho(f)$, многократно применяя следующее соотношение *STU* для разрешения тройных точек, смежных с петлей Уилсона (здесь предполагается, что ребра в трехвалентных вершинах упорядочены против часовой стрелки; при замене порядка в любой вершине диаграмма по определению меняет знак):

$$(6) \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array}$$

Пример:

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - 2 \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}$$

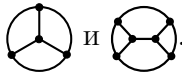
Степень связной диаграммы Фейнмана — это половина общего числа вершин графа. Если Φ_n — множество всех диаграмм Фейнмана степени n и $f \in \Phi_n$, то $\rho(f)$ можно рассматривать как элемент пространства \mathcal{A}_n . Диаграмма Фейнмана называется *связной*, если соответствующий граф остается связным после отбрасывания петли Уилсона.

Теорема [BN1, CDM]. Пространство примитивных элементов \mathcal{P}_n ($n \geq 1$) совпадает с линейной оболочкой элементов $\rho(f)$ для всех связных диаграмм $f \in \Phi_n$.

Примеры.

Пространство $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}_1$ нулевое.

Пространства \mathcal{P}_2 и \mathcal{P}_3 одномерны и порождены, соответственно, диаграммами



В трехмерном пространстве \mathcal{A}_4 примитивное подпространство \mathcal{P}_4 двумерно; в

качестве базиса можно взять элементы и

Оказывается (это открыл П. Вошель [Vo] в 1995 году), что в пространстве всех примитивных элементов $\mathcal{P} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ есть еще внутренняя мультипликативная структура. Именно она и позволила Я. Кнайсслеру в 1997 году разработать новый, более эффективный алгоритм нахождения базиса в пространстве инвариантов Васильева и превзойти вычислительный рекорд Д. Бар-Натана 1993 года.

5. ИНТЕГРАЛ КОНЦЕВИЧА

Интеграл Концевича изобретен в 1992 году [Kon] как средство доказательства сформулированной выше (с. 8) теоремы Васильева–Концевича. Интеграл Концевича является далеко идущим обобщением простой интегральной формулы для числа зацепления, которую мы сейчас опишем.

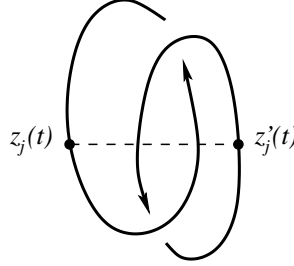
Число зацепления двух ориентированных пространственных кривых K и K' — это, говоря неформально, количество оборотов (со знаком), которое одна кривая совершает вокруг другой. Более строгое определение: затынем одну из кривых ориентированным диском и возьмем коэффициент пересечения второй кривой с этим диском.

5.1. Простейший интеграл типа Концевича. Представим трехмерное пространство \mathbb{R}^3 как прямое произведение комплексной прямой \mathbb{C} с координатой z и вещественной прямой \mathbb{R} с координатой t . Вложим зацепление $L = K \cup K'$ в пространство $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$ так, чтобы координата t была функцией Морса на L . Это значит, что во всех точках, где t как функция параметра на кривой имеет нулевую производную, ее вторая производная не должна обращаться в нуль, а значения t во всех таких точках (*критические значения*) должны быть различны между собой.

Оказывается, что число зацепления можно тогда сосчитать по такой формуле:

$$lk(K, K') = \frac{1}{2\pi i} \int_{m < t < M} \sum_j \varepsilon_j \frac{d(z_j(t) - z'_j(t))}{z_j(t) - z'_j(t)},$$

где m и M — минимальное и максимальное значение параметра t на зацеплении $K \cup K'$, j — индекс, перечисляющий все возможности выбрать пару ветвей зацепления в виде функций $z_j(t)$, $z'_j(t)$, соответственно для K и K' , а $\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от четности числа выбранных ветвей, которые ориентированы вниз.



Таким образом, мы отслеживаем все те участки, где K вращается вокруг K' , и суммируем все полученные числа оборотов. Доказательство этой формулы приведено в [CDM].

5.2. Формула Концевича. Подобным образом, интеграл Концевича для узла (вложенного в пространство описанным морсовским образом) кодирует всю информацию о том, как вращаются друг относительно друга горизонтальные хорды вложенной кривой при движении горизонтальной секущей плоскости по вертикали.

Определение. Интеграл Концевича узла K — это следующий элемент пополнения $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры хордовых диаграмм:

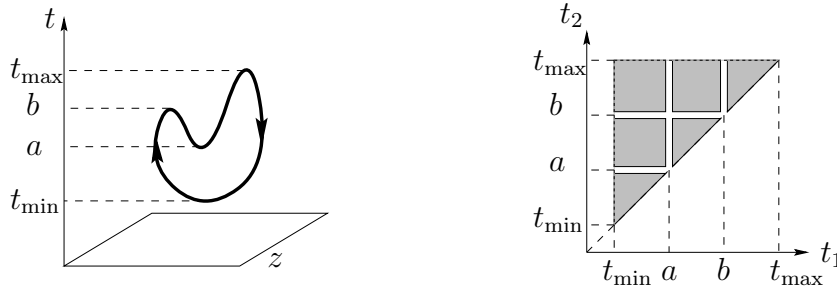
$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\substack{t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max} \\ t_j \text{ не критические}}} \sum_{P=\{(z_j, z'_j)\}} (-1)^{\downarrow} D_P \prod_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}.$$

Приведем комментарии, необходимые для понимания формулы Концевича.

Пополнение $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры \mathcal{A} — это, по определению, множество всех бесконечных формальных рядов вида $\sum_m \lambda_m a_m$, где $\lambda_m \in \mathbb{C}$ — численные коэффициенты, а $a_m \in \mathcal{A}_m$ — элементы пространства хордовых диаграмм степени m .

Действительные числа t_{\min} и t_{\max} суть минимальное и максимальное значения функции t на K .

Область интегрирования представляет собой m -мерный симплекс $t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}$, разделенный критическими значениями на некоторое число *связных компонент*. Например, для следующего вложения неузла и $m = 2$ область интегрирования состоит из шести компонент связности и выглядит так:



Число слагаемых в подынтегральном выражении постоянно для каждой компоненты связности, но может быть различным для разных компонент. Часть узла в полосе, заключенной между двумя критическими уровнями функции t ,

представляет собой набор кривых, каждая из которых однозначно параметризована переменной t . В каждой плоскости $\{t = t_j\} \subset \mathbb{R}^3$ выберем неупорядоченную пару различных точек (z_j, t_j) и (z'_j, t_j) , лежащих на узле K . Обозначим через $P = \{(z_j, z'_j)\}$ систему из m таких пар для $j = 1, \dots, m$.

В приведенном выше примере для связной компоненты $\{t_{\min} < t_1 < a, b < t_2 < t_{\max}\}$ есть лишь одна пара точек на уровнях $\{t = t_1\}$ и $\{t = t_2\}$. Следовательно, для этой компоненты сумма под интегралом состоит только из одного слагаемого. Напротив, для компоненты $\{t_{\min} < t_1 < a, a < t_2 < b\}$ у нас по-прежнему есть лишь один выбор на уровне $\{t = t_1\}$, но плоскость $\{t = t_2\}$ пересекает узел K уже по четырем точкам, поэтому мы имеем $\binom{4}{2} = 6$ возможных пар (z_2, z'_2) , и общее число слагаемых равно шести.

Для данного выбора системы P символ ‘ \downarrow ’ обозначает число точек (z_j, t_j) или (z'_j, t_j) из P , в которых координата t убывает при движении по узлу в положительном направлении.

Зафиксируем систему пар P . Рассмотрим узел K как ориентированную окружность и соединим на ней точки (z_j, t_j) и (z'_j, t_j) хордами. Получится хордовая диаграмма порядка m . Эта хордовая диаграмма является элементом алгебры \mathcal{A} , который мы обозначаем через D_P .

На каждой компоненте связности переменные z_j и z'_j являются гладкими функциями переменной t_j . Подставляя эти функции в выражение $\prod_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$, мы получаем дифференциальную форму от переменных t_1, \dots, t_m , определенную на симплексе в m -мерном пространстве этих переменных. Ее и следует проинтегрировать. Это даст коэффициент при соответствующей хордовой диаграмме.

Описанная конструкция работает при всех значениях $m > 0$. Для $m = 0$ по определению полагают, что получится хордовая диаграмма порядка 0 (окружность без хорд, представляющая единичный элемент алгебры \mathcal{A}) с коэффициентом 1.

5.3. Универсальный инвариант Васильева. Можно доказать [BN1, CDM], что интеграл $Z(K)$, во-первых, сходится для любого узла, расположенного в пространстве указанным выше способом, а во-вторых, не меняется при гладких изотопиях узла, при которых сохраняется число критических точек функции t . Ввиду того, что узел — замкнутая кривая, появляться и исчезать критические точки могут только парами. Оказывается, что при этом выражение $Z(K)$ меняется вполне определенным образом, а именно, если узел K_1 получается из узла K добавлением пары соседних критических точек, то имеет место равенство

$$Z(K_1) = Z(K) \cdot Z\left(\text{ш} \right).$$

Обозначим через H входящий в эту формулу тривиальный узел, вложение которого в пространство имеет два максимума и два минимума, и рассмотрим выражение

$$I(K) = \frac{Z(K)}{Z(H)^{c/2}},$$

где c обозначает число критических точек функции t на K , а частное — это деление в алгебре $\overline{\mathcal{A}}$, осуществляемое на основе правила $(1 + a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$

Из сказанного выше ясно, что $I(K)$ не меняется также и при добавлении (и удалении) пар критических точек. Следовательно, $I(K)$ представляет собой настоящий инвариант узла. Он называется *универсальным инвариантом Васильева*, потому что любой инвариант конечного типа можно получить как $f(I(K))$, где f — некоторая линейная функция на пространстве $\overline{\mathcal{A}}$ (см. [CDM]).

Исходный интеграл $Z(K)$ называют еще *предварительным интегралом Концевича*, а подправленное выражение $I(K)$ — *окончательным интегралом Концевича*.

Примеры. Пусть O — неуст, вложенный в пространство как окружность, стоящая вертикально. Тогда:

$$\begin{aligned} Z(O) &= 1, \\ I(O) &= 1/Z(H), \\ I(H) &= Z(H)/Z(H)^2 = 1/Z(H). \end{aligned}$$

Последние два ответа совпадают. Это неудивительно, ведь I — инвариант узла, а узлы O и H эквивалентны. В следующем пункте речь пойдет именно об этом выражении.

5.4. Интеграл Концевича для неуста. Интеграл Концевича — довольно-таки сложный объект. В течение нескольких лет никто не умел вычислять его даже для тривиального узла: были известны лишь коэффициенты при некоторых хордовых диаграммах в бесконечной сумме. (Конечно, здесь имеется ввиду окончательный интеграл Концевича $I(O)$, ибо предварительный $Z(O)$ равен просто 1, как мы уже отмечали.)

В 1997 году появилась гипотеза Д. Бар-Натана с соавторами [BGRT] (доказанная в 1998 году в работе [BLT]) о том, чему равна вся сумма:

$$I(O) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} w_{2n} = 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} w_{2n} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} w_{2n} \right)^2 + \dots$$

Здесь b_{2n} — *модифицированные числа Бернулли*, т. е. коэффициенты следующего ряда Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} x^{2n} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{x},$$

($b_2 = 1/48$, $b_4 = -1/5760$, ...), а w_{2n} — *колеса*, т. е. диаграммы вида

$$w_2 = \text{diagram} \quad , \quad w_4 = \text{diagram} \quad , \quad w_6 = \text{diagram} \quad , \quad \dots$$

Произведения колес, возникающие при вычислении экспоненты через ряд Тейлора, понимаются как несвязное объединение диаграмм, а сами колеса (и их объединения) интерпретируются как линейные комбинации диаграмм Фейнмана, равные среднему арифметическому по всем $(2n)!$ способам приклеить петлю Уилсона к одновалентным вершинам колеса. Ввиду циклической симметрии можно рассматривать среднее только $(2n - 1)!$ слагаемых.

Например,

$$\text{diagram} = \frac{1}{6} \left(\text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} \right).$$

Шесть приведенных диаграмм распадаются на два класса эквивалентности. Приводя подобные члены, получаем:

$$\text{Diagram} = \frac{1}{3} \text{Diagram}_1 + \frac{2}{3} \text{Diagram}_2$$

Разрешение внутренних тройных точек этих диаграмм по правилу STU (соотношение (6) на стр. 10) приводит к такому ответу:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram}_1 - \frac{10}{3} \text{Diagram}_2 + \frac{4}{3} \text{Diagram}_3$$

Подобным образом (только проще) можно найти выражение через хордовые диаграммы также для мономов w_2 и w_2^2 . Подставляя найденные выражения в ряд

$$I(O) = 1 + \frac{1}{48}w_2 + \frac{1}{4608}w_2^2 - \frac{1}{5760}w_4 + \dots,$$

мы получим следующий результат.

Бесконечный ряд, выражающий интеграл Концевича от неузла, начинается так:

$$I(O) = 1 - \frac{1}{24} \text{Diagram}_1 - \frac{1}{5760} \text{Diagram}_2 + \frac{1}{1152} \text{Diagram}_3 + \frac{1}{2880} \text{Diagram}_4 + \dots$$

Все коэффициенты этого ряда рациональны. Этот факт верен для любого узла (теорема Ле–Мураками [LM]); он показывает удивительную связь между теорией узлов и арифметикой. Идея доказательства теоремы Ле–Мураками вкратце состоит в следующем (подробнее см. [CD2, CDM]). Оказывается, что существует комбинаторный способ вычисления интегрального инварианта Концевича, основанный на специальном вложении узла в пространство и сопоставлении отдельным его фрагментам ассоциатора Дринфельда. Узел затем собирается из этих фрагментов как из кирпичиков, а над ассоциаторами, приписанными отдельным фрагментам, осуществляются определенные алгебраические операции, которые и дают в итоге интеграл Концевича. Ассоциатор — это ряд от двух некоммутирующих переменных $a = \uparrow\uparrow\uparrow, b = \uparrow\uparrow\uparrow$, который определяется аксиоматически. Дринфельд [Dr] доказал существование ассоциатора с рациональными коэффициентами; используя его в приведенной конструкции, мы получаем, что интеграл Концевича (разложенный по произвольному базису, состоящему из хордовых диаграмм) имеет рациональные коэффициенты.

5.5. Диаграммы Якоби. Вычисления с колесами в предыдущем пункте производились на самом деле в алгебре диаграмм Якоби \mathcal{B} ; по определению, она порождена 1-3-валентными графами с заданным циклическим порядком (полу)ребер в каждой трехвалентной вершине, которые удовлетворяют соотношениям двух видов:

$$\text{антисимметрия } \text{Diagram}_1 = - \text{Diagram}_2, \quad \text{ИHX } \text{Diagram}_3 = \text{Diagram}_4 - \text{Diagram}_5$$

(первое соотношение означает замену циклического порядка ребер, сходящихся в одной вершине). Диаграмма Якоби может быть несвязной, при этом требуется, чтобы в каждой компоненте связности была хотя бы одна одновалентная вершина. Умножение в алгебре \mathcal{B} определяется через несвязное объединение диаграмм, коумножение — как сумма попарных тензорных произведений по всем способам разбиения множества связных компонент на две части.

Взяв среднее арифметическое по всем способам приклеивания петли Уилсона к одновалентным вершинам (как мы делали выше с колесами), любую диаграмму Якоби можно превратить в линейную комбинацию диаграмм Фейнмана.

Можно доказать [BN1, CDM], что полученное отображение $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ является линейным изоморфизмом; оно согласовано с коумножением, но не сохраняет умножения. Соотношение между алгебрами \mathcal{A} и \mathcal{B} во многом аналогично соотношению между универсальной обертывающей и симметрической алгебрами данной алгебры Ли. В частности, существует аналог изоморфизма Дюфло–Кириллова $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ (см. [BLT, CDM]). Работать с диаграммами Якоби удобнее, чем с диаграммами Фейнмана, потому что в пространстве \mathcal{B} , помимо общей градуировки половиной числа вершин, есть еще две дополнительные градуировки: по числу одновалентных вершин и по числу компонент связности.

В терминах алгебр \mathcal{A} и \mathcal{B} можно дать комбинаторную переформулировку проблемы обратимости инвариантов конечного типа, упомянутую на стр. 2 (подробнее об этом см. в [CDM]):

1. *существует ли хордовая диаграмма (или диаграмма Фейнмана), которая нежвивалентна своему зеркальному отражению по модулю 4-членных соотношений?*



2. *существует ли ненулевая диаграмма Якоби с нечетным числом одновалентных вершин?*

Как вы видите, наиболее элегантно эта проблема звучит на языке диаграмм Якоби; заметим, что даже для диаграмм с тремя одновалентными вершинами она до сих пор открыта.

6. ФОРМУЛЫ ПОЛЯКА–ВИРО

6.1. Формула для c_2 . В 1994 году в статье Поляка–Виро [PV] появилась замкнутая формула для инварианта степени 2, равного коэффициенту при t^2 в полиноме Конвея. Возьмем произвольную плоскую диаграмму D данного узла K , выберем на ней произвольную начальную точку и, начиная с этой точки и двигаясь в соответствии с ориентацией, найдем все пары перекрестков с номерами i и j , которые при полном обходе узла чередуются $(i\dots j\dots i\dots j)$, а проходы (U) и переходы (O) следуют в порядке $U\dots O\dots O\dots U$. Тогда

$$(7) \quad c_2(K) = \sum_{\begin{pmatrix} i & j & i & j \\ U & O & O & U \end{pmatrix}} \varepsilon_i \varepsilon_j,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ — знак i -го перекрестка: $+1$ для перекрестков вида , -1 для перекрестков вида .

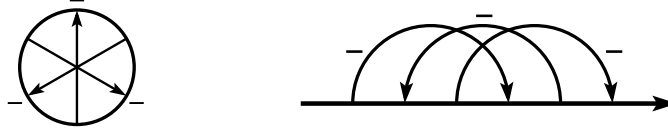
Таким образом, здесь происходит подсчет пар перекрестков определенного вида, а полученные числа складываются с некоторыми коэффициентами (в данном случае ± 1). Оказывается, что подсчитывая наборы из $\leq n$ перекрестков диаграммы D каждого вида, можно получить формулу подобного сорта для любого инварианта степени $\leq n$. В этом и заключается теорема Гусарова. Чтобы дать ее точную формулировку, нам понадобится понятие гауссовой диаграммы.

6.2. Гауссовы диаграммы. *Гауссова диаграмма порядка n — это ориентированная окружность, на которой отмечены $2n$ различных точек, разбитых на пары, и на каждой из n хорд, соединяющих парные точки, указано направление и проставлен знак $+$ или $-$.*

По плоской диаграмме узла гауссова диаграмма строится следующим образом. На окружности, которая параметризует узел, отметим прообразы всех двойных

точек и соединим каждую пару прообразов одной точки хордой. Направление на хордах выбирается от прохода к переходу, а знак — это знак перекрестка, определенный выше (ε_i в формуле (7)).

Вот гауссовы диаграммы замкнутого и длинного левого трилистника, приведенных на стр. 3:



6.3. Теорема Гусарова. Теорема Гусарова требует использования гауссовых диаграмм с начальной точкой или, что эквивалентно, длинных гауссовых диаграмм. Пусть \mathbf{GD} — множество всех длинных диаграмм, а $\widehat{\mathbf{GD}} \subset \mathbf{GD}$ — подмножество реализуемых диаграмм (т.е. отвечающих какому-то длинному узлу). Обозначим через $\mathbb{C}\mathbf{GD}$ векторное пространство, порожденное множеством \mathbf{GD} . Рассмотрим эндоморфизм $S : \mathbb{C}\mathbf{GD} \rightarrow \mathbb{C}\mathbf{GD}$, переводящий каждую диаграмму в сумму всех ее поддиаграмм, и определим спаривание $\mathbb{C}\mathbf{GD} \times \mathbb{C}\mathbf{GD} \rightarrow \mathbb{C}$ как билинейное отображение, на образующих заданное формулой

$$\langle A, D \rangle = (A, S(D)) := \sum_{D' \subseteq D} (A, D'),$$

где круглые скобки обозначают спаривание по дельта-символу (1, если аргументы равны, 0, если различны). В этих терминах приведенную выше формулу для инварианта c_2 можно записать так:

$$c_2(K) = \langle \overset{+}{\curvearrowright} - \overset{-}{\curvearrowright} - \overset{+}{\curvearrowleft} + \overset{-}{\curvearrowleft}, G(K) \rangle$$

Замечание. При естественном соглашении о знаках эту формулу можно сокращенно записать в виде

$$c_2(K) = \langle \overset{-}{\curvearrowright}, G(K) \rangle$$

Однако, такую сокращенную запись допускают далеко не все формулы, получающиеся применением теоремы Гусарова.

Теорема. (М. Гусаров) Для любого инварианта Васильева v степени $\leq n$ найдется линейная комбинация A гауссовых диаграмм степени не выше n такая, что $v(K) = \langle A, G \rangle$, где G — гауссова диаграмма произвольной плоской проекции длинного узла K .

Реализуемая гауссова диаграмма однозначно определяет соответствующий длинный узел, поэтому инвариант v можно рассматривать как линейную функцию $v : \widehat{\mathbf{GD}} \rightarrow \mathbb{C}$. Вместо линейной комбинации $A = \sum_D \lambda_D D$ можно говорить о линейной функции $\lambda : \mathbf{GD} \rightarrow \mathbb{C}$, переводящей каждую диаграмму D в λ_D . В этих терминах теорема Гусарова может быть сформулирована так: *любой инвариант степени $\leq n$ может быть представлен в виде $v = \lambda \circ S|_{\widehat{\mathbf{GD}}}$ для некоторой функции λ , при этом λ обращается в 0 на всех диаграммах степени выше n .*

6.4. Схема доказательства. Доказательство этой теоремы, данное Гусаровым [G4], довольно замысловато, но конструктивно. Конструкцию мы опишем, а за доказательством отсылаем к [GPV]. Модифицированное доказательство дал ученик Д.Бар-Натана Ф.Рукема [Rou]; в его статье смысл теоремы живописно объясняется следующим образом. Представим себе математика, у которого n пальцев. Тогда он может сосчитать любой инвариант степени $\leq n$ по произвольной

плоской диаграмме узла, расставляя некоторые пальцы по всем наборам из $\leq n$ перекрестков и изучая взаимное расположение перекрестков в этих наборах.

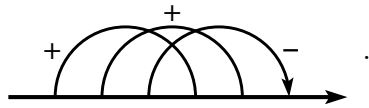
Пусть v — инвариант Васильева степени $\leq n$. Заметим, что оператор $S : \mathbb{C}\mathbf{GD} \rightarrow \mathbb{C}\mathbf{GD}$ обратим (потому что он, говоря попросту, задается треугольной матрицей с 1 на главной диагонали). Поэтому функцию λ можно определить очевидным образом: $\lambda = v \circ S^{-1}$. Здесь возникает две проблемы: (1) продолжить отображение $v : \widehat{\mathbf{GD}} \rightarrow \mathbb{C}$ на нереализуемые диаграммы, ибо оператор S выводит за пределы класса реализуемых гауссовых диаграмм, (2) доказать, что полученная функция λ зануляется на диаграммах степени выше n .

Первая задача решается посредством алгоритма, для описания которого нам понадобится два дополнительных понятия: смешанной диаграммы и нисходящей диаграммы. Оба понятия имеют варианты как для плоских диаграмм узлов, так и для гауссовых диаграмм. Мы будем рассуждать в терминах длинных узлов и, соответственно, линейных гауссовых диаграмм.

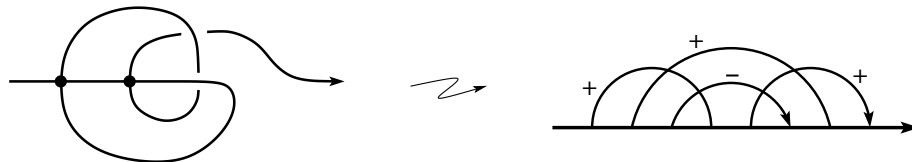
6.5. Смешанные и нисходящие диаграммы. Определение. *Смешанная гауссова диаграмма* — это диаграмма, подобная гауссовой, только, помимо стрелок (направленных хорд), на ней могут быть обычные хорды (без указанного на них направления). Это понятие соответствует плоской диаграмме особого узла: хорды (ненаправленные) отвечают точкам самопересечения диаграммы, которым приписывается знак плюс (минус), если направление вращения касательного вектора от первого прохождения данной точки ко второму положительное (отрицательное). Смешанные диаграммы, которые получаются из особых узлов, называются *реализуемыми*.

Примеры.

(1) Нереализуемая диаграмма:



(2) Узел и соответствующая реализуемая диаграмма:



Смешанную диаграмму можно превратить в линейную комбинацию обычных, используя скейн-соотношение Васильева.

Определение. Плоская диаграмма особого узла называется *нисходящей*, если при движении по ней в направлении ориентации (на рисунках слева направо) (1) в перекрестках переходы (сверху) предшествуют проходам (снизу), (2) непосредственно перед первым прохождением через точку самопересечения не может находиться перекресток (а только другая точка самопересечения). На языке гауссовых диаграмм это означает, что (1) все стрелки направлены вправо, (2) запрещены ситуации вида



Обе диаграммы, приведенные выше в примерах, — нисходящие.

6.6. Оператор P . Чтобы найти значение $\lambda(D)$ для данной гауссовой диаграммы D , Гусаров определяет линейный оператор $P : \mathbb{C}GD \rightarrow \mathbb{C}GD$, итерации которого переводят любую диаграмму в линейную комбинацию $\sum_i \lambda_i D_i$ нисходящих смешанных диаграмм и смешанных диаграмм с более чем n хордами.

Лемма: Любую хордовую диаграмму (т.е. смешанную диаграмму, состоящую только из ненаправленных хорд со знаками) добавлением стрелок (перекрестков) можно превратить в реализуемую нисходящую диаграмму, причем соответствующий узел определен однозначно с точностью до изотопии.

Пользуясь леммой, мы определяем значение v на нисходящих диаграммах D_i , принимая во внимание только их хордовую часть. Полагая значение v на диаграммах с $> n$ хордами равным нулю и складывая все значения на нисходящих диаграммах, мы и получаем коэффициент $\lambda(D)$.

Оператор P определяется следующим образом.

(1) Если диаграмма содержит стрелку, направленную влево, то мы заменяем ее на комбинацию диаграммы со стрелкой вправо и диаграммы с хордой согласно скейн-соотношению Васильева:

$$\begin{array}{c} \text{---} \curvearrowleft \text{---} \\ \text{---} \end{array} \overset{\varepsilon}{=} \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \varepsilon \begin{array}{c} \text{---} \curvearrowright \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

(2) Если диаграмма содержит запрещенную пару (вида (8)), то мы преобразуем ее по правилу, которое легче описать непосредственно в терминах плоской диаграммы узла:

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ \bullet \\ | \\ | \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \quad - \quad \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ \bullet \\ | \\ | \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \\ \bullet \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}$$

Таким образом, алгоритм Гусарова для данного инварианта v степени $\leq n$ строит совершенно определенную линейную комбинацию A такую, что $v(K) = \langle A, G(K) \rangle$.

6.7. Примеры. (1) Применив описанную процедуру к инварианту c_2 , мы получим следующую формулу:

$$c_2(K) = \langle \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array}^+ - \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array}^- - \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \\ \bullet \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}^+ + \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \\ \bullet \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}^-, G(K) \rangle,$$

которая отличается от приведенной выше направлением стрелок.

(2) Известно (см. [CDM]) три разных комбинации гауссовых диаграмм, дающих формулу для одного и того же базисного инварианта степени 3. Одна из них получается применением алгоритма Гусарова.

(3) В работе [CKR] найдены гауссово-диаграммные формулы для всех коэффициентов многочлена Конвея c_{2n} . В работе [CP] то же сделано для всех коэффициентов многочлена HOMFLY.

6.8. Открытая проблема. Среди всех линейных комбинаций гауссовых диаграмм степени не выше n есть такие, которые корректно определяют инвариант узлов. Такие комбинации составляют векторное пространство, назовем его L_n . Комбинации, которые дают в качестве инварианта тождественный ноль, — векторное подпространство $L'_n \subset L_n$. По теореме Гусарова, факторпространство L_n/L'_n изоморфно пространству \mathcal{V}_n инвариантов степени $\leq n$. Например, для инварианта c_2 выше были приведены две различных линейных комбинации гауссовых диаграмм x_1 и x_2 . Легко проверить, что эти два элемента, вместе с пустой диаграммой, представляющей константу 1, составляют базис пространства L_2 , а подпространство L'_2 порождено вектором $x_1 - x_2$. Мы видим, что $\dim L_2/L'_2 = 2 = \dim \mathcal{V}_2$. Проблема заключается в том, чтобы найти описание

(или хоть какую-то информацию) о пространствах L_n и L'_n для произвольного n и отсюда узнать что-то новое о пространствах \mathcal{V}_n .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы коснулись лишь отдельных аспектов теории инвариантов конечного типа. Заинтересованный читатель может обратиться к оригинальным статьям, которые приводятся в списке литературы, к обзорам [Arn, BN1, CD2] и к книгам [PS, Oht, CDM]. В качестве вводного чтения мы рекомендуем [PS, Arn, CD2].

Автор признателен А. М. Вершику, Д. Орлову и С. Чмутову за полезные обсуждения. Написание текста было завершено во время пребывания автора в институте Макса Планка в Бонне; творческая атмосфера этого научного центра немало способствовала работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Arn] V. I. Arnold, *Vassiliev's theory of discriminants and knots*. First European Congress of Mathematicians, (Paris, July 1992), Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, **1**, 3–29 (1994).
- [BN1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*. *Topology*, V. 34, 1995. P. 423–472.
- [BN2] D. Bar-Natan, *Vassiliev Homotopy String Link Invariants*. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 4-1 (1995) 13–32.
- [BGRT] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky, D. Thurston, *Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot*. *Israel Journal of Mathematics* 119 (2000) 217–237, [arXiv:q-alg/9703025](https://arxiv.org/abs/q-alg/9703025).
- [BLT] D. Bar-Natan, T. Q. T. Le, D. P. Thurston, *Two applications of elementary knot theory to Lie algebras and Vassiliev invariants*. *Geometry and Topology* 7(1) (2003) 1–31, [arXiv:math.QA/0204311](https://arxiv.org/abs/math.QA/0204311).
- [BL] J. S. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*. *Invent. Math.* 111 (1993) 225–270.
- [CD1] S. Chmutov, S. Duzhin, *A lower bound for the number of Vassiliev knot invariants*. *Topology and its Applications* **92** (1999) 201–223.
- [CD2] S. Chmutov, S. Duzhin, *Kontsevich integral*. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, eds. J.-P. Francoise, G.L. Naber and S.T. Tsou. Oxford: Elsevier, 2006 (ISBN 978-0-1251-2666-3), volume 3, pp. 231–239. Draft version online at [arXiv:math.GT/0501040](https://arxiv.org/abs/math.GT/0501040).
- [CDM] S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, *CDBOOK. An introduction to Vassiliev knot invariants*, draft, online at <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/cdbook/>.
- [CKR] S. Chmutov, M. Khoury, A. Rossi, *Polyak-Viro formulas for coefficients of the Conway polynomial*. Preprint [arXiv:math.GT/0810.3146](https://arxiv.org/abs/math.GT/0810.3146).
- [CP] S. Chmutov, M. Polyak, *Elementary combinatorics of the HOMFLYPT polynomial*. Preprint [arXiv:math.GT/0810.4105](https://arxiv.org/abs/math.GT/0810.4105).
- [Das] O. Dasbach, *On the Combinatorial Structure of Primitive Vassiliev Invariants III — A Lower Bound*. *Communications in Contemporary Mathematics*, Vol. 2, No. 4, 2000, pp. 579–590. Also [arXiv:math.GT/9806086](https://arxiv.org/abs/math.GT/9806086).
- [Dr] В. Г. Дринфельд, *О квазитреугольных и квазигопфовых алгебрах и одной группе, тесно связанной с $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* . *Алгебра и анализ*, **2**, N. 4, 149–181 (1990).
- [G1] М. Н. Гусаров, *Новая форма многочлена Конвея–Джонса ориентированных зацеплений*. *Записки научных семинаров ПОМИ* **193** (1991), 4–9. Англ. перевод: *A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links*, *Topology of manifolds and varieties* (O. Viro, editor), Amer. Math. Soc., Providence 1994, 167–172.
- [G2] М. Н. Гусаров, *Об n -эквивалентности узлов и инвариантах конечного типа*. *Записки научных семинаров ПОМИ* **208** (1993), 152–173. Англ. перевод: *On n -equivalence of knots and invariants of finite degree*, *Topology of manifolds and varieties* (O. Viro, editor), Amer. Math. Soc., Providence 1994, 173–192.
- [G3] М. Н. Гусаров, *Вариации заузленных графов. Геометрическая техника n -эквивалентности*. *Алгебра и Анализ* **12** (2000), вып. 4, 79–125. Англ. перевод: *Variations of knotted graphs, geometric technique of n -equivalence*, *St. Petersburg Math. J.* 12-4 (2001).

- [G4] М. Н. Гусаров, *Инварианты конечного типа представимы гауссовыми диаграммами*. Препринт ПОМИ. Англ. перевод (О.Виро, декабрь 1998): *Finite type invariants are presented by Gauss diagram formulas*, <http://www.math.toronto.edu/~drorbn/Goussarov/>.
- [GPV] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, *Finite type invariants of classical and virtual knots*. *Topology*, **39** (2000) 1045–1068. [arXiv:math/9810073v2](https://arxiv.org/abs/math/9810073v2) [math.GT].
- [Ha] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*. *Geom. Topol.*, **4** (2000) 1–83. <http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/GTVol4/paper1.abs.html>
- [Kaw] A. Kawachi, *The invertibility problem on amphicheiral excellent knots*. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), no. 10, 399–402.
- [Kn] Jan Kneissler, *The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve*. Preprint [arXiv:math.QA/9706022](https://arxiv.org/abs/math.QA/9706022), June 1997.
- [Koh] T. Kohno, *Monodromy representations of braid groups and Yang–Baxter equations*. *Ann. Inst. Fourier* **37** (1987) 139–160.
- [Kon] M. Kontsevich, *Vassiliev’s knot invariants*. *Adv. in Soviet Math. Vol. 16, Part 2*, 1993. P. 137–150.
- [Kri] A. Kriker, *The lines of the Kontsevich integral and Rozansky’s rationality conjecture*. Preprint [arXiv:math.GT/0005284](https://arxiv.org/abs/math.GT/0005284).
- [Lieb] J. Lieberum, *On Vassiliev invariants not coming from semisimple Lie algebras*. *Jour. of Knot Theory and its Ramifications* **8-5** (1999) 659–666, [arXiv:math.QA/9706005](https://arxiv.org/abs/math.QA/9706005).
- [LM] T. Q. T. Le, J. Murakami, *The universal Vassiliev–Kontsevich invariant for framed oriented links*. *Compositio Math.* **102** (1996) 41–64.
- [Mar] Julien Marché. *A computation of Kontsevich integral of torus knots*. [arXiv:math.GT/0404264](https://arxiv.org/abs/math.GT/0404264).
- [MM] J. Milnor, J. Moore, *On the Structure of Hopf Algebras*. *Ann. of Math. (2)* **81** (1965), 211–264.
- [Oht] T. Ohtsuki, *Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds and their sets*. Series on Knots and Everything, **29**, World Scientific, 2002
- [PS] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*. М: МЦНМО, 1997.
- [PV] M. Polyak and O. Viro, *Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants*. *Int. Math. Res. Notes* **11** (1994) 445–454.
- [Rou] Fionntan Roukema, *Goussarov–Polyak–Viro combinatorial formulas for finite-type invariants*. Preprint [arXiv:0711.4001](https://arxiv.org/abs/0711.4001).
- [Roz] L. Rozansky, *A rationality conjecture about Kontsevich integral of knots and its implications to the structure of the colored Jones polynomial*. *Topology and its Applications* **127** (2003) 47–76. Preprint [arXiv:math.GT/0106097](https://arxiv.org/abs/math.GT/0106097).
- [Tur] Victor Turchin, *Hodge decomposition in the homology of long knots*. [arXiv:08120204v2](https://arxiv.org/abs/08120204v2) (math.AT).
- [V1] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*. *Theory of Singularities and Its Applications* (ed. V. I. Arnold), *Advances in Soviet Math. Vol. 1*, 1990. P. 23–69.
- [V2] В. А. Васильев, *Гомологические инварианты узлов: алгоритмы и вычисления*. Препринт ИПМ 90, 1990.
- [V3] В. А. Васильев, *Когомологии пространства узлов*. Препринт ИПМ 91, 1990.
- [V4] V. A. Vassiliev, *On combinatorial formulas for cohomology of spaces of knots*. *Moscow Mathematical Journal*, v. 1, no. 1, pp.91–123 (2001). Preprint version: <http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/papers/>), September 2000.
- [V5] V. A. Vassiliev, *Combinatorial computation of combinatorial formulas for knot invariants*. Preprint, August 2001, updated September 2003, 83 pp. <http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/papers/>).
- [ViB] VasBib, *online bibliography of papers on Vassiliev invariants*, online at <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/VasBib/>
- [Vo] P. Vogel, *Algebraic structures on modules of diagrams*. *Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication 32*, August 1995, revised in 1997. Online at <http://www.math.jussieu.fr/~vogel/>.
- [Zag] D. Zagier, *Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function*. *Topology* **40(5)** (2001) 945–960.