Узлы и их инварианты

С. В. Дужин С. В. Чмутов

Содержание

1. Введение

Прародителем теории узлов является К. Ф. Гаусс, который вывел замечательную интегральную формулу для числа оборотов одной замкнутой кривой в пространстве вокруг другой, а также оставил в своих записных книжках многочисленные рисунки узлов без комментариев. Систематическое развитие теории узлов началось с 1880-х годов, когда несколько математиков и физиков с большим энтузиазмом занялись составлением таблиц узлов под влиянием идей знаменитого физика У. Томпсона (впоследствии известного как лорд Кельвин) о том, что узлы должны взаимно-однозначно соответствовать химическим элементам. Вскоре выяснилось, что эта идея была ошибочной, в химии восторжествовала теория Д. И. Менделеева, и лишь много позже были открыты реальные естественно-научные приложения теории узлов (строение молекул ДНК, гидродинамика, ферромагнетики, и т. д.). Впрочем, в нашей статье мы не собираемся затрагивать прикладных тем и будем рассматривать узлы как чисто математический объект.

Теория узлов — одна из наиболее привлекательных областей математики. Для этого есть несколько причин:

- Теории узлов немногим более 100 лет, что, по-видимому, является возрастом расцвета научной теории.
- Предметом теории является узел — простой и наглядный объект.
- Теория узлов тесно связана почти со всеми областями математики, и в ней успешно работают геометрические, алгебраические и аналитические понятия и методы.

- ▷ В теории узлов доказано много содержательных и трудных теорем, но до сих пор существует много открытых проблем с простой формулировкой, иные из которых стоят уже десятки лет.

Цель этой статьи — рассказать о том, что такое узел и какие есть способы распознать, одинаковы или различны два данных узла. Наряду с понятиями и теоремами классической теории узлов, в статье упоминаются некоторые достижения последних лет (инварианты Васильева, лежандровы узлы). Не претендуя никоим образом на полноту изложения, мы отсылаем заинтересованного читателя к книгам Адамса [1], Прасолова–Сосинского [23] и Кроуэлла–Фокса [7].

2. Понятие узла

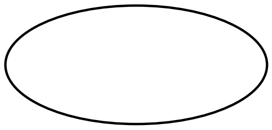
Узел — это гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая в пространстве. Мы будем всегда предполагать эту кривую параметризованной, и более точно определение узла формулируем так.

Определение. *Узел* — это гладкое вложение окружности S^1 в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, т.е. бесконечно дифференцируемое отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$, которое переводит разные точки окружности в разные точки пространства, причем вектор скорости $f'(u)$ не обращается в 0 ни при каком $u \in S^1$.

Если выбрать систему координат в пространстве, то узел можно задать набором из трех гладких периодических функций $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$.

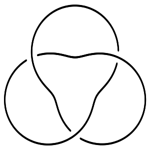
Пример 1. *Тривиальный узел*

$$\begin{aligned} x &= \cos u, \\ y &= \sin u, \\ z &= 0. \end{aligned}$$



Пример 2. *Трилистник*

$$\begin{aligned} x &= (2+\cos 3u)\cos 2u, \\ y &= (2+\cos 3u)\sin 2u, \\ z &= \sin 3u. \end{aligned}$$



Мы будем всегда считать узлы *ориентированными*, считая положительным направлением обхода узла то, которое соответствует вращению против часовой стрелки на параметризующей окружности $S^1 = \{(\cos u, \sin u) | u \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

2.1. Изотопия

Гладкая замкнутая кривая, рассматриваемая сама по себе, может служить предметом дифференциальной геометрии, но не топологии. *Топологическое* понятие узла подразумевает, что узлы рассматриваются с точностью до естественного отношения эквивалентности, моделирующего те преобразования, которые можно физически проделать с куском веревки, концы которой связаны.

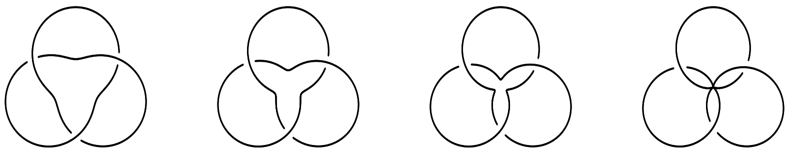
Определение. *Гладкая изотопия узла K, заданного как отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$, — это гладкое семейство узлов f_v такое, что $f_0 = f$.*

Гладкое семейство отображений, или *отображение, гладко зависящее от параметра*, — это, говоря формально, гладкое отображение $F: S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$, где I — отрезок числовой оси. Если зафиксировать второй аргумент отображения F, придав ему значение v, то мы получим отображение $f_v : S^1 \to \mathbb{R}^3$.

Например, формулы

$$\begin{aligned} x &= (v + \cos(3u))\cos(2u), \\ y &= (v + \cos(3u))\sin(2u), \\ z &= \sin(3u). \end{aligned}$$

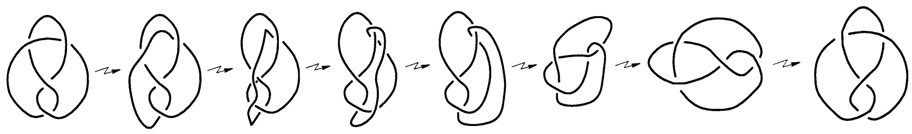
задают, при $v \in (1, +\infty)$, гладкую изотопию рассмотренного выше трилистника, отвечающего значению $v = 2$:



$v = 2$ $v = 1,5$ $v = 1,2$ $v = 1$

При всех значениях $v > 1$ это будет несамопересекающаяся вложенная кривая, а при $v = 1$ на ней появится тройная точка, а именно, совпадут значения (x, y, z) для $u = \pi/3$, $u = \pi$ и $u = 5\pi/3$.

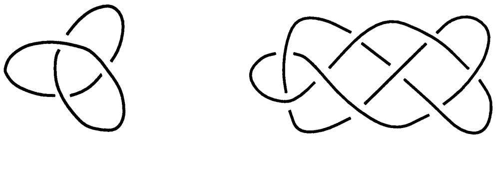
Два узла называются *эквивалентными*, если от одного к другому можно перейти гладкой изотопией. На рисунке изображен пример гладкой изотопии узла, называемого *восьмеркой*:



Деформация восьмерки в ее зеркальный образ

Тривиальный узел (или *неузел*) — это узел, эквивалентный плоской окружности из примера 1.

Имея перед глазами рисунок тривиального узла, иной раз бывает довольно трудно понять, что он тривиален.



Тривиальные узлы

Алгоритм распознавания тривиального узла впервые разработал В. Хакен [4] в 1961 году. Алгоритм Хакена работает слишком медленно и поэтому никогда не реализовывался на компьютере. Совсем недавно (препринт 1998 года [5])

Дж. Бирман и М. Хирш придумали другой алгоритм, который, судя по всему, уже имеет смысл запрограммировать.

2.2. Ориентация

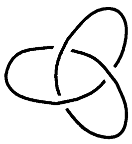
Узел — это ориентированная кривая в ориентированном пространстве. Отражение относительно плоскости меняет ориентацию пространства. Изменение направления обхода кривой на противоположное меняет ориентацию кривой.

Естественно выделить классы узлов, которые остаются эквивалентными себе при таких преобразованиях.

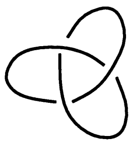
Определение. Узел называется *зеркальным*, если он эквивалентен своему зеркальному отражению.

Пример 1. Узел «восьмерка» зеркален. Это доказывает изотопия, приведенная на рисунке выше.

Пример 2. Трилистник не является зеркальным узлом:



Левый трилистник



Правый трилистник

Этот факт будет доказан в разделе 4.2.

Определение. Узел называется *обратимым*, если он эквивалентен своему обратному, т. е. тому же узлу, проходимому в обратном направлении.

Пример. Трилистник обратим, так как направление обхода можно заменить на обратное плавным поворотом на 180° вокруг оси Ox (в приведенном выше тригонометрическом представлении).

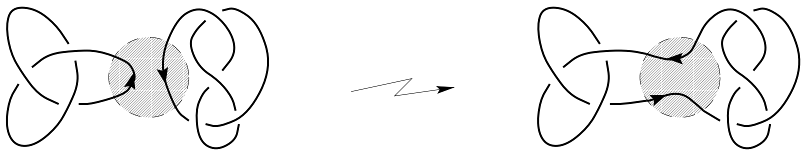
Упражнение. Проверьте, что узел «восьмерка» также обратим.

Среди узлов, имеющих не более 8 пересечений, есть только один необратимый: это узел 8_{17} (см. таблицу узлов в приложении).

Распознать, обратим ли данный узел, непросто. Первое строгое доказательство необратимости было проведено только в 1962 году (пример Троттера [27]). Общего алгоритма для решения этой проблемы не найдено до сих пор.

2.3. Композиция узлов

Существует естественный способ строить более сложные узлы из двух более простых. Для этого каждый из двух узлов нужно разрезать в каком-то месте, а потом приклеить два конца одного узла к двум концам другого. Все это надо делать достаточно осторожно: сначала нужно путем гладкой изотопии продеформировать оба данных узла так, чтобы для какой-то регулярной проекции на плоскость нашелся диск, внутри которого наши узлы имели бы вид, указанный на следующем рисунке слева, а затем изменить их внутри этого диска, как показано справа. Поскольку мы рассматриваем ориентированные узлы, склейку можно произвести только одним способом.



Связная сумма узлов

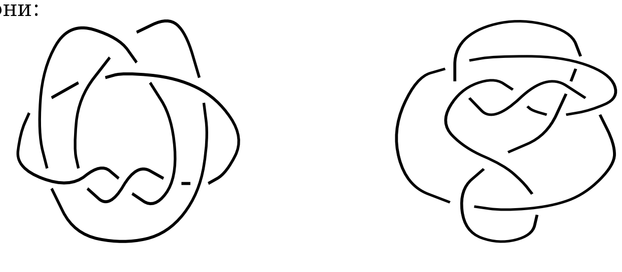
Легко понять, что сумма $K_1 \# K_2$ двух узлов K_1 и K_2 не зависит от точек разреза (вообще, все точки узла равноправны между собой относительно гладких изотопий).

Если представлять себе связную сумму узлов как умножение, то тривиальный узел играет, очевидно, роль единицы: $E \# K = K$ для любого K.

Узел называется *простым*, если его нельзя представить в виде суммы двух нетривиальных узлов. Простые узлы выполняют роль простых чисел в арифметике: оказывается, что любой узел можно представить в виде связной суммы нескольких простых, и притом однозначно.

По этой причине в таблицах узлов, составлением которых математики занимаются с 1880-х годов, приводятся только простые узлы. К настоящему времени составлены полные таблицы всех простых узлов, которые допускают регулярную проекцию с не более чем 16 точками пересечения (Дж. Хост, М. Тислтуэйт, Дж. Уикс, 1997). В таблицах узлов приняты обозначения вида n_m, где n — число пересечений, m — номер по порядку среди всех узлов с n пересечениями. Узлы, получающиеся друг от друга заменой ориентации или зеркальным отражением, в таблицах узлов не различаются.

При составлении таблиц узлов люди часто допускали ошибки (и немудрено). Самый знаменитый случай такого рода — это *пара Перко*, два эквивалентных друг другу узла, которые в течение 75 лет, начиная с 1899 года, считались различными. Вот они:



Пара Перко

Обнаружил их эквивалентность юрист из Нью-Йорка К. А. Перко в 1974 году. Сочетание «юрист-профессионал и одновременно математик-любитель» не первый раз встречается в истории математики (вспомните Пьера Ферма!) и всегда приводит к новым открытиям.

В Приложении приведена таблица простых узлов до 8 самопересечений включительно. Для работы с узлами удобно пользоваться компьютерными программами и таблицами, которые имеются на нескольких www-серверах (см., например, [25]).

3. Диаграммы

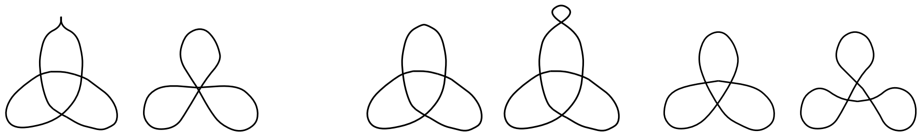
В принципе, любой узел можно задать явными формулами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в виде тригонометрических полиномов. Пример представления в таком виде одного узла (трилистника) был приведен выше. Тот факт, что для любого узла найдется эквивалентный ему тригонометрический, вытекает из того, что любые периодические функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ можно с любой степенью точности приблизить тригонометрическими многочленами, т. е. комбинациями $\sin kt$ и $\cos kt$.

Надо, однако, заметить, что не существует никакого разумного способа распознать эквивалентность или доказать неэквивалентность узлов, заданных явными формулами. Все способы задания узлов, с которыми можно реально работать, имеют комбинаторный характер. В этом разделе мы рассмотрим два таких способа: (классические) диаграммы узлов и лежандрово представление.

3.1. Диаграмма узла

Диаграмма узла — этот тот естественный способ изображения узла на плоскости, которым мы уже пользовались на предыдущих рисунках. Говоря более формально, диаграмма узла представляет собой гладкую кривую на плоскости, не имеющую других особых точек, кроме конечного числа простых двойных точек (там, где происходит трансверсальное самопересечение), и снабженную в каждой двойной точке одним битом дополнительной информации, указывающим, какая из двух ветвей в этой точке является *проходом* (т. е. лежит снизу), а какая *переходом* (т. е. лежит сверху).

Чтобы нарисовать диаграмму данного узла $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$, нужно его немного пошевелить, т. е. подвергнуть изотопии, близкой к тождественной, с тем, чтобы его проекция $\pi \circ f : S^1 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ на выбранную плоскость стала *регулярной*, т. е. (1) вектор производной $(\pi \circ f)'$ нигде не обращался бы в 0 и (2) никакая точка не имела бы более двух прообразов. Очевидно, что этого всегда можно добиться малой изотопией, не выводящей за пределы класса эквивалентности узла.

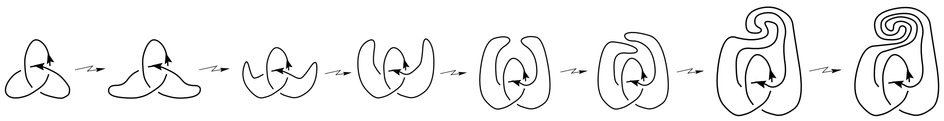


Нерегулярные проекции *Регулярные проекции*

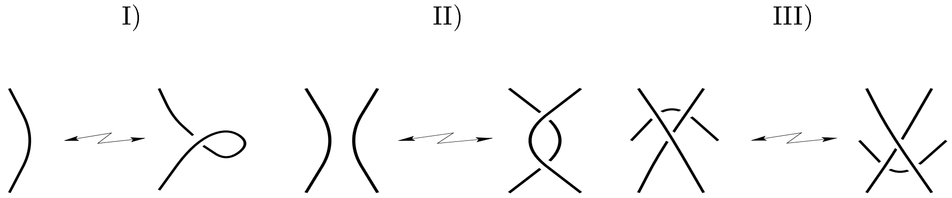
При изотопии узла в пространстве его диаграмма может меняться. Эти изменения могут быть двух принципиально различных видов. Во-первых, диаграмма узла, как гладкая замкнутая плоская кривая, может претерпевать *плоскую изотопию*, т. е. подвергаться воздействию семейства взаимно-однозначных преобразований плоскости, гладко зависящего от параметра

Во-вторых, возможны *перестройки диаграммы*, когда она меняет свой тип, например показанные на следующей странице *перестройки Рейдемейстера*.

К. Рейдемейстер — автор первой книги, посвященной целиком теории узлов (1932). В ней доказана следующая теорема: *две диаграммы задают один и тот*



Плоская изотопия диаграммы



Перестройки Рейдемейстера

же узел тогда и только тогда, когда от одной из них можно перейти к другой посредством плоских изотопий диаграммы и перестроек Рейдемейстера.

С точки зрения современной теории особенностей теорема Рейдемейстера довольно очевидна: ясно, что любую гладкую изотопию узла в пространстве можно немного пошевелить так, что она сведется к последовательности элементарных перестроек указанных трех типов. Подробного доказательства этого утверждения мы приводить не будем, отсылая заинтересованного читателя, например, к книге [23].

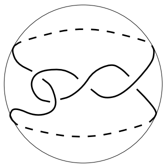
Пример. Превращение восьмерки в ее зеркальный образ, показанное на рисунке выше (с. 61), помимо плоских изотопий, содержит следующую последовательность перестроек Рейдемейстера: II, III, III, I, I, III, II,

Объясним, в каком смысле диаграмма может рассматриваться как чисто комбинаторный способ задания класса эквивалентности узла.

Диаграмма узла, рассматриваемая с точностью до плоских изотопий (гладких деформаций в плоскости), содержит следующую информацию: (1) в каком порядке вдоль кривой следуют точки самопересечения, (2) какая ветвь кривой в точке самопересечения является проходом, а какая переходом.

Для кодирования плоских замкнутых кривых удобным инструментом являются *гауссовы диаграммы*. На самом деле, гауссовы диаграммы больше приспособлены для описания замкнутых кривых на сфере, нежели замкнутых кривых на плоскости. Чтобы к ним перейти, мы сделаем следующее простое наблюдение.

Вместо плоских диаграмм узла можно рассматривать сферические, и эти два подхода абсолютно эквивалентны. Сферическая диаграмма получается как проекция узла на сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, содержащую наш узел внутри, из центра сферы, если эта проекция регулярна. Прокалывая сферу в какой-то точке, мы получаем из сферической диаграммы плоскую.

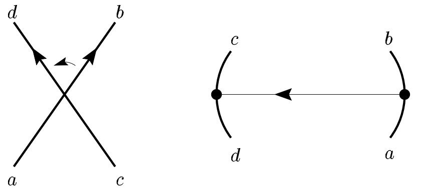


Сферическая диаграмма восьмерки

Как впервые заметил еще К. Ф. Гаусс, а впоследствии (вплоть до конца XX века) заново открывали многие другие математики, замкнутые самопересекающиеся ориентированные сферические кривые с точностью до гладкой изотопии на поверхности сферы однозначно кодируются посредством диаграмм следующего вида.

Определение. Гауссова диаграмма порядка n — это ориентированная окружность, на которой отмечены $2n$ различных точек, разбитых на пары, и на каждой из n хорд, соединяющих парные точки, указано направление.

Опишем построение гауссовой диаграммы кривой. На окружности, которая параметризует данную кривую, нужно отметить прообразы всех двойных точек и соединить каждую пару прообразов одной точки хордой. Направление на хордах выбирается так. На поверхности сферы есть вполне определенное положительное направление вращения (против часовой стрелки, если на сферу смотреть снаружи). Два конца хорды соответствуют двум ветвям кривой в окрестности двойной точки. Положительные направления этих ветвей образуют угол. Так вот, направление на хорде соответствует переходу от одной стороны угла к другой в положительном направлении.

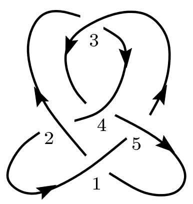


Выбор направления хорды

Информация о проходах и переходах содержится в *оснащенной гауссовой диаграмме*: это значит, что дополнительно на каждой хорде ставится знак $+$, если она направлена от перехода к проходу, и знак $-$ в обратном случае. Легко видеть, что этот знак совпадает совпадает со знаком *локальной закрученности* двойной точки, которая определяется следующим рисунком.

Локальная закрученность

Вот пример диаграммы узла и соответствующей оснащенной гауссовой диаграммы:



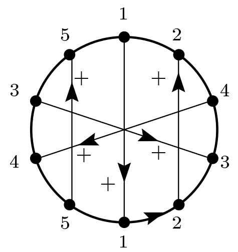


Диаграмма узла и гауссова диаграмма

Некоторые математики, например, М. Поляк и О. Виро, применяют другое правило расстановки стрелок на хордах (см. статью Ю. Бурмана в данном выпуске). Оба правила равносильны, но наше имеет то преимущество, что, забывая о знаках на хордах, но сохраняя нарисованные на них стрелки, мы получаем классическую гауссову диаграмму, являющуюся полным инвариантом ориентированной сферической кривой.

3.2. Лежандровы узлы

Представление узлов плоскими диаграммами — самый естественный и исторически первый способ наглядного задания узлов. В этом разделе мы приведем другое представление, которое в последние годы все больше привлекает внимание специалистов.

Предположим, что на плоскости выделено некоторое направление, которое мы будем называть вертикальным (например, направление оси ординат в декартовой системе координат).

Определение. *Фронтом* называется замкнутая кривая на плоскости без вертикальных касательных, все особенности которой исчерпываются полукубическими точками возврата (*клювами)* и простыми двойными точками.

Полукубическая точка возврата — это точка, вблизи которой наша кривая локально выглядит как полукубическая парабола $y^2 = x^3$ в окрестности начала координат. Это самый общий вид точки на параметризованной кривой $r(t)$, в которой вектор r' обращается в ноль, а векторы r'' и r''' неколлинеарны.

Замечание. Название «фронт» используется по той причине, что эквидистанты для кривой общего положения на плоскости (например, эллипса) имеют только особенности указанных типов. А эквидистанта — это как бы фронт световой волны, исходящей из данной кривой.

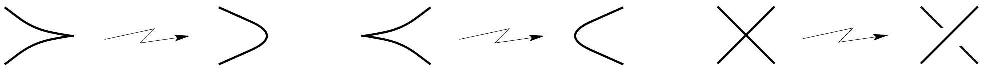
Объясним, в чем состоит связь между фронтами и узлами. Заодно мы расскажем, откуда берется требование отсутствия вертикальных касательных.

Фронт — это кривая на плоскости, скажем, с координатами (x, y). Добавляя к ним еще третью координату z, равную тангенсу угла наклона кривой в данной точке, мы получим кривую в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Если на исходной кривой есть только простые двойные точки и клювы, то полученная кривая в пространстве будет гладким узлом. Тангенс угла наклона определен всюду, поскольку нет вертикальных касательных.

Если отказаться от требования отсутствия вертикальных касательных, то угол наклона кривой будет принимать значения не в точках прямой, а в точках окружности. Таким образом, в этом случае мы получим узел не в $\mathbb{R}^3$, а в трехмерном многообразии $\mathbb{R}^2 \times S^1$, представляющем собой полноторие.

Опишем теперь соответствие между фронтами и узлами в терминах диаграмм.

По фронту диаграмма представляемого им узла строится так. Все точки возврата нужно просто сгладить, а проходы и переходы в двойных точках определить так: *ветвь кривой, идущая из левого нижнего угла в правый верхний, всегда является переходом, а другая ветвь — проходом.* Так как фронт не имеет вертикальных касательных, такое разделение ветвей корректно определено.

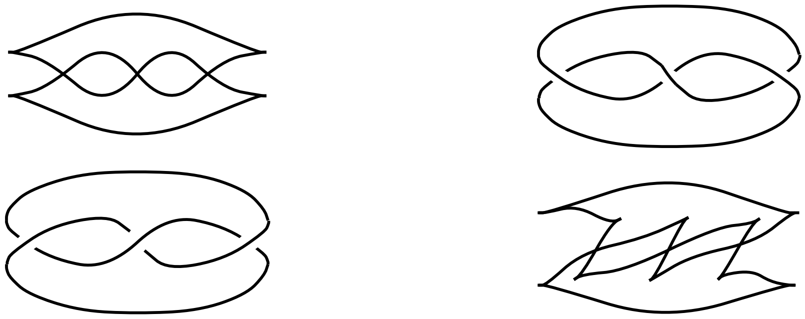


Построение диаграммы по фронту

Обратно, по диаграмме можно построить фронт представляемого ею узла. Приведем диаграмму в общее положение так, что в двойных точках ни одна из касательных не будет вертикальной. После этого заменим все точки с вертикальными касательными на точки возврата, а двойные точки, в которых переход идет имеет направление «северо-запад–юго-восток», преобразуем так, как показано на рисунке.

Построение фронта по диаграмме

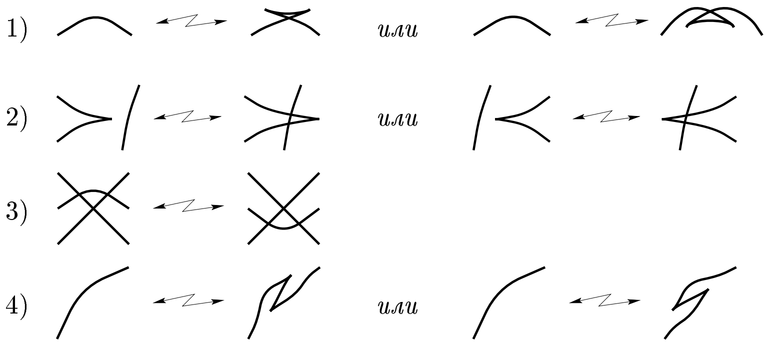
Тем самым мы показали, что всякий узел можно представить фронтом. Например, на следующем рисунке изображены фронты и соответствующие диаграммы левого и правого трилистника:



Левый трилистник *Правый трилистник*

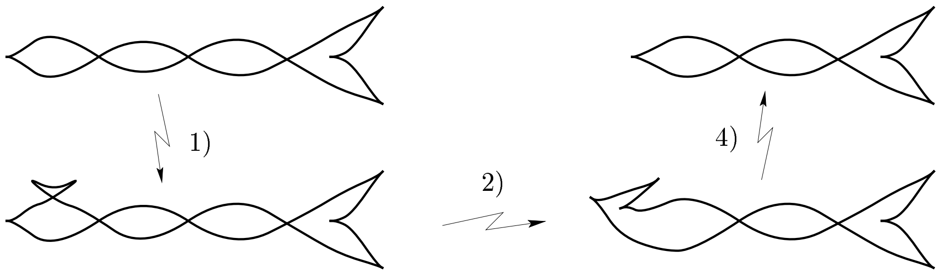
Узел, представленый фронтом, называется *лежандровым* узлом. Аналог перестроек Рейдемейстера для лежандровых узлов, описывающих топологическую эквивалентность двух узлов, в явном виде был выписан совсем недавно Д. Б. Фуксом и С. Л. Табачниковым. Поэтому перечисленные в следующей теореме перестройки мы будем называть *перестройками Фукса–Табачникова*.

Теорема (Д. Б. Фукс, С. Л. Табачников [13]). *Два фронта представляют эквивалентные узлы тогда и только тогда, когда от одного фронта к другому можно перейти конечной последовательностью следующих перестроек:*



Определение. В отличие от приведенной выше эквивалентности (топологической) скажем, что два лежандровых узла *лежандрово эквивалентны*, если от фронта одного из них можно перейти к фронту другого при помощи только первых трех перестроек Фукса–Табачникова.

В каждом классе топологически эквивалентных узлов существует бесконечно много лежандрово не эквивалентных узлов. Например, следующие два фронта представляют два неузла (тривиальных узла) и потому топологически они эквивалентны. На рисунке показана также последовательность перестроек Фукса–Табачникова, переводящая один фронт в другой.



Топологическая эквивалентность двух неузлов

В разделе 4.4 мы докажем, что эти два неузла лежандрово не эквивалентны. Это означает, что любая последовательность перестроек Фукса–Табачникова, переводящая один фронт в другой, обязательно содержит хотя бы одну перестройку типа 4). Мы приведем также теорему Я. Элиашберга и М. Фрэзер, описывающую лежандрову эквивалентность среди топологически тривиальных узлов.

4. Инварианты

Для того, чтобы доказать, что два узла эквивалентны, достаточно предъявить изотопию между ними, заданную, например, последовательностью движений Рейдемейстера для соответствующих диаграмм.

Стандартным приемом доказательства неэквивалентности, как в теории узлов, так и вообще в математике, является использование инвариантов.

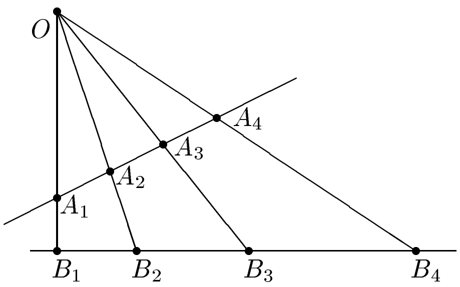
4.1. Общее понятие инварианта

Допустим, в каком-то множестве X задано отношение эквивалентности. Отображение $X \to A$ называется *инвариантом*, если оно принимает равные значения на элементах X, эквивалентных между собой. В качестве A можно использовать множество произвольной природы. Если A состоит из чисел, говорят о числовых инвариантах; если из многочленов — о полиномиальных инвариантах, и т. д.

Понятие инварианта реально работает в тех случаях, когда в множестве X отношение эквивалентности устроено достаточно сложно, а в множестве A проблема равенства решается достаточно просто.

Пример 1. Двойное отношение как инвариант четверки точек на прямой относительно отображений центрального проектирования.

Рассмотрим множество X, элементами которого являются упорядоченные четверки точек на прямой. Две четверки, A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4, будем считать эквивалентными, если прямые, их содержащие, можно расположить на плоскости таким образом, чтобы центральная проекция из некоторой точки плоскости переводила A_i в B_i для всех $i = 1, \ldots, 4$.



Эвивалентность двух четверок относительно центральной проекции

Задача. Докажите, что одну четверку можно перевести в другую тогда и только тогда, когда выполняется пропорция

$$\frac{A_1 - A_3}{A_2 - A_3} : \frac{A_1 - A_4}{A_2 - A_4} = \frac{B_1 - B_3}{B_2 - B_3} : \frac{B_1 - B_4}{B_2 - B_4}.$$

Мы видим, что величина $\frac{A_1 - A_3}{A_2 - A_3} : \frac{A_1 - A_4}{A_2 - A_4}$ (*двойное отношение четырех точек*) является инвариантом упорядоченной четверки точек на прямой. Результат предыдущей задачи показывает, что этот инвариант очень сильный: если его значения на двух элементах совпадают, то сами элементы эквивалентны между собой. Инвариант, обладающий таким свойством, называется *полным.*

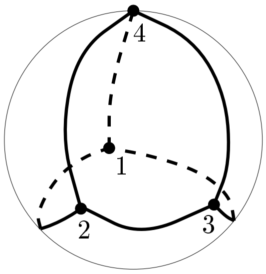
Таким образом, двойное отношение четырех точек является полным инвариантом отношения проективной эквивалентности.

Пример 2. Эйлерова характеристика двумерной поверхности, представленной в виде триангуляции.

Всякую компактную двумерную поверхность (сферу, тор, диск, ленту Мёбиуса и т. п.) можно разрезать на треугольники так, что любые два треугольника либо вообще не пересекаются, либо имеют одну общую вершину, либо одну общую сторону. Такое разрезание назывется *триангуляцией* поверхности.

Комбинаторное задание триангуляции состоит в том, что все вершины нумеруют, а затем указывают, какие тройки номеров отвечают граням триангуляции.

Пример. Триангуляция $(1,2,3),(1,3,4),(1,4,2),(2,4,3)$ задает сферу:



Триангуляция сферы

Эйлеровой характеристикой триангуляции называется число $f-e+v$, где f — число граней (треугольников), e — число ребер (сторон треугольников), v — число вершин.

Фундаментальная теорема комбинаторной топологии гласит, что эйлерова характеристика не зависит от выбора конкретной триангуляции, а определяется топологическим типом самой поверхности. Следовательно, эйлерова характеристика является инвариантом поверхности, рассматриваемой как топологическое пространство.

Известно, что любая компактная ориентируемая поверхность без края представляет собой сферу с ручками, причем если g — это число ручек, то эйлерова характеристика равна $2-2g$. Таким образом, эйлерова характеристика является полным топологическим инвариантом компактной ориентируемой поверхности без края. Для произвольных компактных двумерных поверхностей мы получим полный инвариант, если к эйлеровой характеристике добавим еще две величины: *число компонент края* (принимающий натуральные значения) и *ориентируемость* (принимающий значения в множестве $\{\text{да}, \text{нет}\}$).

Задача. Проверьте, что следующие две триангуляции задают поверхности с одинаковой эйлеровой характеристикой, но топологически неэквивалентные:

1) $(1,2,6)$, $(2,3,5)$, $(2,5,6)$, $(1,4,6)$, $(3,5,7)$, $(4,6,7)$, $(4,6,7)$, $(1,3,7)$, $(2,4,7)$, $(1,2,7)$.

2) $(1,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,4,5)$, $(1,5,6)$, $(1,6,7)$, $(1,7,8)$, $(1,8,9)$, $(2,3,6)$, $(2,6,7)$, $(4,5,8)$, $(4,8,9)$.

4.2. Инварианты узлов

Инварианты, придуманные людьми для различения узлов, поистине неисчислимы.

Начнем с краткого описания нескольких замечательных инвариантов, играющих по разным причинам важную роль в теории узлов.

- *Число пересечений*, т. е. минимальное число двойных точек на диаграмме узла.

  В каком-то смысле число пересечений можно считать мерой сложности узла. Узлы с числом пересечений 1 или 2 все тривиальны. Простейший нетривиальный узел — трилистник — имеет число пересечений, равное 3, и с точностью до зеркального отражения это единственный узел с тремя пересечениями.

  В таблицах узлы традиционно упорядочиваются по числу пересечений.

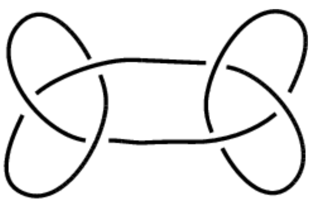
- *Топологический тип дополнения* — полный инвариант неориентированного узла.

  Это теорема Гордана-Люке, доказанная только в 1989 году, хотя проблема была поставлена еще в начале 20 века. Теорема звучит так: *если дополнения $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ и $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$ двух узлов гомеоморфны, то сами узлы эквивалентны с точностью до ориентации узла и ориентации пространства.*

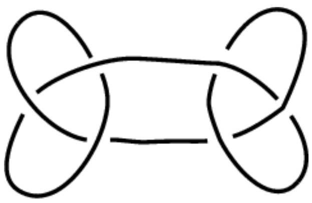
- *Род* узла — наименьший род его поверхности Зейферта (см. статью В. Прасолова в настоящем сборнике).

- *Группа узла* — фундаментальная группа топологического пространства $\mathbb{R}^3 \setminus K$ (дополнения к узлу в пространстве). Эта группа состоит из классов эквивалентности замкнутых путей, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же точке (групповая операция — последовательное прохождение двух путей). Существует простой алгоритм задания группы узла при помощи образующих и определяющих соотношений (см., например, [7]).

  Неэквивалентные узлы могут иметь изоморфные группы. Например, группы бабушкина узла и сквер-узла изоморфны:



Бабушкин узел



Сквер-узел

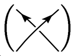
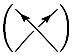
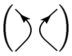
Оба эти узла составные: они получаются композицией двух трилистников (двух левых или левого и правого). Интересно отметить, что для простых узлов подобный пример невозможен. Это вытекает из теоремы Гордана–Люке, сформулированной выше, и следующей теоремы [30]: *Если группы двух простых узлов изоморфны, то эти узлы имеют гомеоморфные дополнения.*

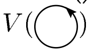
4.3. Полином Джонса

Особое значение в теории узлов играют инвариантные полиномы, т. е. инварианты узлов, принимающие значения в кольце многочленов от одного или нескольких переменных. Первый из полиномиальных инвариантов был введен Дж. Александером в 1920-х годах. Конструкция Александера довольно сложна. В последние годы появилось множество различных инвариантных полиномов узлов, для которых существуют простые алгоритмы вычисления их значений по диаграмме узла. Из них мы приведем определение только одного: полинома Джонса. (Определение и основные свойства других полиномов можно найти, например, в книге [23]).

Полином Джонса определяется по диаграмме узла посредством нескольких простых правил. Заметим, что полином Джонса необходимо определять сразу для узлов и *зацеплений*, поскольку при перестройках диаграмм, которые фигурируют в приведенном ниже рекуррентном соотношении (1), диаграмма узла легко может превратиться в диаграмму зацепления. Зацепление — это многокомпонентный узел, т. е. набор нескольких замкнутых гладких кривых в пространстве, рассматриваемых с точностью до гладкой изотопии. Каждая компонента зацепления может быть заузлена как сама с собой, так и с другими компонентами. Зацепления изображаются на плоскости при помощи таких же точно диаграмм, что и узлы, с единственной разницей, что плоская кривая, составляющая диаграмму, может состоять из нескольких компонент связности.

Определение. *Полином Джонса V* — это лорановский полином от переменной $\sqrt{t}$, определяемый соотношениями

(1) $t^{-1}V$  $-\,tV$  $=(t^{1/2}-t^{-1/2})V$ 

(2) V$=1$.

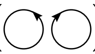
Лорановским полиномом от переменной, скажем, x, называется полином от переменных x и x^{-1}. Таким образом, полином Джонса представляет собой некоторую линейную комбинацию положительных и отрицательных полуцелых степеней буквы t.

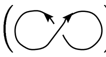
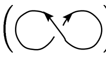
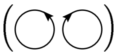
Соотношение (1) связывает между собой полиномы Джонса трех зацеплений, которые внутри небольшого шара выглядят как нарисовано на картинках и совершенно одинаковы вне этого шара. Соотношение (2) гласит, что полином Джонса тривиального узла равен 1. Используя соотношение (1) рекуррентно, можно вычислить полином Джонса любого узла или зацепления путем сведения его к начальному условию (2). Разумеется, надо еще доказать, что результат не зависит от последовательности действий, а также, что полином Джонса определяется изотопическим классом узла, т. е. не меняется при перестройках Рейдемейстера. Это действительно так, но доказательства мы приводить не будем.

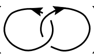
Полином Джонса обладает многими замечательными свойствами. Упомянем следующие.

- ▹ Для зацеплений с нечетным числом компонент (в частности, для узлов) все степени переменной t в полиноме Джонса целые, а для зацеплений с четным числом компонент — полуцелые.
- ▹ Полином Джонса связной суммы узлов равен произведению полиномов Джонса слагаемых.
- ▹ Полином Джонса не меняется при обращении узла, т. е. при замене направления обхода на противоположное.

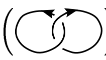
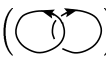
Несмотря на то. что полином Джонса «не чувствует» ориентации самого узла, он чувствует ориентацию пространства. Например, он позволяет отличить левый трилистник от правого, чего нельзя сделать при помощи полинома Александера. Сейчас мы проделаем необходимые для этого выкладки, начиная с вычисления полиномов Джонса простейших зацеплений.

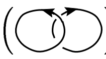
(i) $V\Big($  $\Big) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$.

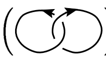
Действительно, согласно (2) $V\Big($  $\Big) = V\Big($  $\Big) = 1$. Тогда (1) дает $t^{-1} - t = (t^{1/2} - t^{-1/2})V\Big($  $\Big)$, откуда и следует ответ.

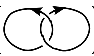
(ii) $V\Big($  $\Big) = -t^{1/2} - t^{5/2}$.

Применим (1) к исходному зацеплению:

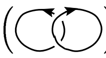
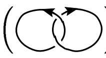
$t^{-1}V\Big($  $\Big) - tV\Big($  $\Big) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V\Big($  $\Big)$.

Но $V\Big($  $\Big) = -(t^{1/2} + t^{-1/2})$ по пункту (i), а $V\Big($  $\Big) = 1$ согласно (2). Следовательно,

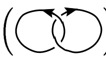
$V\Big($  $\Big) = t(t^{1/2} - t^{-1/2}) - t^2(t^{1/2} + t^{-1/2}) = -t^{1/2} - t^{5/2}$.

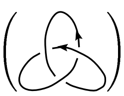
(iii) $V\Big($  $\Big) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$.

Аналогично предыдущему:

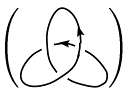
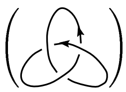
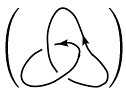
$t^{-1}V\Big($  $\Big) - tV\Big($  $\Big) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot V\Big($  $\Big)$.

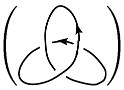
Следовательно,

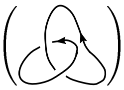
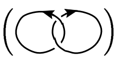
$V\Big($  $\Big) = -t^{-1}(t^{1/2} - t^{-1/2}) - t^{-2}(t^{1/2} + t^{-1/2}) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$.

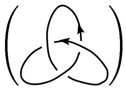
(iv) $V\Big($  $\Big) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$.

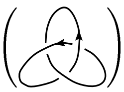
Используя (1), получаем:

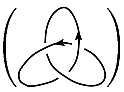
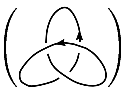
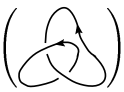
$t^{-1}V$  $-\,tV$  $= (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot V$  .

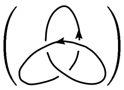
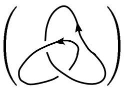
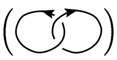
Далее, V  $= 1$ по (2), как полином Джонса тривиального узла, а

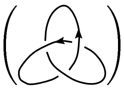
V  $= V$  $= -t^{-5/2} - t^{-1/2}$ по (iii). Следовательно,

V  $= t^{-2} - t^{-1}(t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{-5/2} - t^{-1/2}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}.$

(v) V  $= t + t^3 - t^4.$

Аналогично, $t^{-1}V$  $-\,tV$  $= (t^{1/2} - t^{-1/2})V$  .

V  $= 1$ по (2), V  $= V$  $= -t^{1/2} - t^{5/2}$ по (ii).

Поэтому V  $= t^2 + t(t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{1/2} - t^{5/2}) = t + t^3 - t^4.$

Из различия полиномов Джонса левого и правого трилистников вытекает их неэквивалентность.

4.4. Лежандровы инварианты

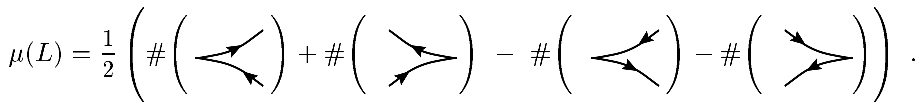
Приведем определение двух простейших инвариантов лежандровой эквивалентности фронтов (т. е. лежандровых узлов, см. раздел 3.2): число Маслова μ и число Беннекена β, которые не являются топологическими инвариантами в том смысле, что их значения на топологически эквивалентных узлах могут различаться. При смене ориентации фронта число Маслова меняет знак, а число Беннекена не изменяется.

Определение. Точку возврата назовем *положительной*, если в ее окрестности ориентация идет с нижней ветви на верхнюю, и *отрицательной* в противном случае.

Положительные точки возврата

Отрицательные точки возврата

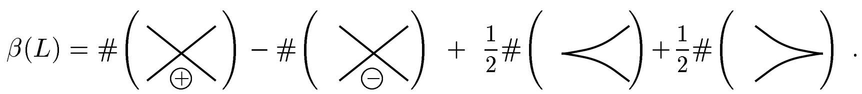
Числом Маслова $\mu(L)$ лежандрова узла L называется половина разности между числом положительных и числом отрицательных точек возврата фронта L.



Определение. Двойную точку фронта назовем *положительной*, если ориентации двух ветвей фронта в ней направлены в разные полуплоскости, и *отрицательной* в противном случае. Поскольку фронт не имеет вертикальных касательных, такое определние знака двойной точки корректно.

Положительные двойные точки *Отрицательные двойные точки*

Числом Беннекена $\beta(L)$ лежандрова узла L называется разность между числом положительных и числом отрицательных двойных точек, увеличенная на половину общего числа точек возврата фронта L:



Упражнение. Докажите, что числа $\mu(L)$ и $\beta(L)$ — лежандровы инварианты.

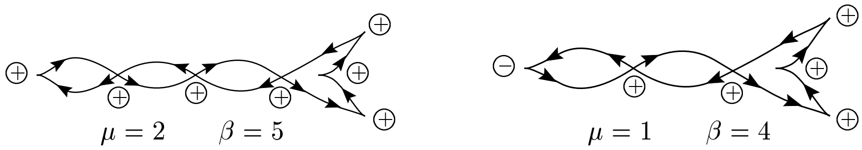
(*Указание.* Проверьте, что они не меняются при перестройках Фукса–Табачникова.)

Д. Беннекен [6] доказал, что число $\beta(L) + |\mu(L)|$ не меньше эйлеровой характеристики произвольной поверхности Зейферта узла L (см. статью В. Прасолова в данном выпуске). Усиление этого неравенства см. в статьях [13, 24, 9]. (*Предостережение.* В статьях [6, 13, 24] используется противоположное нашему соглашение об ориентации объемлющего пространства, поэтому соответствующие неравенства в них имеют противоположный знак. Мы используем здесь соглашение, общепринятое в теории узлов.)

Для лежандровых узлов можно построить теорию инвариантов конечного порядка, аналогичную теории инвариантов Васильева из следующего раздела (см. [13]). При этом μ имеет порядок 0, а β — порядок 1. И, что самое удивительное, все остальные лежандровы инварианты конечного порядка, отличные от μ и β, являются инвариантами топологической эквивалентности, т. е. инвариантны также и относительно четвертой перестройки Фукса–Табачникова.

Числа Маслова и Беннекена двух неузлов (топологически тривиальных узлов), приведенных в конце раздела 3.2, вычисляются на рисунке на следующей странице.

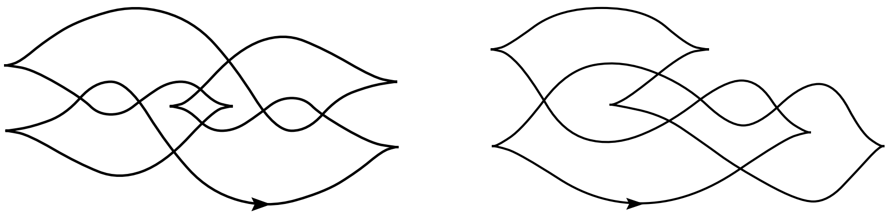
Различие μ и β для этих неузлов доказывает их лежандрову неэквивалентность.



Числа Маслова и Беннекена двух неузлов

Теорема ((Элиашберг, Фрэзер [12, 11])). *Два лежандровых неузла лежандрово эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые числа Маслова и Беннекена.*

Довольно долго был открыт вопрос об аналоге теоремы Элиашберга для произвольных узлов. Недавно Ю. Чеканов [8] предложил новый мощный инвариант лежандровой эквивалентности и доказал, что следующие два узла лежандрово неэквивалентны, хотя топологически они эквивалентны и имеют одинаковые числа Маслова и Беннекена.



Пара Чеканова

Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверку того, что эти два узла топологически эквивалентны и что их числа Маслова равны 0, а числа Беннекена равны -1.

5. Инварианты Васильева

Инварианты Васильева представляют собой самый мощный и, в известном смысле, самый простой класс численных инвариантов узлов.

5.1. Инварианты Васильева

Инварианты Васильева (инварианты конечного типа) появились около 1990 года в работах В. Васильева (см., например, [28]) по топологии дискриминантов в бесконечномерных пространствах отображений. Это не один какой-то инвариант, как полином Джонса, а целый класс инвариантов, выделяемый определенным свойством.

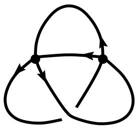
Исходная идея заключается в том, что нужно ввести в рассмотрение, помимо обычных узлов, еще так называемые *особые узлы*, и определить продолжение инвариантов, определенных первоначально для обычных узлов, на множество всех особых узлов.

Определение. *Особым узлом* называется гладкое отображение $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$, являющееся вложением всюду, кроме конечного числа простых двойных точек (т. е. точек трансверсального самопересечения).

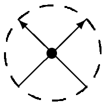
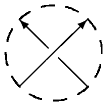
Множество всех особых узлов с n двойными точками, рассматриваемых с точностью до изотопии, мы обозначим через $\mathcal{X}_n$. В частности, $\mathcal{X}_0$ — это множество (классов эквивалентности) обычных узлов. Буквой $\mathcal{X}$ без индекса мы будем обозначать объединение всех $\mathcal{X}_n$.

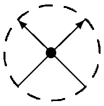
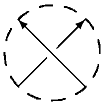
Диаграмма особого узла отличается от диаграммы обычного узла тем, что на ней, кроме точек прохода и перехода, есть еще точки самопересечения, которые на рисунках мы будем изображать жирными точками. Поскольку касательные к двум ветвям кривой в двойной точке узла различны, их можно считать различными и на диаграмме.

Вот пример особого узла с двумя двойными точками:



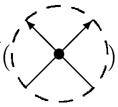
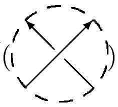
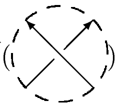
Каждую двойную точку особого узла можно *разрешить* двояким образом:

▷ положительно  $\longmapsto$  или

▷ отрицательно  $\longmapsto$  .

Упражнение. Путем вращения головы и движения листа бумаги в пространстве убедитесь в том, что обе операции корректно определены на изотопических классах узлов и при этом не зависят от выбранной на узле ориентации.

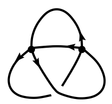
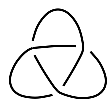
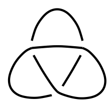
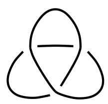
Определение. Пусть $f : \mathcal{X}_0 \to A$ — некоторый инвариант узлов. *Продолжение инварианта f на особые узлы* — это функция $\hat{f} : \mathcal{X} \to A$, совпадающая на $\mathcal{X}_0$ с f и удовлетворяющая *соотношению Васильева*

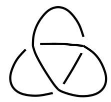
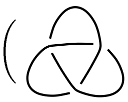
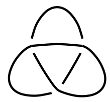
$\hat{f}($  $) = \hat{f}($  $) - \hat{f}($  $).$

В этом соотношении фигурируют три особых узла, диаграммы которых совпадают между собой всюду, кроме указанного фрагмента. Оба узла, стоящие в правой части, имеют на одну двойную точку меньше, чем узел, стоящий в левой части.

Пользуясь этим соотношением рекуррентно, всякий инвариант, заданный первоначально на обычных узлах, можно продолжить на множество всех особых узлов.

Пример. Сосчитаем значение продолженного по Васильеву полинома Джонса на особом узле, приведенном выше в качестве примера.

$\hat{V}\Big($  $\Big) = V\Big($  $\Big) - V\Big($  $\Big) - V\Big($  $\Big) +$

$+ \; V\Big($  $\Big) = V\Big($  $\Big) - V\Big($  $\Big)$

$$= t + t^3 - t^4 - 1.$$

Определение. Инвариант $f : \mathcal{X}_0 \to A$ называется *инвариантом Васильева* порядка $\leqslant n$, если его продолжение на множество особых узлов обращается в нуль на всех узлах, имеющих более чем n точек самопересечения.

Множество $\mathcal{V}_n$ всех инвариантов Васильева порядка $\leqslant n$ образует *линейное пространство*, так как линейная комбинация нескольких таких инвариантов всегда принадлежит $\mathcal{V}_n$. Нас в первую очередь будет интересовать вопрос, чему равна размерность этого пространства $d_n = \dim \mathcal{V}_n$, т. е. сколько существует линейно независимых (существенно различных) инвариантов Васильева данного порядка.

Пример. Пространство $\mathcal{V}_0$ одномерно и состоит только из констант.

В самом деле, если $f \in \mathcal{V}_0$, то f обращается в ноль на любом особом узле, имеющем хотя бы одну двойную точку. В силу определения, это значит, что значение f на обычном узле не меняется при замене любого прохода на переход. Но такими действиями любой узел можно распутать, т. е. свести к тривиальному узлу. Значит, значение нашего инварианта f на любом узле равно его значению на тривиальном узле и, таким образом, f есть константа.

Аналогичное утверждение имеет место и для инвариантов Васильева порядка 1. Его доказательство ненамного сложнее предыдущего, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Задача. Докажите, что пространство $\mathcal{V}_1$ совпадает с $\mathcal{V}_0$.

После этих двух примеров следующий факт кажется неожиданным, не так ли?

Пример. Пространство $\mathcal{V}_2$ двумерно. Кроме констант, оно содержит еще один нетривиальный базисный элемент.

Явное описание нетривиального инварианта Васильева порядка 2 можно найти в статье Ю. Бурмана в этом выпуске журнала.

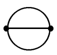
Причину, по которой нетривиальные инварианты Васильева появляются только в порядке 2, можно объяснить следующим образом. Пусть v — инвариант Васильева порядка n. Рассмотрим его значения на особых узлах, имеющих ровно n двойных точек. В силу соотношения Васильева и ввиду того, что v обращается в ноль на любом узле, у которого больше, чем n двойных точек, значение $v(K)$ не изменится, если узел K подвергнуть произвольной деформации (включая замены проходов на переходы и обратно), при которой двойные точки остаются на месте. Следовательно, значение $v(K)$ зависит лишь от порядка, в котором при обходе узла на нем встречаются двойные точки.

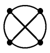
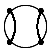
Если двойная точка одна (a), то она может встретиться только так: aa. Если же двойных точек две (a и b), то есть две существенно различных возможности, а именно, $aabb$ и $abab$. Различные варианты чередования двойных точек при обходе узла удобно изображать графически посредством хордовых диаграмм.

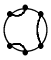
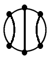
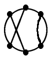
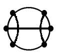
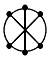
Определение. *Хордовая диаграмма* степени n — это ориентированная окружность, в которой проведены n хорд, все концы которых различны.

Иными словами, хордовая диаграмма — это неориентированная гауссова диаграмма. Хордовые диаграммы рассматриваются как чисто комбинаторный объект: расстояние между концами хорд и форма хорд не имеют никакого значения, важен лишь порядок, в котором пары точек, соединенных хордами, следуют по кругу. Хордовая диаграмма — это то же самое, что слово в алфавите из n букв $a_1, \ldots, a_n$, в котором каждая буква встречается ровно два раза. Такие слова рассматриваются с точностью до циклических перестановок входящих в них букв и произвольной перенумерации переменных $a_1, \ldots, a_n$.

Примеры. Существует

1. одна хордовая диаграмма степени 1: .

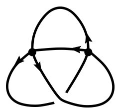
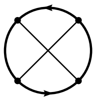
2. две хордовые диаграммы степени 2: , .

3. пять хордовых диаграмм степени 3: , , , , .

(Подразумевается, что на всех этих рисунках окружность ориентирована против часовой стрелки).

Каждому особому узлу K, имеющему n двойных точек, отвечает определенная хордовая диаграмма $\chi(K)$ степени n.

Пример. Для особого узла, приведенного выше в качестве примера, имеем:

$\chi\Big($  $\Big) =$ .

Пусть CD_n — множество всех хордовых диаграмм степени n. Их число $\#(\mathrm{CD}_n)$ дает оценку сверху на зазор между размерностью пространства $\mathcal{V}_n$ и размерностью пространства $\mathcal{V}_{n-1} \subset \mathcal{V}_n$. В самом деле, мы только что объяснили, как по инварианту Васильева порядка n построить функцию на множестве хордовых диаграмм порядка n. Если обозначить пространство всех функций на множестве хордовых диаграмм порядка n через $\mathcal{F}_n$, то мы получаем линейное отображение

$$\sigma : \mathcal{V}_n \to \mathcal{F}_n.$$

Чему равно ядро этого линейного отображения, т. е. какие инварианты Васильева принимают значение 0 на всех узлах, имеющих ровно n двойных точек? По определению, это инварианты Васильева порядка $\leqslant n-1$. Итак, ядро нашего отображения равно в точности $\mathcal{V}_{n-1}$, и мы имеем линейное вложение факторпространства $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ (инвариантов Васильева порядка $\leqslant n$, рассматриваемых с точностью до прибавления инвариантов порядка $\leqslant n-1$):

$$\bar{\sigma} : \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1} \to \mathcal{F}_n.$$

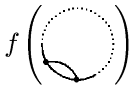
Отсюда следует, что размерности всех пространств $\mathcal{V}_n$ конечны, причем

$$\dim \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1} = \dim \mathcal{V}_n - \dim \mathcal{V}_{n-1} \leqslant \dim \mathcal{F}_n = \#(\mathrm{CD}_n).$$

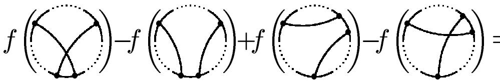
А чему равен *образ* отображения $\bar{\sigma}$? Как можно охарактеризовать функции на множестве хордовых диаграмм, принадлежащие образу этого отображения, т.е. происходящие из инвариантов Васильева? Такие функции называются *весовыми системами*, а ответ на заданный вопрос дает следующая теорема.

Теорема Васильева–Концевича. (1) (*В.Васильев*) Всякая весовая система удовлетворяет

(а) одночленным соотношениям

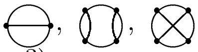

$= 0$,

(б) четырехчленным соотношениям

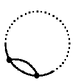

$= 0$.

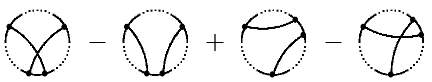
(2) (*М.Концевич*) Любая функция на множестве CD_n, удовлетворяющая 1- и 4-членным соотношениям, происходит из некоторого инварианта Васильева порядка $\leqslant n$.

На рисунках хордовых диаграмм пунктирные линии означают, что в этих местах могут встречаться еще какие-то (ненарисованные) хорды, одни и те же для всех диаграмм, входящих в данную формулу. На участках окружности, изображенных сплошной линией, все имеющиеся хорды честно указаны.

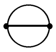
Итак, чтобы определить число $d_n = \dim \mathcal{V}_n - \dim \mathcal{V}_{n-1}$, нужно составить и решить систему линейных уравнений, в которой неизвестные — это значения весовой системы на хордовых диаграммах степени n, а уравнения получаются из всевозможных 1- и 4-членных соотношений. Вместо того, чтобы говорить о значениях функции на множестве диаграмм, можно в качестве неизвестных взять сами эти диаграммы, рассматривая их как буквы некоторого нового алфавита , … (в самом деле, чем эти буквы хуже латинских или греческих?)

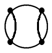
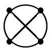
Определение. *Пространство хордовых диаграмм* $\mathcal{A}_n$ — это линейное пространство, порожденное всеми хордовыми диаграммами степени n по модулю одночленных и четырехчленных соотношений


$= 0$,

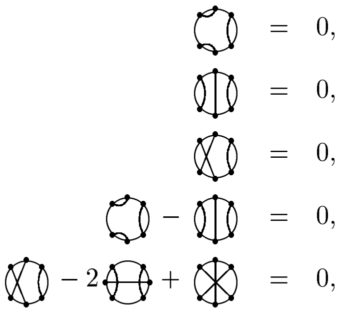

$= 0$.

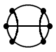
Иначе говоря, $\mathcal{A}_n$ — это пространство решений однородной системы линейных уравнений, состоящей из всех указанных соотношений, относительно набора неизвестных, соответствующих хордовым диаграммам степени n.

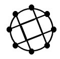
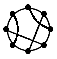
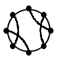
Примеры. 1. Пространство $\mathcal{A}_1$ нульмерно, ибо оно порождено одним элементом , который равен нулю в силу 1-членного соотношения.

2. Пространство $\mathcal{A}_2$ имеет размерность 1, поскольку =0, а нетривиальных 4-членных соотношений в этом случае нет. В качестве базисного элемента можно взять .

3. Размерность пространства $\mathcal{A}_3$ равна числу свободных переменных в системе линейных уравнений



то есть 1. Первые три уравнения выписанной системы суть одночленные соотношения, последние два — четырехчленные. Базисным элементом может служить диаграмма  или .

4. Для пространства $\mathcal{A}_4$ мы приведем лишь ответ, не выписывая систему уравнений: $\dim \mathcal{A}_4 = 3$, а в качестве базиса можно взять диаграммы ,  и .

С ростом n число переменных и уравнений в системе для определения размерности пространства $\mathcal{A}_n$ очень быстро растет. Используя описанный прямой подход, на компьютере удалось сосчитать размерность и базис $\mathcal{A}_n$ только для $n \leqslant 9$ (чтобы найти последнее значение $\dim \mathcal{A}_9$, Д. Бар-Натану пришлось в январе 1993 года одолжить для своей рабочей станции на несколько дней дополнительно 32 Мб оперативной памяти). К настоящему времени точные значения размерности пространств $\mathcal{A}_n$ и, следовательно, $\mathcal{V}_n$, известны до $n = 12$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathcal{P}_n$	0	0	1	1	2	3	5	8	12	18	27	39	55
$\dim \mathcal{A}_n$	1	0	1	1	3	4	9	14	27	44	80	132	232
$\dim \mathcal{V}_n$	1	1	2	3	6	10	19	33	60	104	184	316	548

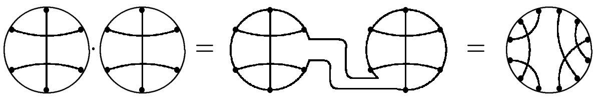
Ответ для $n = 10$, 11 и 12 получен Яном Кнайсслером [17] в 1997 году с использованием более тонкой техники, о которой мы расскажем в следующем разделе. Там же будет объяснено, что такое $\mathcal{P}_n$ и как по числам $\dim \mathcal{P}_n$ можно найти числа $\dim \mathcal{A}_n$.

5.2. Алгебра хордовых диаграмм

Оказывается, что лучше понять устройство линейных пространств $\mathcal{A}_n$ и дальше продвинуться в конкретных вычислениях помогает мультипликативная структура, которая имеется в прямой сумме всех пространств хордовых диаграмм

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \ldots$$

Произведение двух хордовых диаграмм определяется так: две окружности разрываются и склеиваются в одну:



Хордовая диаграмма, которая получается в правой части этого соотношения, зависит, вообще говоря, от того места, где разрываются окружности. Замечательно, что с учетом 4-членных соотношений (в факторпространстве $\mathcal{A}$) умножение определено корректно, т. е. не зависит от произвола в определении.

Задача. Докажите этот факт.

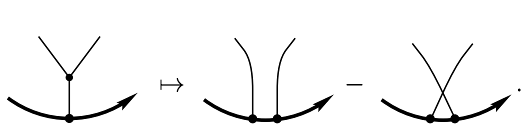
Таким образом, бесконечномерное пространство $\mathcal{A}$ является алгеброй (скажем, над полем рациональных чисел).

Оказывается, что в этой алгебре можно выделить счетное семейство элементов, такое что всякий элемент алгебры однозначно записывается в виде многочлена от этих элементов. Значит, $\mathcal{A}$ фактически представляет собой алгебру многочленов от бесконечного числа переменных.

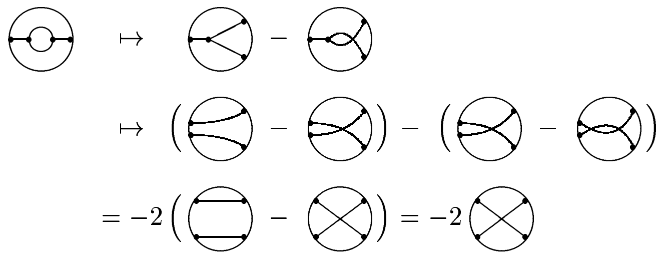
Выбор такого семейства образующих основан на следующих соображениях. Для любого n в пространстве $\mathcal{A}_n$ есть замечательное линейное подпространство, называемое *пространством примитивных элементов* и обозначаемое $\mathcal{P}_n$. Если в каждом пространстве $\mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ выбрать любой базис, то их объединение может служить системой образующих полиномиальной алгебры $\mathcal{A}$. Опишем один из способов построения примитивного пространства $\mathcal{P}_n$.

Определение. *Диаграмма Фейнмана* степени n — это регулярный трехвалентный граф с $2n$ вершинами, в котором выделен некоторый ориентированный цикл, называемый *петлей Уилсона*, и в каждой вершине, не лежащей на петле Уилсона, задан циклический порядок выходящих из нее ребер.

Хордовые диаграммы являются частным случаем диаграмм Фейнмана (у них все трехвалентные вершины лежат на петле Уилсона). Каждую диаграмму Фейнмана f можно превратить в линейную комбинацию хордовых диаграмм $\rho(f)$, многократно применяя следующее соотношение для разрешения тройных точек, смежных с петлей Уилсона:



Пример.

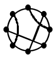
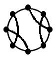
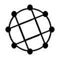
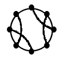


Степень связной диаграммы Фейнмана — это половина общего числа вершин графа. Если $\mathcal{F}_n$ — множество всех диаграмм Фейнмана степени n и $f \in \mathcal{F}_n$, то $\rho(f)$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{A}_n$. Диаграмма Фейнмана называется *связной*, если соответствующий граф остается связным после отбрасывания петли Уилсона.

Определение. Пространство примитивных элементов $\mathcal{P}_n$ $(n \geqslant 1)$ — это линейная оболочка элементов $\rho(f)$ для всех связных диаграмм $f \in \mathcal{F}_n$.

Примеры. Пространство $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}_1$ нулевое.

Пространства $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_3$ одномерны и совпадают, соответственно, с пространствами $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$.

В трехмерном пространстве $\mathcal{A}_4$ примитивное подпространство $\mathcal{P}_4$ двумерно и порождено элементами  $-$  и  -2 .

Работать с примитивными подпространствами $\mathcal{P}_n$ проще, потому что они намного меньше, чем $\mathcal{A}_n$. Предположим, что мы нашли размерности всех $\mathcal{P}_n$ до какого-то места. Спрашивается, как тогда найти начальный участок последовательности $\dim \mathcal{A}_n$? Поясним это на примере.

Допустим, мы знаем, что значения $\dim \mathcal{P}_n$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ равны $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8$. Пусть p_2 — базисный элемент $\mathcal{P}_2$, p_3 — базисный элемент $\mathcal{P}_3$, а базисы пространств $\mathcal{P}_4$ и $\mathcal{P}_5$ суть соответственно p_{41}, p_{42} и p_{51}, p_{52}, p_{53}. Степенью элемента $p \in \mathcal{P}_n$ называется число n, а степень произведения равна сумме степеней сомножителей. Посмотрим, какие можно составить мономы из данных базисных элементов до степени 7 включительно.

Мономы степени 4: p_2^2 (всего 1).

Мономы степени 5: $p_2 p_3$ (всего 1).

Мономы степени 6: p_2^3, p_3^2, $p_2 p_{41}$, $p_2 p_{42}$ (всего 4).

Мономы степени 7: $p_2^2 p_3$, $p_2 p_{51}$, $p_2 p_{52}$, $p_2 p_{53}$, $p_3 p_{41}$, $p_3 p_{42}$ (всего 6).

Базис пространства $\mathcal{A}_n$ составляют сами примитивные элементы и их произведения соответствующей степени. Для $n = 4, 5, 6, 7$ получаем: $\dim \mathcal{A}_4 = 2+1 = 3$, $\dim \mathcal{A}_5 = 3 + 1 = 4$, $\dim \mathcal{A}_6 = 5 + 4 = 9$, $\dim \mathcal{A}_7 = 8 + 6 = 14$.

Оказывается (это открыл П. Вожель [29] в 1995 году), что в пространстве всех примитивных элементов $\mathcal{P} = \oplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ есть еще внутренняя мульпликативная структура. Именно она и позволила Я. Кнайсслеру в 1997 году разработать новый, более эффективный алгоритм нахождения базиса в пространстве инвариантов Васильева и превзойти рекорд Д. Бар-Натана 1993 года.

6. Интеграл Концевича

Интеграл Концевича изобретен в 1992 году [19] как средство доказательства сформулированной выше (с. 81) теоремы Васильева–Концевича. Он является далеко идущим обобщением интегральной формулы Гаусса, выражающей коэффициент зацепления двух замкнутых кривых в пространстве.

Представим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ как прямое произведение комплексной прямой $\mathbb{C}$ с координатой z и вещественной прямой $\mathbb{R}$ с координатой t. Вложим узел K в пространство $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$ так, чтобы координата t была функцией Морса на K. Это значит, что во всех точках, где t как функция параметра на кривой имеет нулевую производную, ее вторая производная не должна обращаться в ноль, а значения t во всех таких точках (*критические значения*) должны быть различны между собой.

Определение. ***Интеграл Концевича*** узла K — это следующий элемент пополнения $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры хордовых диаграмм:

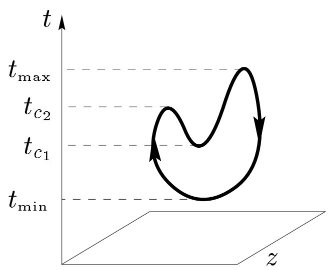
$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\substack{t_{\min}<t_1<\dots<t_m<t_{\max} \\ t_j \text{ некритические}}} \sum_{P=\{(z_j,z'_j)\}} (-1)^{\downarrow} D_P \prod_{j=1}^{m} \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}\ .$$

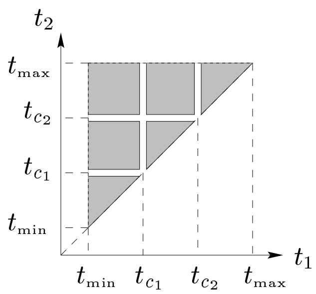
Пополнение $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$ — это, по определению, множество всех бесконечных формальных рядов вида $\sum_m c_m a_m$, где $c_m \in \mathbb{C}$ — численные коэффициенты, а $a_m \in \mathcal{A}_m$ — элементы пространства хордовых диаграмм степени m.

6.1. Who is who в интеграле Концевича

Действительные числа $t_{\min}$ и $t_{\max}$ суть минимальное и максимальное значения функции t на K.

Область интегрирования представляет собой m-мерный симплекс $t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}$, разделенный критическими значениями на некоторое число *связных компонент*. Например, для следующего вложения неузла и $m = 2$ область интегрирования состоит из шести компонент связности и выглядит так:



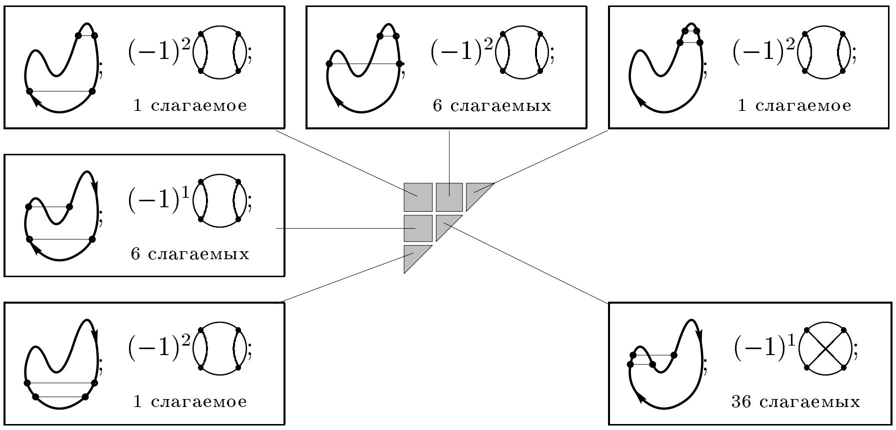


Число слагаемых в подынтегральном выражении постоянно для каждой компоненты связности, но может быть различным для разных компонент. Часть узла в полосе, заключенной между двумя критическими уровнями функции t, представляет собой набор кривых, каждая из которых однозначно параметризована переменной t. В каждой плоскости $\{t = t_j\} \subset \mathbb{R}^3$ выберем неупорядоченную пару различных точек (z_j, t_j) и (z'_j, t_j), лежащих на узле K. Обозначим через $P = \{(z_j, z'_j)\}$ систему из m таких пар для $j = 1, \dots, m$. Под интегралом стоит сумма по всем способам выбора системы P. В произвольной связной компоненте области интегрирования фиксация системы P означает, что для каждой переменной t_j выбрана некоторая пара ветвей узла в соответствующей полосе пространства.

В приведенном выше примере для связной компоненты $t_{\min} < t_1 < t_{c_1}$, $t_{c_2} < t_2 < t_{\max}\}$ есть лишь одна пара точек на уровнях $\{t = t_1\}$ и $\{t = t_2\}$. Следовательно, для этой компоненты сумма под интегралом состоит только из одного слагаемого. Напротив, для компоненты $\{t_{\min} < t_1 < t_{c_1}$, $t_{c_1} < t_2 < t_{c_2}\}$ у нас по-прежнему есть лишь один выбор на уровне $\{t = t_1\}$, но плоскость $\{t = t_2\}$ пересекает узел K уже по четырем точкам, поэтому мы имеем $\binom{4}{2} = 6$ возможных пар (z_2, z'_2), и общее число слагаемых равно шести.

Для данного выбора системы P символ '$\downarrow$' обозначает число точек (z_j, t_j) or (z'_j, t_j) из P, в которых координата t убывает при движении по узлу в положительном направлении.

Зафиксируем систему пар P. Рассмотрим узел K как ориентированную окружность и соединим на ней точки (z_j, t_j) и (z'_j, t_j) хордами. Получится хордовая диаграмма порядка m. Эта хордовая диаграмма является элементом алгебры $\mathcal{A}$, который мы обозначаем через D_P. На следующем рисунке для каждой связной компоненты показано одно из возможных разбиений на пары, соответствующая хордовая диаграмма со знаком $(-1)^{\downarrow}$ и указано число слагаемых подынтегрального выражения (некоторые из которых равны нулю в силу одночленного соотношения).



На каждой компоненте связности переменные z_j and z'_j являются гладкими функциями переменной t_j. Подставляя эти функции в выражение $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$, мы получаем дифференциальную форму от переменных $t_1, \dots, t_m$, определенную на симплексе в m-мерном пространстве этих переменных. Ее и следует проинтегрировать. Это даст коэффициент при соответствующей хордовой диаграмме.

Описанная конструкция работает при всех значениях $m > 0$. Для $m = 0$ по определению полагают, что получится хордовая диаграмма порядка 0 (окружность без хорд, представляющая единичный элемент алгебры $\mathcal{A}$) с коэффициентом 1.

6.2. Универсальный инвариант Васильева

Можно доказать, что интеграл $Z(K)$, во-первых, сходится для любого узла, расположенного в пространстве указанныйм выше способом, а во-вторых, не меняется при гладких изотопиях узла, при которых сохраняется число критических точек функции t. Ввиду того, что узел — замкнутая кривая, появляться и исчезать критические точки могут только парами. Оказывается, что при этом выражение $Z(K)$ меняется вполне определенным образом, а именно, если узел K_1 получается из узла K добавлением пары соседних критических точек, то имеет место равенство

$$Z(K_1) = Z(K) \cdot Z\Big($$  $$\Big).$$

Обозначим через H входящий в эту формулу тривиальный узел, вложение которого в пространство имеет два максимума и два минимума, и рассмотрим выражение

$$I(K) = \frac{Z(K)}{Z(H)^{c/2}},$$

где c обозначает число критических точек функции t на K, а частное — это деление в алгебре $\overline{A}$, осуществляемое на основе правила $(1+a)^{-1} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$.

Из сказанного выше ясно, что $I(K)$ не меняется также и при добавлении (и удалении) пар критических точек. Следовательно, $I(K)$ представляет собой настоящий инвариант узла. Он называется *универсальным инвариантом Васильева*, потому что (в известном смысле) все инварианты Васильева входят в него как коэффициенты.

Исходный интеграл $Z(K)$ называют еще *предварительным интегралом Концевича*, а подправленное выражение $I(K)$ — *окончательным интегралом Концевича*.

Примеры. Пусть O — неузел, вложенный в пространство как окружность, стоящая вертикально. Тогда:

$Z(O) = 1$,

$I(O) = 1/Z(H)$,

$I(H) = Z(H)/(Z(H)^2) = 1/Z(H)$.

Последние два ответа совпадают. Это неудивительно, ведь I — инвариант узла, а узлы O и H эквивалентны. В следующем пункте речь пойдет именно об этом выражении.

6.3. Интеграл Концевича для неузла

Интеграл Концевича — довольно-таки сложный объект. В течение нескольких лет никто не умел вычислять его даже для тривиального узла: были известны лишь коэффициенты при некоторых хордовых диаграммах в бесконечной сумме.

(Конечно, здесь имеется в виду окончательный интеграл Концевича $I(O)$, ибо предварительный $Z(O)$ равен просто 1, как мы уже отмечали.)

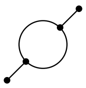
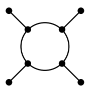
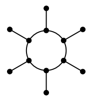
В 1997 году появилась гипотеза Д. Бар-Натана с соавторами [3] (доказанная в 1998 году в работе [4]) о том, чему равна вся сумма:

$$I(O) = \exp \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n} = 1 + (\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n}) + \frac{1}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} w_{2n})^2 + \dots$$

Здесь b_{2n} — *модифицированные числа Бернулли*, т. е. коэффициенты следующего ряда Тейлора:

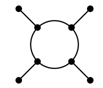
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{x/2},$$

($b_2 = 1/48$, $b_4 = -1/5760, \dots$), а w_{2n} — *колеса*, т. е. диаграммы вида

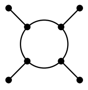
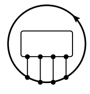
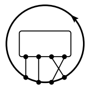
$w_2 =$  , $w_4 =$  , $w_6 =$  , ...

Произведения колес, возникающие при вычислении экспоненты через ряд Тейлора, понимаются как несвязное объединение диаграмм, а сами колеса (и их объединения) интерпретируются как линейные комбинации диаграмм Фейнмана, равные среднему арифметическому по всем $(2n)!$ способам приклеить петлю Уилсона к одновалентным вершинам колеса.

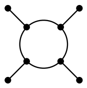
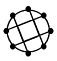
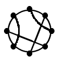
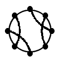
Например,

 $= \frac{1}{24}$ 

Если пристально посмотреть на эти рисунки, можно убедиться в том, что 16 слагаемых выписанной суммы эквивалентны первой диаграмме, а еще 8 — второй. Приводя подобные члены, получаем:

 $= \frac{1}{3}$  $+ \frac{2}{3}$  .

Разрешение внутренних тройных точек диаграмм Фейнмана по правилу, описанному на с. 83, приводит к такому ответу:

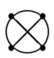
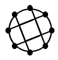
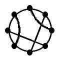
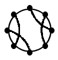
 $=$  $-\frac{10}{3}$  $+\frac{4}{3}$  .

Подобным образом (только проще) можно найти выражение через хордовые диаграммы также для мономов w_2 и w_2^2. Подставляя найденные выражения в ряд

$$I(O) = 1 + \frac{1}{48}w_2 + \frac{1}{4608}w_2^2 - \frac{1}{5760}w_4 + \dots,$$

мы получим следующий результат.

Бесконечный ряд, выражающий интеграл Концевича от неузла, начинается так:

$I(O) = 1 - \frac{1}{24}$  $-\frac{1}{5760}$  $+\frac{1}{1152}$  $+\frac{1}{2880}$  $+\dots$

Все коэффициенты этого ряда рациональны. Этот факт верен для любого узла. Он показывает удивительную связь между теорией узлов и арифметикой.

7. Знаменитые проблемы теории узлов

В этом разделе мы приводим формулировки нескольких знаменитых проблем теории узлов. Некоторые из них не поддавались решению в течение десятков лет и были решены сравнительно недавно, а некоторые открыты до сих пор.

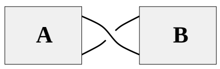
7.1. Решенные проблемы

1. *Существуют ли необратимые узлы?* (Решена положительно в 1962 году [27]).

2. *Определяется ли класс эквивалентности неориентированного узла K топологическим типом его дополнения $\mathbb{R}^3 \setminus K$?* (Решена положительно в 1989 году [14]).

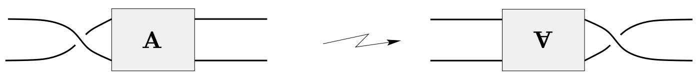
3. В конце прошлого века П. Тейт сформулировал несколько знаменитых гипотез, две из которых совсем недавно были доказаны, а одна опровергнута. В первых двух гипотезах речь идет об альтернированных диаграммах (таких, у которых при движении по узлу проходы и переходы чередуются).

   Гипотеза 1. *Редуцированная, т. е. не имеющая вида*

   альтернированная диаграмма имеет наименьшее возможное число точек самопересечения среди всех диаграмм данного узла. Эта гипотеза доказана независимо в трех работах [18], [26] и [22].

   Гипотеза 2. (Tait flyping conjecture). *От одной альтернированной диаграммы узла к другой можно перейти последовательностью переворачиваний* *следующего вида:*



Эта гипотеза доказана в 1993 году [21].

Гипотеза 3. *Узел, для которого минимальное число пересечений нечетно, всегда зеркален, т. е. эквивалентен своему зеркальному отражению.* Эта гипотеза просуществовала 104 года и была опровергнута только в 1994 году М. Тислтуэйтом (опубликовано в [16]).

4. *Существует ли алгоритм распознавания, эквивалентны ли два данных узла, по их диаграммам?* Проблема решена положительно. В последние годы изобретено несколько таких алгоритмов (С. В. Матвеев, Дж. Бирман, Е. Фоминых, И. Дынников). Надо только отметить, что полное доказательство правильности алгоритма проведено лишь для одного их них, самого трудоемкого и имеющего чисто теоретическое значение. Подробности см. в статье [20].

7.2. Нерешенные проблемы

1. *Как распознать обратимость узла?*

2. *Пусть $C(n)$ — число различных простых неориентированных узлов с минимальным числом пересечений n. Как ведет себя функция $C(n)$ с ростом n?* Про нее очень мало известно. Например, до сих пор нет строгого доказательства, что $C(n)$ монотонно возрастает с ростом n, хотя этот факт кажется очевидным. На компьютере найдены значения $C(n)$ для $n \leqslant 16$ (последние три значения нашли в 1997 году Хост, Тислтуэйт и Уикс [16]):

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988	46972	253293	1388705

3. *Если некоторый узел имеет две диаграммы K_+ и K_-, которые получаются друг из друга заменой одного прохода на переход, то верно ли, что удаление этой двойной точки приводит к распадению узла на две компоненты связности?*

4. *Правда ли, что число пересечений аддитивно относительно связной суммы узлов: $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$?*

5. *Существует ли нетривиальный узел, полином Джонса которого равен 1, т. е. полиному Джонса тривиального узла?* Доказано, что пример, если он существует, должен быть достаточно сложным: число пересечений такого узла не меньше 18 (см. [10]).

6. *Найти ограничение сверху на число движений Рейдемейстера, переводящих одну из двух данных диаграмм узла в другую.*

7. *Найти критерий простоты узла в терминах его диаграммы.*

8. *Является ли универсальный инвариант Васильева полным инвариантом (ориентированного) узла?* То есть, верно ли, что если два узла K_1 и K_2

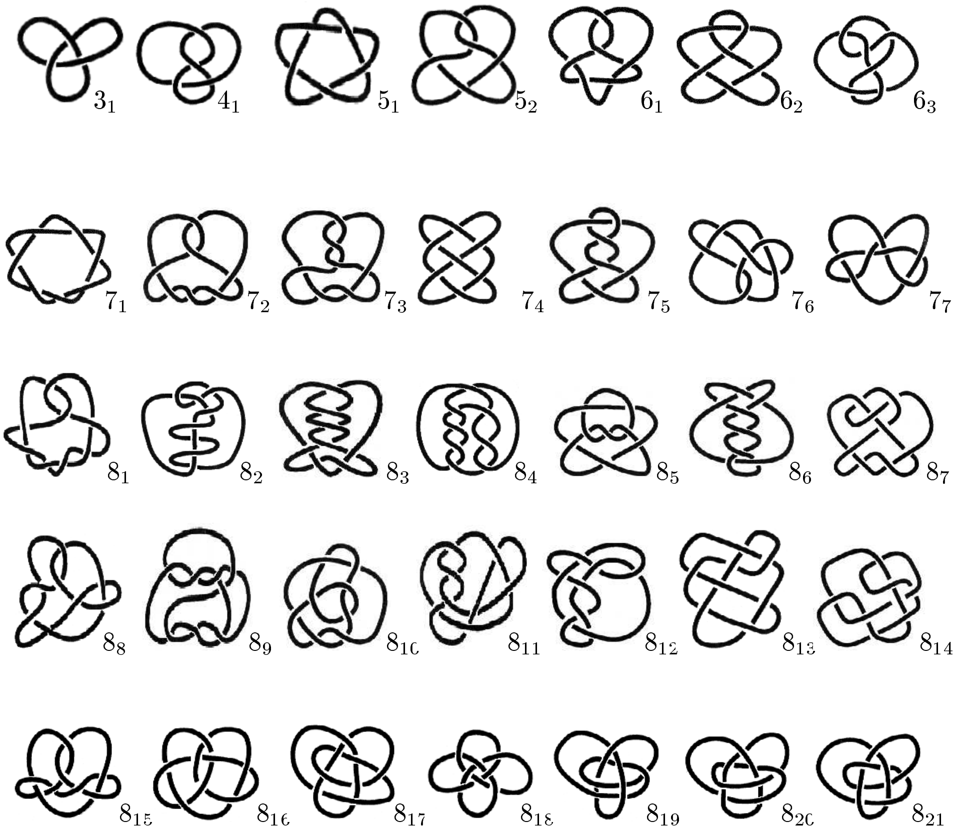
различны, то найдется инвариант конечного порядка v такой, что $v(K_1) \neq$ $\neq v(K_2)$?

9. *Верно ли, что инварианты Васильева различают обращение узла?* Иными словами, существует ли пара взаимно обратных узлов K, K', неэквивалентных друг другу, и такой инвариант Васильева v, что $v(K) \neq v(K')$?

   Этот вопрос допускает следующую комбинаторную формулировку: *существует ли хордовая диаграмма, которая неэквивалентна своему зеркальному отражению по модулю 4-членных соотношений?* Известно, что такая диаграмма, если она существует, должна иметь степень не меньше 13.

Приложение. Таблица узлов

В таблице приведены все простые неориентированные узлы с числом пересечений, не превосходящим 8.



Список литературы

[1] *Colin C. Adams.* The knot book. NY: W.H.Freeman and Company, 1994.

[2] *D. Bar-Natan.* On the Vassiliev knot invariants // Topology, V. 34, 1995. P. 423–472.

[3] *D. Bar-Natan, S.Garoufalidis, L.Rozansky, D.Thurston.* Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot. Preprint, 1997.

[4] *D. Bar-Natan, Thang Le, Dylan Thurston.* The Kontsevich integral of the unknot. In preparation.

[5] *Joan S. Birman, Michael D. Hirsch.* A new algorithm for recognizing the unknot. `http://xxx.lanl.gov/abs/math.GT/9801126`.

[6] *D. Bennequin.* Entrelacements et équations de Pfaff. Astérisque, V. 107–108, 1983. P. 87–161. Русский перевод: УМН, т. 44, вып. 3, 1989. С. 3–53.

[7] *Р. Кроуэлл, Р. Фокс* Теория узлов. М.: Мир, 1967.

[8] *Yu. Chekanov* Differential algebras of Legendrian links. Preprint, 1997.

[9] *S. Chmutov, V. Goryunov.* Polynomial invariants of Legendrian links and plane fronts // In *Topics in Singularity Theory. V.I.Arnold's 60-th Anniversary Collection* (A.Khovanskii, A.Varchenko, V.Vassiliev, eds.). Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, V. 180, 1997. P. 25–44.

[10] *O. T. Dasbach, S. Hougardy.* Does the Jones Polynomial Detect Unknottedness? J. of Experimental Mathematics, Vol. 6, No. 1, 1997. P. 51–56.

[11] *Ya. Eliashberg.* Legendrian and transversal knots in tight contact 3-manifolds // In *Topological methods in modern mathematics*, Publish or Perish, Houston, 1993. P. 171–193.

[12] *Ya. Eliashberg, M. Fraser.* Classification of topologically trivial Legendrian knots. To appear in Proc. of the 1995 CRM workshop on Dynamics, Geometry, and Topology.

[13] *D. Fuchs, S. Tabachnikov.* Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space. Topology, V. 36, 1997. P. 1025–1053.

[14] *C. Gordan, J. Luecke.* Knots are determined by their complements. J. Amer. Math. Soc. Vol. 2, 1989. P. 371–415.

[15] *W. Haken.* Theorie der Normalflächen. Acta Math., Vol. 105, 1961. P. 245–375.

[16] *J. Hoste, M. Thistlethwaite and J. Weeks.* The first 1,701,936 knots. Mathematical Intelligencer. Vol. 20, 1998. P. 33–48.

[17] *Jan Kneissler* The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve. Preprint (June, 1997).

[18] *L. Kauffman* State models and the Jones polynomial. Topology. Vol. 26, 1987. P. 395–407.

[19] *M. Kontsevich.* Vassiliev's knot invariants. Adv. in Soviet Math. Vol. 16, Part 2, 1993. P. 137–150.

[20] *С. В. Матвеев.* Классификация достаточно больших трехмерных многообразий. УМН. Т. 52, вып. 5, 1997. С. 147–174.

[21] *W. Menasco, M. Thistlethwaite.* A classification of alternating links. Annals of Mathematics. Vol. 138, 1993. P. 113–171.

[22] *K. Murasugi.* Jones polynomial and classical conjectures in knot theory. Topology. Vol. 26, 1987. P. 184–194.

[23] *В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский.* Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М: МЦНМО, 1997.

[24] *S. Tabachnikov.* Estimates for the Bennequin number of legendrian links from state models for knot polynomials. Mathematical Research Letters. Vol. 4, 1997. P. 143–156.

[25] *J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks.* Таблица узлов и программа `KnotScape`. `http://www.math.utk.edu/~morwen` (домашняя страница М.Тислтуэйта).

[26] *M. Thistlethwaite.* A spanning tree expansion for the Jones polynomial. Topology. Vol. 26, 1987. P. 297–309.

[27] *H. F. Trotter.* Non-invertible knots exist. Topology. Vol. 2, 1964. P. 275–280.

[28] *V. A. Vassiliev* Cohomology of knot spaces // Theory of Singularities and Its Applications (ed. V. I. Arnold), Advances in Soviet Math. Vol. 1, 1990. P. 23–69.

[29] *P. Vogel.* Algebraic structures on modules of diagrams. Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication 32, August 1995.

[30] *W. Whitten.* Knot complements and groups. Topology. Vol. 26, 1987. P. 41–44.