

УДК 519.17+515.162.8

## АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛИНОМА КОНВЕЯ ПО ДВУДОЛЬНОМУ ГРАФУ

**С. В. Дужин,**

канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Предлагаются два различных алгоритма вычисления полинома Конвея для широкого класса узлов, имеющих парные диаграммы.

**Ключевые слова** — узел, парная диаграмма, двудольный граф, полином Конвея.

В этой работе речь пойдет о вычислении важного инварианта узлов в пространстве, а именно полинома Конвея (см., например, [1]), для широкого класса так называемых парных узлов. Узлы с малым числом перекрестков почти все оказываются парными. Например, среди 35 табличных узлов, имеющих на минимальной диаграмме не более 8 перекрестков, 34 узла являются парными, а про один узел —  $8_{18}$  в обозначениях Рольфсена [2] — до сих пор не известно, является ли он парным. Гипотеза о существовании непарных узлов, сформулированная в 1987 г. [3], лишь недавно была доказана [4].

### Полином Конвея

Узлы (замкнутые несамопересекающиеся кривые в пространстве, рассматриваемые с точностью до изотопий, т. е. непрерывных деформаций) обычно изучаются при помощи их плоских диаграмм, проекций узла на плоскость, на которых отмечено, какая ветвь проходит сверху, а какая снизу. Большой интерес для классификации узлов, которая полностью пока не получена, представляют разного рода инварианты узлов, т. е. величины (числа, многочлены и т. п.), которые не меняются при изотопиях. Один из классических инвариантов — полином Конвея — это многочлен  $\nabla$  от одной переменной  $z$  с целыми коэффициентами, который определяется по диаграмме следующими двумя правилами.

$$\nabla(\bigcirc) = 1,$$

$$\nabla(\text{diagram with crossing}) - \nabla(\text{diagram with crossing}) = z \nabla(\text{diagram with crossing}).$$

Первое условие означает, что полином Конвея тривиального узла, т. е. узла, который можно

изотопией превратить в окружность (попросту говоря, распутать), равен 1. Второе условие требует введения на узле ориентации (направления обхода), но от конкретного выбора ориентации не зависит. Оно определяет, что значения полинома Конвея на трех диаграммах, отличающихся друг от друга лишь локально, внутри пунктирной окружности, связаны друг с другом указанным образом. Заметим, что если в левой части этого равенства фигурируют диаграммы узлов, то в правой части получится диаграмма двухкомпонентного зацепления, т. е. вложенной в трехмерное пространство пары замкнутых кривых. Поэтому полином Конвея необходимо определять сразу на совокупности всех зацеплений.

Приведем простой пример вычисления полинома Конвея согласно определению:

$$\nabla(\text{diagram with two circles}) = \frac{1}{z} \nabla(\text{diagram with infinity}) - \frac{1}{z} \nabla(\text{diagram with infinity}) = 0,$$

ибо последние две диаграммы представляют собой изотопные (тривиальные) узлы. Обобщая этот пример, легко доказать, что  $\nabla(L_n) = 0$  при любом  $n > 1$ , где  $L_n$  означает зацепление, состоящее из  $n$  незаузленных и незацепленных кривых. Этот факт пригодится нам в дальнейшем, при доказательстве теоремы 1.

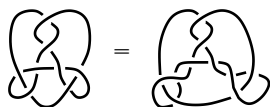
### Парные диаграммы

Диаграмма узла называется парной, если ее перекрестки можно разбить на специальные пары вида

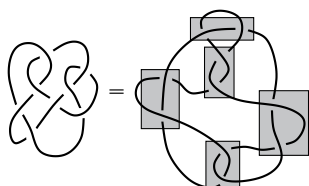


Пару, изображенную слева, будем называть отрицательной, а ту, что справа, — положительной.

Табличные диаграммы узлов редко бывают парными, но их часто удается привести к парному виду путем изотопии (непрерывной деформации в пространстве). Например, для табличного узла  $8_{15}$  это делается очень просто:



(достаточно сделать две подкрутки в левой нижней и правой нижней частях диаграммы). Для табличного узла  $8_{14}$  соответствующее преобразование менее тривиально:

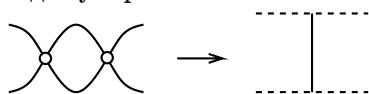


— и доказать эквивалентность этих двух диаграмм можно, например, при помощи компьютерной программы Knotscape [5]. На последней диаграмме серыми прямоугольниками отмечены специальные пары перекрестков.

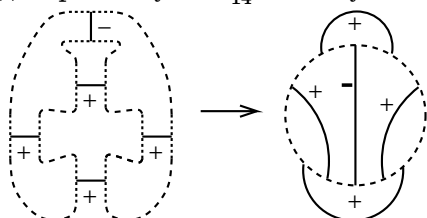
Целью настоящей статьи является формулировка и доказательство двух алгоритмов вычисления полинома Конвея для узла, заданного парной диаграммой.

### Двудольный граф парного узла

Рассмотрим парную диаграмму  $D$  узла  $K$ . Заменим каждую пару перекрестков на два параллельных отрезка, направленных так же, как и соответствующие участки узла, и соединенных общим перпендикуляром:



Параллельные отрезки соединяются оставшимися фрагментами диаграммы в простую замкнутую кривую. Если расправить эту кривую в окружность, то упомянутые общие перпендикуляры перейдут в набор непересекающихся хорд, расположенных частью внутри, а частью вне окружности, например, для приведенной выше парной диаграммы узла  $8_{14}$  мы получим

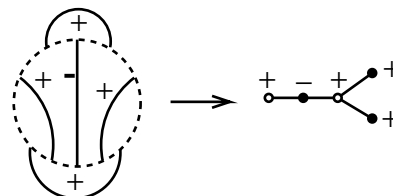


Хорды снабжены знаками, отвечающими знакам соответствующих специальных пар перекрестков.

Исходный узел легко восстанавливается по такой оснащенной диаграмме: хорды следует удвоить и в середину каждой хорды встроить специальную пару перекрестков соответствующего знака.

Значительная часть информации о хордовой диаграмме заключается в ее *графе пересечений*. Как и все графы, о которых здесь идет речь, это неориентированный граф без кратных ребер и петель. Чтобы его получить, нужно каждой хорде поставить в соответствие вершину графа, причем ребрами соединяются те и только те вершины, для которых соответствующие хорды пересекаются, если их провести в виде прямых отрезков внутри круга (выражаясь на чисто комбинаторном языке, это значит, что их концы при обходе окружности перемежаются).

Вот пример построения графа по хордовой диаграмме:



Граф пересечений является двудольным, и его вершины отмечены белым и черным цветом в соответствии с принадлежностью к определенной доле.

Заметим, что обратная операция не вполне однозначна: одному и тому же графу могут отвечать неэквивалентные хордовые диаграммы и, по-видимому, неэквивалентные узлы (явных примеров последнего у автора нет, поскольку они могут возникать только при достаточно большом количестве вершин). Замечательно, что при этом для вычисления полинома Конвея получаемого узла вполне достаточно знания только графа пересечений (со знаками).

### Основные результаты

**Теорема 1.** Полином Конвея парного узла вычисляется по соответствующему оснащеному двудольному графу  $G$  как сумма мономов  $\varepsilon z^n$  по всем подграфам графа  $G$ , которые состоят из связанных компонент с четным числом вершин, причем для каждой компоненты матрица смежности имеет ненулевой определитель по модулю 2. Здесь  $n$  — порядок подграфа, т. е. число вершин в нем, а  $\varepsilon = \pm 1$  — произведение знаков всех вершин.

*Доказательство:* Применим основное соотношение, определяющее полином Конвея, к узлу, изображенному в виде парной диаграммы. Мы получим, что  $\nabla(K)$  — это сумма  $2^k$  слагаемых, где  $k$  — число хорд в диаграмме, причем в каждом слагаемом стоит степень переменной  $z$  со знаком « $\pm$ », умноженным на значение  $\nabla$  на тривиальном зацеплении, состоящем из некоторого числа ком-

понт. Как мы уже замечали ранее, это значение равно 1 для узла, состоящего из одной компоненты, и 0 — для зацепления, состоящего из большего числа компонент.

Остается воспользоваться критерием связности, доказанным в статье [6].

Между прочим, двудольные графы, дающие связную кривую при удвоении хорд в соответствующей хордовой диаграмме, представляют собой довольно интересный класс графов. Их число для 2, 4, 6 и 8 вершин равно соответственно 1, 2, 6 и 24. Будет ли эта последовательность и дальше факториальной? Было бы любопытно изучить свойства таких графов и получить для них более явное описание, не требующее вычисления определителя по модулю 2.

Заметим, что при удвоении хорд в хордовой диаграмме получается всегда кривая, число компонент в которой имеет четность, противоположную четности числа вершин графа пересечений. Именно поэтому мы оставляем в результате только графы с четным числом вершин.

Например, для узла  $8_{14}$  и графа, изображенно-го выше, у нас получается 4 слагаемых с двумя вершинами и со знаками «-», «-», «+», «+», что даст коэффициент 0 при  $z^2$ , и два слагаемых степени 4, отвечающих линейным подграфам порядка 4, оба со знаком «-». Итого, полином Конвея данного узла получается  $1 - 2z^4$ .

**Теорема 2.** Полином Конвея можно вычислить по двудольному графу еще таким способом. Выбираем одну из двух долей, допустим, в ней  $k$  вер-

шин, и составляем матрицу  $A$  размера  $k \times k$ , в которой элемент  $a_{ij}$  равен сумме чисел  $\pm 1$  всех вершин из второй доли, смежных с вершинами  $i$  и  $j$ . Тогда полином Конвея будет равен определителю матрицы, полученной сложением единичной матрицы размера  $k$  и матрицы  $A$ , умноженной на  $z^2$ , в которой строки, отвечающие вершинам со знаком минус, помножены на  $-1$ .

*Доказательство:* Это утверждение является прямым следствием леммы 2 из статьи [7].

Любопытно, что последняя теорема может применяться двойным образом как к первой доле графа, так и ко второй. При этом матрицы будут иметь, вообще говоря, разный размер, но одинаковый определитель. Например, для нашего примера  $8_{14}$  если выбрать долю, состоящую из двух вершин, то получится матрица порядка 2, а если выбрать другую долю, то матрица порядка 3. Определители этих матриц равны между собой и совпадают с найденным выше полиномом:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 1-z^2 & -z^2 \\ -z^2 & 1+z^2 \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} 1-2z^2 & -z^2 & -z^2 \\ z^2 & 1+z^2 & z^2 \\ z^2 & z^2 & 1+z^2 \end{pmatrix} = 1-2z^4. \end{aligned}$$

Таким образом, в статье приведены и обоснованы два способа нахождения полинома Конвея для узлов, задаваемых парными диаграммами.

## Литература

1. **Прасолов В., Сосинский А.** Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия / МЦНМО. — М., 1997. — 352 с.
2. **Rolfsen D.** Knots and links. — Berkeley: Publish or Perish, 1976. — 439 p.
3. **Przytycka T. M., Przytycki J. H.** Signed dichromatic graphs of oriented link diagrams and matched diagrams: Preprint. — University of British Columbia, 1987. 16 p.
4. **Дужин С. В.** Доказательство гипотезы Пштыцкого о парных диаграммах // Докл. Российской академии наук. Сер. Математика. 2011. В печати.
5. **Hoste J., Thistlethwaite M.** Knotscape: computer program. [www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html](http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html) (дата обращения: 27.04.2011).
6. **Moran G.** Chords in a circle and linear algebra over  $GF(2)$  // J. Combin. Theory. Ser. A. 1984. Vol. 37. P. 239–247.
7. **Duzhin S., Shkolnikov M.** Bipartite knots. <http://arxiv.org/abs/1105.1264> (дата обращения: 10.05.2011).