# Теория упругости. Начальный курс

Лектор: Елена Федоровна Грекова
(elgreco@pdmi.ras.ru, elena.grekova@gmail.com)

Институт проблем машиноведения
Российской академии наук

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра
Великого

# План лекций

- Повторение тензорной алгебры
- Откуда получать основные уравнения сплошной среды?
- Кинематика сплошной среды
- Основные законы механики в упругой среде. Интегральная и локальная формы
- Нелинейная упругость. Определяющие уравнения. Уравнения динамики
- Линейная упругость. Определяющие уравнения. Уравнения динамики.
- Изотропный случай
- Свободные волны в неограниченной упругой линейной среде
- Задачи теории упругости

# Лекции 1,2.

# Что такое упругие среды?

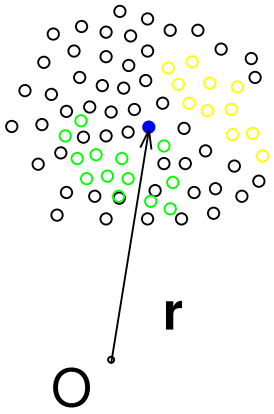
# Некоторые факты из тензорной алгебры

# Ваши предложения?

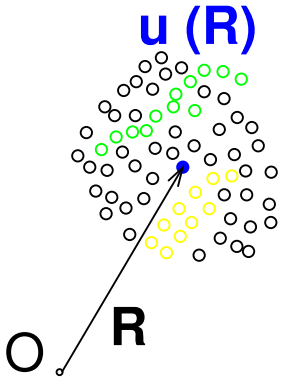
Как мы определим упругую среду?

# Модель классического континуума

**Классическая среда**: континуум, состоящий из материальных точек




reference configuration
(before the deformation)




$U = U(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})$

actual configuration
(after the deformation)

$U$ — упругая энергия,

$\overset{\circ}{\nabla}$ — набла-оператор в отсчетной конфигурации $\mathbf{r}$,

$\mathbf{u}$ — трансляционное перемещение.

Инерциальные характеристики: массовая плотность $\rho$.

Каждая точка подвержена действию сил.

# Что такое упругость?

- Обратимость?
- Соседи остаются соседями?
- Какие уравнения мы должны писать, откуда их брать, чего в них может не хватать?
- От чего может зависеть упругая энергия? Всегда ли она функция деформации?

# Первооткрыватели и предшественники. Литература

Коши (Cauchy), Грин (Green), Эйлер (Euler)
Лурье, Пальмов, Мусхелишвили, Жилин, Амбарцумян
Огден, Трусделл, Новацкий
Литература:
А.И. Лурье. Нелинейная теория упругости.
А.И. Лурье. Теория упругости.
В.А. Пальмов. Колебания упруго-пластических тел.
П.А. Жилин. Введение в рациональную механику.
К.А. Трусделл. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.
А.С. Немов, Е.А. Подольская, А.Д. Новокшенов, Р.А. Филиппов. Введение в механику деформируемого твердого тела. Основные понятия и уравнения теории упругости.

# Тензорная алгебра. План

- Тензоры. Определение
- Координаты и прямое тензорное исчисление.
- Полярные и аксиальные тензоры, векторы, скаляры
- Тензорные инварианты
- Важные тождества
- Сопровождающий вектор антисимметричного тензора
- Ортогональные тензоры. Тензор поворота
- Производные по тензорам и векторам

Литература:

П.А. Жилин. Векторы и тензоры в трехмерном пространстве. (Есть в сети.)

Е.Н. Вильчевская. Тензорная алгебра и тензорный анализ.

А.И. Лурье. Теория упругости.

# Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа

# Тензорное произведение. Диады и тензоры

Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$

Операция $\otimes$: тензорное произведение. Линейна по своим аргументам.

Диада $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ линейна по обоим векторам:

$(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\otimes\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}\otimes\mathbf{c}+\beta\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\otimes(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{c}\otimes\mathbf{a}+\beta\mathbf{c}\otimes\mathbf{b}$.

Это упорядоченная пара: $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$ (вообще говоря).

Тензор второго ранга — любая сумма диад:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}+\mathbf{e}\otimes\mathbf{f}+\cdots = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_{(i)}\otimes\mathbf{b}^{(i)}$$

**Вопросы**

1) Как определить тензор 3-го ранга?

2) Мы будем работать с трехмерными векторами. Каково минимальное число $n$ такое, что любой тензор второго ранга может быть представлен в виде $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{c}_{(i)}\otimes\mathbf{d}^{(i)}$?

3) Как ввести и представить в виде суммы диад единичный тензор?

# Ответ 1. Тензор третьего ранга

$^3\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{c}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{c}_2 + \ldots$ — сумма триад. Триады линейны по своим аргументам, перестановки векторов, вообще говоря, не допускаются

# Ответ 2. Координаты

Видим, что тензоры линейны по векторам их диад. Выберем в трехмерном пространстве ортонормальный базис $\mathbf{i}_k$, $k = \overline{1,3}$. Любая диада может быть представлена как

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \sum_{m=1}^{3} a^m \mathbf{i}_m \otimes \sum_{n=1}^{3} b^n \mathbf{i}_n = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} a^m b^n \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n.$$

Числа $L^{mn} = a^m b^n$ образуют матрицу координат диады $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ в базисе $\mathbf{i}_k$.

Выразим $a^n, b^n$ через $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{i}_k$ и $L^{mn}$ через $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}, \mathbf{i}_k$.

Любой тензор второго ранга — сумма диад: $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{J} \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{b}^j$.

Проведем одну и ту же процедуру со всеми диадами. Получим

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} a_j^m \mathbf{i}_m \otimes b^{j\,n} \mathbf{i}_n = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{J} a_j^m b^{j\,n}\Big)\mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n.$$

В трехмерном пространстве любой тензор второго ранга — сумма $\leqslant 9$ диад.

# Ответ 3. Единичный тензор

$\mathbf{E}$ — единичный тензор, если для любого тензора второго ранга $\mathbf{A}$ верно $\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Покажем, что $\mathbf{E}$ существует. Выберем ортонормальный базис $\mathbf{i}_k$ и положим $\mathbf{E}=\sum\limits_{k=1}^{3}\mathbf{i}_k\otimes\mathbf{i}_k$. Действительно,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\sum_{m,n=1}^{3}\mathbf{A}^{mn}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\cdot\sum_{k=1}^{3}\mathbf{i}_k\otimes\mathbf{i}_k=\sum_{m,n=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\mathbf{A}^{mn}\mathbf{i}_m\delta_{kn}\otimes\mathbf{i}_k=$$

$$\sum_{m,n=1}^{3}\mathbf{A}^{mn}\mathbf{i}_m\otimes\mathbf{i}_n=\mathbf{A}.$$

Аналогично $\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Докажем, что $\mathbf{E}$ — единственный. Предположим, что существуют единичные тензоры $\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2$. Тогда $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_2$.

Проверьте, что для тензора $\mathbf{a}$ любого ранга (включая 1, т.е. для векторов) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

Домашнее задание: ввести правый и левый единичный тензоры и показать, что они равны.

# Координаты

$\mathbf{A} = A^{mn}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n$. Коэффициенты $A^{mn}$ образуют матрицу координат в базисе $\mathbf{i}_m$.
Будем опускать знак $\sum$ и суммировать по повторяющимся разновысоким индексам латинского алфавита от 1 до 3 (греческого — от 1 до 2).
**Тензор A не меняется при изменении базиса $\mathbf{i}_k$. Его координаты меняются.**
**Тензоры представляют собой физические объекты, вообще говоря, зависящие от системы отсчета (физический “холст”, где мы рисуем картину мира). Тензоры НЕ зависят от системы координат (математические “очки”).**

# Прямое тензорное исчисление

Оно позволяет нам совершать вычисления наиболее простым и удобным способом. Видим, что мы можем опустить символ $\otimes$. Тогда $\mathbf{ab}$ — диада $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$. Так можно сделать, поскольку $\lambda\otimes\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$, если $\lambda$ — скаляр.

Обозначим за $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}$ правое и левое скалярные произведения тензора $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}$, а за $\mathbf{A}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}\times\mathbf{A}$ — соответствующие векторные произведения ($\mathbf{A}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}^k\otimes\mathbf{a}'_k\times\mathbf{b}$).

Пример 1. $\mathbf{\Theta} = \lambda\mathbf{k}\otimes\mathbf{k} + \mu(\mathbf{E} - \mathbf{k}\otimes\mathbf{k})$ — тензор инерции осесимметричного тела-точки с осью симметрии $\mathbf{k}$. Вычислим момент инерции относительно оси $\mathbf{n} = (\mathbf{i}+\mathbf{j})\sqrt{2}/2$:

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot(\lambda\mathbf{k}\otimes\mathbf{k} + \mu(\mathbf{E} - \mathbf{k}\otimes\mathbf{k}))\cdot\mathbf{n} =$

$\mathbf{n}\cdot\lambda\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} + \mu\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} - \mu\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0 + \mu\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} - 0 = \mu.$

Примеры 2,3. $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}$;

Let us omit $\otimes$: $(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}$.

$\mathbf{c}\times\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$. Опуская $\otimes$, имеем $\mathbf{c}\times\mathbf{ab} = \mathbf{c}\times\mathbf{ab}$.

# Прямое тензорное исчисление

Введем $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^\top$, $\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B}$ etc. для диад. (Упражнение 1: запишем определение для тензоров в общем случае, проверим, что мы можем опускать символ $\otimes$ и можем просто забыть о скобках.)

$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = \mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{d}$

$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = \mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\otimes\mathbf{d}$

$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^\top = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$

$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$

Американская научная школа использует операцию $\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B}^\top$ (запишите для диад)

$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{E}$

Векторный инвариант $[\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}]_\times = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$

# Взаимные базисы и координаты

Пусть $\mathbf{i}_k$ — некоторый базис. Взаимный базис $\mathbf{i}^k$ по определению таков, что $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}^n = \delta_k^n$. Дельта-символ Кронекера $\delta_k^n = 1$ при $k = n$, и $\delta_k^n = 0$ при $k \neq n$.

Проверьте, что если $\mathbf{i}^k$ — взаимный базис для $\mathbf{i}_k$, то $\mathbf{i}_k$ взаимный для $\mathbf{i}^k$, и что ортонормальный базис — взаимный по отношению к самому себе.

Пусть $\mathbf{a}$ — вектор. Найдем его координаты в прямом и взаимном базисах. Ищем $a^{(k)}$ такие, что $\mathbf{a} = a^{(k)}\mathbf{i}_k$. $\quad | \cdot \mathbf{i}^s$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}^s = a^{(k)}\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}^s = a^{(k)}\delta_k^s = a^{(s)}$.

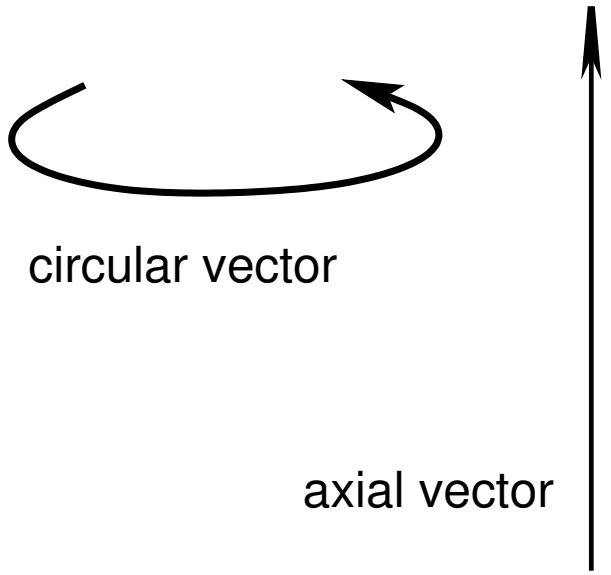
Координаты во взаимном базисе: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_s = a_{(k)}\mathbf{i}^k \cdot \mathbf{i}_s = a_{(k)}\delta_s^k = a_{(s)}$.

Проверим, что $\mathbf{i}_k\mathbf{i}^k = \mathbf{E}$ для любого базиса $\mathbf{i}_k$.

При смене базиса координаты вектора или тензора изменяются. Если они изменяются по тому же закону, что сам базис, они называются ковариантными (обозначаем нижними индексами). Если они изменяются по тому же закону, что взаимный базис — контравариантными (обозначаем верхними индексами). (Приведите примеры. Выразите $a^i$ через $a_i$ и $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s$.)

# Полярные и аксиальные векторы

Векторы — математические объекты, отражающие физическую реальность, например, трансляционное перемещение или поворот. Для описания трансляции в пространстве на определенное расстояние в определенном направлении мы используем полярные (истинные) векторы, они характеризуются модулем и направлением. Для описания поворотов необходимы “спин-векторы”, или “круговые векторы”, введенные П.А. Жилиным (круговая стрелка, направление которой соответствует направлению вращения, а ее длина определяет величину поворота). Мы ставим в соответствие круговому вектору прямой вектор той же длины (аксиальный, или псевдовектор), например, используя правило правого буравчика.



# Полярные и аксиальные векторы

Мы вводим аксиальные векторы, поскольку с ними легко работать. Вместо правила правого буравчика можно выбрать правило левого буравчика. Меняя правило, мы меняем ориентацию системы отсчета, и должны все операции проводить, используя единожды выбранное правило. Эта ориентация не соответствует никакой физической реальности, это наш произвольный выбор.

Вектор является *полярным*, если он не зависит от выбора ориентации системы отсчета.

Вектор является *аксиальным*, если при замене ориентации системы отсчета он меняет знак и не меняет модуль.

Нельзя складывать полярные векторы с аксиальными (иначе модуль суммы зависел бы от ориентации). На интуитивном уровне можно представлять, что полярные векторы соответствуют трансляциям, а аксиальные — поворотам.

# Полярные и аксиальные векторы

Замечание 1: Полярные и аксиальные векторы имеют различный физический смысл.
Замечание 2: Ориентация системы отсчета не связана с ориентацией систем координат, используемых в ней. Можно даже не выбирать систему координат в данной системе отсчета, а можно ориентировать ее как аналогичным образом, так и противоположным.
Вопросы: 1) Как ввести полярный / аксиальный тензор / скаляр?
2) Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a) полярные; b) аксиальные; c) полярные и аксиальные векторы. Какой тип имеют 1) вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 2) скаляры $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$? Изменится ли результат, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ — тензоры?
Упражнения.
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \alpha = 0$. Вектор $\mathbf{a}$ и скаляр $\alpha$ заданы. Найдите:
1) вектор $\mathbf{x}$ (общее решение) 2) решение с минимальным и максимальным модулями.
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (векторы), найти $\mathbf{x}$ и $|\mathbf{x}|_{\min}$.

# Определитель

$$\det \mathbf{A} = \frac{[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b})]\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{c})}{[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}}$$

Доказать, что если $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\neq 0$ (т.е. эти векторы линейно независимы), $\det\mathbf{A}$ не зависит от выбора $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$. Доказать: $\det\mathbf{A}^\top = \det\mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$, $\det\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}$.
Как определить $\mathbf{A}^{-1}$?
Найти $\mathbf{E}^{-1}$ и $(\Theta^i\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i)^{-1}$, где $\mathbf{e}_i$ — ортонормальный базис.

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ — ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$. Если они лежат в одной плоскости (например, если некоторые из них совпадают), это 0. Циклические перестановки векторов не меняют его, а другие изменяют знак.

# Антисимметричный тензор. Сопутствующий вектор

Если $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top$, то существует вектор $\mathbf{a}$ такой, что $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{E}$.
$[\mathbf{A}]_\times = -2\mathbf{a}$. Докажите это.
$\mathbf{a}$ называется сопутствующим вектором $\mathbf{A}$.

# Инварианты тензора 2 ранга

След: $\mathrm{I}_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{mn}}\mathbf{i}_{\mathrm{m}} \cdot \mathbf{i}_{\mathrm{n}} = \mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{E}$.
Второй инвариант: $\mathrm{I}_2(\mathbf{A}) = ((\mathrm{tr}\,\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2)/2$,
Определитель: $\mathrm{I}_3 = \mathsf{det}(\mathbf{A}) = \frac{1}{6}(\mathrm{tr}\mathbf{A})^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3$.

Для симметричного тензора физический смысл инвариантов связан с суммой ребер, площадью поверхности и объемом прямоугольного параллелепипеда, чьи стороны равны собственным числам тензора.

А для антисимметричного?

А для тензора общего вида?

Доказать:
$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^\top$, $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{B}$, $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}^\top)$.

# ** Тождества **

Доказать то, на что хватит сил.
Тождество Гамильтона – Кэли

$$-\mathbf{A}^3 + \mathrm{I}_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 - \mathrm{I}_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + \mathrm{I}_3(\mathbf{A})\mathbf{E} = 0$$

Как выразить другие (положительные и отрицательные) степени $\mathbf{A}$ через $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3$, используя это тождество?
$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$.
Если $\det\mathbf{A} \neq 0$,

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}) = (\det\mathbf{A})\mathbf{A}^{-\top}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

Если $\mathbf{S} = \mathbf{S}^\top$, $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^\top = \mathbf{t}\times\mathbf{E} \Longrightarrow \det(\mathbf{S}+\mathbf{T}) = \det\mathbf{S} + \mathbf{t}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{t}$.

# Тензор Леви–Чивитты

$$^3\mathbf{L} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E} = \epsilon_{mnk}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_k \tag{1}$$

Циклические перестановки индексов не изменяют координаты.
Попарные перестановки индексов меняют знак $\epsilon_{mnk}$.
Полярный это тензор или аксиальный?

$$\mathbf{a} \times \mathbf{E} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{L} = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{a} \tag{2}$$

# Ортогональные тензоры

Если для любого вектора $\mathbf{x}$

$$|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|, \tag{3}$$

то $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор. Докажите, что это то же самое, что потребовать $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^\top = \mathbf{E}$, что верно $\det\mathbf{Q} = \pm 1$ и что $\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{Q}_2$ — ортогональный, если $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ — ортогональные.

Ортогональный тензор не меняет углы между векторами.

$(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Доказательство: $(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^\top\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Заметим:

$[(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_1)\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_2)]\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_3) = \pm[\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2]\cdot\mathbf{e}_3$.

Если $\det\mathbf{Q} = 1$, и тензор $\mathbf{Q}$ ортогонален, то он не меняет ориентацию векторного базиса. Это тензор поворота.

Если $\det\mathbf{Q} = -1$, и $\mathbf{Q}$ ортогонален, то он меняет ориентацию триады, это тензор отражения.

# ** Ортогональные тензоры. Тождества **

Доказать некоторые из тождеств

$$\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{Q}^{\top}) = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{Q}^{\top} = \det\mathbf{Q}[(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{E}],$$

$$(\mathbf{Q}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{Q}^{\top} = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{Q}^{\top} = \det\mathbf{Q}[(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{E}],$$

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\top}) = \mathrm{tr}\,\mathbf{A},$$

$$\det(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\top}) = \det\mathbf{A},$$

$$\mathrm{I}_2(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\top}) = \mathrm{I}_2(\mathbf{A}),$$

$$\mathrm{tr}\,((\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\top})^{\mathrm{n}}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^{\mathrm{n}})$$

# Тензор поворота

Тензор поворота — ортогональный тензор с определителем 1: $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = \mathbf{E}$, $\det \mathbf{P} = 1$.

Теорема Эйлера: любой тензор поворота (кроме $\mathbf{E}$) единственным образом представим в виде

$$\mathbf{P}(\theta \mathbf{m}) = (1 - \cos\theta)\mathbf{m}\,\mathbf{m} + \cos\theta \mathbf{E} + \sin\theta\, \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

$\theta$ — угол поворота, $\mathbf{m}$ — ось поворота (неподвижный вектор $\mathbf{P}$).
Проверить: $\mathbf{P}(\theta\mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{P}(\theta\mathbf{m}) = \mathbf{m}$.

Вычислим $\mathbf{P}(\theta\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}$, где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$.
Если $\mathbf{d}_k$ — некоторый базис, и $\mathbf{D}_k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_k$, то верно $\mathbf{P} = \mathbf{D}_k \mathbf{d}^k$ (проверить).

# Свойства тензора поворота

Равны ли $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1$?
Ответ: иногда. Вообще говоря, НЕТ (привести примеры).
Это так, если оси поворотов совпадают, или если повороты малы. (Доказать.)
Вычислить неподвижный вектор для тензора $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1$, когда оси поворотов 1,2 совпадают.
Тензор поворота представим в виде композиции трех поворотов вокруг трех фиксированных осей (вторая отлична от первой и третьей):

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_3(\psi \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{P}_2(\theta \mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{l}_0) \tag{4}$$

Если $\mathbf{m}_0 = \mathbf{l}_0$, $\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$, то $\psi, \theta, \varphi$ — углы прецессии, нутации и собственного вращения.

# Упражнение

Пусть $\mathbf{P}$ — тензор поворота, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — векторы. Верно ли, что

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b})? \tag{5}$$

# Угловая скорость и угловые деформации

Уравнение Пуассона: $\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}$. Доказать, что $\omega$ существует, и найти ее.
(Подсказка: Доказать, что $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top$ — антисимметричный тензор. Вычислить его сопутствующий вектор.)
Пространственный аналог уравнения Пуассона: если $q^i$ — координаты, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$, то $\partial_i \mathbf{P} = \boldsymbol{\Phi}_i \times \mathbf{P}$.
1) Доказать, что если $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1$, то $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{P}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1$.
2) Вычислить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ для случая, когда оси поворотов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ совпадают.
3) Получить выражение для $\boldsymbol{\omega}$ через углы прецессии, нутации и собственного вращения.
4) **Домашнее задание:** доказать, что

$$\partial_i \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\Phi}}_i + \boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\omega}. \tag{6}$$

# Малые повороты

Если угол поворота $\theta$ инфинитезимален, то $\mathbf{P} \approx \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$, $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}$, $\boldsymbol{\omega} \approx \dot{\boldsymbol{\theta}}$. Получить это из теоремы Эйлера. Вычислить $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1$ и угловую скорость, если $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ — малые повороты с векторами поворота $\boldsymbol{\theta}_1$ и $\boldsymbol{\theta}_2$, соответственно.

Показать, что малые повороты перестановочны, а углы и угловые скорости композиции малых поворотов суммируются

Чему равен $\mathbf{P}^{-1}$?

Чему равен в первом приближении тензор $(\mathbf{E} + \boldsymbol{\lambda})^{-1}$, если $\boldsymbol{\lambda}$ — произвольный малый тензор?

# Производные

Если $U$ — скалярная функция вектора $\boldsymbol{\theta}$, то

$$dU = d\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

Если $U$ — скалярная функция тензора второго ранга $\mathbf{A}$, то

$$dU = d\mathbf{A}^\top \cdot\cdot \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}}\right)$$

Если тензор второго ранга $\boldsymbol{\tau}$ — функция тензора второго ранга $\mathbf{A}$, то

$$d\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{A}^\top \cdot\cdot \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{A}}$$

Проверить, что эти определения согласуются с определением производной функции по многим переменным.

# Набла-оператор Гамильтона (оператор-градиент)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}$$

Для функции $f(\mathbf{R})$

$$df = d\mathbf{R} \cdot \nabla f.$$

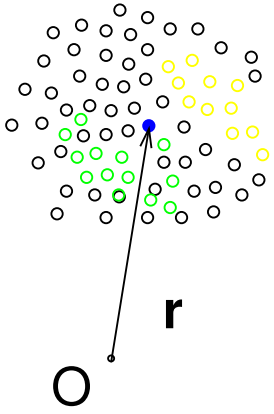
Если $\mathbf{f}(\mathbf{R})$ — тензор или вектор,

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{f}.$$

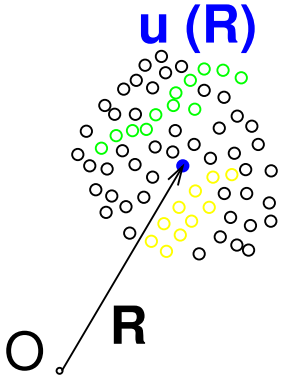
# Меры и тензоры деформаций в классической среде

# Модель классического континуума

**Классическая среда**: континуум, состоящий из материальных точек




reference configuration
(before the deformation)




$U = U(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})$

actual configuration
(after the deformation)

$U$ — упругая энергия,

$\overset{\circ}{\nabla}$ — набла-оператор в отсчетной конфигурации $\mathbf{r}$,

$\mathbf{R}$ — радиус-вектор материальной точки в актуальной конфигурации.

Считаем, что близкие точки остаются близкими (вероятно, не годится для пластических сред).

# Деформации в классической сплошной среде

Будем рассматривать две конфигурации: отсчетную (радиус-вектор материальной точки $\mathbf{r}$) и актуальную (радиус-вектор материальной точки $\mathbf{R}$).

Характеристики среды меняются не только во времени, но и при движении от точки к точке. Производная по радиус-вектору — оператор-градиент (набла)

$\overset{\circ}{\nabla} = \frac{d}{d\mathbf{r}}$ в отсчетной конфигурации,

$\nabla = \frac{d}{d\mathbf{R}}$ в актуальной конфигурации.

Для функции $f$, меняющейся в пространстве,

$$df = d\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} f = d\mathbf{R} \cdot \nabla f = d\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \nabla f$$

$$\overset{\circ}{\nabla} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) \cdot \nabla$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = (\nabla\mathbf{r})^{-1}$$

# Градиент места и жесткие движения

Как меняется $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$ при жестких движениях?
Пусть $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ характеризует движение нашего континуума.
Наложим на него жесткое движение (поворот $\mathbf{Q}$ вокруг полюса с радиус-вектором $\mathbf{R}_c$ и трансляционное перемещение на $\mathbf{R}_0(t)$).
Такое движение описывается радиус-вектором

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_c) + \mathbf{R}_c(t)$$

Вычислим $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}'$.

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}' = \overset{\circ}{\nabla}((\mathbf{R} - \mathbf{R}_c) \cdot \mathbf{Q}^\top) = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) \cdot \mathbf{Q}^\top.$$

Видим, что жесткий поворот изменяет $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$. В то же время неверно, что $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$ поворачивается жестким поворотом $\mathbf{Q}$ вместе с материалом, так как $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}' \neq \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^\top$.
Хорошая ли это характеристика деформации?

# Меры деформации

Мера деформации Коши – Грина

$$\mathbf{G} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla}$$

Мера деформации Фингера

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$

Мера деформации Альманзи (Альманси)

$$\mathbf{g} = \nabla\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}\nabla = \mathbf{F}^{-1}$$

Как они меняются при жестких движениях?

# Меры деформации

Как они меняются при жестких движениях?

Мера деформации Коши – Грина не меняется

$$\mathbf{G}' = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}^\top\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{G}$$

Мера деформации Фингера поворачивается жестким поворотом

$$\mathbf{F}' = \mathbf{R}'\overset{\circ}{\nabla}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}' = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^\top$$

Мера деформации Альманзи (Альманси) поворачивается жестким поворотом

$$\mathbf{g}' = \mathbf{F}'^{-1} = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^\top)^{-1} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{g}\cdot\mathbf{Q}^\top.$$

# Смысл мер деформации

- Чему равны меры деформации, если тело не деформируется?
- Чему равны меры деформации, если тело изотропно расширяется или сжимается?
- Какой симметрией они обладают?
- Что происходит с векторами, направленными вдоль собственных векторов мер деформации?
- Чему равны определители мер деформации?

# Смысл мер деформации

- Чему равны меры деформации, если тело не деформируется?

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{G} = \mathbf{F} = \mathbf{g} = \mathbf{E}.$$

- Чему равны меры деформации, если тело изотропно расширяется или сжимается?

$$\mathbf{R} = A\mathbf{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{G} = \mathbf{F} = A^2\mathbf{E}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E}/A^2.$$

- Какой симметрией они обладают? Все три — симметричные тензоры (6 независимых компонент — три собственных числа и три единичных собственных вектора, например, $\mathbf{G} = G_i\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i$). Связаны ли как-то собственные числа и векторы мер деформации?
  А вот $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$ не обладает симметрией (9 независимых компонент). Хорошо ли, что три компоненты исчезли?

# Полярное разложение

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{V},$$

$\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^\top = \mathbf{E}$ (ортогональный), $\mathbf{U} = \mathbf{U}^\top$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}^\top$ положительно опред.

$$\mathbf{U}^2 = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{G}, \qquad \mathbf{V}^2 = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{F},$$

$$\mathbf{H} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^{-1/2} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top)^{-1/2}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$

(доказать, что это одно и то же),

$$\sqrt{\mathbf{F}} = \mathbf{H}^\top\cdot\sqrt{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{H},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}, \qquad \mathbf{g} = \mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{G}^{-1}\cdot\mathbf{H}.$$

$\mathbf{H}^\top$ входит в $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$, но не в $\mathbf{G}, \mathbf{C}$. Возможно, $\mathbf{H}^\top$ — поворот или отражение окрестности?

$d\mathbf{R} = d\mathbf{r}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = (d\mathbf{r}\cdot\mathbf{U})\cdot\mathbf{H} = \mathbf{H}^\top\cdot(\mathbf{U}\cdot d\mathbf{r})$ (деформировали и повернули/отразили)

$d\mathbf{R} = d\mathbf{r}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = (d\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})\cdot\mathbf{V} = \mathbf{V}\cdot(\mathbf{H}^\top\cdot d\mathbf{r})$ (повернули/отразили и деформировали)

# Смысл мер деформации

- Чему равны определители мер деформации?

Параллелепипед, построенный на независимых векторах $d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_3$ (с объемом $V_0$) после деформации превратился в параллелепипед с ребрами $d\mathbf{R}_1, d\mathbf{R}_2, d\mathbf{R}_3$ объема $V$. Так как $d\mathbf{R}_i = d\mathbf{r}_i \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$,

$$\frac{V}{V_0} = \frac{[(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot d\mathbf{r}_1) \times (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot d\mathbf{r}_2)] \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot d\mathbf{r}_3}{(d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_3} = \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$

Тогда

$$\det \mathbf{G} = \det \mathbf{F} = (\det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^2 = \frac{V^2}{V_0^2}, \qquad \det \mathbf{g} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} = \frac{V_0^2}{V^2}$$

# Смысл мер деформации

- Что происходит с векторами, направленными вдоль собственных векторов мер деформации?

Собственные числа и собственные векторы

Если $\mathbf{G} = G_i \mathbf{d}_i \mathbf{d}_i$, то $\quad \mathbf{F} = G_i \mathbf{D}_i \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{g} = G_i^{-1} \mathbf{D}_i \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{D}_i = \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{d}_i$.
Все инварианты мер деформации Коши – Грина $\mathbf{G}$ и Фингера $\mathbf{F}$ равны (у них одинаковые собственные числа).

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \sqrt{\mathbf{F}} = \sqrt{G_i} \mathbf{d}_i \mathbf{D}_i$$

Если $d\mathbf{r}$ направлен по собственному вектору $\mathbf{d}_i$ меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}$, то после деформации он умножится на $\sqrt{G_i}$ и повернется тензором $\mathbf{H}^\top$: $\quad d\mathbf{R} = dr\sqrt{G_i}\mathbf{D}_i$.

# Градиент скорости

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} = (\mathbf{U}\cdot\mathbf{H})^{\cdot} = \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{U}\cdot(\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{H})$$

$$\nabla\mathbf{v} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^{-1}\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}) = \mathbf{H}^{\top}\cdot(\mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\eta}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}$$

Тензор скоростей деформации

$$(\nabla\mathbf{v})^{S} = \mathbf{H}^{\top}\cdot(\mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1})/2\cdot\mathbf{H}$$

Этот тензор поворачивается при жестких движениях вместе с телом (так как $\mathbf{U}$ при них не меняется).

Тензор вихря

$$(\nabla\mathbf{v})^{A} = \mathbf{H}^{\top}\cdot((\mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1})/2 + \boldsymbol{\eta}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}$$

$$(\nabla\mathbf{v})^{A} = \mathbf{H}^{\top}\cdot\dot{\mathbf{H}} + \frac{1}{2}\mathbf{H}^{\top}\cdot(\mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1})\cdot\mathbf{H}$$

изменяется при жестких движениях, но не поворачивается вместе с телом (как и градиент скорости $\nabla\mathbf{v}$).

# Инварианты мер деформации

След

$$I_1(\mathbf{G}) = I_1(\mathbf{F}) = G_1 + G_2 + G_3$$

Второй инвариант

$$I_2(\mathbf{G}) = I_2(\mathbf{F}) = G_1\,G_2 + G_2\,G_3 + G_3\,G_1$$

Определитель

$$I_3(\mathbf{G}) = I_3(\mathbf{F}) = \det(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^2 = G_1\,G_2\,G_3$$

$$I_1(\mathbf{g}) = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} \qquad I_2(\mathbf{g}) = \frac{1}{G_1\,G_2} + \frac{1}{G_2\,G_3} + \frac{1}{G_3\,G_1}$$

$$I_3(\mathbf{g}) = \frac{1}{G_1\,G_2\,G_3}$$

# Изменение объема при особых видах деформации

1. Объемное растяжение – сжатие $\mathbf{R} = A\mathbf{r}$

$$\frac{V}{V_0} = \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \sqrt{\det \mathbf{F}} = \sqrt{\det \mathbf{G}} = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{g}}} = A^3$$

2. Формоизменение: деформация без изменения объема, $V = V_0$

$$\det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = 1 = \det \mathbf{G} = \det \mathbf{F} = G_1\, G_2\, G_3 = \frac{1}{G_1\, G_2\, G_3} = \det \mathbf{g}$$

3. Аффинное преобразование

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{R}_0, \quad \det \mathbf{\Lambda} = \text{const} \neq 0$$

$$\det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \det(\overset{\circ}{\nabla}(\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{r})) = \det(\mathbf{i}_k \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{i}_k) = \det \mathbf{\Lambda}$$

$$\det \mathbf{G} = \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{\Lambda})^2 = \frac{1}{\det \mathbf{g}}$$

# Связь $\dot{\mathbf{G}}$ и $\nabla\mathbf{v}^S$.

$$\dot{\mathbf{G}} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^\top = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{v}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{v})^\top$$

$$\dot{\mathbf{G}} = 2\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{v}^S\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top, \qquad \nabla\mathbf{v}^S = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{G}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}$$

$$2\nabla\cdot\mathbf{v} = \mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{G}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}) = \mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + G_k\dot{\mathbf{e}}_k\mathbf{e}_k + G_k\mathbf{e}_k\dot{\mathbf{e}}_k)\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}$$

$$= \mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + G_k\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + G_k\mathbf{e}_k\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k)\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top})$$

$$= \dot{G}_k(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k)\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k) + G_k(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k))\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k) +$$

$$G_k(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k)\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k))$$

$$= \dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\cdot\cdot\,\mathbf{G}^{-1} + 2G_k\mathbf{e}_k\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k) = (\dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k - 2\mathbf{G}\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\cdot\,\mathbf{G}^{-1}$$

Заметим:

$$(\mathbf{G}\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\cdot\,\mathbf{G}^{-1} = G_s\mathbf{e}_s(\mathbf{e}_s\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\cdot\,G_k^{-1}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k = G_sG_k^{-1}\delta_{ks}(\mathbf{e}_s\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{e}_k = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\cdot\cdot\,\mathbf{G}^{-1}/2 = \frac{(\det\mathbf{G})^{\cdot}}{2\det\mathbf{G}} = \tfrac{1}{2}(\ln\det\mathbf{G})^{\cdot} = \left(\ln\frac{V}{V_0}\right)^{\cdot}$$

# Несжимаемый материал: $\det \mathbf{G} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$

Таким образом, условие $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ равносильно кинематическому ограничению $\det \mathbf{G} = 1$ (условию несжимаемости материала).

# Мера деформации Генки (Hencky's strain)

$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{V} \qquad \mathbf{V} = \sqrt{G_i}\mathbf{D}_i\mathbf{D}_i.$$

Чему равны собственные числа тензора Генки? Инварианты?
Чему равна производная по времени от тензора Генки? Посчитайте.
Как записать различные меры деформации в координатном виде?
Заметим:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\ln \det \mathbf{G})^{\cdot} = (\ln(G_1 G_2 G_3)^{1/2})^{\cdot} = (\ln(V_1 V_2 V_3))^{\cdot}$$
$$= (\ln V_1 + \ln V_2 + \ln V_3)^{\cdot} = (\mathrm{tr}\,\mathbf{h})^{\cdot} = \mathrm{tr}\,\dot{\mathbf{h}}$$

# Перемещения и тензоры деформации

Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, тогда $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}$, $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{E} - \nabla\mathbf{u}$

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} + 2(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^S + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{E} + 2\mathbf{C}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\top = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^S + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\overset{\circ}{\nabla} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$$

— тензор деформации Коши–Грина (Лурье), тензор деформации Грина – Сен-Венана, тензор конечной деформации Лагранжа (западная литература)

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + 2(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^S + \mathbf{u}\overset{\circ}{\nabla}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} - 2(\nabla\mathbf{u})^S + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla = \mathbf{E} - 2\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top = (\nabla\mathbf{u})^S - \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{g})$$

— тензор деформации Альманси (Лурье), Эйлера – Альманси (западная литература)

# Инварианты тензора деформации Коши – Грина

Тензор деформации Коши–Грина

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(G_i - 1)\mathbf{d}_i\mathbf{d}_i$$

Инварианты тензора деформации Коши–Грина:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{C} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{G} - \mathbf{E})/2 = (G_1 + G_2 + G_3 - 3)/2 = (\mathrm{tr}\,\mathbf{G} - 3)/2$$

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{C}) &= ((G_1 - 1)(G_2 - 1) + (G_2 - 1)(G_3 - 1) + (G_3 - 1)(G_1 - 1))/4 \\ &= (I_2(\mathbf{G}) - 2\mathrm{tr}\,\mathbf{G} + 3)/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det\mathbf{C} &= \det((\mathbf{G} - \mathbf{E})/2) = (G_1 - 1)(G_2 - 1)(G_3 - 1)/8 \\ &= (\det\mathbf{G} - I_2(\mathbf{G}) + \mathrm{tr}\,\mathbf{G} - 1)/8 \end{aligned}$$

(Упражнение: написать инварианты тензора деформации Альманси)

# Смысл компонент тензора и меры деформации Коши – Грина

Пусть $\mathbf{e}$ — единичный вектор некоторого малого вектора в отсчетной конфигурации: $d\mathbf{r} = \mathbf{e}dr$.

$$(d\mathbf{R})^2 - (d\mathbf{r})^2 = d\mathbf{r} \cdot (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla} - \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 - 1 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e} = 2\mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}$$

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = 2\mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e} + 1$$

Диагональные компоненты (в некотором ортонормальном базисе) меры и тензора деформации Коши – Грина характеризуют относительное удлинение малых векторов, изначально направленных по базисным.

# Смысл компонент тензора и меры деформации Коши – Грина

Пусть $\mathbf{e}_{1,2}$ — единичные векторы некоторых малых векторов, ортогональных в отсчетной конфигурации: $d\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{e}_{1,2} dr_{1,2}$, $d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = 0$.

$$d\mathbf{R}_1 \cdot d\mathbf{R}_2 = d\mathbf{r}_1 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla} \cdot d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{r}_1 \cdot (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla} - \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r}_2$$

$$\frac{dR_1 dR_2}{dr_1 dr_2} \cos\{d\mathbf{R}_1 \hat{,} d\mathbf{R}_2\} = \frac{dR_1 dR_2}{dr_1 dr_2} \sin\gamma_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_2$$

$$\sqrt{G_{11} G_{22}} \sin\gamma_{12} = G_{12} = \sqrt{(1 + 2C_{11})(1 + 2C_{22})} \sin\gamma_{12} = 2C_{12}$$

Недиагональные компоненты меры и тензора деформации Коши – Грина (в некотором ортонормальном базисе) характеризуют изменение $\gamma_{ij}$ угла между малыми векторами, изначально направленных по базисным.

Упражнение: каков смысл компонент тензора и меры деформации Альманси?

# Малые деформации

Предположим, что перемещение $\mathbf{u}$ мало: $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = o(\mathbf{r})$. При этом $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}$. Напишем приближения для мер деформации.

Заметим, что $\overset{\circ}{\nabla} \approx \nabla$ в первом приближении:

$$\overset{\circ}{\nabla} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) \cdot \nabla = \nabla + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} \cdot \nabla = \nabla + o(1)$$

Мера деформации Коши–Грина

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} + 2(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^S + o^2(1) = \mathbf{E} + 2(\nabla\mathbf{u})^S + o^2(1)$$

Мера деформации Фингера совпадает с ней с точностью до $o^2(1)$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + 2(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^S + o^2(1) = \mathbf{E} + 2(\nabla\mathbf{u})^S + o^2(1)$$

Мера деформации Альманси

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} - 2(\nabla\mathbf{u})^S + o^2(1)$$

Тензоры деформации Коши–Грина и Альманси

$$\mathbf{C} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^S + o^2(1) = (\nabla\mathbf{u})^S + o^2(1), \quad \mathbf{A} = (\nabla\mathbf{u})^S + o^2(1)$$

# Малые деформации

Резюме: для малых $\mathbf{u}$ имеем $\overset{\circ}{\nabla} \approx \nabla$.

Тензоры деформации Коши – Грина и Альманси совпадают с точностью до $o^2(1)$

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{A} \approx \nabla \mathbf{u}^S = \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S$ — линейный тензор деформации.

Меры деформации Коши – Грина и Фингера совпадают с точностью до $o^2(1)$

$$\mathbf{G} \approx \mathbf{F} \approx \mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon}$$

Мера деформации Альманси

$$\mathbf{g} \approx \mathbf{E} - 2\boldsymbol{\varepsilon}$$

# Малые деформации. Инварианты мер и тензоров деформации

Если $\mathbf{u} = o(\mathbf{r})$, то $\varepsilon = \varepsilon_i \mathbf{d}_i \mathbf{d}_i = o(1)$.
С точностью до $o^2(1)$

$$\operatorname{tr} \mathbf{G} = \operatorname{tr} \mathbf{F} \approx 3 + 2\operatorname{tr} \varepsilon = 3 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 3 + 2\nabla \cdot \mathbf{u} \approx 2\operatorname{tr} \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} - 3$$

$$I_2(\mathbf{G}) \approx (1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2) + (1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3) + (1 + 2\varepsilon_3)(1 + 2\varepsilon_1)$$
$$\approx 3 + 4\operatorname{tr} \varepsilon = 3 + 4\nabla \cdot \mathbf{u} = 2\operatorname{tr} \mathbf{G} - 3 \approx 4\operatorname{tr} \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} - 9$$

$$\det \mathbf{G} = \det \mathbf{F} \approx \det(\mathbf{E} + 2\varepsilon) = (1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3)$$
$$\approx 1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 1 + 2\operatorname{tr} \varepsilon = 1 + 2\nabla \cdot \mathbf{u} \approx \operatorname{tr} \mathbf{G} - 2$$

$$\det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \sqrt{\det \mathbf{G}} \approx 1 + \operatorname{tr} \varepsilon = 1 + \nabla \cdot \mathbf{u}$$

# Особые виды малой деформации

1. Объемное растяжение – сжатие $\mathbf{R} = A\mathbf{r} = (1+\varepsilon)\mathbf{r}$, $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{r}$, $\varepsilon = \varepsilon\mathbf{E}$, $\varepsilon = o(1)$.

$$\frac{V}{V_0} = \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \approx 1 + 3\varepsilon = 1 + \operatorname{tr}\varepsilon$$

2. Сдвиг: деформация без изменения объема, $V = V_0$

$$1 = \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \approx 1 + \nabla\cdot\mathbf{u} \Longleftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tr}\varepsilon = 0$$

3. Аффинное преобразование

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\lambda} = \text{const} \neq 0, \boldsymbol{\lambda} = o(1)$$

$$\det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \det \mathbf{\Lambda} \approx 1 + \operatorname{tr}\boldsymbol{\lambda}$$

$$\det \mathbf{G} = \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{\Lambda})^2 = \frac{1}{\det \mathbf{g}} \approx 1 + 2\operatorname{tr}\boldsymbol{\lambda}$$

# Разложение малой деформации на объемную и сдвиговую

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\varepsilon\mathbf{E} + \mathsf{dev}\,\varepsilon$$

$$\mathrm{tr}\ \mathsf{dev}\,\varepsilon = 0$$

$\mathsf{dev}\,\varepsilon$ — деформация сдвига. Такое определение годится лишь для линейного случая. Почему?

# Смысл компонент линейного тензора деформаций

Пусть $d\mathbf{r} = \mathbf{e}dr$. Все приближения делаются с точностью до $o^2(1)$.

$$\frac{dR}{dr} - 1 = \sqrt{1 + 2\mathbf{e}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{e}} - 1 \approx \sqrt{1 + 2\mathbf{e}\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{e}} - 1 \approx \mathbf{e}\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{e}$$

Диагональные компоненты линейного тензора деформаций (в ортонормальном базисе) — относительные удлинения малых векторов, направленных по базисным

Пусть $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1 dr_1$, $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2 dr_2$, $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0$.

$dr_1/dR_1 = G_{11}^{-1/2} = (1 + 2\varepsilon_{11})^{-1/2} = 1 - \varepsilon_{11}$

$$\cos\{d\mathbf{R}_1\hat{,}d\mathbf{R}_2\} = \sin\gamma_{12} = \frac{dr_1 dr_2}{dR_1 dR_2} 2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{e}_2$$
$$\approx 2(1-\varepsilon_{11})(1-\varepsilon_{22})\mathbf{e}_1\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{e}_2 \approx 2\mathbf{e}_1\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{e}_2 \approx \gamma_{12}$$

Недиагональные компоненты линейного тензора деформации (в некотором ортонормальном базисе) — это половина изменения $\gamma_{ij}$ угла между малыми векторами, изначально направленных по базисным.

# Условие совместности деформаций (Сен-Венан, Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant)

Не любой симметричный тензор может быть линейным тензором деформаций $\varepsilon$. Ведь нужно, чтобы можно было восстановить $\mathbf{u}$ по $\nabla\mathbf{u}$. То есть чтобы для данного $\varepsilon$ существовало такое поле $\mathbf{u}(\mathbf{R})$, что $\varepsilon = \nabla\mathbf{u}^S$. Таким образом, для данного $\varepsilon$ необходимо найти антисимметричный тензор $\phi$, который может являться $\nabla\mathbf{u}^A$, такой, что $\varepsilon + \phi$ будет представлять собой $\nabla\mathbf{u}$, дающий при интегрировании по контуру разность перемещений вне завимости от контура.
Итак, нам необходимо, чтобы

1. $\varepsilon + \phi$ был чьим-то градиентом $(\nabla\mathbf{u})$
2. $\phi_\times$ был чьим-то ротором $(\nabla \times \mathbf{u})$

# Условие совместности деформаций (Адемар Жан-Клод Барре Сен-Венан)

По теореме Стокса, интегрирование по любому замкнутому контуру от тензора $\mathbf{F}$ дает $\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
$d\mathbf{u} = d\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{u} = d\mathbf{r} \cdot (\varepsilon + \nabla\mathbf{u}^A)$. По теореме Стокса (чтобы $\varepsilon + \phi$ был градиентом некоторого поля $\mathbf{u}$)

$$\nabla \times (\varepsilon + \nabla\mathbf{u}^A) = \mathbf{0}.$$

Однако $\phi$ не произвольный антисимметричный тензор. Его сопутствующий вектор равен $-\nabla \times \mathbf{u}/2$, следовательно,

$$\nabla \times \varepsilon = \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{E})/2 = (\nabla \times \mathbf{u}/2)\nabla.$$

Для того, чтобы существовало $\mathbf{u}$ такое, что $\nabla(\nabla \times \mathbf{u}/2)^\top = \nabla \times \varepsilon$, требуем

$$\nabla \times (\nabla \times \varepsilon)^\top = \mathbf{0}.$$

**Условие совместности деформаций Сен-Венана**

$$\operatorname{Ink} \varepsilon = \nabla \times \varepsilon \times \nabla = \mathbf{0}.$$

# Механика упругих классических сред

# Баланс сил

# Баланс сил: первый закон динамики Эйлера

Будем записывать законы динамики в инерциальной системе отсчета. Рассмотрим материальный объем $V$, ограниченный поверхностью $S$. Рассмотрим случай, когда в системе нет источника импульса.

**Баланс сил для конечного объема**

$$\left(\int\limits_V \rho \mathbf{v}\, dV\right)^{\cdot} = \int\limits_V \rho \mathbf{f}\, dV + \int\limits_S \mathbf{T}_{(\mathbf{n})}\, dS \tag{7}$$

$()^{\cdot}$ — материальная производная по времени (мы следуем за одной и той же частицей), $\mathbf{f}$ — плотность внешней объемной силы, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор материальной точки, $\mathbf{T}_{(\mathbf{n})}$ — сила, действующая на единичную поверхность $S$ с вектором нормали $\mathbf{n}$ (со стороны среды, находящейся снаружи объема $V$), $\rho$ — плотность.

# Тензор напряжений

Если $\mathbf{T}_{(\mathbf{n})}$ — сила, действующая на единичную поверхность с нормалью $\mathbf{n}$ со стороны внешней для выделенного объема части континуума, при некоторых предположениях существует тензор (силовых) напряжений $\boldsymbol{\tau}$ такой, что

**Тензор напряжений Коши, определение**

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Позже мы увидим: $\boldsymbol{\tau}$ производит мощность на $\nabla\mathbf{v}$ (градиент трансляционной скорости в актуальной конфигурации, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$), а точнее, на его симметричной части.

# Существование тензора напряжений

Доказательство Коши основано на балансе сил для малого тетраэдра (А.И. Лурье, “Теория упругости”).

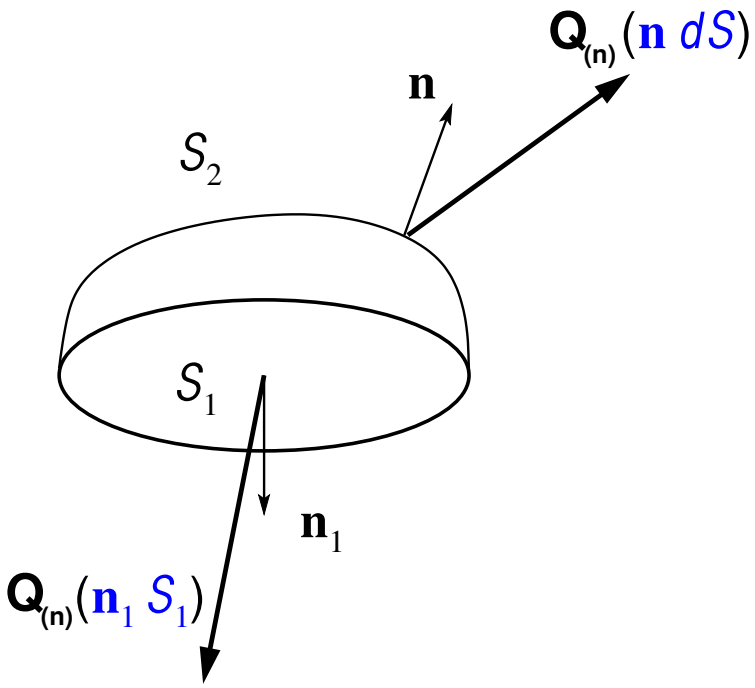
**Доказательство.** Рассмотрим инфинитиземальный объем $V$, ограниченный замкнутой поверхностью $S$, имеющей плоскую часть $S_1$ ($S = S_1 \cup S_2$). Тогда $V = o(S)$.

Будем использовать:

1. баланс сил для $V$ и $S_1$
2. замкнутость поверхности $S$
3. $V = o(S)$ при $V \to 0$.

$S$ замкнута $\Longrightarrow \oint\limits_S \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \Longrightarrow$

$$-\int\limits_{S_2} \mathbf{n} dS = \int\limits_{S_1} \mathbf{n} dS = \mathbf{n}_1 S_1$$




$$\mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{n} dS) = \mathbf{T}_{(\mathbf{n})} dS$$

Аргументы функции $\mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{n} dS)$.

# Существование тензора напряжений

Баланс сил для поверхности $S_1 \Longrightarrow$

$$\mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(-\mathbf{n}_1 S_1) = -\mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{n}_1 S_1)$$

Баланс сил для объема $V$ (если нет сингулярностей в $\mathbf{f}, \dot{\mathbf{v}}$):

$$\oint\limits_S \mathbf{Q}_{(\mathbf{n})} = \int\limits_V \rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f}) dV = O(V) = o(S)$$

С точностью до малых следующего порядка

$$\int\limits_{S_2} \mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{n} dS) = -\int\limits_{S_1} \mathbf{Q}_{(\mathbf{n})} = -\mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{n}_1 S_1)$$

$$= \mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(-\mathbf{n}_1 S_1) = \mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(\int\limits_{S_2} \mathbf{n} dS)$$

# Существование тензора напряжений

Итак, имеем для любой поверхности $S_2$ (такой, что $S_2 >> V$ при $V \to 0$)

$$\mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(\int\limits_{S_2} \mathbf{n} dS) = \int\limits_{S_2} \mathbf{Q}_{(\mathbf{n})}(\mathbf{n} dS)$$

Тогда $\mathbf{Q}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{T}_{(\mathbf{n})} dS$ — линейная функция $\mathbf{n} dS$, и, следовательно, погонная сила $\mathbf{T}_{(\mathbf{n})}$ — линейная функция $\mathbf{n} \Longrightarrow$ существует тензор 2-го ранга $\boldsymbol{\tau}$ такой, что

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

$\boldsymbol{\tau}$ называется *тензором напряжений*.

# Теорема о дивергенции (теорема Остроградского–Гаусса) для трехмерного пространства

Для компактного объема $V$, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью $S$ с нормалью $\mathbf{n}$, зависящей от точки поверхности, если $\mathbf{G}$ — непрерывно дифференцируемое тензорное поле, определенное в окрестности $V$, справедливо:

$$\int\limits_V \nabla \cdot \mathbf{G}\, dV = \oint\limits_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}\, dS$$

Лагранж (1762), Гаусс (1813), Остроградский (1826, первое доказательство общей теоремы), Грин (1828)...

# Локальная форма закона баланса сил

Первый закон динамики Эйлера с учетом $\mathbf{T}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ и теоремы о дивергенции принимает вид

$$\int\limits_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) dV = \mathbf{0}.$$

Так как $V$ произволен, равенство выполняется в каждой точке.

**Баланс сил, локальная форма**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}}.$$

NB: Все это и последующее верно лишь при достаточной гладкости функций

NB: Оператор-градиент в отсчетной конфигурации (например, начальной) $\overset{\circ}{\nabla} \neq \nabla$ (оператор-градиент в актуальной конфигурации).

# Баланс сил. Резюме

1. Мы формулируем баланс сил для объема внутри континуума, принимая гипотезу близкодействия. Разделяем силы на объемные (внешние для всего континуума) и поверхностные (действующие со стороны оставшейся части континуума).
2. Мы доказываем существование тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\tau}$ при отсутствии сингулярностей во внешних силах и ускорениях
3. Используя теорему Остроградского – Гаусса, переходим от поверхностных интегралов к объемным, от поверхностных сил к тензору напряжений и получаем локальную форму баланса сил:

**Баланс сил в классической среде, локальная форма**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}}.$$

4. Упругость среды не использовалась. Закон верен для любой классической среды. И не только!

# Баланс кинетического момента

# Комментарии к закону баланса моментов

Чтобы записать закон баланса моментов для тела, необходимо выбрать две точки: опорную точку (неподвижная точка в инерциальной системе отсчета) и центр приведения, зафиксированный относительно тела. Для материальной точки единственный вариант для центра приведения — сама материальная точка.

Кинетический момент состоит из момента количества движения, зависящего от выбора опорной точки, и собственного кинетического момента, не зависящего от нее.
**Для материальной точки собственный кинетический момент равен нулю.**

Полный момент состоит из момента сил и собственного момента. Момент сил зависит от выбора опорной точки, а собственный момент — нет.
Собственный момент поворачивает тело вокруг центра приведения.
**Для материальной точки собственный момент равен нулю.**

# Баланс моментов: второй закон динамики Эйлера

Возьмем за точку опоры начало инерциальной системы отсчета.

Плотность момента количества движения равна $\rho\mathbf{R}\times\mathbf{v}$, $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{R}}$.

Плотность внешнего (для всего континуума) момента, действующего на материальную точку, равна моменту объемных сил $\rho\mathbf{R}\times\mathbf{f}$.

Полный момент, действующий на единичную поверхность (часть поверхности, ограничивающей объем $V$) со стороны внешней части континуума, равен моменту сил $\mathbf{R}\times\mathbf{T}_{(\mathbf{n})}$.
Рассматриваем случай, когда нет источника кинетического момента.

**Баланс кинетического момента для объема $V$**

$$\left(\int\limits_V \mathbf{R}\times\rho\mathbf{v}dV\right)^{\cdot}=\int\limits_V \rho(\mathbf{R}\times\mathbf{f})dV+\int\limits_S(\mathbf{R}\times\mathbf{T}_{(\mathbf{n})})dS$$

# Классическая среда: баланс моментов = симметрия тензора напряжений

Используя теорему Остроградского – Гаусса и первый закон динамики Эйлера (баланс сил), получим, что второй закон динамики Эйлера (баланс моментов) сводится к

**симметрии тензора напряжений**

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\top}.$$

# Классическая среда (важно ли, что упругая?)

Используя $\mathbf{T}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \Longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{T}_{(\mathbf{n})} = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}$ и теорему Остроградского – Гаусса, получаем

$$\int\limits_V (-\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) + \rho \mathbf{R} \times \mathbf{f} - \rho \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}}) dV = \mathbf{0}.$$

Покажем: $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} - \boldsymbol{\tau}_\times$.

Доказательство ($\partial_k$ — производная по актуальной координате):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R}) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} + \mathbf{i}_k \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \partial_k \mathbf{R}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} + \mathbf{i}_k \cdot \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{i}_k \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} + \tau_{kn} \mathbf{i}_n \times \mathbf{i}_k = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{R} - \boldsymbol{\tau}_\times\end{aligned}$$

Убираем интеграл по $V$ в силу произвольности выбранного объема:

$$\mathbf{R} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) + \boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}.$$

В силу баланса количества движения

**тензор напряжений симметричен:**

$$\boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}.$$

# Баланс моментов. Резюме

1. Мы формулируем баланс моментов для объема $V$ внутри континуума, разделяя моменты на внешние для всего континуума (объемные) и поверхностные (действующие со стороны оставшейся части континуума)
2. Все эти моменты — это моменты сил. Собственные моменты для материальных точек равны нулю.
3. Кинетический момент для материальных точек — это только момент количества движения. Собственный кинетический момент материальной точки равен нулю.
4. Используя теорему Гаусса и связь поверхностных сил с тензором напряжений, мы переходим от поверхностных интегралов к объемным и поверхностных моментов к тензору напряжений. Используя произвольность выбора объема, переходим к локальной форме. Мы получаем

**закон баланса моментов в (любой) классической среде**

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\top}.$$

# Баланс энергии

# Баланс энергии

Массовая плотность кинетической энергии в классической среде $K = \mathbf{v}^2/2$ (так как материальная точка не обладает тензором инерции и угловой скоростью). Плотность энергии деформации $U$ зависит от деформации среды и от ее характеристик.
Будем рассматривать процессы в упругой среде, не связанные с теплопереносом (адиабатические или изотермические, без источников тепла).

**Первый закон термодинамики для упругого тела**

$$\int\limits_V \rho(\dot{K} + \dot{U})dV = \int\limits_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dV + \int\limits_S \mathbf{T}_{(\mathbf{n})}\cdot\mathbf{v}dS$$

Мы хотим исключить внешние объемные силы из этого закона, используя законы динамики. Тогда останутся лишь напряжения, деформация и упругая энергия $U$.

# Баланс энергии. Локальная форма

*Упражнение.* Доказать, что $\rho\dot{K} = (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f})\cdot\mathbf{v}$.

Доказательство.

$\rho\dot{K} = \rho(\mathbf{v}^2/2)^{\cdot} = \rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f})\cdot\mathbf{v}$ по закону баланса сил.

Учтем также $\mathbf{T}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}$ и применим теорему Остроградского – Гаусса:

$$\int\limits_V \rho\dot{U}dV + \int\limits_V (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f})\cdot\mathbf{v}dV = \int\limits_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dV + \int\limits_V \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v})dV$$

Преобразуем ($\partial_k$ — производная по актуальной координате):

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{v} + \mathbf{i}_k\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_k\mathbf{v} = (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{v} + (\boldsymbol{\tau}^\top\cdot\mathbf{i}_k)\cdot\partial_k\mathbf{v} =$$
$$(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}^\top\cdot\cdot\,\mathbf{i}_k\partial_k\mathbf{v} = (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,\nabla\mathbf{v} = (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,\nabla\mathbf{v}^S$$

Здесь учли закон баланса моментов ($\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\top$). Имеем

**первый закон термодинамики, локальная форма**

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\,\nabla\mathbf{v}^S.$$

# Баланс энергии. Как найти $\boldsymbol{\tau}$ через деформации?

Осторожно: не на все вопросы ответ “да”!

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S \overset{?}{=} \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{u}^S)^{\cdot}.$$

Можно ли рассмотреть $U = U(\nabla\mathbf{u}^S)$ и заключить, что $\boldsymbol{\tau} = \rho\dfrac{\partial U}{\partial\nabla\mathbf{u}^S}$?

А может, $U = U(\mathbf{G})$, тогда

$$\dot{U}(\mathbf{G}) = \left(\frac{dU}{d\mathbf{G}}\right)^\top\cdot\cdot\dot{\mathbf{G}} = \left(\frac{dU}{d\mathbf{G}}\right)^\top\cdot\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^\top) \overset{\mathbf{G}=\mathbf{G}^\top}{=}$$

$$= 2\frac{dU}{d\mathbf{G}}\cdot\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top) = 2\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\frac{dU}{d\mathbf{G}}\right)\cdot\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} =$$

$$= 2\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\frac{dU}{d\mathbf{G}}\right)\cdot\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{v}) = 2(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\frac{dU}{d\mathbf{G}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})\cdot\cdot(\nabla\mathbf{v})$$

$$\overset{\mathbf{G}=\mathbf{G}^\top}{=} 2(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\frac{dU}{d\mathbf{G}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})\cdot\cdot(\nabla\mathbf{v})^S$$

Получаем, если $U = U(\mathbf{G})$, то $\boldsymbol{\tau} = 2\rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\dfrac{\partial U}{\partial\mathbf{G}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$?

# Баланс энергии. Как найти $\boldsymbol{\tau}$ через деформации?

Предположим, что $U = U(\mathbf{F})$ — функция меры Фингера $\mathbf{F} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$. Тогда

$$\rho\dot{U} = \rho\left(\frac{dU}{d\mathbf{F}}\right)^\top \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{F}} \overset{\mathbf{F}=\mathbf{F}^\top}{=} \rho\frac{dU}{d\mathbf{F}} \cdot\cdot\, (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}) \overset{\mathbf{F}=\mathbf{F}^\top}{=}$$

$$= 2\rho\frac{dU}{d\mathbf{F}} \cdot\cdot\, (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) = 2\rho\frac{dU}{d\mathbf{F}} \cdot\cdot\, ((\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \nabla\mathbf{v})^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) =$$

$$= 2\rho\frac{dU}{d\mathbf{F}} \cdot\cdot\, (\nabla\mathbf{v}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) = 2\rho\frac{dU}{d\mathbf{F}} \cdot\cdot\, (\nabla\mathbf{v}^\top \cdot \mathbf{F}) =$$

$$= 2\rho\left(\mathbf{F} \cdot \frac{dU}{d\mathbf{F}}\right) \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{v}^\top = 2\rho\left(\mathbf{F} \cdot \frac{dU}{d\mathbf{F}}\right)^S \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{v}^S - 2\rho\left(\mathbf{F} \cdot \frac{dU}{d\mathbf{F}}\right)^A \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{v}^A$$

Получаем, если $U = U(\mathbf{F})$, то $\boldsymbol{\tau} = 2\rho\left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}}\right)^S = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{F})$,

$$\left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}}\right)^A = \mathbf{0}?$$

# Баланс энергии. Как найти $\boldsymbol{\tau}$ через деформации?

Хотим задать $U$ как функцию деформаций, чтобы получить определяющие уравнения для $\boldsymbol{\tau}$. Но какие тензоры деформаций мы можем брать в качестве аргументов $U$?
Правомерно ли требовать, чтобы $U$ была функцией каких-то деформаций?

Ответ: в некоторых случаях для материалов, где все процессы обратимы, $U$ не является функцией деформаций. Такие материалы называются гипоупругими (К. Трусделл, C. Truesdell, 1953, 1963).

Мы будем рассматривать гиперупругие материалы, где внутренняя энергия — функция некоторых тензоров деформации. Каких?

Необходимо, чтобы жесткие движения не меняли внутреннюю энергию материала, или (далее покажем, что это требование равносильно), чтобы тензор напряжений поворачивался жестким поворотом, если образец совершает жесткое движение (**принцип материальной объективности**).

# Об определении упругости и законах термодинамики

С учетом тепловых процессов I закон термодинамики для классической среды:

$$\int\limits_V \rho(U+K)^{\cdot} dV = \int\limits_V (\rho \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + b)dV + \int\limits_S (\mathbf{T_n}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{h})dS \Longrightarrow$$

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S - \nabla\cdot\mathbf{h} + b$$

$\mathbf{h}$ — вектор теплового потока (реакция на градиент температуры $T$ и на напряжения в среде), $b$ — интенсивность источников тепла

II закон термодинамики (вводится понятие энтропии $s$):

$$\dot{s} \geqslant \int\limits_V \frac{b}{T}dV - \int\limits_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{h}}{T}dS = \int\limits_V \left(\frac{b-\nabla\cdot\mathbf{h}}{T} + \frac{1}{T^2}\mathbf{h}\cdot\nabla T\right)dV$$

Если $U = U(\mathbf{G})$, то $\rho\dot{U} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{G}, \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S$, $\nabla\cdot\mathbf{h} = b$, и при $\mathbf{h}\cdot\nabla T = 0$ (адиабатический или изотермический процесс) имеем $\dot{s} = 0$ (обратимость). В гиперупругих материалах адиабатические и изотермические процессы обратимы.

# Материальная объективность (независимость от системы отсчета)

# Принцип материальной объективности (Noll, 1958)

Если материал совершает жесткое движение, напряжения в нем поворачиваются жестким поворотом и не зависят от жесткого перемещения.
Не имеет значения, в инерциальной системе отсчета (ИСО) происходит жесткое движение, определяет ли оно собой некоторую ИСО или нет. Другими словами, если наблюдатель перемещается или поворачивается, материал не изменит свое физическое поведение. Математически: если в материале существуют напряжения $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{R})$, и он совершает жесткое движение $\mathbf{R}' = \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_c) + \mathbf{R}_c + \mathbf{R}_0(t)$, где $\mathbf{R}'$ — радиус-вектор, тензор поворота $\mathbf{Q}(t)$ и векторы $\mathbf{R}_0(t)$, $\mathbf{R}_c$ не зависят от $\mathbf{R}$, тогда напряжения в этом жестком движении будут равняться $\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^\top$.

NB: Если напряжения в изотропной среде зависят только от материально объективных тензоров деформации, принцип выполняется.

# Материальная объективность (независимость от системы отсчета)

Упражнение. Докажите, что любой тензор второго ранга, являющийся функцией материально объективного тензора второго ранга, материально объективен.

Правда ли, что любая функция любого материально объективного аргумента материально объективна?

NB: $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$ не материально объективен, но изменяется при жестком движении. Жесткое движение с тензором поворота $\mathbf{Q}$ дает $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}' = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}^\top$. Отсюда следует, что определяющее уравнение $\boldsymbol{\tau} = {}^4\mathbf{X}\cdot\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$ не может быть верным, даже если $\mathbf{X}$ изотропен или материально объективен.

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}' = \mathbf{U}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{Q}^\top = \mathbf{U}'\cdot\mathbf{H}' \Longrightarrow \mathbf{H}' = \mathbf{H}\cdot\mathbf{Q}^\top$$

Видим, что ортогональный тензор $\mathbf{H}$ в полярном разложении меняется при жестком движении. От него не может зависеть энергия деформации $U$.

# Материальная объективность (независимость от системы отсчета)

Мера деформации Фингера $\mathbf{F} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$ материально объективна, и любая функция $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{F})$ тоже (если она не является функцией каких-либо еще тензоров и векторов, то есть изотропна).

$\mathbf{F}' = \mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^\top$.

# Материальная объективность и линейность

Если мы имеем нелинейные уравнения, при определенных условиях мы можем их линеаризовать вблизи некоторого состояния. Вопрос: изменится ли как-то требование материальной объективности? Разобрать на примере меры Фингера.

# Материальная объективность и линейность

Если мы имеем нелинейные уравнения, при определенных условиях мы можем их линеаризовать вблизи некоторого состояния.
Вопрос: изменится ли как-то требование материальной объективности? Разобрать на примере меры Фингера.
Ответ: в **линейном** случае мы должны потребовать материальную объективность для **малых жестких** поворотов и перемещений.
Действительно,

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{F}') = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^\top),$$

и если мы линеаризуем $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{F})$, то придется отбросить квадратичные члены в $\mathbf{F} = \mathbf{E} + 2\nabla\mathbf{u}^S + o^2(1)$.
При линеаризации $\boldsymbol{\tau}'$ тогда придется отбросить и квадратичные члены в $\mathbf{Q} = \mathbf{E} + \mathbf{q} \times \mathbf{E} + o^2(1)$, иначе в $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^\top$ будут учтены одни квадратичные члены и отброшены другие.

Вопрос: требование материальной объективности для больших и малых перемещений — одно и то же или нет? Показать.

# Материальная объективность и неизменность при жестких перемещениях малых тензоров

Лемма.
Пусть $\boldsymbol{\lambda} = O(\mathbf{u}) = o(1)$. Тогда, если $\boldsymbol{\lambda}$ не изменяется при малых жестких движениях, он материально объективен в линейном приближении, и наоборот.
Доказательство.

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{Q}^{\top} = (\mathbf{E} + \mathbf{q} \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{q} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\lambda} + o^2(1).$$

**Важно! Материальная объективность = неизменность при жестких движениях лишь для малых тензоров.**

# Материальная объективность и неизменность при жестких движениях

**Нелинейные** деформации

1. $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$, $\nabla\mathbf{r}$, $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}$, $\nabla\mathbf{u}$, $\nabla\mathbf{u}^s$, $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S$, $\nabla\mathbf{u}^A$, $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^A$, ортогональный тензор $\mathbf{H}$ в полярном разложении не являются материально объективными и меняются при жестких движениях
2. мера деформации Коши – Грина $\mathbf{G}$, тензор деформации Коши – Грина $\mathbf{C}$, тензор $\mathbf{U}$ не меняются при жестких движениях
3. мера деформации Фингера $\mathbf{F}$, тензор $\mathbf{V}$, мера деформации Альманси $\mathbf{g}$, тензор деформации Альманси $\mathbf{A}$ материально объективны

**Линейные** деформации (доказать!)

1. $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$, $\nabla\mathbf{r}$, $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} \approx \nabla\mathbf{u}$, $\nabla\mathbf{u}^A \approx \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^A$ не являются материально объективными в линейном приближении и меняются при малых жестких движениях
2. тензор линейных деформаций $\nabla\mathbf{u}^S \approx \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S$ материально объективен в линейном приближении и не меняется при малых жестких движениях (является линейным приближением $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$)

# Энергия деформации. Определяющие уравнения

Можно задавать энергию деформации $U$ как функцию от

1. неизменных при жестких движениях тензоров деформации
2. материально объективных тензоров деформации в изотропном случае

Используя теорему о дифференцировании сложной функции, записать $\rho\dot{U}$ через производные $U$ по деформациям и производные деформации по времени и привести это к виду $(1)\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S + (2)$. Тогда (2) должно равняться 0, а (1) будет тензором напряжений $\boldsymbol{\tau}$. Примеры (проверить, что $\boldsymbol{\tau}$ материально объективен):

**$U = U(\mathbf{G})$**

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$

**$U = U(\mathbf{F})$**

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho\left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}}\right)^S, \quad \left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}}\right)^A = \mathbf{0}$$

# Энергия деформации. Определяющие уравнения

Упражнение: написать определяющие уравнения, используя в качестве аргументов упругой энергии $U$ меру деформации Альманси $\mathbf{g}$, тензор деформации Коши – Грина $\mathbf{C}$, тензор деформации Альманси $\mathbf{A}$.

Изотропный материал: $U$ — функция инвариантов мер деформации

Линейный материал: $U$ — функция $\nabla\mathbf{u}^S$ (получим также линеаризацией вблизи натурального состояния)

Линейное приближение вблизи предварительно напряженного состояния и вблизи натуральной конфигурации отличаются!

# Примеры нелинейных определяющих уравнений

Потенциал Муни (несжимаемое упругое тело)

$$U = C_1(\mathrm{tr}\,\mathbf{G} - 3) + C_2(I_2(\mathbf{G}) - 3), \qquad C_{1,2} \geqslant 0$$

$$\text{Связь } \det \mathbf{G} \equiv 1$$

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{E} + 2\rho_0\,\mathrm{dev}((C_1 + C_2\mathrm{tr}\,\mathbf{G})\mathbf{F}) - C_2\mathbf{F}^2)$$

Потенциал Джона (полулинейный материал)

$$U = \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\,(\mathbf{U} - \mathbf{E}))^2 + \mu\mathrm{tr}\,((\mathbf{U} - \mathbf{E})^2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho_0}{\det \mathbf{V}}(\lambda(\mathrm{tr}\,\mathbf{V} - 3)\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{V} - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{V}.$$

# Линейные определяющие уравнения

Существует два варианта вывода линейных определяющих уравнений:

1. Линеаризовать закон баланса энергии. Предположить, что $U$ — функция линейного тензора деформаций, который материально объективен в линейном приближении и является линейным приближением тензоров Коши – Грина и Альманси. Использовать правило дифференцирования сложной функции и отождествить в силу линеаризованного баланса энергии $\tau$ и $\rho\frac{\partial U}{\partial \nabla \mathbf{u}^S}$. Годится только для линеаризации вблизи натурального состояния — увидим позже.
2. Линеаризовать нелинейные определяющие уравнения (любые из них).

# Линейные определяющие уравнения

1. Линеаризовать закон баланса энергии. Внимание: две ошибки!

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^s = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{u}^s)^{\cdot} \approx [\boldsymbol{\tau}]_{\text{linear}}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{u}^s)^{\cdot}$$

В линейном приближении $\nabla\mathbf{u}^S$ не меняется при жестких движениях $\Longrightarrow$ имеем право задавать $U = U(\nabla\mathbf{u}^S)$ $\quad\Longrightarrow$ ($\nabla\mathbf{u}^S$ симметричен)

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial\nabla\mathbf{u}^S}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{u}^S)^{\cdot} \quad\Longrightarrow$$

$$[\boldsymbol{\tau}]_{\text{linear}} = \rho\frac{\partial U}{\partial\nabla\mathbf{u}^S}$$

$\boldsymbol{\tau}$ линейно по $\nabla\mathbf{u}^S \Longrightarrow U$ — квадратичная функция $\nabla\mathbf{u}^S$.

**Линейная теория — неверно**

$$U = \boldsymbol{\tau}_0\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S + \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^S\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{X}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + {}^4\mathbf{X}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^S$$

$X_{mnkl} = X_{nmkl} = X_{klmn} = \ldots$ из симметрии $\nabla\mathbf{u}^S$.

# Линейные определяющие уравнения

Какие ошибки допущены на предыдущем слайде?
Для линейного материала нужно учитывать квадратичные члены в энергии и в балансе энергии $\rho\dot{U} = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \mathbf{v}^S$.

1. $(\nabla\mathbf{u})^{\cdot} \neq \nabla\dot{\mathbf{u}}$, так как $\mathbf{R}$ и $\nabla = \frac{d}{d\mathbf{R}}$ зависят от времени.

   Их разницей в законе баланса энергии можно пренебречь лишь при малых $\boldsymbol{\tau}$. Иначе она добавит квадратичный член при умножении на конечное начальное напряжение $\boldsymbol{\tau}_0$

2. Нельзя задавать $U = U(\nabla\mathbf{u}^S)$, если $\mathbf{u}$ мало, а $\boldsymbol{\tau}$ — нет.

   Тензор линейных деформаций $\nabla\mathbf{u}^S$ является неизменным при малых жестких движениях материала, если пренебречь $o^2(1)$. А энергия должна быть неизменной с учетом квадратичных членов. Линейный по $\nabla\mathbf{u}^S$ член в энергии нарушит это условие. Он возникает из-за начальных напряжений $\boldsymbol{\tau}_0$.
   Из-за этой ошибки получается, что не $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_1$ материально объективен, а лишь его малая часть $\boldsymbol{\tau}_1$.

# Линейные определяющие уравнения. Разбор ошибок в рассуждении

1) Действительно: $\boldsymbol{\tau}$ линейно $\Longrightarrow$ $U$ квадратична. В балансе энергии $\rho\dot{U} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\dot{\mathbf{u}}^S$ нужно удерживать квадратичные члены.

$$(\nabla\mathbf{u})^{\cdot} = ((\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^{\cdot} = ((\mathbf{E}+\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^{\cdot}$$

$$= ((\mathbf{E}+\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\dot{\mathbf{u}})+((\mathbf{E}+\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^{-1})^{\cdot}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} = \overset{\circ}{\nabla}\dot{\mathbf{u}}-\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\dot{\mathbf{u}}-\overset{\circ}{\nabla}\dot{\mathbf{u}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}+o^3(1)$$

$$= \nabla\dot{\mathbf{u}} - 2\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\dot{\mathbf{u}} - \overset{\circ}{\nabla}\dot{\mathbf{u}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} + o^3(1)$$

$$\nabla\mathbf{v}^S = (\nabla\mathbf{u}^S)^{\cdot} + 3(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v})^S + o^3(1)$$

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S = \boldsymbol{\tau}_0\cdot\cdot(\nabla\mathbf{u}^S)^{\cdot} + 3\boldsymbol{\tau}_0\cdot\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v})^S + \boldsymbol{\tau}_1\cdot\cdot(\nabla\mathbf{u}^S)^{\cdot} + o^3(1)$$

$$\neq \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{u}^S)^{\cdot} + o^3(1)$$

# Линейные определяющие уравнения

1. Линеаризовать нелинейные определяющие уравнения (любые из них).

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$

$[\cdot]_n$ — член в разложении порядка $O(u^n)$.

$$[\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}]_1 = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}, \quad \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = 1 + \nabla\cdot\mathbf{u} + o^2(1), \quad [\rho]_1 = -[\rho]_0 \nabla\cdot\mathbf{u}.$$

$$[\boldsymbol{\tau}]_0 + [\boldsymbol{\tau}]_1 = 2[\rho]_0 \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}}\right]_0 + 2[\rho]_1 \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}}\right]_0 + 2[\rho]_0 \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^\top \cdot \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}}\right]_0$$
$$+ 2[\rho]_0 \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}}\right]_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} + 4[\rho]_0 \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S \cdot\cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{G}^2}\right]_0$$
$$= 2[\rho]_0 (1 - \overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{u}) \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}}\right]_0 + 4[\rho]_0 \left(\left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}}\right]_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\right)^S + 4[\rho]_0 \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S \cdot\cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{G}^2}\right]_0$$

# Линейные определяющие уравнения

При $\mathbf{u} = 0$ тензор напряжений равен $\boldsymbol{\tau}_0 = [\boldsymbol{\tau}]_0$, плотность $\rho_0 = [\rho]_0$,

$$\boldsymbol{\tau}_0 = 2\rho_0 \left[\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}}\right]_0$$

Линейная часть приращения $\boldsymbol{\tau}$ при малых деформациях:

$$[\boldsymbol{\tau}]_1 = -\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{u}\, \boldsymbol{\tau}_0 + 2(\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^S + 4\rho_0 \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S \cdot\cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{G}^2}\right]_0$$

$$[\boldsymbol{\tau}]_1 = -\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{u}\, \boldsymbol{\tau}_0 + 2(\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S)^S + 2(\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^A)^S + 4\rho_0 \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S \cdot\cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{G}^2}\right]_0$$

$$= \Big( -\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{E} + 2\mathbf{e}_m \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{e}_m + 4\rho_0 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{G}^2}\right]_0 \Big) \cdot\cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S + 2(\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^A)^S$$

Последнее слагаемое зависит от $\nabla\mathbf{u}^A$, не являющегося материально объективным даже в линейном смысле. Оно не равно нулю, если есть начальные касательные напряжения $\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}_0$.

Здесь $\overset{\circ}{\nabla}$ можно заменить на $\nabla$ (даст отличие $o^2(1)$).

# Линейные определяющие уравнения. Давление в отсчетной конфигурации.

Если в отсчетной конфигурации есть лишь давление: $\boldsymbol{\tau}_0 = -p_0\mathbf{E}$,

$$[\boldsymbol{\tau}]_1 = \overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{u}\, p_0\mathbf{E} - 2p_0\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S + 4\rho_0\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S \cdot\cdot \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{G}^2}\right]_0$$

$$= (4\rho_0\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{G}^2}\right]_0 + p_0\mathbf{E}\mathbf{E} - 2p_0\mathbf{e}_m\mathbf{E}\mathbf{e}_m)\cdot\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S$$

$$= (4\rho_0\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{G}^2}\right]_0 + p_0\mathbf{E}\mathbf{E} - p_0(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)^S(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)^S)\cdot\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S$$

Давление изменяет эффективные константы в материале.

**Внимание!**

В уравнениях движения эффективные константы не такие, как в выражении для тензора напряжений, за счет отличия $\nabla$ от $\overset{\circ}{\nabla}$.

# Линейные уравнения движения.

$$\nabla = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla} = (\mathbf{E}+\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^{-1}\cdot\overset{\circ}{\nabla} = \overset{\circ}{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla} + o^2(1),$$ поэтому

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} = \overset{\circ}{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}_0 - (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla})\cdot\boldsymbol{\tau}_0 + \overset{\circ}{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\tau}]_1 + o^2(1)$$

$$[\boldsymbol{\tau}]_1 = -\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{u}\,\boldsymbol{\tau}_0 + 2(\boldsymbol{\tau}_0\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u})^S + 4\rho_0\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S\cdot\cdot\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\mathbf{G}^2}\right]_0$$

Давление в отсчетной конфигурации:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} = -\overset{\circ}{\nabla}p_0 + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla}p_0 + \overset{\circ}{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\tau}]_1 + o^2(1)$$

$$[\boldsymbol{\tau}]_1 = \overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{u}\,p_0\mathbf{E} - 2p_0\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S + 4\rho_0\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S\cdot\cdot\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\mathbf{G}^2}\right]_0$$

# Линейные определяющие уравнения

Как быть с материальной объективностью в случае, когда есть начальные касательные напряжения?

# Линейные определяющие уравнения

Как быть с материальной объективностью в случае, когда есть начальные касательные напряжения?
Нужно потребовать материальную объективность $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + [\boldsymbol{\tau}]_1$ при малых движениях, а не $[\boldsymbol{\tau}]_1$.
При $\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{0}$ (или при однородном начальном давлении) неизменность $U$ при малых жестких движениях и материальная объективность $\boldsymbol{\tau}$ в линейном смысле совпадают. А при неоднородном начальном поле напряжений или при наличии касательных напряжений — нет.
Внимание: поэтому нельзя рассчитывать нелинейную задачу при помощи численных модулей, пользуясь линейными уравнениями на каждом малом шаге, лишь пересчитывая вторые производные $U$ и перемещения. Требуется учитывать остальные члены в уравнении.

# Линейная теория вблизи натурального состояния

При отсутствии начальных напряжений

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S$$

$X_{mnkl} = X_{nmkl} = X_{klmn} = \ldots$ из симметрии $\nabla \mathbf{u}^S$. Энергия линейной среды вблизи натурального состояния

$$\rho_0 U = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^S \cdot\cdot {}^4\mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S.$$

Такая энергия дает $\rho \dot{U} = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^S$ (выполняется баланс энергии). Уравнения в перемещениях:

$$\nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

## В изотропном случае

$$\mathbf{X} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)^S (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)^S,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S.$$

$\lambda, \mu$ — параметры Ламе.

# Простые математические факты

Будем искать гармоническое решение при отсутствии внешних сил: $\rho\mathbf{f} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}.$$

Если $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, то

$$\dot{\mathbf{f}} = i\omega\mathbf{f},$$

$$\nabla\mathbf{f} = i\mathbf{k}\mathbf{f}.$$

Действительно, если $\mathbf{r} = q^s\mathbf{e}_s$, и $\mathbf{k} = k^n\mathbf{e}_n$, то

$$\nabla\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial q_s}\mathbf{e}_s\mathbf{f}_0 e^{i(\omega t + k^n q_n)} = ik^s\mathbf{e}_s\mathbf{f}_0 e^{i(\omega t + k^s q_s)} = i\mathbf{k}\mathbf{f}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

# Свободные волны в безграничной трехмерной линейной упругой классической среде

При отсутствии внешних сил

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{X} \cdot\cdot (\nabla \mathbf{u})^S, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

Уравнения в перемещениях:

$$\nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S) = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

Ищем решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, получаем

$$i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{X} \cdot\cdot i(\mathbf{k}\mathbf{u}_0)^S) = -\omega^2 \rho \mathbf{u}_0.$$

$$(\rho\omega^2 \mathbf{E} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}.$$

Обозначим $k = |\mathbf{k}|$, $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$.

$$(\rho\omega^2 \mathbf{E} - k^2 \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}.$$

# Свободные волны в безграничной трехмерной линейной упругой классической среде

Так как $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ симметричный, можно его представить в виде $X_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, собственные числа и векторы в анизотропном случае зависят от направления распространения волны $\hat{\mathbf{k}}$ и анизотропии тензора $\mathbf{X}$. Если энергия $\rho_0 U = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^S \cdot\cdot \mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S$ положительно определена, получаем $X_i > 0$. (Т.к. если для любого $\mathbf{\Lambda}$ имеем $\mathbf{\Lambda} \cdot\cdot \mathbf{X} \cdot\cdot \mathbf{\Lambda} > 0$, можем выбрать $\mathbf{\Lambda} = \hat{\mathbf{k}} \mathbf{e}_i$, и получить $\mathbf{e}_i \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{e}_i = X_i > 0$). Тогда получаем три возможных решения: $\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_i$,

$$\rho \omega^2 = k^2 X_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega = \sqrt{X_i / \rho}\, k.$$

Это прямые линии.

Среда недисперсивна: фазовая скорость $\frac{\omega}{k}$ равна групповой $\frac{d\omega}{dk}$.

В этом случае ($U > 0$) малые колебания остаются малыми. Среда выдерживает малые гармонические возмущения.

# Свободные волны в изотропной безграничной трехмерной линейной упругой классической среде

В изотропном случае собственные векторы — это $\hat{\mathbf{k}}$ (продольная волна, волна растяжения – сжатия, скорость $C_l$) и любой вектор, ортогональный $\hat{\mathbf{k}}$ (поперечная волна, волна сдвига, скорость $C_s$), два решения, одно кратное, соответствующие скорости равны

$$C_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \qquad C_s = \sqrt{\mu/\rho} < C_l.$$

Дисперсионные соотношения для классической безграничной упругой среды — всегда прямые линии (недисперсивная среда)

# Резюме

1. Мы ввели тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ такой, что погонная сила, действующая на единичную площадку с нормалью $\mathbf{n}$ со стороны одной части континуума на другую, равна $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$
2. Записали закон баланса сил для объема внутри континуума и перешли к локальной форме, используя тензор напряжений и теорему Остроградского–Гаусса
$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$
3. Записали закон баланса моментов для объема внутри континуума и перешли к локальной форме, используя тензор напряжений, баланс сил и теорему Остроградского–Гаусса
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\top$$
4. Записали закон баланса энергии для объема внутри континуума и перешли к локальной форме, используя тензор напряжений, баланс сил и моментов и теорему Остроградского–Гаусса для адиабатических или изотермических процессов и упругого материала $U = U(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})$

# Резюме

- $U$ не должна меняться при жестких движениях (принцип материальной объективности $\Longrightarrow$ $U$ не зависит от $\mathbf{H}$, где $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{H}$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^\top$, $\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^\top = \mathbf{E}$. В качестве аргументов могут выступать $\mathbf{G}, \mathbf{C}$..., в изотропном случае от $\mathbf{F}, \mathbf{g}$, $\boldsymbol{\tau}$ поворачивается жестким поворотом при жестких движениях материала
- Из баланса энергии получаем разные определяющие уравнения
- Мы линеаризовали уравнения и рассмотрели свободные колебания
- Для **малых** тензоров: неизменность при жестких перемещениях = материальная объективность в линейном приближении
- Безграничная среда недисперсивна ($\omega = ck$, две различных скорости $c$ в изотропном случае, три в анизотропном)

# Второй семестр

# Тензор формоизменения (В.А. Пальмов)

Тензор формоизменения $\mathbf{\Phi} = (\det \mathbf{G})^{-1/3}\mathbf{G} = \mathbf{\Phi}^\top$, $\det \mathbf{\Phi} = 1$.

Рассмотрим $U$ как функцию $\mathbf{G}$ и как функцию $\det \mathbf{G}, \mathbf{\Phi}$. Т.к. $\mathbf{G} = \mathbf{G}^\top$,

$$dU = \frac{dU}{d\mathbf{G}} \cdot\cdot\, d\mathbf{G} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot\cdot\, d\mathbf{\Phi} + \frac{\partial U}{\partial \det \mathbf{G}} d \det \mathbf{G}$$

$$d(\det \mathbf{G}) = \frac{\partial \det \mathbf{G}}{\partial \mathbf{G}} \cdot\cdot\, d\mathbf{G} = \det \mathbf{G}\, \mathbf{G}^{-1} \cdot\cdot\, d\mathbf{G}$$

$$d\mathbf{\Phi} = -\frac{1}{3}(\det \mathbf{G})^{-4/3}\mathbf{G}\, d \det \mathbf{G} + (\det \mathbf{G})^{-1/3} d\mathbf{G} =$$

$$-\frac{1}{3}(\det \mathbf{G})^{-1/3}\mathbf{G}\, \mathbf{G}^{-1} \cdot\cdot\, d\mathbf{G} + (\det \mathbf{G})^{-1/3} d\mathbf{G}$$

$$dU = (-\frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot\cdot\, \mathbf{\Phi}\, \mathbf{G}^{-1} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}}(\det \mathbf{G})^{-1/3} + \frac{\partial U}{\partial \det \mathbf{G}} \det \mathbf{G}\, \mathbf{G}^{-1}) \cdot\cdot\, d\mathbf{G}$$

Имеем

$$\frac{dU}{d\mathbf{G}} = (\det \mathbf{G}\, \frac{\partial U}{\partial \det \mathbf{G}} - \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot\cdot\, \mathbf{\Phi})\mathbf{G}^{-1} + (\det \mathbf{G})^{-1/3}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}}$$

# Тензор формоизменения и нелинейные определяющие уравнения

Ранее мы получали: если $U = U(\mathbf{G})$, то

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$

Так как $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}) \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{E}$,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho((\det \mathbf{G} \frac{\partial U}{\partial \det \mathbf{G}} - \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot\cdot \boldsymbol{\Phi})\mathbf{E} + (\det \mathbf{G})^{-1/3} \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})$$

$$\mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}) = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot\cdot (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top) = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot\cdot \mathbf{G} = (\det \mathbf{G})^{1/3} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot\cdot \boldsymbol{\Phi}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho(\det \mathbf{G} \frac{\partial U}{\partial \det \mathbf{G}}\mathbf{E} + (\det \mathbf{G})^{-1/3}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})\mathbf{E})$$

# Тензор формоизменения и нелинейные определяющие уравнения

$$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{2\rho \det \mathbf{G} \, \frac{\partial U}{\partial \det \mathbf{G}} \mathbf{E}}_{-p\mathbf{E}} \quad + \quad \underbrace{2\rho (\det \mathbf{G})^{-1/3} \operatorname{dev}\left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^{\top} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}\right)}_{\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}}$$

$p$ — давление, $\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}$ — тензор сдвиговых (касательных) напряжений.

- шаровая часть тензора напряжений зависит от производной по объемной деформации (отличие $\det \mathbf{G}$ от 1)
- девиатор тензора напряжений зависит от производной по тензору формоизменения.
- Верно ли, что шаровая часть тензора деформации Коши–Грина $(\mathbf{G} - \mathbf{E})/2$ соответствует объемной деформации, а девиатор — сдвиговой?
  В нелинейном случае — НЕТ.

# Тензор формоизменения. Линеаризация

Ранее получали: при $\mathbf{u} = o(1)$ имеем $\det \mathbf{G} \approx 1 + 2\nabla \cdot \mathbf{u}$. Тогда

$$\mathbf{\Phi} \approx (1 - 2\nabla \cdot \mathbf{u}/3)(\mathbf{E} + 2\nabla \mathbf{u}^S) \approx \mathbf{E} + 2(\nabla \mathbf{u}^S - \frac{1}{3}\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E}) = \mathbf{E} + 2\,\mathrm{dev}\,\nabla \mathbf{u}^S.$$

Используя

$$\frac{\partial}{\partial(1 + 2\nabla \cdot \mathbf{u})} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}, \qquad \frac{\partial}{\partial(\mathbf{E} + 2\,\mathrm{dev}\,\nabla \mathbf{u}^S)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{dev}\,\nabla \mathbf{u}^S},$$

имеем для натуральной конфигурации (нет начальных напряжений)

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}\mathbf{E} + \mathrm{dev}\,\rho_0 \frac{\partial U}{\partial\,\mathrm{dev}\,\nabla \mathbf{u}^S} = -p\mathbf{E} + \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau}$$

- Верно ли, что шаровая часть тензора линейных деформаций $\nabla \mathbf{u}^S$ соответствует объемной деформации, а девиатор — сдвиговой? В линейном случае — ДА.
- шаровая часть тензора напряжений определяется производной энергии по объемной деформации ($\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E}$, шаровой части $\nabla \mathbf{u}^S$)
- девиатор тензора напряжений определяется производной энергии по $\mathrm{dev}\,\nabla \mathbf{u}^S$.

# Изотропный линейный случай вблизи натуральной конфигурации

При нулевых начальных напряжениях

$$\rho_0 U = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^S \cdot\cdot \mathbf{X} \cdot\cdot \nabla\mathbf{u}^S$$

В изотропном случае $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)^S(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)^S$.
Заметим, что $\mathbf{E} \cdot\cdot \operatorname{dev}\mathbf{\Lambda} = (\operatorname{dev}\mathbf{\Lambda}) \cdot\cdot \mathbf{E} = 0$ для любого тензора $\mathbf{\Lambda}$.
Разложим на шаровую часть и девиатор $\varepsilon = \nabla\mathbf{u}^S = \frac{1}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + \operatorname{dev}\varepsilon$.
Используя $\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \cdot\cdot \varepsilon = \varepsilon$, получим

$$\rho_0 U = \frac{1}{2}((\nabla\cdot\mathbf{u})^2\frac{9\lambda + 2\mu\delta_{mn}^2}{9} + 2\mu\operatorname{dev}\varepsilon \cdot\cdot \operatorname{dev}\varepsilon)$$
$$= \frac{1}{2}(K(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 + 2\mu\operatorname{dev}\varepsilon \cdot\cdot \operatorname{dev}\varepsilon)$$

$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ — модуль объемного сжатия. В изотропной теории нет перекрестного члена, перевязывающего объемную деформацию $\nabla\cdot\mathbf{u}$ и сдвиг $\operatorname{dev}\varepsilon$. Давление вызывает только объемную деформацию, касательные напряжения — только сдвиг

# Анизотропный линейный случай вблизи натуральной конфигурации

В случае, когда $\mathbf{X}$ анизотропный, в выражении для упругой энергии перекрестный член

$$\nabla \cdot \mathbf{u}\,\mathbf{E} \cdot\cdot \mathbf{X} \cdot\cdot \operatorname{dev} \varepsilon \neq 0.$$

Поэтому давление может вызывать и объемную деформацию, и сдвиг.
И касательные напряжения — тоже.

# Тензор формоизменения и определяющие уравнения: нелинейный случай

1. Введен (В.А. Пальмовым) тензор формоизменения $\mathbf{\Phi} = (\det \mathbf{G})^{-1/3}\mathbf{G}$. Он описывает деформацию без изменения объема, $\det \mathbf{\Phi} = 1$.
2. $\mathbf{\Phi}$ не выражается через $\operatorname{dev} \mathbf{C}$ — девиатор тензора деформаций Коши – Грина $\mathbf{C} = (\mathbf{G} - \mathbf{E})/2$. Тензор $\mathbf{\Phi} - \mathbf{E}$ не является чьим-либо девиатором.
3. Объемная деформация описывается $\det \mathbf{G}$. Он не выражается через шаровую часть тензора деформаций Коши – Грина $\frac{1}{3}\mathrm{tr}\, \mathbf{C}\, \mathbf{E}$.
4. Тензор напряжений разделяется на шаровую часть, определяемую $\det \mathbf{G}$ и производной энергии по $\det \mathbf{G}$, отвечающему за расширение – сжатие, и девиатор, зависящий от $\det \mathbf{G}$ и производной энергии по тензору формоизменения $\mathbf{\Phi}$.

# Тензор формоизменения и определяющие уравнения: линейный случай

В линейном приближении

1. Тензор формоизменения $\mathbf{\Phi} \approx \mathbf{E} + 2\,\mathrm{dev}\,\nabla\mathbf{u}^S$. Он описывает деформацию без изменения объема — чистый сдвиг.
2. $\mathbf{\Phi}$ выражается через $\mathrm{dev}\,\nabla\mathbf{u}^S$ — девиатор тензора линейных деформаций, тензор деформаций Коши – Грина $\mathbf{C} \approx \nabla\mathbf{u}^S$.
3. Объемная деформация описывается $\det\mathbf{G} \approx 1 + 2\nabla\cdot\mathbf{u}$. Он выражается через шаровую часть тензора линейных деформаций $\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\nabla\mathbf{u}^S = \nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathbf{E}$.
4. Тензор напряжений разделяется на шаровую часть — производную энергии по шаровой части тензора линейных деформаций $\nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathbf{E}$ и девиатор — производную энергии по $\mathrm{dev}\,\nabla\mathbf{u}^S$.

# Пример энергии деформации

В.А. Пальмов (1976) предложил рассмотреть аддитивную упругую энергию, представимую в виде суммы энергии изменения объема и энергии формоизменения:

$$U = U_{\mathrm{I}}(\det \mathbf{G}) + U_{\mathrm{II}}(\mathbf{\Phi})$$

В этом случае давление $p = p(\det \mathbf{G})$:

$$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{2\rho \det \mathbf{G} \, \frac{\partial U_{\mathrm{I}}}{\partial \det \mathbf{G}} \mathbf{E}}_{-p\mathbf{E}} \quad + \quad \underbrace{2\rho (\det \mathbf{G})^{-1/3} \operatorname{dev}(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^{\top} \cdot \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R})}_{\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}}$$

Например, для изотропного материала можно выбрать

$$U_{\mathrm{II}} = U_{\mathrm{II}}(\mathrm{tr}\,(\mathbf{\Phi}), I_2(\mathbf{\Phi})),$$

и даже $U_{\mathrm{II}} = C_1 \mathrm{tr}\,(\mathbf{\Phi}) + C_2 I_2(\mathbf{\Phi})$.

# Изотропный материал с аддитивной энергией по Пальмову

$$\frac{d\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}}{d\mathbf{\Phi}} = \mathbf{E}, \qquad \frac{dI_2(\mathbf{\Phi})}{d\mathbf{\Phi}} = \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}\,\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}.$$

$$U_{\mathrm{II}} = U_{\mathrm{II}}(\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}, I_2(\mathbf{\Phi})), \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^\top \Longrightarrow$$

$$dU_{\mathrm{II}} = \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}} \frac{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot\cdot\, d\mathbf{\Phi} + \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \frac{\partial I_2(\mathbf{\Phi})}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot\cdot\, d\mathbf{\Phi}$$

$$\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau} = 2\rho(\det \mathbf{G})^{-1/3}\,\mathrm{dev}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \left( \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}} \frac{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{\Phi}} + \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \frac{\partial I_2(\mathbf{\Phi})}{\partial \mathbf{\Phi}} \right) \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})$$

$$= 2\rho(\det \mathbf{G})^{-1/3}\,\mathrm{dev}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \left( \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}} \mathbf{E} + \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} (\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}) \right) \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})$$

$$= 2\rho(\det \mathbf{G})^{-1/3}\,\mathrm{dev}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \left( \left( \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}} + \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi} \right) \mathbf{E} - \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \mathbf{\Phi} \right) \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})$$

# Изотропный материал с аддитивной энергией по Пальмову

Введем аналог тензора формоизменения для меры Фингера $\mathbf{F} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} = (\det \mathbf{F})^{-1/3}\mathbf{F} = (\det \mathbf{G})^{-1/3}\mathbf{F}, \qquad \det \mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} = 1.$$

Заметим:

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = (\det \mathbf{G})^{-1/3}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{G} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} =$$

$$= (\det \mathbf{G})^{-1/3}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = (\det \mathbf{G})^{-1/3}\mathbf{F}^2 = (\det \mathbf{G})^{1/3}\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}^2.$$

$$\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} = 2\rho(\det \mathbf{G})^{-\frac{1}{3}} \operatorname{dev}\Big(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \Big(\Big(\frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \operatorname{tr} \mathbf{\Phi}} + \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \operatorname{tr} \mathbf{\Phi}\Big)\mathbf{E} - \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})}\mathbf{\Phi}\Big) \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\Big)$$

$$= 2\rho \operatorname{dev}\left(\left(\frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \operatorname{tr} \mathbf{\Phi}} + \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \operatorname{tr} \mathbf{\Phi}\right)\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} - \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})}\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}^2\right)$$

$(\operatorname{tr} \mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} = \operatorname{tr} \mathbf{\Phi}, \quad I_2(\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}) = I_2(\mathbf{\Phi}))$.

# Изотропный материал с аддитивной энергией по Пальмову

$$U = U_{\mathrm{I}}(\det \mathbf{G}) + U_{\mathrm{II}}(\mathbf{\Phi})$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho \det \mathbf{G}\, \frac{\partial U_{\mathrm{I}}}{\partial \det \mathbf{G}} \mathbf{E} + 2\rho\, \mathrm{dev} \left( \left( \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \mathrm{tr}\, \mathbf{\Phi}} + \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \mathrm{tr}\, \mathbf{\Phi} \right) \mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} - \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}^2 \right)$$

Заметим: $\mathrm{dev}\, \boldsymbol{\tau}/\rho$ зависит лишь от $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}$, а не от $\det \mathbf{G}$, $\rho = \rho_0/\sqrt{\det \mathbf{G}}$.

# Изотропный материал с аддитивной энергией по Пальмову. Случай $U = U_{\mathrm{I}}(\det \mathbf{G}) + C_1 \mathrm{tr}\,(\mathbf{\Phi}) + C_2 I_2(\mathbf{\Phi})$, $U_{\mathrm{I}}(\det \mathbf{G}) = k(-\ln\sqrt{\det \mathbf{G}} + \sqrt{\det \mathbf{G}} - 1)$.

$$\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau} = 2\rho\,\mathrm{dev}\left(\left(\frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}} + \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})}\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi}\right)\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} - \frac{\partial U_{\mathrm{II}}}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})}\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}^2\right)$$
$$= 2\rho((C_1 + C_2 \mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi})\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} - C_2\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}^2)$$

Шаровая часть $\boldsymbol{\tau}$

$$\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}\mathbf{E} = 2\rho\det\mathbf{G}\,\frac{\partial U_{\mathrm{I}}}{\partial \det\mathbf{G}}\mathbf{E} = \rho k(\sqrt{\det\mathbf{G}} - 1)\mathbf{E} = \rho k(\frac{\rho_0}{\rho} - 1)\mathbf{E}$$

$$U = k(-\ln\sqrt{\det\mathbf{G}} + \sqrt{\det\mathbf{G}} - 1) + C_1\mathrm{tr}\,(\mathbf{\Phi}) + C_2 I_2(\mathbf{\Phi}),$$

$$\boldsymbol{\tau} = \rho k(\sqrt{\det\mathbf{G}} - 1)\mathbf{E} + 2\rho\,\mathrm{dev}((C_1 + C_2\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi})\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} - C_2\mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}^2)$$

Это аналог среды Муни, но для сжимаемого материала.

# Изотропный материал с аддитивной энергией по Пальмову. Случай $U = U_{\mathrm{I}}(\det \mathbf{G}) + C_1 \mathrm{tr}\,(\mathbf{\Phi}) + C_2 I_2(\mathbf{\Phi})$, $U_{\mathrm{I}}(\det \mathbf{G}) = k(-\ln\sqrt{\det \mathbf{G}} + \sqrt{\det \mathbf{G}} - 1)$.

Объемная деформация: $\mathbf{R} = A\mathbf{r}$, $\mathbf{G} = A^2\mathbf{E}, \det \mathbf{G} = A^6$, $\mathbf{\Phi} = \mathbf{E}$.
$\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$,

$$\boldsymbol{\tau} = k\frac{\rho_0}{\sqrt{\det \mathbf{G}}}(\sqrt{\det \mathbf{G}} - 1)\mathbf{E} = k\rho_0(1 - \frac{1}{A^3})\mathbf{E}$$

Давление монотонно растет при сжатии, при растяжении напряжение возрастает и стремится к константе на бесконечности (площадка текучести?).

Малые деформации (получим на упражнениях):

$$\boldsymbol{\tau} \approx \rho_0 k \nabla \cdot \mathbf{u}\,\mathbf{E} + 4\rho_0(C_1 + C_2)\operatorname{dev} \nabla \mathbf{u}^S$$

Дает линейную изотропную теорию (хорошо)

# Связь $\dot{\mathbf{G}}$ и $\nabla\mathbf{v}^S$ в произвольном материале.

$$\dot{\mathbf{G}} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^\top = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{v}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top + \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{v})^\top$$

$$\dot{\mathbf{G}} = 2\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{v}^S\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top, \qquad \nabla\mathbf{v}^S = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{G}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}$$

$$2\nabla\cdot\mathbf{v} = \mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{G}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}) = \mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + G_k\dot{\mathbf{e}}_k\mathbf{e}_k + G_k\mathbf{e}_k\dot{\mathbf{e}}_k)\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}$$

$$= \mathrm{tr}\,(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + G_k\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + G_k\mathbf{e}_k\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k)\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top})$$

$$= \dot{G}_k(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k)\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k) + G_k(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k))\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k) +$$

$$G_k(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k)\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k))$$

$$= \dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\cdot\cdot\,\mathbf{G}^{-1} + 2G_k\mathbf{e}_k\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{e}_k) = (\dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k - 2\mathbf{G}\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\cdot\,\mathbf{G}^{-1}$$

Заметим:

$$(\mathbf{G}\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\cdot\,\mathbf{G}^{-1} = G_s\mathbf{e}_s(\mathbf{e}_s\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\cdot\,G_k^{-1}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k = G_sG_k^{-1}\delta_{ks}(\mathbf{e}_s\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{e}_k = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \dot{G}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\cdot\cdot\,\mathbf{G}^{-1}/2 = \frac{(\det\mathbf{G})^{\cdot}}{2\det\mathbf{G}} = \tfrac{1}{2}(\ln\det\mathbf{G})^{\cdot} = \left(\ln\frac{V}{V_0}\right)^{\cdot}$$

# Несжимаемый материал: $\det \mathbf{G} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$

Таким образом, условие $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ равносильно кинематическому ограничению $\det \mathbf{G} = 1$ (условию несжимаемости материала).

# Несжимаемый материал

Рассмотрим материал с кинематическим ограничением $\det \mathbf{G} = 1$ (несжимаемый материал). Тогда $U = U(\mathbf{\Phi})$, $\rho = \rho_0$, $\mathbf{\Phi} \equiv \mathbf{G}$.

Можно ли найти давление $p$ из определяющих уравнений?

Нет: мы не можем дифференцировать энергию $U$ по константе.

Задаем лишь переменную часть $U(\mathbf{\Phi})$. Давление будет таким, чтобы обеспечить несжимаемость ($\det \mathbf{G} = 1$).

Касательные напряжения получаем из определяющих уравнений

$$\operatorname{dev} \boldsymbol{\tau} = 2\rho \operatorname{dev}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}).$$

Подставляем $\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{E} + \operatorname{dev} \boldsymbol{\tau}(\nabla \mathbf{u}^S)$ в баланс сил:

$$-\nabla p + \nabla \cdot (2\rho_0 \operatorname{dev}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})) = \rho_0 \ddot{\mathbf{R}}, \quad \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = 1.$$

Из этой системы находятся перемещения и затем $\nabla p$. Бывает удобно исключить $\nabla p$ из первого уравнения:

$$\nabla \times (\nabla \cdot (2\rho_0 \operatorname{dev}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}))) = \nabla \times (\rho_0 \ddot{\mathbf{R}}).$$

# Тела с кинематическими связями: основные идеи

1. Кинематическая связь должна быть такой, чтобы жесткие движения не меняли ее вид, т.е. некоторая кинематическая материально объективная или не меняющаяся при жестких движениях величина должна равняться 0 *(например,* $\det \mathbf{G} = 1$*)*
2. В таких средах некоторые внутренние усилия *(например, давление)* не могут быть найдены из определяющих уравнений: нельзя дифференцировать по константе
3. Это те усилия, которые совершают работу на изменении данной материально объективной (или не меняющейся при жестких движениях) величины в теории без кинематической связи *(шаровая часть тензора напряжений работает на изменении* $\det \mathbf{G}$*)*.
4. Они находятся из законов динамики и уравнения кинематической связи

# Потенциал Муни (несжимаемый материал)

$$U = C_1(\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi} - 3) + C_2(I_2(\mathbf{\Phi}) - 3), \qquad C_{1,2} \geqslant 0$$

Связь $\det \mathbf{G} \equiv 1$

Материалы с аддитивной энергией по Пальмову (в простейшем случае) и потенциалом Муни одинаково реагируют на формоизменение, но в первом есть упругая реакция на растяжение – сжатие, а второй несжимаем.

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{E} + 2\rho_0\,\mathrm{dev}((C_1 + C_2\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi})\mathbf{\Phi}_\mathrm{F} - C_2\mathbf{\Phi}_\mathrm{F}^2)$$

Баланс сил в статике при отсутствии внешних воздействий:

$$\nabla p = 2\nabla\cdot(\rho_0\,\mathrm{dev}((C_1 + C_2\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi})\mathbf{\Phi}_\mathrm{F}) - C_2\mathbf{\Phi}_\mathrm{F}^2)$$

Связь $\det \mathbf{G} \equiv 1$

# Производные инвариантов симметричного тензора по этому тензору

Для любого симметричного тензора $\mathbf{S} = \mathbf{S}^\top$

$$\frac{d\,\mathrm{tr}\,\mathbf{S}}{d\mathbf{S}} = \mathbf{E}$$

$$\frac{dI_2(\mathbf{S})}{d\mathbf{S}} = \mathrm{tr}\,\mathbf{S}\,\mathbf{E} - \mathbf{S}$$

$$\frac{d\det\mathbf{S}}{d\mathbf{S}} = \det\mathbf{S}\,\mathbf{S}^{-1}$$

Это доказали на упражнениях, используя представление симметричного тензора через собственные числа и векторы $\mathbf{S} = S^k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k$

# Изотропный упругий материал общего вида

В изотропном материале $U(\mathbf{G})$ зависит только от инвариантов $\mathbf{G}$, т.е. $U = U(\operatorname{tr}\mathbf{G}, I_2(\mathbf{G}), \det\mathbf{G})$. Инварианты $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ совпадают.

$$\frac{dU}{d\mathbf{G}} = \frac{\partial U}{\partial \operatorname{tr}\mathbf{G}}\frac{\partial \operatorname{tr}\mathbf{G}}{\partial \mathbf{G}} + \frac{\partial U}{\partial I_2(\mathbf{G})}\frac{\partial I_2(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}} + \frac{\partial U}{\partial \det\mathbf{G}}\frac{\partial \det\mathbf{G}}{\partial \mathbf{G}}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial \operatorname{tr}\mathbf{G}}\mathbf{E} + \frac{\partial U}{\partial I_2(\mathbf{G})}(\operatorname{tr}\mathbf{G}\,\mathbf{E} - \mathbf{G}) + \frac{\partial U}{\partial \det\mathbf{G}}\det\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top}\cdot\frac{dU}{d\mathbf{G}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$

$U = U(\operatorname{tr}\mathbf{F}, I_2(\mathbf{F}), \det\mathbf{F})$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho\left(\frac{\partial U}{\partial \det\mathbf{F}}\det\mathbf{F}\,\mathbf{E} + \frac{\partial U}{\partial \operatorname{tr}\mathbf{F}}\mathbf{F} + \frac{\partial U}{\partial I_2(\mathbf{F})}(\operatorname{tr}\mathbf{F}\,\mathbf{F} - \mathbf{F}^2)\right)$$

# Изотропный упругий материал общего вида

Можно задавать $U = U(\det \mathbf{G}, \mathbf{\Phi})$, как мы делали для материала с аддитивной энергией по Пальмову. Совершенно аналогично получим

**$U = U(\det \mathbf{F}, \mathbf{\Phi})$**

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho \det \mathbf{F} \frac{\partial U}{\partial \det \mathbf{F}} \mathbf{E} + 2\rho \operatorname{dev}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial \operatorname{tr} \mathbf{\Phi}} + \frac{\partial U}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \operatorname{tr} \mathbf{\Phi}\right) \mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}} - \frac{\partial U}{\partial I_2(\mathbf{\Phi})} \mathbf{\Phi}_{\mathrm{F}}^2\right)$$

Величины $\dfrac{\partial U}{\partial \det \mathbf{F}}$ имеют разный смысл в уравнениях

на этом и предыдущем слайдах: они зависят от набора аргументов

# Математические факты

Производные $\operatorname{tr}\sqrt{\mathbf{S}}$ и $I_2(\sqrt{\mathbf{S}})$ по $\mathbf{S} = \mathbf{S}^\top$ (докажем на упражнениях):

$$\frac{d\operatorname{tr}\sqrt{\mathbf{S}}}{d\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\mathbf{S}^{-1/2}$$

$$\frac{d\,I_2(\sqrt{\mathbf{S}})}{d\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(\mathbf{S}^{1/2})\mathbf{S}^{-1/2} - \mathbf{E})$$

Вспомним о полярном разложении:

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{V},$$

$$\mathbf{U}^2 = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{G}, \qquad \mathbf{V}^2 = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \mathbf{F},$$

$$\mathbf{H} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})^{-1/2} = (\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top)^{-1/2}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$

Инварианты $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ равны.

Вычислим

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\sqrt{\mathbf{G}^{-1}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top)^{-1/2}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top\cdot\mathbf{H} = \mathbf{V}$$

# Полулинейный материал Джона

$$U = \frac{1}{2}(\lambda(\mathrm{tr}\,(\mathbf{U}-\mathbf{E}))^2 + 2\mu\mathrm{tr}\,((\mathbf{U}-\mathbf{E})^2)), \qquad \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{G}}.$$

$$U = \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\,\mathbf{G} + 2I_2(\sqrt{\mathbf{G}}) - 6\mathrm{tr}\,(\sqrt{\mathbf{G}}) + 9) + \mu(\mathrm{tr}\,\mathbf{G} - 2\mathrm{tr}\,\sqrt{\mathbf{G}} + 3)$$

$$\frac{dU}{d\mathbf{G}} = \frac{\partial U}{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{G}}\frac{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{G}}{\partial \mathbf{G}} + \frac{\partial U}{\partial I_2(\sqrt{\mathbf{G}})}\frac{\partial I_2(\sqrt{\mathbf{G}})}{\partial \mathbf{G}} + \frac{\partial U}{\partial \mathrm{tr}\,\sqrt{\mathbf{G}}}\frac{\partial \mathrm{tr}\,\sqrt{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{G}}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial \mathrm{tr}\,\mathbf{G}}\mathbf{E} + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial I_2(\sqrt{\mathbf{G}})}(\mathrm{tr}\,\sqrt{\mathbf{G}}\sqrt{\mathbf{G}^{-1}} - \mathbf{E}) + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \mathrm{tr}\,\sqrt{\mathbf{G}}}\sqrt{\mathbf{G}^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}((\cancel{\lambda} + 2\mu)\mathbf{E} + \lambda(\mathrm{tr}\,\sqrt{\mathbf{G}}\sqrt{\mathbf{G}^{-1}} - \cancel{\mathbf{E}}) - (3\lambda + 2\mu)\sqrt{\mathbf{G}^{-1}})$$

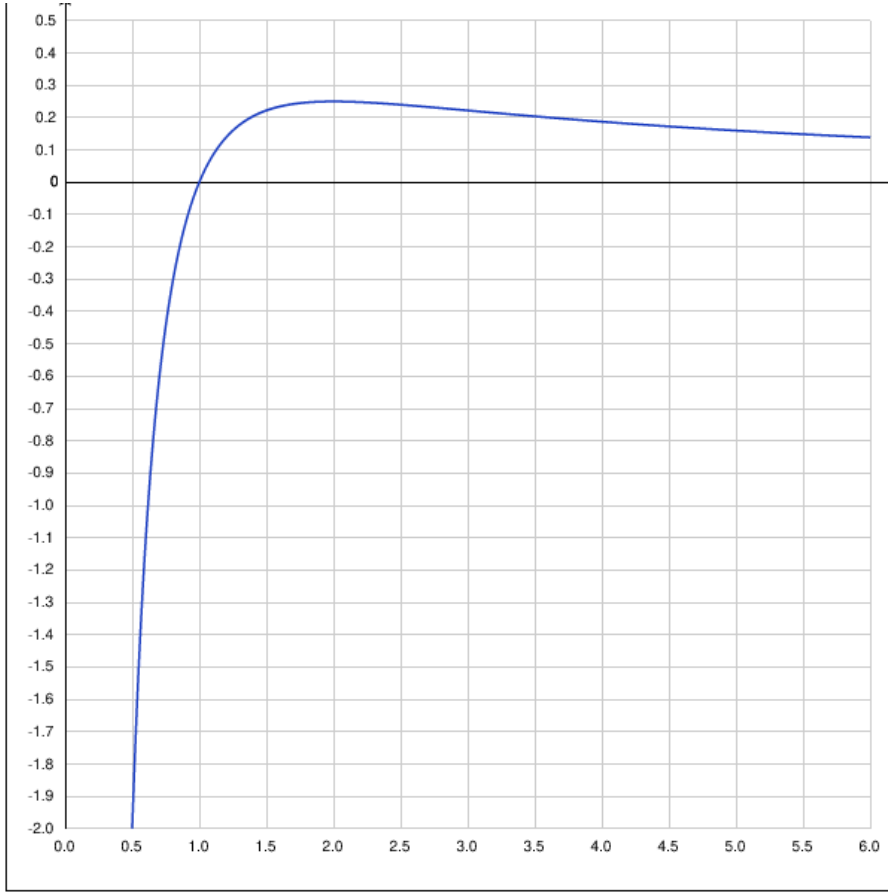
$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^\top \cdot \frac{dU}{d\mathbf{G}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} = \rho(2\mu\mathbf{F} + \lambda\mathrm{tr}\,\mathbf{V}\,\mathbf{V} - (3\lambda + 2\mu)\mathbf{V})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho_0}{\det \mathbf{V}}(\lambda(\mathrm{tr}\,\mathbf{V} - 3)\mathbf{V} + 2\mu(\mathbf{V} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{V})$$

# Полулинейный материал Джона: растяжение–сжатие

$$\mathbf{R} = A\mathbf{r}, \qquad \mathbf{V} = A\mathbf{E},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho_0}{A^3}(\lambda(3A-3)A\mathbf{E} + 2\mu(A-1)\mathbf{E}\cdot A\mathbf{E}) = \rho_0(3\lambda + 2\mu)\frac{A-1}{A^2}\mathbf{E}$$




Сжатие: давление растет.

Растяжение, $A < 2$: напряжение растет. При $A > 2$ падает.

Очень сильное растяжение: $\tau \sim 1/A$ (напряжения релаксируют — физично ли это? Отчасти. Сталь?)

Домашнее задание (+1.5 балла). Проверить: верно ли, что при некотором критическом сжатии есть неустойчивость материала? Если да, при каком? А при растяжении?

# Полулинейный материал Джона: примеры деформаций

Факт (доказательство: Пальмов): при некоторых конечных деформациях напряжения бесконечны. Это, вероятно, плохо.

Домашнее задание (+1 балл): проверить, является ли потенциал Джона выпуклым. Для этого посчитать $\dfrac{d^2 U}{d\mathbf{G}^2}$ и проверить, является ли эта функция положительно определенной. Невыпуклость энергии влечет неустойчивость. (Хорошо это или плохо?)

Малые деформации: $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, $\mathbf{u} = o(1)$.

$$\mathbf{V} \approx \mathbf{E} + \nabla \mathbf{u}^S$$

$$\boldsymbol{\tau} \approx \rho_0 (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S)$$

Соответствует линейному изотропному материалу (хорошо).

# Термоупругая среда. Законы термодинамики

В реальных средах присутствуют тепловые процессы, и напряжения в упругой среде могут от них зависеть. Тогда для написания определяющих уравнений не обойтись первым законом термодинамики.

**I закон термодинамики для классической среды:**

$$\rho \dot{U} = \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^S + b - \nabla \cdot \mathbf{h}$$

Здесь $\mathbf{h}$ — вектор теплового потока (реакция на $\nabla T$ и на $\boldsymbol{\tau}$), $b$ — интенсивность источников тепла

**II закон термодинамики (вводится понятие энтропии $s$):**

$$\dot{s} = \int\limits_V \rho \dot{S}\, dV \geqslant \int\limits_V \frac{b}{T} dV - \int\limits_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{T} dS = \int\limits_V \left(\frac{b - \nabla \cdot \mathbf{h}}{T} + \frac{1}{T^2} \mathbf{h} \cdot \nabla T\right) dV$$

$$\rho T \dot{S} \geqslant b - \nabla \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \nabla T$$

$\rho S$ — плотность энтропии $s$

# Законы термодинамики. Свободная энергия

В эти законы входят величины $U, S$ и члены, связанные с переносом тепла. Преобразуем законы так, чтобы требования к одной и той же физической величине обеспечивали их выполнение.

Введем свободную энергию $\psi = U - TS$, тогда

I закон термодинамики

$$\rho\dot{\psi} = \rho\dot{U} - \rho\dot{T}S - T\rho\dot{S} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S - \nabla\cdot\mathbf{h} + b - \rho\dot{T}S - T\rho\dot{S}$$

$$\rho T\dot{S} = -\rho\dot{\psi} + \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S + b - \nabla\cdot\mathbf{h} - \dot{T}\rho S$$

Ту роль, которую $U$ играет в чисто упругих материалах, в других средах выполняет $\psi$.

II закон термодинамики:

$$\rho T\dot{S} = -\rho\dot{\psi} + \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S + b - \nabla\cdot\mathbf{h} - \dot{T}\rho S \geqslant b - \nabla\cdot\mathbf{h} + \frac{1}{T}\mathbf{h}\cdot\nabla T$$

$$\rho\dot{\psi} \leqslant \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S - \dot{T}\rho S - \frac{1}{T}\mathbf{h}\cdot\nabla T$$

# Законы термодинамики. Термоупругая среда

Вспомним:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^S = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1}) \cdot\cdot \dot{\mathbf{G}}$$

Термоупругий материал: $\psi = \psi(\mathbf{G}, T, \nabla T)$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{G}} + \frac{\partial \psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla T} \cdot \nabla \dot{T}$$

## II закон термодинамики:

$$(\rho\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} - \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-1})) \cdot\cdot \dot{\mathbf{G}} + \rho(\frac{\partial \psi}{\partial T} + S)\dot{T} + \rho\frac{\partial \psi}{\partial \nabla T} \cdot \nabla \dot{T} + \frac{1}{T}\mathbf{h} \cdot \nabla T \leqslant 0$$

## Получаем определяющие уравнения термоупругого материала

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nabla T} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = 2\rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}, \quad S = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \mathbf{h} \cdot \nabla T \leqslant 0$$

# Термоупругая среда. Определяющие уравнения.

Свободная энергия $\psi$ не зависит от $\nabla T$

Напряжения зависят от деформаций и температуры

$$\boldsymbol{\tau}(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}, T) = 2\rho\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{\top} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{G}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R},$$

Энтропия зависит от деформаций и температуры

$$S(\mathbf{G}, T) = -\frac{\partial\psi}{\partial T},$$

Вектор теплового потока $\mathbf{h}$ зависит от деформаций, температуры и ее градиента. Как? Чтобы выполнялись материальная объективность $\mathbf{h}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}$ и **неравенство Фурье**:

$$\mathbf{h} \cdot \nabla T \leqslant 0$$

Обратимые процессы (без переноса тепла): $\mathbf{h} \cdot \nabla T = 0$,
Необратимые процессы (с переносом тепла): $\mathbf{h} \cdot \nabla T < 0$.

# Термоупругая среда. Вектор теплового потока $\mathbf{h}$

При жестком повороте $\mathbf{Q}$ и перемещении образца среды градиент температуры поворачивается тензором жесткого поворота: $(\nabla T)' = \mathbf{Q} \cdot \nabla T$. Вектор теплового потока должен вести себя аналогично: $\mathbf{h}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}$. Тогда

$$\frac{1}{T'}\mathbf{h}' \cdot (\nabla T)' = \frac{1}{T}\mathbf{h} \cdot \nabla T.$$

$\boldsymbol{\tau}, S$ получаются дифференцированием $\psi$, а вектор теплового потока $\mathbf{h}(T, \nabla T, \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R})$ надо задавать из других соображений: материальная объективность и неравенство Фурье $\mathbf{h} \cdot \nabla T < 0$.

## Для изотропных материалов

Простейший вариант (закон Фурье): $\mathbf{h} = -k_0 \nabla T$.
Уравнение Пальмова: $\mathbf{h} = -(k_0\mathbf{E} + k_1\mathbf{F} + k_2\mathbf{F}^2) \cdot \nabla T$,
$k_i = k_i(T, I_j(\mathbf{G}), (\nabla T)^2, \nabla T \cdot \mathbf{F} \cdot \nabla T, \nabla T \cdot \mathbf{F}^2 \cdot \nabla T)$.

⚠ (По-видимому, термодинамика не запрещает и более странные уравнения, например, $\mathbf{h} = -k\mathbf{V} \cdot \nabla T$. Пальмов не допускает их для изотропных материалов, раскладывая $\mathbf{h}$ по целым степеням $\mathbf{F}$.)

# Термоупругая среда. I закон термодинамики

Если мы зададим определяющие уравнения для свободной энергии $\psi(\mathbf{G}, T)$ и вектора теплового потока $\mathbf{h}(T, \mathbf{F}, \nabla T)$, определив через свободную энергию $\psi$ при помощи II закона термодинамики напряжения $\boldsymbol{\tau}$ и энтропию $S$, учтем баланс кинетического момента $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\top$, запишем уравнение баланса количества движения, будет ли система замкнутой?

Нет: у нас есть новая переменная — температура T. Как замкнуть систему?

У нас остался первый закон термодинамики.

$$\rho T \dot{S} = -\rho \dot{\psi} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^S + b - \nabla \cdot \mathbf{h} - \dot{T} \rho S$$

Введем диссипативную функцию

$$\varphi = \rho \dot{\psi} + \dot{T} \rho S - \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^S.$$

Для термоупругого материала она равна 0 (из определяющих уравнений, так как мы предположили $\psi = \psi(\mathbf{G}, T, \cancel{\nabla T})$). Работа внутренних сил не дает вклада в рост энтропии.

# Термоупругая среда. I закон термодинамики

**I закон термодинамики влечет уравнение теплопроводности:**

$$\rho T \dot{S} = b - \nabla \cdot \mathbf{h}$$

Справа тепло, получаемое малым материальным объемом. Введем понятие: теплоемкость $C_T$ — тепло, требуемое для нагревания единицы массы среды на один градус при условии $\varphi = 0$ (выполняется в силу термоупругости):

$$C_T(T, \mathbf{G}) = T\frac{\partial S}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}.$$

$$-\rho T\left(\frac{\partial \psi}{\partial T}\right)^{\cdot} = b - \nabla \cdot \mathbf{h}$$

$$-\rho T\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}\dot{T} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \mathbf{G}} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{G}}\right) = b - \nabla \cdot \mathbf{h}$$

# Термоупругая среда. I закон термодинамики

$$\rho C_T \dot{T} + \nabla \cdot \mathbf{h} - \rho T \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \mathbf{G}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{G}} \right) = b$$

Так как $\boldsymbol{\tau} = 2\rho \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}$,

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \mathbf{G}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{G}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^{-1}) \cdot\cdot \dot{\mathbf{G}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial T} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^S.$$

**Уравнение теплопроводности можно записать как**

$$\rho C_T \dot{T} + \nabla \cdot \mathbf{h} - T \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial T} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^S = b$$

В статике

$$\rho C_T \dot{T} + \nabla \cdot \mathbf{h} = b$$

Если $\mathbf{h} = -k_0 \nabla T$, для однородной статической деформации

$$\rho C_T \dot{T} - k_0 \triangle T = b$$

# Термоупругая изотропная среда

В.А. Пальмов предлагает включить в нелинейные упругие потенциалы слагаемое

$$\psi_T = \frac{A}{\rho_0}(\sqrt{\det \mathbf{G}} - 1),$$

где $A(T)$ — напряжение, вызванное температурой, при условии, что деформации равны 0 ($\mathbf{G} = \mathbf{E}$).

$$\boldsymbol{\tau}_T = 2\rho \det \mathbf{G} \frac{\partial \psi_T}{\partial \det \mathbf{G}} \mathbf{E} = 2\frac{\rho}{\rho_0} \det \mathbf{G} \frac{A(T)}{2\sqrt{\det \mathbf{G}}} \mathbf{E} = A(T)\mathbf{E}$$

В качестве приближения для теплового расширения (отношение объемов до и после нагревания) можно взять, например,

$$\frac{\rho}{\rho_T} = \frac{V_T}{V} = \sqrt{\det \mathbf{G}_T} = e^{3\alpha(T-T_0)}.$$

Для малых изменений температуры это соответствует линейному расширению нагретого отрезка в $1 + \alpha(T - T_0)$ раз.

# Термоупругий неогуков материал

Без учета тепловых эффектов

$$U = \frac{\mu}{2}(\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi} - 3) + \frac{1}{d}(\sqrt{\det \mathbf{G}} - 1)^2$$

$$\psi = \frac{A}{\rho_0}(\sqrt{\det \mathbf{G}} - 1) + \frac{\mu}{2}(\mathrm{tr}\,\mathbf{\Phi} - 3) + \frac{1}{d}(\sqrt{\det \mathbf{G}} - 1)^2$$

$$A(T) = -\frac{2}{d}(\frac{V_T}{V} - 1)$$

Например,

$$A(T) = -\frac{2}{d}(e^{3\alpha(T - T_0)} - 1)$$

Домашнее задание: выбрать термоупругий материал. Найти его параметры в зависимости от температуры. Оценить, когда можно пренебречь термоупругим воздействием (или какими-то конкретными членами в уравнениях), а когда нет, когда допустима линеаризация. Сделать доклад на 5 минут, слайды прислать заранее на elena.grekova@gmail.com. Те, кто выберет материал, сообщают об этом в группу, чтобы у всех материалы были разные.

# Линейный термоупругий материал

Линеаризуем I начало термодинамики.

$$-\rho(T_0 + T - T_0)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\dot{T} + \frac{\partial^2\psi}{\partial T\partial\mathbf{G}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{G}}\right) = b - \nabla\cdot\mathbf{h}$$

$$-\rho_0 T_0\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\bigg|_0\dot{T} - T_0\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial T}\bigg|_0\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S = b - \nabla\cdot\mathbf{h}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \mathbf{G}, \nabla T) = -\mathbf{h}_\Gamma\cdot\nabla(T - T_0)$$

Остальные линейные члены в $\mathbf{h}$ равны нулю, так как должно выполняться неравенство Фурье $\mathbf{h}\cdot\nabla T < 0$ для всех процессов. При $T_0 = \text{const}$ можно заменить $\nabla(T - T_0)$ на $\nabla T$. Тогда $\mathbf{h}_\Gamma = -\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\nabla T}\big|_0$ — неотрицательно определенный тензор 2-го ранга.

## Первый закон термодинамики. Линейный случай

$$b + \nabla\cdot(\mathbf{h}_\Gamma\cdot\nabla T) - \rho_0 C_{T0}\dot{T} + T_0\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial T}\bigg|_0\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S = 0$$

Для однородных тепловых свойств

$$b + \mathbf{h}_\Gamma\cdot\cdot\nabla\nabla T - \rho_0 C_{T0}\dot{T} + T_0\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial T}\bigg|_0\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^S = 0$$

# Линейный термоупругий материал

Линеаризуем закон баланса количества движения:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} = 4\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{G}^2}\bigg|_0 \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S + 2\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \mathbf{G}}\bigg|_0 (T - T_0) + o^2(1)$$

## Линейное определяющее уравнение термоупругости

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial T}\bigg|_0 (T - T_0)$$

## Баланс сил в перемещениях в линейной термоупругости

$$\nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial T}\bigg|_0 (T - T_0)\right) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

В однородной среде ($\mathbf{X}_1 = X_{mnkl} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m$)

$$\mathbf{X}_1 \cdots \nabla(\nabla \mathbf{u}^S) + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial T}\bigg|_0 \cdot \nabla T + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

# Термоупругая линейная однородная среда

## Линейное определяющее уравнение термоупругости (соотношения Дюамеля – Неймана)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S - \boldsymbol{\beta}(T - T_0), \qquad \boldsymbol{\beta} = -\left.\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial T}\right|_0$$

## Баланс сил в перемещениях в однородной линейной термоупругости

$$\nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot\cdot (\nabla \mathbf{u}^S)) - \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla T + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

## Первый закон термодинамики в линейной термоупругой однородной среде

$$b + \mathbf{h}_\Gamma \cdot\cdot \nabla\nabla T - \rho_0 C_{T0} \dot{T} - T_0 \boldsymbol{\beta} \cdot\cdot \nabla \mathbf{v}^S = 0$$

# Линейный однородный изотропный термоупругий материал

$$\mathbf{h}_\Gamma = k_0\mathbf{E}, \qquad \mathbf{X} = \lambda\mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)^S(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)^S, \qquad \boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{E}.$$

## Определяющее уравнение (соотношения Дюамеля – Неймана)

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu\nabla\mathbf{u}^S - \beta(T - T_0)\mathbf{E},$$

## Баланс сил в перемещениях

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) - \beta\nabla T + \rho\mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

## Первый закон термодинамики

$$b + k_0\triangle T - \rho_0 C_{T0}\dot{T} - T_0\beta\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

# Линейный однородный изотропный термоупругий материал

Возьмем дивергенцию от закона баланса сил. При отсутствии внешних сил и источников тепла

## Баланс сил в перемещениях (следствие)

$$(\lambda + 2\mu)\triangle\nabla\cdot\mathbf{u} - \beta\triangle T = \rho_0(\nabla\cdot\mathbf{u})^{\cdot\cdot}$$

Поперечную волну в изотропном линейном термоупругом материале изменение температуры НЕ вызывает.

## Первый закон термодинамики

$$k_0\triangle T - \rho_0 C_{T0}\dot{T} - T_0\beta(\nabla\cdot\mathbf{u})^{\cdot} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\triangle\nabla\cdot\mathbf{u} = \beta\triangle T + \frac{\rho_0 k_0}{T_0\beta}\triangle\dot{T} - \frac{\rho_0^2 C_{T0}}{T_0\beta}\ddot{T}.$$

# Линейный однородный изотропный термоупругий материал

В квазистатике (когда можно пренебречь $\rho\ddot{\mathbf{u}}$, но не $\dot{T}$) и при отсутствии внешних сил и источников тепла

## Баланс сил в перемещениях (следствие)

$$(\lambda + 2\mu)\triangle\nabla\cdot\mathbf{u} - \beta\triangle T = \mathbf{0}$$

Первый закон термодинамики

$$k_0\triangle\dot{T} - \rho_0 C_{T0}\ddot{T} = 0$$

Если $\nabla\cdot\mathbf{v}$ не привело к существованию постоянного неоднородного поля $k_0\triangle T - \rho_0 C_{T0}\dot{T} = a(\mathbf{r})$, то получаем несвязанную теорию термоупругости

## Первый закон термодинамики

$$k_0\triangle T - \rho_0 C_{T0}\dot{T} = 0$$

# Гармонические решения при отсутствии термоупругой перевязки: $\beta = 0$

Волна растяжения – сжатия: $\mathbf{u} = u_0 \hat{\mathbf{k}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$.

$$(\lambda + 2\mu)k^2 = \rho\omega^2, \quad \omega = c_p k, \quad c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

Убывающее решение уравнения теплопроводности: $T = T_a e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$.

$$k_0 k^2 + i\omega\rho_0 C_{T0} = 0, \quad k^2 = -i\omega\frac{\rho_0 C_{T0}}{k_0}, \quad \operatorname{Re} k = -\operatorname{Im} k = \sqrt{\omega}\sqrt{\frac{\rho_0 C_{T0}}{2k_0}}.$$

$$T = T_a e^{\operatorname{Im}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i(\omega t - \operatorname{Re}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = T_a e^{-\sqrt{\omega/c_0}\,\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}} e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/c_0}\,\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r})}.$$

$$c_0 = \frac{2k_0}{\rho_0 C_{T0}}, \quad \omega = c_0(\operatorname{Re} k)^2.$$

Можно ожидать, что вблизи пересечения парциальных дисперсионных кривых термоупругое взаимодействие особенно сильно. Возможно, эта частота слишком высока, чтобы эффект был заметен для обычных материалов.

# Линейная упругая среда

# Определяющие уравнения линейной упругой среды: напоминание

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S.$$

Для изотропной среды

$$\mathbf{X} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n)^S (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n)^S$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu (\nabla \mathbf{u})^S$$

$\lambda, \mu$ — коэффициенты Ламе, $\mu$ — модуль сдвига. Вычислим шаровую часть $\boldsymbol{\tau}$:

$$\frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} = K \nabla \cdot \mathbf{u}, \qquad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

$K$ — модуль объемного сжатия. Можно записать

$$\boldsymbol{\tau} = K \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu \operatorname{dev} \nabla \mathbf{u}^S.$$

# Константы линейной упругой среды

$$\nabla \mathbf{u}^S = \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{\tau} - \lambda \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}}{2\mu + 3\lambda}\mathbf{E})$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\tau} = \sigma_x \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \sigma_y \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sigma_z \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + \tau_{xy}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^S + \tau_{yz}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^S + \tau_{xz}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)^S$$

$$\nabla \mathbf{u}^S = \varepsilon_x \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \varepsilon_y \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \varepsilon_z \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + 2\gamma_{xy}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^S + 2\gamma_{yz}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^S + 2\gamma_{xz}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)^S$$

Введем модуль Юнга $E$ и коэффициент Пуассона $\nu$:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Тогда $\nabla \mathbf{u}^S = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu}\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}\mathbf{E})$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{\mu}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{\mu}\tau_{yz},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)), \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu}\tau_{xz}.$$

# Константы линейной упругой среды

При одноосном растяжении $\boldsymbol{\tau} = \sigma_x \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1$ имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \varepsilon_x, \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0.$$

Параметры Ламе выражаются через модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

| Модули | Основные пары | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda, \mu$ | $K, \mu$ | $\mu, \nu$ | $E, \nu$ | $E, \mu$ |
| $\lambda$ | $\lambda$ | $K - \frac{2}{3}\mu$ | $\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$ | $\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ | $\frac{(E-2\mu)\mu}{3\mu - E}$ |
| $\mu$ | $\mu$ | $\mu$ | $\mu$ | $\frac{E}{2(1+\nu)}$ | $\mu$ |
| $K$ | $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ | $K$ | $\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$ | $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ | $\frac{E\mu}{3(3\mu - E)}$ |
| $E$ | $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ | $\frac{9K\mu}{3K+\mu}$ | $2\mu(1+\nu)$ | $E$ | $E$ |
| $\nu$ | $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ | $\frac{3K-2\mu}{6K+2\mu}$ | $\nu$ | $\nu$ | $\frac{E}{2\mu} - 1$ |

# Ограничения на упругие параметры

Откуда их брать?

# Ограничения на упругие параметры

- Должны ли малые возмущения оставаться малыми при отсутствии внешних сил?
- Должен ли материал сжиматься, если на него оказывают давление в каждой точке?
- Одно ли это и то же?
- ?..

# Ограничения на упругие параметры — устойчивость материала

Малые возмущения остаются малыми при отсутствии внешних сил: свободные колебания — это волны.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \equiv \nabla \cdot (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S) \equiv (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

Ищем $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$. Два возможных решения:

1. Волна растяжения – сжатия (продольная волна):

$$\mathbf{u}_0 = u_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad \omega = c_p k, \quad c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

2. Волна сдвига (поперечная волна):

$$\mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0, \quad \omega = c_s k, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Требуем, чтобы возмущения не росли: $c_p^2 > 0, c_s^2 > 0$.

**Условие устойчивости линейного материала**

$$\lambda + 2\mu > 0, \qquad \mu > 0$$

# Ограничения на упругие параметры — положительная определенность энергии деформации

Если мы потребуем, чтобы при любой деформации накапливалась упругая энергия, мы получим условия:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \qquad \mu > 0$$

Условие $\mu > 0$ означает, что при сдвиге накапливается энергия деформации.
Условие $K > 0$ означает, что при изотропном растяжении – сжатии накапливается энергия деформации. Или: гидростатическое давление приводит к сжатию ($\nabla \cdot \mathbf{u}$ и $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}$ одного знака).

Странно: это не то же самое, что условие устойчивости при свободных колебаниях!
При $-2\mu < \lambda < -2\mu/3$ гидростатическое давление приводит к расширению, но волна растяжения – сжатия существует, не превращаясь в растущее решение.

# Неположительная энергия деформации

## Анализ уникального метаматериала с помощью численного моделирования

by Caty Fairclough 07/08/2017

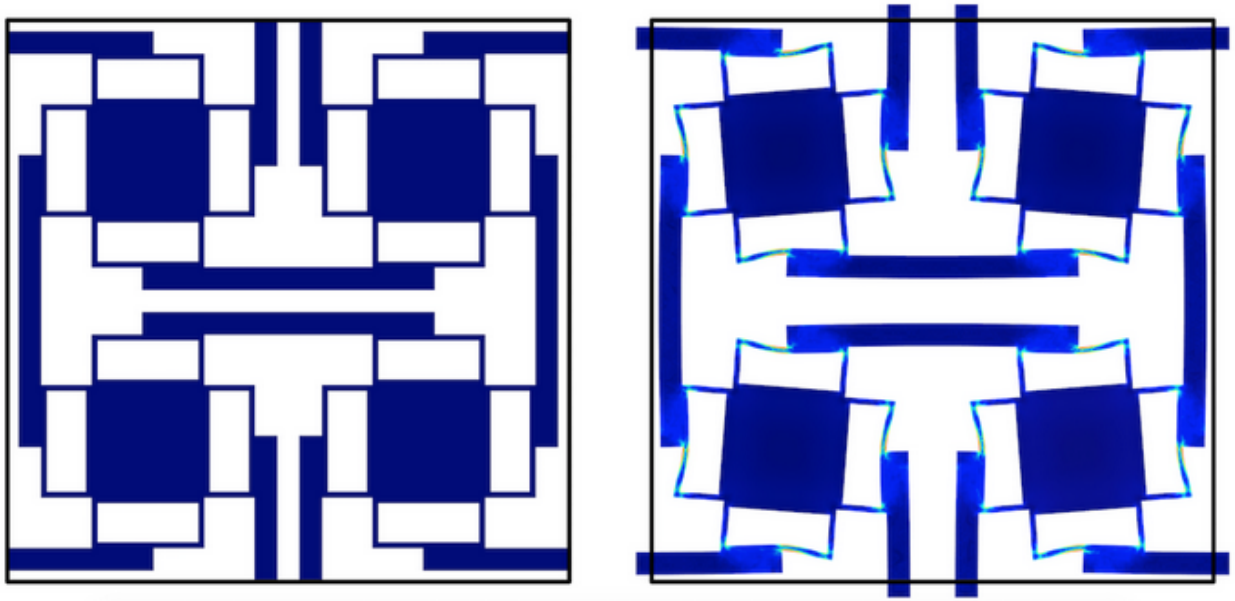
Метаматериалы — это искусственные материалы со свойствами, которые зависят от особой внутренней структуры, а не от его химического состава. Они часто имеют комплексную структуру, что затрудняет изготовление этих материалов. В данной заметке нашего корпоративного блога мы представляем численный анализ, в котором исследуется такой объект — пороупругий метаматериал (изготовленный из единого материала с пустотами), обладающий способностью расширяться под гидростатическим давлением.

Это иное определение метаматериала, чем используют в динамике.

# Неположительная энергия деформации

Так почему же этот метаматериал расширяется? Чтобы ответить на этот вопрос, давайте заглянем внутрь метаматериала, имеющего одно единственное составляющее твердое вещество. Внутри материала находятся полые 3D-пересечения со скрытыми внутренними объемами, которые содержат воздух при постоянном давлении. Каждое пересечение также имеет круглые мембраны, прикрепленные к его концам.

Когда окружающее давление начинает отличаться от давления внутри пересечений, эти мембраны изгибаются внутрь или наружу. Стержни, асимметрично соединенные с мембранами, преобразуют этот изгиб в поперечное вращение. Если гидростатическое давление снаружи больше, чем давление внутри, то отдельные вращения приводят к изотропному расширению конструкции, вызывая возникновение отрицательной эффективной сжимаемости.



*Элементарная ячейка при нулевом давлении (слева) и повышенном давлении (справа), демонстрирующая принцип возникновения отрицательной сжимаемости. Изображение предоставлено Jingyuan Ou и Muamer Kadic.*

# Продольная волна: напряженное состояние

Продольная волна: $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{k}} = u_0\hat{\mathbf{k}}\exp(i\omega(t - \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}/c_p))$, $c_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$.

$$\nabla\mathbf{u}^S = iku\,\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu\nabla\mathbf{u}^S$$

$$\boldsymbol{\tau}_p = i(\lambda\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + \mu(\mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{k})) = iku_0\exp(i\omega(t - \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}/c_p))(\lambda\mathbf{E} + 2\mu\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$$

$$\boldsymbol{\tau} = iku(\lambda\mathbf{E} + 2\mu\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$$

i означает сдвиг по фазе на $\pi/2$ (если $\mathbf{u}$ — синус, то $\boldsymbol{\tau}$ — косинус). Тензор напряжений в случае продольной свободной волны не является шаровым. Он трансверсально-изотропен, ось его симметрии — $\hat{\mathbf{k}}$. Шаровая часть тензора напряжений равна

$$\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}\mathbf{E} = iku(\lambda + \frac{2}{3}\mu)\mathbf{E} = ikuK\mathbf{E}, \qquad \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\nabla\mathbf{u}^S)\mathbf{E} = iku\mathbf{E}/3$$

Сдвиговые напряжения таковы:

$$\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} - ikuK\mathbf{E} = iku\frac{2\mu}{3}(2\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} - (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})),$$

$$\mathrm{dev}\,\nabla\mathbf{u}^S = iku\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} - iku\mathbf{E}/3 = ik(2\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} - (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}))/3$$

# Поперечная волна: напряженное состояние

Поперечная волна:
$\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{m}} = u_0\hat{\mathbf{m}}\exp(i\omega(t - \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}/c_s)), \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \hat{\mathbf{m}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0.$

$$\nabla\mathbf{u}^S = iku(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{m}})^S$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu\nabla\mathbf{u}^S$$

$$\boldsymbol{\tau}_s = i(\lambda\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + \mu(\mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{k})) = iku_0\exp(i\omega(t - \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}/c_p))2\mu(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{m}})^S$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2iku\mu\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{m}}^S$$

Шаровая часть тензора напряжений равна 0, присутствуют только сдвиговые напряжения.
Возможно, в связи с этим условия устойчивости сдвиговой волны и положительной определенности по сдвиговым напряжениям совпадают, а для продольной волны — нет.

# О граничных условиях

Для нахождения решений в задачах для тел с границами необходимо задать либо начальные условия (перемещение или напряжение в заданный момент времени), либо граничные (на поверхности тела). Граничные условия бывают

1. Кинематические: $\mathbf{u}\big|_S = \mathbf{U}$
2. Силовые: $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}\big|_S = \mathbf{t}$
3. Смешанные (на одной части поверхности кинематические, на оставшейся статические)

Если уравнения среды — уравнения в перемещениях (Ламе, Навье–Коши), то силовые нужно выразить через кинематические:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{X} \cdot\cdot \nabla \mathbf{u}^S)\big|_S = \mathbf{t}$$

# Статика. Формула Клапейрона

В линейной среде плотность энергии деформации равна

$$\rho U = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}^S \cdot\cdot\, \mathbf{X} \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u}^S = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u}^S$$

Из баланса сил в равновесии для объема $V$, на поверхность которого действуют внешние силы $\mathbf{t}$:

$$\int\limits_V (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f})\cdot\mathbf{u}\,dV - \int\limits_S (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t})\cdot\mathbf{u}\,dS = \mathbf{0}$$

Баланс моментов $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\top$ влечет математический факт:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u}^S$$

$$\int\limits_V (\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u}^S + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})\,dV - \int\limits_S (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t})\cdot\mathbf{u}\,dS = \mathbf{0}$$

$$\int\limits_V (\cancel{\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u})} - \boldsymbol{\tau} \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u}^S + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})\,dV - \int\limits_S (\cancel{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u}} - \mathbf{t}\cdot\mathbf{u})\,dS = \mathbf{0}$$

# Статика в линейной среде. Формула Клапейрона

**Формула Клапейрона: энергия деформации равна половине работы внешних сил на достигнутых перемещениях**

$$2\int\limits_V \rho U\,dV = \int\limits_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,dV + \int\limits_S \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\,dS$$

Если мы требуем положительную определенность энергии среды (например, в изотропной среде $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$, $\mu > 0$), это означает, что такая работа тоже положительна.
Это условие можно записать как

$$E(1+\nu) > 0, \quad (1+\nu)(1-2\nu) > 0$$

Отсюда при $E > 0$ и положительно определенной энергии $\nu < 1/2$.
Устойчивость свободного от воздействий материала:

$$E(1+\nu) > 0, \quad (\nu-1)(1-2\nu) < 0$$

Второе условие дает: либо $\nu < 1/2$, либо $\nu > 1$.
**В обычных материалах $0<\nu<1/2$.** Но есть и экзотические.

# Теорема Кирхгофа о единственности решения основных задач статики линейного упругого тела

(для **положительно определенной** энергии деформации)
Густав Кирхгоф (Gustav Robert Kirchhoff; 1824–1887) — немецкий физик. Работы: электричество, механика, спектральный анализ.

В линейном упругом теле с положительно определенной энергией деформации, на которое действуют внешние объемные силы, с заданными на границе перемещениями или поверхностными силами решение статической задачи единственно с точностью до жесткого движения

Существование решения доказать непросто. Это сделали Корн (1907) и Лихтенштейн (1924).

# Теорема Кирхгофа о единственности решения основных задач статики линейного упругого тела с положительно определенной энергией.

Доказательство (от противного). Пусть существует два решения 1,2. Рассмотрим их разность $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, тогда $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, в силу линейности $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2$. На части поверхности, где были заданы кинематические граничные условия, $\mathbf{u}|_{S_1} = \mathbf{0}$, там, где статические $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{S_2} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2)|_{S_2} = \mathbf{t} - \mathbf{t} = \mathbf{0}$. Объемные силы равны $\mathbf{f} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$. По теореме Клапейрона

$$2\int\limits_V U dV = -\int\limits_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} + \int\limits_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} = \int\limits_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \int\limits_{S_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{0} + \int\limits_{S_2} \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$U \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad U = 0$ в каждой точке, $\nabla \mathbf{u}^S = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}$ может представлять собою жесткое движение.

---

Вопрос: в экзотическом случае $K < 0, \lambda + 2\mu > 0$ (метаматериал) решение не обязано быть единственным?

# Еще об упругих константах

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu}, \quad \frac{1}{2\mu} = \frac{1+\nu}{E}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S$$

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} = (3\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \mathbf{u} = 3K\nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\nabla \mathbf{u}^S = \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu}\operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}\mathbf{E})$$

Почти несжимаемый линейный материал: $\nabla \cdot \mathbf{u} \to 0$

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}(1 - 3\frac{\nu}{1+\nu}) \to 0$$

$$\nu \to \frac{1}{2}$$

# Линейная изотропная статическая теория: уравнения Бельтрами–Митчелла

В некоторых случаях в равновесии нас интересует лишь поле напряжений, а не перемещений. Однако баланса сил недостаточно, чтобы найти напряжения: тензор линейных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, который связан $\boldsymbol{\tau}$ определяющим уравнением, должен удовлетворять уравнению совместности деформаций.

**Статические уравнения линейной изотропной среды в напряжениях — уравнения Бельтрами-Митчелла**

$$\triangle\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} + 2\rho(\nabla\mathbf{f})^S + \frac{\nu}{1-\nu}\rho\nabla\cdot\mathbf{f}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Докажем это, используя

1. баланс сил $\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f} = \mathbf{0}$
2. определяющие уравнения изотропной среды $\boldsymbol{\tau} = \lambda\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$
3. уравнение совместности деформаций $\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}\times\nabla = \mathbf{0}$

# Уравнения в напряжениях. Немного истории

Эудженио Бельтрами (Eugenio Beltrami), 1835–1900, итальянский математик и механик. Среди его работ — доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Работа Osservazioni sulla Nota precedente. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (Vol. I, Serie V, 1º Sem., pp. 137–141, Roma 1892)

Джачинто Морера (Giacinto Morera), 1856–1909 — итальянский математик и инженер.
Работа Бельтрами — комментарий к работе
Giacinto Morera. Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo в том же томе трудов Королевской академии деи Линчеи, где получены уравнения теории упругости в напряжениях. Общность этих работ одинакова, но Бельтрами не сразу с этим согласился.

Джон Генри Митчелл (John Henry Michell), 1863–1940, австралийский математик и механик. Работа
On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates, Proc. Lond. Math. Soc. 31 (1899) 100-124.

# Уравнения Бельтрами–Митчелла. Доказательство

См. Немов, Подольская, Новокшенов, Филиппов.

Вспомогательный факт:

$$\mathbf{E}\times\times(\mathbf{E}\times\times\boldsymbol{\Lambda}) = \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\times\times(\mathbf{E}\times\times\boldsymbol{\lambda}_m\boldsymbol{\lambda}_n) &= \mathbf{E}\times\times((\mathbf{e}_k\times\boldsymbol{\lambda}_m)(\mathbf{e}_k\times\boldsymbol{\lambda}_n)) \\
&= \mathbf{e}_l\times(\mathbf{e}_k\times\boldsymbol{\lambda}_m)\mathbf{e}_l\times(\mathbf{e}_k\times\boldsymbol{\lambda}_n) \\
&= (\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_l\cdot\boldsymbol{\lambda}_m)-\boldsymbol{\lambda}_m\delta_{kl})(\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_l\cdot\boldsymbol{\lambda}_n)-\boldsymbol{\lambda}_n\delta_{kl}) \\
&= \mathbf{e}_k(\mathbf{e}_l\cdot\boldsymbol{\lambda}_m)\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_l\cdot\boldsymbol{\lambda}_n)-\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_l\cdot\boldsymbol{\lambda}_m)\boldsymbol{\lambda}_n\delta_{kl}-\boldsymbol{\lambda}_m\delta_{kl}\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_l\cdot\boldsymbol{\lambda}_n)+\boldsymbol{\lambda}_m\delta_{kl}\boldsymbol{\lambda}_n\delta_{kl} \\
&= \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\boldsymbol{\lambda}_m\boldsymbol{\lambda}_n\cdot\cdot\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l-\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\cdot\boldsymbol{\lambda}_m\boldsymbol{\lambda}_n-\boldsymbol{\lambda}_m\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_k\cdot\boldsymbol{\lambda}_n)+\boldsymbol{\lambda}_m\boldsymbol{\lambda}_n\delta_{kl}^2 \\
&= \mathbf{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}+3\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{\Lambda}
\end{aligned}$$

---

Заметим: $\boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{E}\times\times(\mathbf{E}\times\times\boldsymbol{\Lambda})=\mathbf{0}$,

$$\mathbf{E}\times\times(\mathbf{E}\times\times\boldsymbol{\Lambda})=\mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{\Lambda}=-\mathbf{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tr}\boldsymbol{\Lambda}=0, \quad \boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{0}.$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{0} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{E}\times\times(\mathbf{E}\times\times\boldsymbol{\Lambda})=\mathbf{0}$$

# Уравнения Бельтрами–Митчелла. Доказательство

Рассмотрим $\mathbf{\Lambda} = -\nabla \times \varepsilon \times \nabla = -\nabla\nabla \times \times \varepsilon$. Тогда уравнения

$$\nabla \times \varepsilon \times \nabla = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{E} \times \times (\nabla \times \varepsilon \times \nabla) = \mathbf{0}$$

равносильны. Последнее дает

**Вторая форма уравнений совместности деформаций**

$$\triangle\varepsilon + \nabla\nabla \operatorname{tr} \varepsilon - \nabla\nabla \cdot \varepsilon - \varepsilon \cdot \nabla\nabla = \mathbf{0}$$

Доказательство (здесь каждый $\nabla$ действует как дифференциальный оператор на все выражение):

$$\mathbf{E}\times\times(\nabla\times\varepsilon\times\nabla) = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\times\times(\nabla\times\varepsilon_m\varepsilon_n\times\nabla) = \mathbf{e}_k\times(\nabla\times\varepsilon_m)\mathbf{e}_k\times(\varepsilon_n\times\nabla) =$$

$$= -(\nabla\varepsilon_m \cdot \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k \cdot \nabla\varepsilon_m)(\nabla\varepsilon_n \cdot \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k \cdot \nabla\varepsilon_n)$$

$$= -\nabla(\varepsilon_m\cdot\mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k\cdot\varepsilon_n)\nabla + \nabla\varepsilon_m\cdot\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\cdot\nabla\varepsilon_n + \mathbf{e}_k\cdot\nabla\varepsilon_m\nabla\varepsilon_n\cdot\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k\cdot\nabla\varepsilon_m\mathbf{e}_k\cdot\nabla\varepsilon_n$$

$$= -\nabla(\varepsilon_m \cdot \varepsilon_n)\nabla + \nabla\varepsilon_m \cdot \nabla\varepsilon_n + \nabla \cdot \mathbf{e}_k\varepsilon_m\mathbf{e}_k \cdot \varepsilon_n\nabla - \partial_k^2\varepsilon_m\varepsilon_n$$

$$= -\nabla\nabla \operatorname{tr} \varepsilon + \nabla\nabla \cdot \varepsilon + \varepsilon_m\varepsilon_n \cdot \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k \cdot \nabla\nabla - \partial_k^2\varepsilon_m\varepsilon_n$$

$$= -\nabla\nabla \operatorname{tr} \varepsilon + \nabla\nabla \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \nabla\nabla - \triangle\varepsilon$$

# Уравнения Бельтрами–Митчелла. Доказательство

$$\mathbf{E} \times \times (\nabla \times (\boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau}\, \mathbf{E}) \times \nabla) = \mathbf{0}$$

$$\triangle \boldsymbol{\tau} + \nabla\nabla \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} - \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\nabla$$
$$- \frac{\nu}{1+\nu} (\triangle \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau}\, \mathbf{E} + \nabla\nabla \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} \mathrm{tr}\, \mathbf{E} - \nabla\nabla \cdot \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau}\, \mathbf{E} - \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau}\, \mathbf{E} \cdot \nabla\nabla) = \mathbf{0}$$

$$\triangle \boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu} \triangle \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau}\, \mathbf{E} + 2\rho (\nabla \mathbf{f})^S + \frac{1}{1+\nu} \nabla\nabla \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad |\mathrm{tr}\,(.)$$

$$\triangle \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \rho \nabla \cdot \mathbf{f}$$

$$\triangle \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{1+\nu} \nabla\nabla \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} + 2\rho (\nabla \mathbf{f})^S + \frac{\nu}{1-\nu} \rho \nabla \cdot \mathbf{f}\, \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

**При отсутствии градиента внешних объемных сил**

$$\triangle \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{1+\nu} \nabla\nabla \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

# Уравнения в напряжениях. Полная система

**Уравнения в напряжениях при отсутствии внешних объемных сил в статической линейной изотропной теории упругости**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

$$\triangle \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

Для решения данной задачи необходимо поставить граничные условия:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \Big|_S = \mathbf{t}$$

# Уравнения в напряжениях. Форма Победри

Взяв след уравнений Бельтрами – Митчелла, получаем

$$\triangle \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} = 0$$

Взяв от них дивергенцию, имеем

$$\triangle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{1+\nu} \triangle \nabla \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow$$

$$\triangle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0},$$

уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

становятся тремя из шести граничных условий для $\boldsymbol{\tau}$. Оставшиеся три — силовые:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}\big|_S = \mathbf{t}.$$

Упражнение. Вывести уравнения в напряжениях для динамического линейного изотропного случая ($\ddot{\mathbf{u}} \neq 0$).

# Теорема взаимности (Бетти, 1872)

Энрико Бетти (Enrico Betti Glaoui),1823–1892 — итальянский математик и механик

## Теорема взаимности для линейного упругого тела

Пусть есть два состояния равновесия, характеризуемые перемещениями $\mathbf{u}', \mathbf{u}''$, $\varepsilon' = \nabla \mathbf{u}'^S, \varepsilon'' = \nabla \mathbf{u}''^S$, тензорами напряжения $\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\tau}''$, объемными силами $\mathbf{f}', \mathbf{f}''$, поверхностными силами $\mathbf{t}', \mathbf{t}''$. Тогда **работа внешних сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе внешних сил второго состояния на перемещениях первого состояния:**

$$\int\limits_V \rho \mathbf{f}' \cdot \mathbf{u}'' + \int\limits_S \mathbf{t}' \cdot \mathbf{u}'' = \int\limits_V \rho \mathbf{f}'' \cdot \mathbf{u}' + \int\limits_S \mathbf{t}'' \cdot \mathbf{u}'.$$

Эта теорема позволяет давать оценки. Если выбрать известное (простое) напряженное состояние в качестве первого, то можно получить осредненные величины для $\mathbf{u}''$.

# Теорема взаимности Бетти. Доказательство

$$\int\limits_V \rho\mathbf{f}''\cdot\mathbf{u}' + \int\limits_S \mathbf{t}''\cdot\mathbf{u}' = -\int\limits_V \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}''\cdot\mathbf{u}' + \int\limits_S \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}''\cdot\mathbf{u}'$$

$$= -\cancel{\int\limits_V \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}''\cdot\mathbf{u}')} + \int\limits_V \boldsymbol{\tau}''\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}'^S + \cancel{\int\limits_S \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}''\cdot\mathbf{u}'} = \int\limits_V \boldsymbol{\tau}''\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}'^S.$$

$$\int\limits_V \rho\mathbf{f}''\cdot\mathbf{u}' + \int\limits_S \mathbf{t}''\cdot\mathbf{u}' = \int\limits_V \boldsymbol{\tau}''\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}'^S.$$

$$\int\limits_V \boldsymbol{\tau}''\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}'^S = \int\limits_V \nabla\mathbf{u}''^S\cdot\cdot\mathbf{X}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}'^S = \int\limits_V \boldsymbol{\tau}'\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}''^S.$$

Quod erat demonstrandum.

# Тензор влияния. Теорема Максвелла

Пусть в точке Q (истока) на тело действует сила $\mathbf{e}_Q$. Она уравновешена реакциями идеальных опор (при перемещении суммарная работа сил в опорах 0). Из линейности перемещение в точке наблюдения M

$$\mathbf{u}(M, Q) = \hat{\mathbf{G}}(M, Q) \cdot \mathbf{e}_Q$$

Ввели тензор влияния Максвелла $\hat{\mathbf{G}}(M, Q)$ (зависит от тела).

**Теорема Максвелла**

$$\hat{\mathbf{G}}(M, Q) = \hat{\mathbf{G}}^\top(Q, M)$$

Доказательство.
Меняя точку истока и наблюдения, получим

$$\mathbf{u}(Q, M) = \hat{\mathbf{G}}(Q, M) \cdot \mathbf{e}_M$$

По теореме взаимности Бетти

$$\mathbf{e}_M \cdot \hat{\mathbf{G}}(M, Q) \cdot \mathbf{e}_Q = \mathbf{e}_M \cdot \mathbf{u}(M, Q) = \mathbf{e}_Q \cdot \mathbf{u}(Q, M) = \mathbf{e}_Q \cdot \hat{\mathbf{G}}(Q, M) \cdot \mathbf{e}_M$$

# Для чего нужен тензор влияния?

С ним мы можем численно или аналитически решить любую задачу. Это обеспечено линейностью. Если задана распределенная нагрузка $\rho\mathbf{f}(\mathbf{R}_Q)$ в области $V_Q$, достаточно ее проинтегрировать с “весом” — тензором влияния.

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}_M) = \int\limits_{V_Q} \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{R}_M, \mathbf{R}_Q) \cdot \rho\mathbf{f}(\mathbf{R}_Q) dV_Q$$

# Тензор Кельвина–Сомильяны: тензор влияния в неограниченной упругой среде

Лорд Кельвин (Уильям Томсон), William Thomson, Baron Kelvin, 1824–1907 — великий британский механик, физик, математик, инженер.

Карло Сомильяна (Carlo Somigliana), 1860–1955 — итальянский математик и механик, ученик Бельтрами и Бетти.

Пусть в точке $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ безграничного упругого пространства приложена сила $\mathbf{e}$, $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор.

**Перемещение, вызванное силой $\mathbf{e}$, приложенной в начале системы отсчета**

$$\mathbf{u} = \frac{A}{R}((3-4\nu)\mathbf{e} + \mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) = \frac{A}{R}((3-4\nu)\mathbf{E} + \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\cdot\mathbf{e}$$

$$A^{-1} = 16\pi\mu(1-\nu)$$

$$\mathbf{\Phi}_{KS} = \frac{A}{R}((3-4\nu)\mathbf{E} + \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})$$ — тензор Кельвина–Сомильяны

# Тензор Кельвина–Сомильяны

Используем единственность решения статической задачи теории упругости при положительно определенной энергии деформации (стр. 160,161).

Если предлагаемое решение удовлетворяет условиям равновесия, то оно верное и единственное для материала с положительно определенной энергией. При $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ должно быть

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0},$$

для поверхности, внутри которой есть точка 0,

$$\int\limits_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dS = -\mathbf{e}.$$

Как догадаться, что решение имеет вид $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi}_{KS} \cdot \mathbf{e}$?

Асимптотика $1/R$, т.к. $\boldsymbol{\tau}$ должно убывать как $1/R^2$ по теореме Гаусса и из уравнения равновесия. Тензор $\boldsymbol{\Phi}_{KS}$ не может зависеть от $\mathbf{e}$ в силу линейности. Единственный вектор, от которого зависит $R\boldsymbol{\Phi}_{KS}$ — это $\hat{\mathbf{R}}$, значит, $R\boldsymbol{\Phi}_{KS} = a_1\mathbf{E} + a_2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}$ (трансверсально-изотропный)

# Вспомогательные математические факты

$$2R\nabla R = \nabla R^2 = \nabla(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}) = (\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{R} + \mathbf{i}_k\mathbf{R}\cdot\partial_k\mathbf{R} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{R} + \mathbf{i}_k\mathbf{R}\cdot\mathbf{i}_k = 2\mathbf{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla R = \mathbf{R}/R = \hat{\mathbf{R}}, \quad \nabla R^{-1} = -R^{-2}\nabla R = -\hat{\mathbf{R}}/R^2$$

$$\nabla\hat{\mathbf{R}} = \nabla(\mathbf{R}/R) = \mathbf{E}/R + (\nabla R^{-1})\mathbf{R} = \mathbf{E}/R - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{R}/R^2 = (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})/R$$

$$\nabla\cdot\hat{\mathbf{R}} = 2/R$$

$$\nabla(\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) = (\nabla\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{i}_k\hat{\mathbf{R}}\partial_k(R^{-1}\mathbf{R})$$

$$= R^{-1}(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{i}_k\hat{\mathbf{R}}R^{-1}\mathbf{i}_k + \mathbf{i}_k\hat{\mathbf{R}}\partial_k(R^{-1})\mathbf{R}$$

$$= R^{-1}(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}+\mathbf{i}_k\hat{\mathbf{R}}R^{-1}\mathbf{i}_k - R^{-3}x_k\mathbf{i}_k\hat{\mathbf{R}}\mathbf{R} = R^{-1}(\mathbf{E}\hat{\mathbf{R}}-2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}+\mathbf{i}_k\hat{\mathbf{R}}\mathbf{i}_k)$$

$$\nabla\cdot(\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) = (\nabla\cdot\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}\cdot(\nabla\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{i}_k\cdot\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\partial_k\hat{\mathbf{R}} =$$

$$= R^{-1}(2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}\cdot(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}) + \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{i}_k\partial_k\hat{\mathbf{R}}$$

$$= R^{-1}(2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}\cdot(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}) + \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{i}_k\partial_k\hat{\mathbf{R}} = 2R^{-1}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\nabla\hat{\mathbf{R}}$$

$$= R^{-1}(2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})) = 2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}/R$$

# Вспомогательные математические факты — резюме

$$\nabla R = \hat{\mathbf{R}}$$

$$\nabla R^{-1} = -\hat{\mathbf{R}}/R^2$$

$$\nabla \hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})/R = \nabla \hat{\mathbf{R}}^\top$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{R}} = 2/R$$

$$\nabla(\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) = R^{-1}(\mathbf{E}\hat{\mathbf{R}} - 2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{i}_k\hat{\mathbf{R}}\mathbf{i}_k)$$

$$\nabla \cdot (\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) = 2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}/R$$

# Тензор Кельвина–Сомильяны

$$\nabla\mathbf{u} = \nabla(R^{-1}(a_1\mathbf{E} + a_2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\cdot\mathbf{e}) =$$
$$= (\nabla R^{-1})(a_1\mathbf{E} + a_2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\cdot\mathbf{e} + R^{-1}(\nabla(a_1\mathbf{E} + a_2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}))\cdot\mathbf{e}$$
$$= -R^{-2}\hat{\mathbf{R}}(a_1\mathbf{E} + a_2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\cdot\mathbf{e} + R^{-1}a_2\nabla(\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\cdot\mathbf{e}$$
$$= -R^{-2}\hat{\mathbf{R}}(a_1\mathbf{E} + a_2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\cdot\mathbf{e} + R^{-2}a_2(\mathbf{E}\,\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e} + \mathbf{e}\hat{\mathbf{R}} - 2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e})$$
$$= R^{-2}(a_2\mathbf{E}\,\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e} - a_1\hat{\mathbf{R}}\mathbf{e} + a_2\mathbf{e}\hat{\mathbf{R}} - 3a_2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e})$$

Тензор линейных деформаций:

$$\nabla\mathbf{u}^S = R^{-2}(a_2(\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e} + (a_2 - a_1)(\mathbf{e}\hat{\mathbf{R}})^S)$$
$$\nabla\cdot\mathbf{u} = R^{-2}(a_2 - a_1)\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}$$

Тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu\nabla\mathbf{u}^S =$$
$$= R^{-2}(\lambda(a_2 - a_1)\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}\mathbf{E} + 2\mu(a_2(\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e} + (a_2 - a_1)(\mathbf{e}\hat{\mathbf{R}})^S))$$

# Тензор Кельвина–Сомильяны

Потребуем выполнения уравнения равновесия. Вычислим $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\tau} = \nabla(R^{-2})\cdot(\lambda(a_2-a_1)\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}\mathbf{E}+2\mu(a_2(\mathbf{E}-3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}+(a_2-a_1)(\mathbf{e}\hat{\mathbf{R}})^S))$$

$$+ R^{-2}\nabla\cdot(\lambda(a_2-a_1)\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}\mathbf{E}+2\mu(a_2(\mathbf{E}-3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}+(a_2-a_1)(\mathbf{e}\hat{\mathbf{R}})^S))$$

$$= -2R^{-3}\hat{\mathbf{R}}\cdot(\lambda(a_2-a_1)\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}\mathbf{E}+2\mu(a_2(\mathbf{E}-3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}+(a_2-a_1)(\mathbf{e}\hat{\mathbf{R}})^S))$$

$$+R^{-2}(((\lambda+2\mu)a_2-\lambda a_1)\nabla\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}-6\mu a_2\nabla\cdot(\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\cdot\mathbf{e}+\mu(a_2-a_1)(\mathbf{e}\cdot\nabla\hat{\mathbf{R}}+\nabla\cdot\hat{\mathbf{R}}\mathbf{e})$$

$$= R^{-3}((2\lambda(a_1-a_2)+8\mu a_2+2\mu(a_1-a_2))\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}+\cancel{2\mu(a_1-a_2)\mathbf{e}}+$$

$$+((\lambda+3\mu)a_2-(\lambda+\mu)a_1)\mathbf{e}-((\lambda+3\mu)a_2-(\lambda+\mu)a_1)\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}+\cancel{2\mu(a_2-a_1)\mathbf{e}}$$

$$-12\mu a_2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e})$$

$$= R^{-3}(a_1(\lambda+\mu)-a_2(\lambda+3\mu))(3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}-\mathbf{e})$$

При $\mathbf{R}=0$ это сингулярное выражение. При $\mathbf{R}\neq 0$ оно равно нулю при

$$a_1 = a_2\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = (3-4\nu)a_2$$

# Тензор Кельвина–Сомильяны

$$\mathbf{\Phi}_{KS} = \frac{a_2}{R}((3-4\nu)\mathbf{E} + \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})$$

Тензор линейных деформаций:

$$\nabla\mathbf{u}^S = R^{-2}a_2((\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e} - 2(1-2\nu)(\mathbf{e}\hat{\mathbf{R}})^S)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = -2R^{-2}a_2(1-2\nu)\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{2\mu a_2}{R^2}((1-2\nu)(\mathbf{E}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e} - 2(\hat{\mathbf{R}}\mathbf{e})^S) - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e})$$

Откуда найти $a_2$?

При интегрировании поверхностных сил по сфере, содержащей источник, мы должны получить $-\mathbf{e}$.

# Тензор Кельвина–Сомильяны

$$\int\limits_S \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dS = 2\mu a_2 \int\limits_S R^{-2}((1-2\nu)(\mathbf{n}\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{R}}\mathbf{E} - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{n}) - 3\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})dS\cdot\mathbf{e} =$$

$$= 2\mu a_2 \int\limits_S R^{-2}((1-2\nu)(\cancel{\mathbf{nn}} - \mathbf{E} - \cancel{\mathbf{nn}}) - 3\mathbf{nn})\, dS\cdot\mathbf{e} =$$

$$= -2\mu a_2(1-2\nu)4\pi\mathbf{e} - 6\mu a_2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{nn}\sin\theta d\theta d\varphi\cdot\mathbf{e}$$

$\mathbf{n} = \cos\theta\mathbf{j} + \sin\theta(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{k})$

$\mathbf{nn} = \cos^2\theta\,\mathbf{jj} + \sin^2\theta(\cos^2\varphi\,\mathbf{ii} + \sin^2\varphi\,\mathbf{kk}) + \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\,(\mathbf{ik} + \mathbf{ki}) +$
$+ \cos\theta\sin\theta\sin\varphi\,(\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) + \cos\theta\sin\theta\cos\varphi\,(\mathbf{ij} + \mathbf{ji})$

$$\int\limits_S \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dS = -2\mu a_2(4\pi(1-2\nu) + 3\frac{4\pi}{3})\mathbf{e} = -16\pi\mu a_2(1-\nu) = -\mathbf{e}$$

$$a_2 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}$$

# Частная задача Буссинеска (сила $Q\mathbf{e}$, ортогональная границе полупространства)

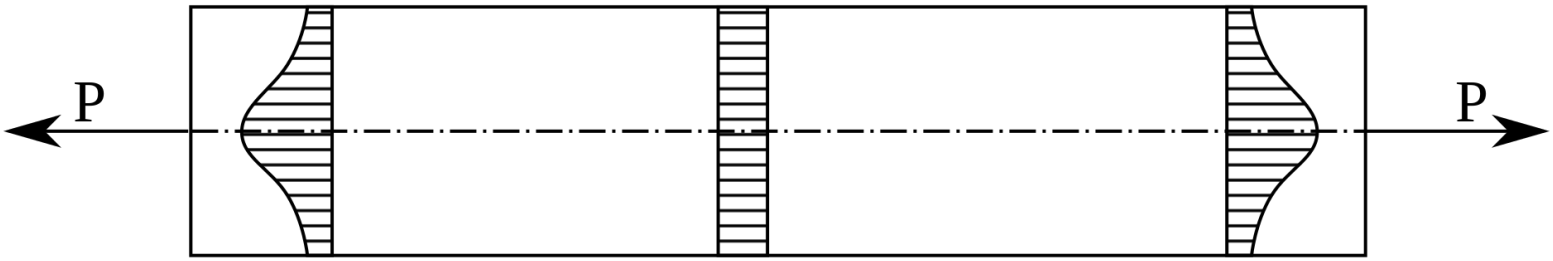
$$\boldsymbol{\tau} = \frac{Q}{2\pi R^2}\Bigg((1-2\nu)\mathbf{E}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e} - 2(\hat{\mathbf{R}}\mathbf{e})^S - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e} + \frac{1}{1+\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}}\Big(\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{E} + \frac{1}{1+\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}}(\hat{\mathbf{R}}+\mathbf{e})(\hat{\mathbf{R}}+\mathbf{e})\Big)\Bigg)$$

# Принцип Сен-Венана

Статически эквивалентная нулю система сил, распределенных по малому участку поверхности упругого тела, создает лишь локальное напряженное состояние.

Оно быстро затухает по мере удаления и становится малым на расстояниях, сравнимых с размерами этого участка.
Строгого доказательства нет. По-видимому, можно его провести для однородных тел определенной геометрии, опираясь на оценки для тензора Кельвина – Сомильяны и раскладывая его в ряд.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$




https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11088014

Осторожно, если есть неоднородности!

# Круги Мора (Christian Otto Mohr, 1835–1918, Германия)

Верно для любой классической теории упругости.

$$\boldsymbol{\tau} = \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$$

$\sigma_i$ — главные напряжения, выберем $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Это нормальные напряжения на площадках с нормалями $\mathbf{e}_i$ — собственными векторами $\boldsymbol{\tau}$. Касательных напряжений там нет.

На произвольной площадке с нормалью $\mathbf{n}$ погонная сила (вектор полных напряжений)

$$\mathbf{T}_\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{nn}\mathbf{n} + \tau_n \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

нормальное напряжение

$$\sigma_{nn} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = n_i^2 \sigma_i$$

касательное напряжение (максимальное в данной плоскости) $\tau_n$.

# Круги Мора

## Свойства главных напряжений

1. Из всех нормальных напряжений (если мы меняем нормаль $\mathbf{n}$) наибольшее и наименьшее — главные ($\sigma_1$, $\sigma_3$)
2. Наибольший и наименьший по модулю векторы полных напряжений — $\sigma_1\mathbf{e}_1$, $\sigma_3\mathbf{e}_3$ (соответствуют нормалям $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$).
3. Максимальное (для всех нормалей) касательное напряжение равно $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$, соответствующее ему нормальное равно $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$

Доказательство:

1. $\sigma_{nn} = \sigma_i n_i^2, \quad \sigma_3 = \sigma_3 n_i^2 \leqslant \sigma_i n_i^2 \leqslant \sigma_1 n_i^2 = \sigma_1$

2. $|\mathbf{T_n}|^2 = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = \sigma_i^2 n_i^2, \quad \sigma_3^2 = \sigma_3^2 n_i^2 \leqslant \sigma_i^2 n_i^2 \leqslant \sigma_1^2 n_i^2 = \sigma_1^2.$
Равенства достигаются для нормалей $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$.

# Круги Мора

3. Покажем, что

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$
$$\tau_n^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$
$$\tau_n^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 = \tau_n^2 + \sigma_{nn}^2 - \sigma_{nn}(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2$$
$$= \mathbf{T}_{\mathbf{n}}^2 - \sigma_{nn}(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 = \sigma_i^2 n_i^2 - \sigma_i(\sigma_1 + \sigma_2)n_i^2 + \sigma_1\sigma_2 n_i^2$$
$$= (\sigma_1 - \sigma_i)(\sigma_2 - \sigma_i)n_i^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)n_3^2 \geqslant 0$$

Аналогично

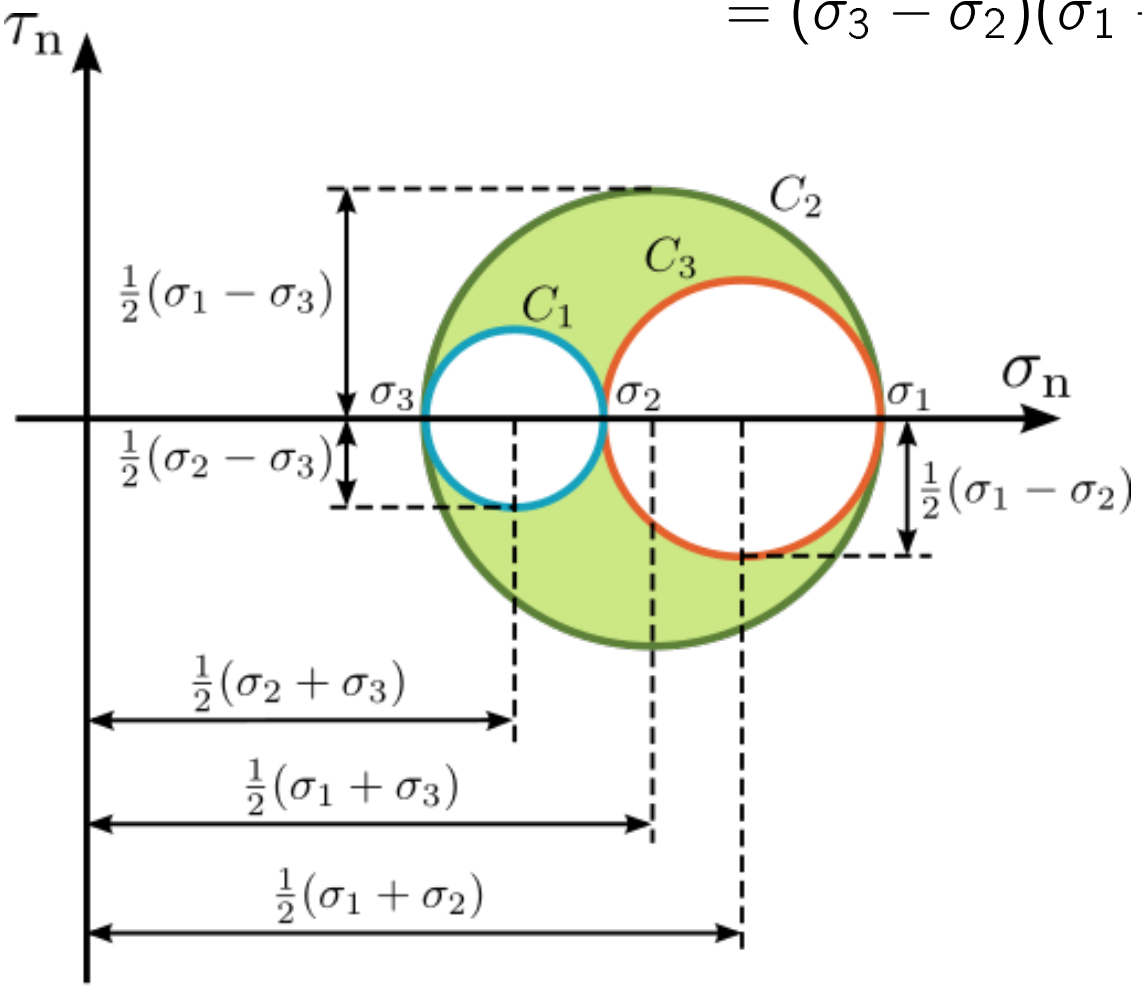
$$\tau_n^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = (\sigma_2 - \sigma_i)(\sigma_3 - \sigma_i)n_i^2$$
$$= (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)n_1^2 \geqslant 0$$

# Круги Мора

А также

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_{nn} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 = (\sigma_3 - \sigma_i)(\sigma_1 - \sigma_i)n_i^2$$

$$= (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)n_2^2 \leqslant 0$$




http://wp.wiki-wiki.ru/wp/index.php/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Mohr_Circle.svg

# Круги Мора

Максимальное касательное напряжение: верхняя точка большого круга.

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

при этом

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3).$$

Круги Мора используются для оценки напряжений по известным главным напряжениям.

# Оценки напряжений в классической упругости

1. Круги Мора — для любых задач классической теории, в том числе нелинейных и неупругих (касат. напряжения по главным)
2. Принцип Сен-Венана — по-видимому, для линейных, достаточно однородных и не очень изрезанных тел без дырок (можно заменять сложные граничные условия на статически эквивалентные для далеких от нагрузки участков)
3. Тензор Кельвина–Сомильяны: при удалении от нагрузки $\mathbf{u} \sim \frac{1}{R}, \boldsymbol{\tau} \sim \frac{1}{R^2}$ в линейной изотропной безграничной среде
4. Теорема Бетти о взаимности (линейная теория): из решения простой задачи получаем усредненные оценки для перемещений сложной, считая работу нагрузок сложной задачи на перемещениях простой.
5. Формула Клапейрона (статика в линейной среде): по перемещениям на границе получаем упругую энергию в объеме при нулевых объемных силах
6. Уравнения Бельтрами и принцип максимума для гармонической функции: при нулевых объемных силах давление принимает наибольшее и наименьшее значения на границе

# Задачи теории упругости для ограниченных тел

# Равновесие упругой сферы (по А.И. Лурье)

Баланс сил в статике (в перемещениях)

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

можно переписать (т.к. $\lambda/\mu = 2\nu/(1-2\nu)$) в виде

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (1-2\nu)\triangle\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Ищем решение в форме Треффтца

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + (R^2 - R_0^2)\nabla\Psi,$$

$R_0$ — радиус сферы, $\mathbf{U}$, $\Psi$ — гармонические функции:

$$\triangle\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \triangle\Psi = 0.$$

$$\triangle\mathbf{u} = \triangle(R^2\nabla\Psi) = 6\nabla\Psi + 4\mathbf{R}\cdot\nabla\nabla\Psi = \nabla(2\Psi + 4\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi),$$

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{U} + 2\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi)$$

# Равновесие упругой сферы

Получаем

$$(1-2\nu)\Psi + (3-4\nu)\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi + \frac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{U} = \mathbf{0}.$$

$$\nabla\mathbf{u}^S = \nabla\mathbf{U}^S + \mathbf{R}\nabla\Psi + \nabla\Psi\mathbf{R} + (R^2 - R_0^2)\nabla\nabla\Psi,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{U} + 2\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi.$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\nabla\cdot\mathbf{U}\mathbf{E} + \nabla\mathbf{U}^S + \frac{2\nu}{1-2\nu}\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi\mathbf{E} + 2(\mathbf{R}\nabla\Psi)^S + (R^2 - R_0^2)\nabla\nabla\Psi\right)$$

Вектор напряжений на поверхности сферы радиуса R ($\mathbf{n} = \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$)

$$\mathbf{T_n} = \hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\tau} = \frac{2\mu}{R}(\boldsymbol{\Pi} + (R^2 - R_0^2)\mathbf{R}\cdot\nabla\nabla\Psi),$$

$$\boldsymbol{\Pi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{R}\nabla\cdot\mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu}\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi + \mathbf{R}\cdot(\nabla\mathbf{U})^S + R^2\nabla\Psi.$$

# Равновесие упругой сферы

Легко показать, что $\triangle\mathbf{\Pi} = \mathbf{0}$. Используем

$$\triangle\mathbf{R}\nabla\cdot\mathbf{U} = 2\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}, \qquad \triangle\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi = 2\nabla(\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi),$$

$$\triangle\mathbf{R}\cdot(\nabla\mathbf{U})^S = \nabla\nabla\cdot\mathbf{U}, \qquad \triangle R^2\nabla\Psi = 2\nabla\Psi + 4\nabla\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi.$$

Имеем

$$(1-2\nu)\triangle\mathbf{\Pi} = 2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{U}/2 + (1-2\nu)\Psi + (3-4\nu)\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi),$$

а выражение в скобках равно нулю из баланса сил.

Теперь можно ставить краевую задачу.
Первая краевая задача: $\mathbf{u}|_{R=R_0} = \tilde{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{R}})$. Будем раскладывать этот вектор по сферическим векторам Лапласа.

# Сферические функции. Математические факты

Это решения уравнения Лапласа $\triangle Y = 0$, где $Y = Y(\theta, \varphi)$ (т.е. при $R = \text{const}$), образующие ортонормальный базис. Интегрируя по площади сферы одну сферическую функцию с другой комплексно сопряженной (*), получаем

$$\int |Y_l^m|^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 1, \qquad \int Y_l^m Y_{ll'}^{*\,m'} \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{mm'}\delta_{ll'}$$

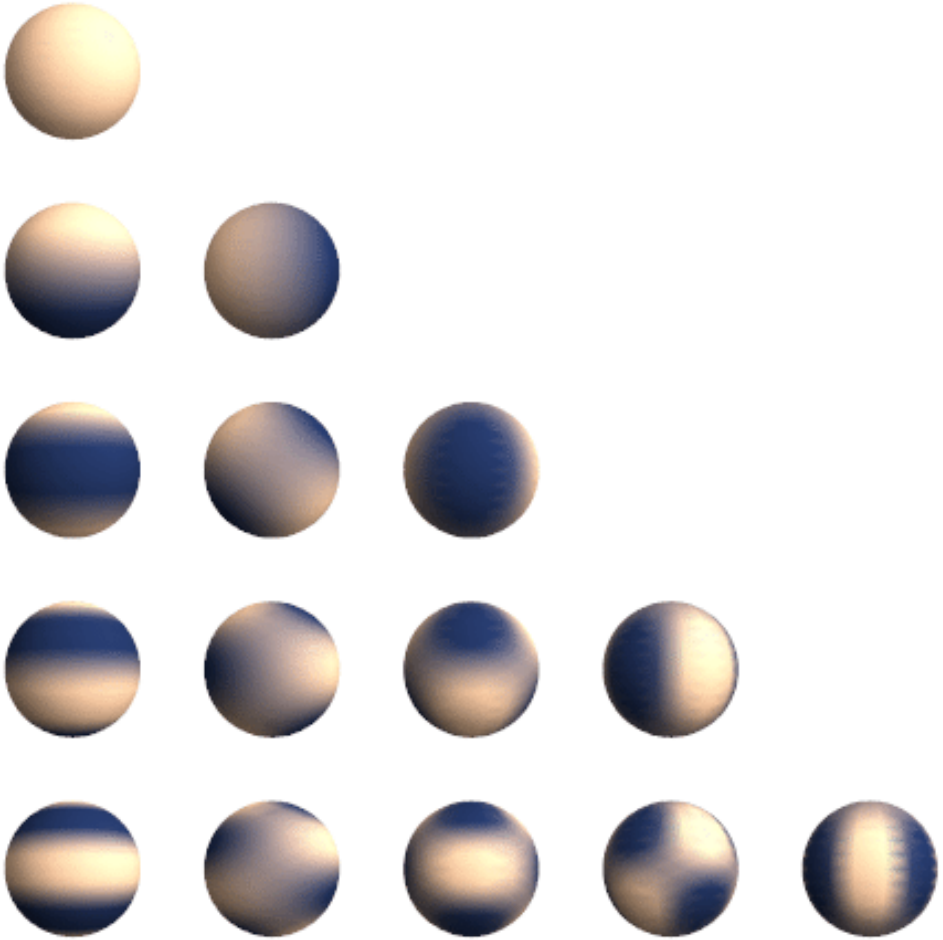
$$Y_l^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\theta),$$

$$\Theta_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} \sin^m\theta \, \frac{d^m}{d(\cos\theta)^m} P_l(\cos\theta)$$

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos\theta)^l} (\cos^2\theta - 1)^l$$

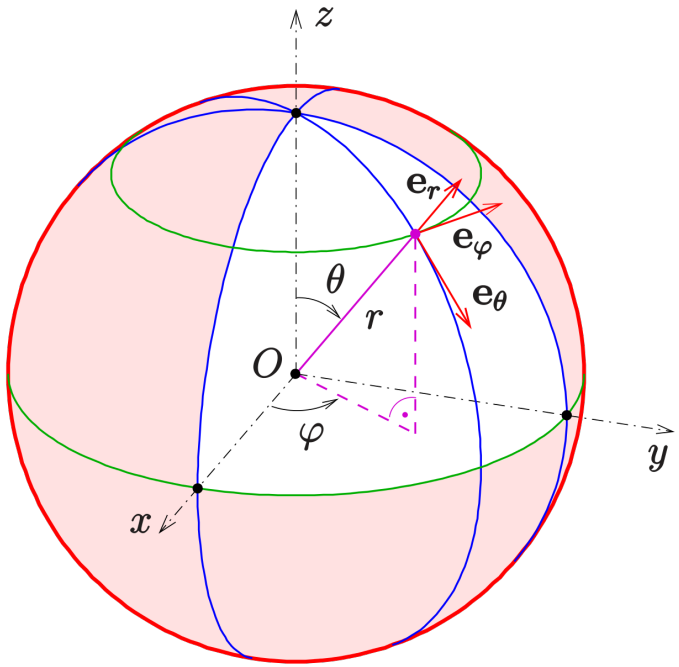
$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2,$
$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \quad P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$

# Сферические функции



# Градиент в сферических координатах

В сферических координатах ($\mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{R}}$)




$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_r + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \sin\theta, \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r \sin\theta - \mathbf{e}_\theta \cos\theta$$

https://hmn.wiki/ru/Spherical_coordinate_system#wiki-5

$$\triangle = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\triangle(R^n Y_n^m) = \triangle(R^n)Y_n^m = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial R^n}{\partial R}\right)Y_n^m = n(n+1)R^{n-2}Y_n^m$$

# Равновесие упругой сферы

Итак, мы ищем решение уравнения равновесия, хотим, чтобы оно удовлетворяло граничным условиям. Ищем в форме Треффтца

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + (R^2 - R_0^2)\nabla\Psi,$$

$$\triangle\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \triangle\Psi = 0,$$

баланс сил записывается как

$$(1-2\nu)\Psi + (3-4\nu)\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi + \nabla\cdot\mathbf{U}/2 = 0,$$

$$\mathbf{T_n} = \frac{2\mu}{R}(\mathbf{\Pi} + (R^2 - R_0^2)\mathbf{R}\cdot\nabla\nabla\Psi),$$

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{R}\nabla\cdot\mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu}\mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi + \mathbf{R}\cdot(\nabla\mathbf{U})^S + R^2\nabla\Psi,$$

$$\triangle\mathbf{\Pi} = \mathbf{0}.$$

Видим: $\mathbf{u}\big|_{R=R_0} = \mathbf{U}\big|_{R=R_0}$, $\mathbf{T_n}\big|_{R=R_0} = \mathbf{\Pi}\big|_{R=R_0}$.

# Равновесие упругой сферы

Видим: $\mathbf{u}\big|_{R=R_0} = \mathbf{U}\big|_{R=R_0}$, $\mathbf{T_n}\big|_{R=R_0} = \mathbf{\Pi}\big|_{R=R_0}$, $\mathbf{U}, \mathbf{\Pi}$ — гармонические.

Значит, граничные условия нужно раскладывать по сферическим гармоникам. Будем искать

$$\mathbf{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n}^{\infty} \mathbf{U}_n$$

(тогда кинематические граничные условия выполняются),

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \sum_{m=0}^{n} Y_n^m(\theta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n}^{\infty} \Psi_n$$

Математический факт (теорема Эйлера об однородных функциях):
$\mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{U}_n = n\mathbf{U}_n$, $\mathbf{R} \cdot \nabla \Psi_n = n\Psi_n$,
тогда из баланса сил

$$((1-2\nu) + (3-4\nu)(n-1))\Psi_{n-1} + \nabla \cdot \mathbf{U}_n = 0.$$

# Равновесие упругой сферы

Получаем

$$\Psi_{n-1} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{U}_n}{2(3n-2-2\nu(2n-1))}$$

Итак, для первой задачи (кинематические граничные условия) разлагаем граничные условия по сферическим гармоникам, умножаем каждое слагаемое на $(R/R_0)^n$ и находим $\mathbf{U}_n$, оттуда находим $\Psi_{n-1}$, т.е. $\mathbf{U}, \Psi$. Получаем

**Для внутренней задачи ($R < R_0$)**

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathbf{U}_n + \frac{R_0^2 - R^2}{2(3n-2-2\nu(2n-1))}\nabla\nabla \cdot \mathbf{U}_n)$$

$$\mathbf{U}_n = \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi)$$

# Равновесие упругой сферы. Кинематические граничные условия

**Для внешней задачи ($R > R_0$)**

$$\mathbf{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} \mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{U}_{-(n+1)}$$

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbf{U}_{-(n+1)} + \frac{R_0^2 - R^2}{2(3n - 2 - 2\nu(2n-1))} \nabla\nabla \cdot \mathbf{U}_{-(n+1)}\right)$$

# Равновесие упругой сферы. Эластостатическая задача Робена для шара

В упругую среду впаяна жесткая сфера радиусом $R_0$, которой сообщается малое перемещение

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_0$$

Видим: $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{Y}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_0$, отсюда

$$\mathbf{U}_{-1} = \left(\frac{R_0}{R}\right)\mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{U}_{-2} = \left(\frac{R_0^3}{R^3}\right)\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = -R_0^3\boldsymbol{\omega} \times \nabla\frac{1}{R},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{-1} + \mathbf{u}_{-2},$$

$$\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{U}_{-1} + \frac{R^2 - R_0^2}{2(5-6\nu)}\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}_{-1},$$

$$\mathbf{u}_{-2} = \mathbf{U}_{-2} + \frac{R^2 - R_0^2}{4(4-5\nu)}\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}_{-2}$$

# Эластостатическая задача Робена для шара

Так как

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_{-1} = -\frac{R_0}{R^3}\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_{-2} = 0,$$

$$\nabla\nabla \cdot \mathbf{U}_{-1} = \frac{R_0}{R^3}(3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_0,$$

получаем

$$\mathbf{u}_{-1} = \frac{R_0}{R}\mathbf{u}_0 + \frac{R^2 - R_0^2}{2(5-6\nu)}\frac{R_0}{R^3}(3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{u}_{-2} = \frac{R_0^3}{R^3}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}.$$

$$\nabla\mathbf{u}^S = \nabla\mathbf{u}^S_{-1} = \frac{3R_0}{2(5-6\nu)R^3}\Big(-\Big((1+2\nu) + \frac{R_0^2}{R^2}\Big)(\mathbf{R}\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0\mathbf{R})$$
$$+ \Big(\mathbf{E}(1 - \frac{R_0^2}{R^2}) - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} + 5\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}\frac{R_0^2}{R^2}\Big)\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_0\Big)$$

# Эластостатическая задача Робена для шара

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S = 2\mu \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + \nabla \mathbf{u}^S \right)$$

От вектора малого поворота $\boldsymbol{\omega}$ напряжения не зависят.
На границе внутренней сферы

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{2\mu}{(5-6\nu)R_0^2}((1-\nu)(\mathbf{R}_0\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0\mathbf{R}_0) + (\nu\mathbf{E} - \hat{\mathbf{R}}_0\hat{\mathbf{R}}_0)\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{u}_0)$$

$$\mathbf{T}_\mathbf{n} = \frac{6\mu(1-\nu)}{(5-6\nu)R_0}\mathbf{u}_0.$$

Главный вектор сил равен

$$\frac{24\pi\mu(1-\nu)}{(5-6\nu)R_0}\mathbf{u}_0,$$

главный момент сил равен $\mathbf{0}$.

# Сферически симметричная деформация шара. Кинематические граничные условия

Пусть при $R = R_0$ имеем $\mathbf{u} = u_0\hat{\mathbf{R}}$. Это первая гармоника по $\theta$. Можем подставлять в известное решение или сразу искать сферически симметричное решение для внутренней задачи

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{R}}{R_0} u_0$$

Оно удовлетворяет граничным условиям, $\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{R} u_0 / R_0 = \mathbf{0}$,

$$\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{u_0}{R_0} \nabla\nabla \cdot \mathbf{R} = 0,$$

то есть уравнение равновесия

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

выполняется. При этом получается однородное шаровое напряженное и деформированное состояние

$$\nabla\mathbf{u}^S = \frac{u_0}{R_0}\nabla\mathbf{R}^S = \frac{u_0}{R_0}\mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\tau} = (3\lambda + 2\mu)\frac{u_0}{R_0}\mathbf{E} = 3K\frac{u_0}{R_0}\mathbf{E}$$

# Сферически симметричная деформация пространства с шаровой полостью. Кинематические граничные условия

Для внешней задачи при граничном условии

$$\mathbf{u}\big|_{R=R_0} = u_0\hat{\mathbf{R}}$$

будем искать (так как это первая сферическая гармоника)

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{-2} = u_0\frac{R_0^2}{R^2}\hat{\mathbf{R}},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{-2} + \frac{R^2 - R_0^2}{4(4-5\nu)}\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}_{-2},$$

тогда граничные условия выполняются, уравнение равновесия

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (1-2\nu)\triangle\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

должно выполняться (проверим).

# Сферически симметричная деформация пространства с шаровой полостью. Кинематические граничные условия

Действительно, $\triangle R^{-2}\hat{\mathbf{R}} = \nabla\cdot\nabla(R^{-3}\mathbf{R}) = \cdots = \mathbf{0}$, так что $\triangle\mathbf{U}_{-2} = \mathbf{0}$.

$\nabla\cdot\mathbf{U}_{-2} = \nabla\cdot(R^{-3}\mathbf{R}) = (R^{-3}\nabla\cdot\mathbf{R} - 3R^{-4}(\nabla R)\cdot\mathbf{R}) = 3R^{-3} - 3R^{-3} = 0$,

получается

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{-2} = u_0\frac{R_0^2}{R^2}\hat{\mathbf{R}},$$

$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, $\triangle\mathbf{u} = \mathbf{0}$, равновесие: 0=0.

Тензор линейных деформаций соответствует чистому сдвигу:

$$\nabla\mathbf{u}^S = u_0R_0^2(\nabla(R^{-3}\mathbf{R}))^S = u_0R_0^2(-3R^{-4}\hat{\mathbf{R}}\mathbf{R} + R^{-3}\nabla\mathbf{R})$$

$$= u_0R_0^2(-3R^{-3}\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}} + R^{-3}\mathbf{E}) = \frac{u_0R_0^2}{R^3}(\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) = \operatorname{dev}\nabla\mathbf{u}^S,$$

тензор напряжений

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\frac{u_0R_0^2}{R^3}(\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}).$$

# Сферически симметричная деформация шарового слоя. Кинематические граничные условия

Пусть заданы перемещения: $\mathbf{u} = u_i \hat{\mathbf{R}}$ при $R = R_i$ на внутренней поверхности (полости), $\mathbf{u} = u_e \hat{\mathbf{R}}$ при $R = R_e$ на внешней поверхности сферы. Будем искать решение как линейную комбинацию предыдущих двух задач:

$$\mathbf{u} = A_1 \frac{R}{R_e} \hat{\mathbf{R}} + A_2 \frac{R_i^2}{R^2} \hat{\mathbf{R}},$$

тогда уравнению равновесия в силу линейности $\mathbf{u}$ удовлетворяет (надо просто их сложить с соответствующими коэффициентами). Из граничных условий найдем $A_1, A_2$:

$$A_1 + A_2 R_i^2 / R_e^2 = u_e, \qquad A_1 R_i / R_e + A_2 = u_i.$$

$$A_1 = \frac{u_e - u_i D^2}{1 - D^3}, \quad A_2 = \frac{u_i - u_e D}{1 - D^3}, \quad D = \frac{R_i}{R_e}$$

# Сферически симметричная деформация шарового слоя. Кинематические граничные условия

Если ширина слоя ненулевая, $D < 1$, решение есть.

При $u_i = u_e \frac{R_i}{R_e}$ (то есть в полости задано перемещение, соответствующее решению внутренней задачи) $A_2$=0 — только внутреннее решение.

При $u_i = u_e \frac{R_e^2}{R_i^2}$ (то есть на внешней границе задано перемещение, соответствующее решению внешней задачи) $A_1$=0 — только внешнее решение.

$$\nabla \mathbf{u}^S = \frac{A_1}{R_e}\mathbf{E} + \frac{A_2 R_i^2}{R^3}(\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})$$

$$\boldsymbol{\tau} = 3K\frac{A_1}{R_e}\mathbf{E} + 2\mu\frac{A_2 R_i^2}{R^3}(\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}).$$

При этом давление внутри полости равно

$p_i = -(-\hat{\mathbf{R}}) \cdot \boldsymbol{\tau}|_{R_i} \cdot (-\hat{\mathbf{R}}) = -\frac{3KA_1}{R_e} + 4\mu\frac{A_2}{R_i}$,

снаружи $p_e = -\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{R_e} \cdot \hat{\mathbf{R}} = -\frac{3KA_1}{R_e} + 4\mu\frac{A_2 R_i^2}{R_e^3}$

# Тепловые напряжения в пространстве с шаровой полостью

Пусть $T_0$ — температура, при которой для нулевых граничных условиях при отсутствии объемных сил будем иметь натуральную конфигурацию (нет напряжений). Линейные соотношения Дюамеля – Неймана

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S - \beta(T - T_0)\mathbf{E}$$

В статике $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \beta \nabla T$$

Частное решение, возникшее из-за градиента температуры:
$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}_T = \beta \nabla (T - T_0), \quad u_T = \nabla \chi.$

# Тепловые напряжения в пространстве с шаровой полостью

Пусть поверхность полости $R = R_0$ закреплена: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, и поддерживается ее постоянная температура $T = T_s$. Поскольку в статике $\triangle T = 0$, распределение температуры имеет вид

$$T - T_0 = \frac{(T_s - T_0)R_0}{R},$$

$$\nabla T = -\frac{(T_s - T_0)R_0}{R^2}\hat{\mathbf{R}}.$$

Такому температурному полю соответствует частное решение

$$\mathbf{u} = \frac{\beta(T_s - T_0)R_0}{2(\lambda + 2\mu)}\hat{\mathbf{R}},$$

но оно не удовлетворяет граничным условиям. Можем добавить решение, для которого $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, уравнения статики этого "не заметят". Это решение вида $\mathbf{u} = \frac{A}{R^2}\hat{\mathbf{R}}$.

# Нагретая шаровая полость

Итак, ищем решение в виде

$$\mathbf{u} = \frac{\beta(T_s - T_0)R_0}{2(\lambda + 2\mu)}\hat{\mathbf{R}} + \frac{A}{R^2}\hat{\mathbf{R}},$$

$$\mathbf{u}|_{R=R_0} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad A = -R_0^3\frac{\beta(T_s - T_0)}{2(\lambda + 2\mu)}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\beta(T_s - T_0)}{2(\lambda + 2\mu)}R_0(1 - \frac{R_0^2}{R^2})\hat{\mathbf{R}},$$

перемещение монотонно растет по $R$, на бесконечности $\frac{\beta(T_s - T_0)}{2(\lambda+2\mu)}R_0$.

$$\nabla\mathbf{u}^S = \frac{\beta(T_s - T_0)}{2(\lambda + 2\mu)}\frac{R_0}{R}((1 - \frac{R_0}{R^2})(\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}) + 2\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu\nabla\mathbf{u}^S - \beta(T_s - T_0)\frac{R_0}{R}\mathbf{E}$$

В случае произвольного распределения температуры (для шара или шаровой полости) надо разлагать ее по сферическим функциям (т.к. $\triangle T = 0$), каждая даст добавку к $\mathbf{u}$.

# Термоупругая задача для шара

На границе шара $R = R_0$ задана постоянная температура $T_s$ и кинематическое граничное условие $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Найти напряженно-деформированное состояние шара в статике. Объемных сил нет.

Решение. В статике $\triangle T = 0$. По принципу максимума для гармонической функции она достигает наибольшего и наименьшего значения на границе. Поэтому в шаре везде $T = T_s$. (Примечание: это не так для шаровой полости, потому что принцип максимума формулируется для ограниченной замкнутой области, а пространство с полостью безгранично).

Выполняются соотношения Дюамеля – Неймана и уравнение равновесия

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S - \beta(T_s - T_0)\mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}.$$

Температурная часть напряжений не дает вклада в уравнение равновесия.

# Термоупругая задача для шара

Получаем

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{R=R_0} = \mathbf{0}.$$

Видим, что у такой задачи есть тривиальное решение $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Это задача для упругого шара (без тепловых эффектов), чья граница зафиксирована. По теореме Кирхгофа это решение единственно. Значит, для термоупругой сферы также $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, но $\boldsymbol{\tau} = -\beta(T_s - T_0)\mathbf{E}$.

Важно ли, что мы рассматривали шар? Нет. Для любой замкнутой ограниченной области с такими условиями на границе можно провести ровно то же самое рассуждение, потому что принцип максимума гармонической функции и теорема Кирхгофа будут выполняться.

# Вторая краевая задача для сферы

Пусть при $R = R_0$ задано граничное условие на вектор напряжений

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T_n} = \frac{1}{R_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{Y}_n(\theta, \varphi).$$

Разложили его по сферическим функциям. Вспоминаем:

$$\mathbf{T_n} = \frac{2\mu}{R}(\mathbf{\Pi} + (R^2 - R_0^2)\mathbf{R} \cdot \nabla\nabla\Psi),$$

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{R}\nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu}\mathbf{R}\mathbf{R} \cdot \nabla\Psi + \mathbf{R} \cdot (\nabla\mathbf{U})^S + R^2\nabla\Psi,$$

$$\triangle\mathbf{\Pi} = \mathbf{0},$$

баланс сил записывается как

$$(1-2\nu)\Psi + (3-4\nu)\mathbf{R} \cdot \nabla\Psi + \nabla \cdot \mathbf{U}/2 = 0.$$

# Вторая (внутренняя) краевая задача для сферы

Для внутренней задачи ($\triangle\mathbf{\Pi} = 0$ внутри шара)

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{R_0}\right)^n \mathbf{Y}_n(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{\Pi}_n.$$

Граничные условия удовлетворяются. Зная $\mathbf{\Pi}_n$, можем вычислить $\mathbf{\Pi}$, но в $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}$ внутри шара входит также $\Psi$. Надо выполнить уравнение равновесия. Оно сформулировано в терминах $\mathbf{U}, \Psi$.

Исключим $\mathbf{U}$ из уравнения равновесия, выразим $\mathbf{\Pi}$ через $\Psi$, найдем $\Psi_n$ через $\mathbf{\Pi}_n$, $\mathbf{U}$ и все характеристики задачи.

Считаем $\nabla\cdot\mathbf{\Pi}$ по определению $\mathbf{\Pi}$ с учетом $\triangle\Psi = 0, \triangle\mathbf{U} = \mathbf{0}$ и подставляем $\nabla\cdot\mathbf{U}$ из уравнения равновесия.

$$\nabla\cdot\mathbf{\Pi} = \frac{1}{1-2\nu}((1+\nu)\nabla\cdot\mathbf{U} + \frac{1}{2}\mathbf{R}\cdot(\nabla\nabla\cdot\mathbf{U}) + (5-4\nu)\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi + \mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\cdot\nabla\nabla\Psi).$$

$$\nabla\cdot\mathbf{\Pi} = -2((1+\nu)\Psi + (1+2\nu)\mathbf{R}\cdot\nabla\Psi + \mathbf{R}\mathbf{R}\cdot\cdot\nabla\nabla\Psi).$$

# Вторая (внутренняя) краевая задача для сферы

Разложим $\Psi$ в ряд по гармоническим полиномам:

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k,$$

по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\mathbf{R} \cdot \nabla \Psi_k = k \Psi_k, \quad \mathbf{RR} \cdot \cdot \nabla\nabla \Psi_k = k^2 \Psi_k.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + (1+2\nu)k + (1+\nu)) \Psi_k,$$

отсюда

$$\Psi_{n-1} = -\frac{1}{2(n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu)} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n.$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{2\mu}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{\Pi}_n + \frac{1}{2}(R_0^2 - R^2) \frac{n-2}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu} \nabla\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n).$$

# Вторая (внутренняя) краевая задача для сферы

Из баланса сил

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-4\nu)n - 2(1-\nu)}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n.$$

## Объемная деформация и давление

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = (1-2\nu) \sum_{n=\cancel{0}1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n, \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}/3 = K \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Так как сфера в равновесии,

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dS = \mathbf{0}, \quad \int_S \mathbf{R}_0 \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \, dS = \mathbf{0},$$

откуда (так как $\mathbf{Y}_n$ — ортонормированная система функций)

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{Y}_1 = \frac{2\mu R_0}{R} \nabla \times \mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{0}$$

# Вторая (внутренняя) краевая задача для сферы. Вектор перемещений

Найдем $\nabla \times \mathbf{\Pi}$, вычислим $\nabla \times \mathbf{U}_n$ через производные $\mathbf{\Pi}_n$.
По определению $\mathbf{\Pi}$

$$\nabla \times \mathbf{\Pi} = \frac{1}{1-2\nu}(\nu \mathbf{R} \times (\nabla\nabla \cdot \mathbf{U}) + \frac{1-2\nu}{2}\mathbf{R} \cdot (\nabla\nabla \times \mathbf{U}) + (1-4\nu)\mathbf{R} \times \nabla\Psi + \mathbf{R} \cdot (\nabla\nabla\Psi) \times \mathbf{R})$$

Из уравнения равновесия выразим $\nabla \cdot \mathbf{U}$ через $\Psi$, $\nabla\Psi$:

$$\nabla\nabla \cdot \mathbf{U} = -4(2-3\nu)\nabla\Psi - 2(3-4\nu)\mathbf{R} \cdot (\nabla\nabla\Psi),$$

получим $\nabla \times \mathbf{\Pi}$ через $\nabla\Psi$, $\nabla \times \mathbf{U}$, и, учитывая $\mathbf{R} \cdot \nabla\nabla \times \mathbf{U}_n = (n-1)\nabla \times \mathbf{U}_n$, получаем связь $\nabla \times \mathbf{U}_n$, $\nabla \times \mathbf{\Pi}_n$, $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_n$, которую подставляем в определение $\mathbf{\Pi}$, используя равновесие и

$$\mathbf{R} \times \nabla\mathbf{U}^S = \mathbf{R} \cdot \nabla\mathbf{U} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{U})/2$$

# Вторая (внутренняя) краевая задача для сферы. Вектор перемещений

В конечном счете получим

$$\mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{\Pi}_n}{n} - \frac{1}{n(n-1)}\mathbf{R}\times(\nabla\times\mathbf{\Pi}_n) + \frac{n(1-4\nu)-2(1-\nu)}{n(n^2-(1-2\nu)n+1-\nu)}\mathbf{R}\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_n$$
$$+\frac{1-\nu+2n\nu}{n(n-1)(n^2-(1-2\nu)n+1-\nu)}R^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_n$$

**Вектор перемещения для сферы со статическими граничными условиями**

$$\mathbf{u} = \sum_{n=2}^{\infty}(\mathbf{U}_n + \frac{1}{2}(R_0^2 - R^2)\frac{\nabla\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_n}{n^2-(1-2\nu)n+1-\nu}) + \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{\Pi}_1 - \frac{\nu}{1+\nu}\mathbf{R}\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_1.$$

В простейшем случае (нагрузка постоянным давлением) решение было получено выше для граничных условий $\mathbf{u}|_{R=R_0} = u_0\hat{\mathbf{R}}$.

# Равновесие упругого кругового цилиндра

Радиальная координата: $r$, осевая: $z$, угол $\varphi$. Оператор-градиент $\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r}\partial_\varphi + \mathbf{e}_z \partial_z$, лапласиан $\triangle = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \partial_z^2$.
$\partial_\varphi \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi$, $\partial_\varphi \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r$.
Уравнения равновесия и уравнения Бельтрами–Митчелла (для статических граничных условий) либо уравнения в перемещениях (для кинематических граничных условий) будем записывать в цилиндрических координатах.

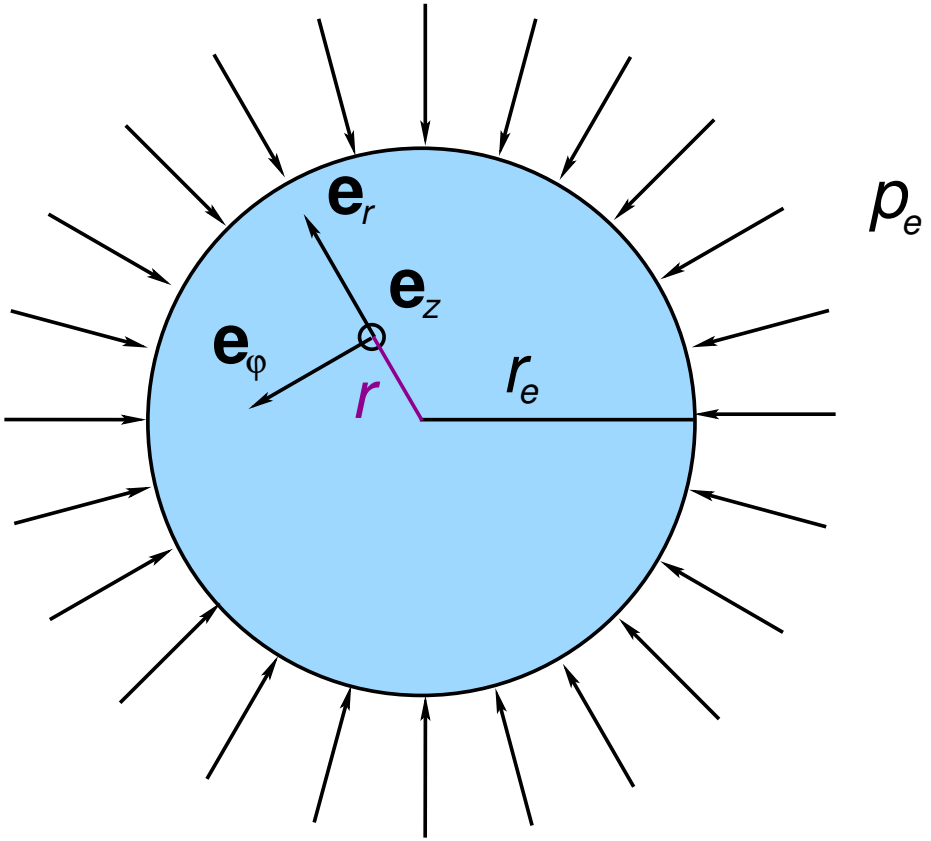
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

# Упругий круговой цилиндр с постоянным давлением на боковой поверхности

Рассмотрим цилиндр с граничным условием $\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} = -p_e \mathbf{e}_r$ на боковой поверхности $r = r_e$ и условием $\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ на торцах. Будем искать решение, удовлетворяющее уравнению равновесия, уравнению Бельтрами – Митчелла и граничным условиям.



# Упругий круговой цилиндр с постоянным давлением на боковой поверхности

Вспомнив решение для нагруженного постоянным давлением шара, мы можем предложить его двумерный аналог — постоянный тензор

$$\boldsymbol{\tau} = -p_e(\mathbf{E} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z).$$

Уравнение равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ выполняется. Уравнение Бельтрами – Митчелла сводится к $\triangle \mathrm{tr}\, \boldsymbol{\tau} = 0$ и тоже удовлетворяется. Граничные условия $\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} = -p_e\mathbf{e}_r$ при $r = r_e$ выполняются, на торцах $\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$. При этом

$$\nabla\mathbf{u}^S = \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau}\mathbf{E}) = -\frac{p_e}{2\mu}\frac{1-\nu}{1+\nu}(\mathbf{E} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) + \frac{p_e}{2\mu}\frac{2\nu}{1+\nu}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$$

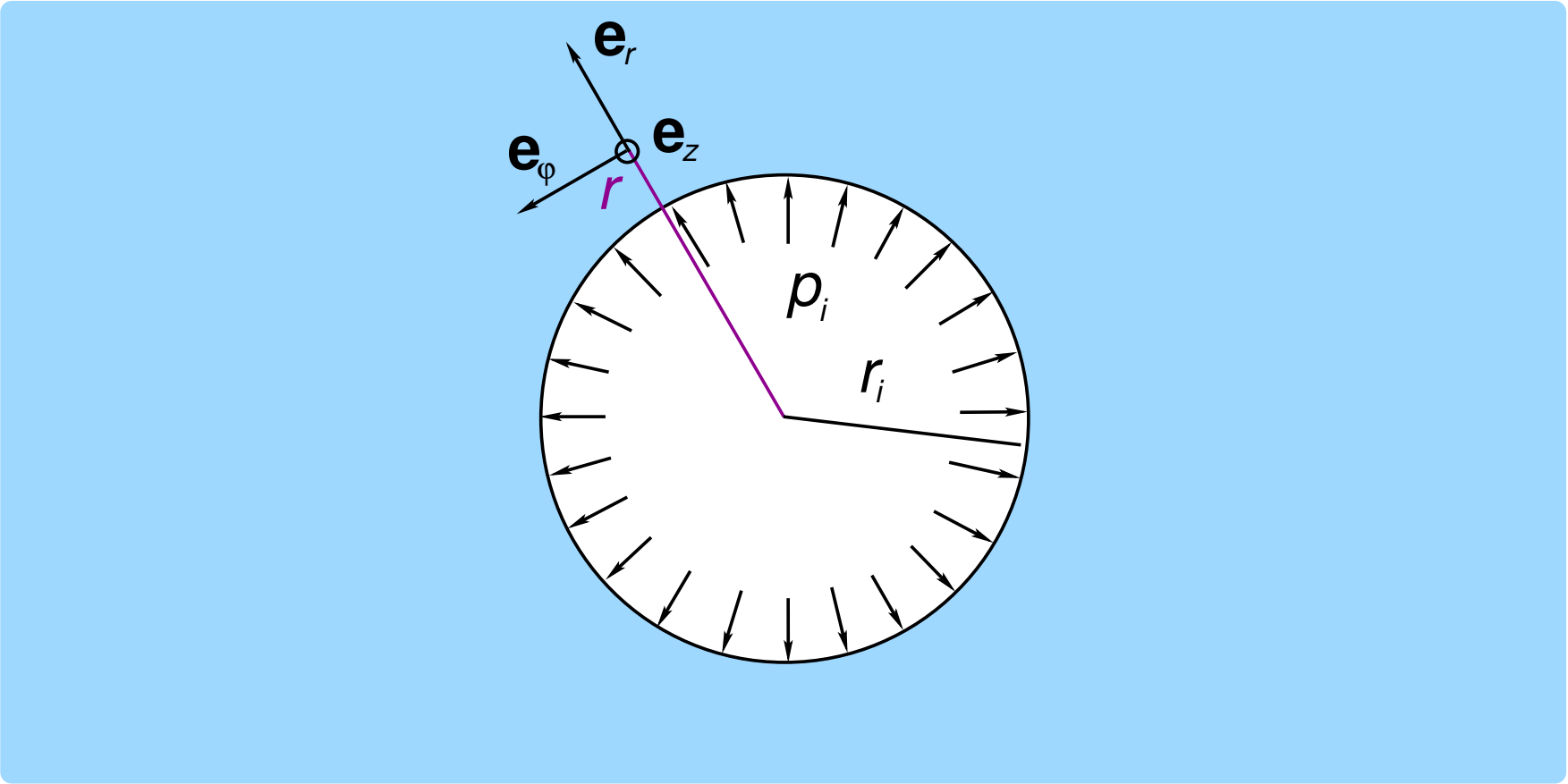
$$\mathbf{u} = u_e\frac{r}{r_e}\mathbf{e}_r + u_z\mathbf{e}_z, \quad \nabla\mathbf{u}^S = \frac{u_e}{r_e}(\mathbf{E} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) + \nabla u_z\mathbf{e}_z$$

$u_e = -p_e r_e \frac{1-\nu}{2\mu(1+\nu)} = -p_e r_e \frac{1-\nu}{E}$ — радиальное перемещение границы,
$u_z = z p_e \frac{\nu}{\mu(1+\nu)} = 2z p_e \frac{\nu}{E}$ — смещение по оси (т.е. сечения — плоские)

$$\mathbf{u} = -\frac{p_e}{E}((1-\nu)r\mathbf{e}_r - 2\nu z\mathbf{e}_z)$$

# Цилиндрическая полость в безграничном пространстве с давлением на боковой поверхности

Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую полость с граничным условием $\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} = -p_i \mathbf{e}_r$ на боковой поверхности $r = r_i$ и условием $\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ при $z \to \infty$.



# Цилиндрическая полость в безграничном пространстве с давлением на боковой поверхности

Будем искать осесимметричное решение $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r$. Тогда

$$\nabla\mathbf{u}^S = (\mathbf{e}_r\partial_r + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r}\partial_\varphi + \mathbf{e}_z\partial_z)u(r)\mathbf{e}_r^S = \partial_r u\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{u}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \partial_r u + u/r, \quad \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} = 3K\nabla\cdot\mathbf{u} = 3K(\partial_r u + u/r) \text{ — функция } r.$$

Следствие из уравнения Бельтрами – Митчелла:

$$\triangle\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \partial_r\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} = c/r$$

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} = c\ln r + \tau_0 \quad\overset{\boldsymbol{\tau}|_\infty=\mathbf{0}}{\Longrightarrow}\quad \operatorname{tr}\boldsymbol{\tau} = 0$$

$$\partial_r u = -u/r \quad\Longrightarrow\quad u = u_i r_i/r, \quad \nabla\mathbf{u}^S = \frac{u_i r_i}{r^2}(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\frac{u_i r_i}{r^2}(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r)$$

$u_i = u|_{r=r_i}$ — радиальное смещение точек поверхности полости

# Цилиндрическая полость в безграничном пространстве с давлением на боковой поверхности

Мы предположили частный вид $\mathbf{u}$ и получили решение в предположении, что оно существует. Проверим, выполняются ли:

1. Уравнение равновесия
2. Уравнение Бельтрами – Митчелла (выполняется, так как $\boldsymbol{\tau}$ вычислен по заданному $\mathbf{u}$)
3. Граничные условия

Уравнение равновесия:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot (r^{-2}(\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r)) = \mathbf{0}$$

Заметим: $\partial_\varphi \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi$, $\partial_\varphi \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r$, тогда

$$\nabla \cdot (r^{-2}(\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r)) = 2r^{-3}\mathbf{e}_r(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi)$$
$$+ r^{-2}(r^{-1}\mathbf{e}_\varphi \partial_\varphi \cdot (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r)) = 2r^{-3}\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi) - 2r^{-3}\mathbf{e}_r = \mathbf{0}$$

Уравнение равновесия выполняется.

Граничные условия: $\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ везде, $-\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau}|_{r_e} \equiv \frac{2\mu u_i}{r_i}\mathbf{e}_r = p_i \mathbf{e}_r$ выполняется при $u_i = p_i r_i/(2\mu)$.

# Цилиндрический слой в безграничном пространстве

Рассмотрим бесконечно длинный цилиндрический слой с внутренним и внешним радиусами $r_i, r_e$, соответственно и давлением на соответствующих боковых поверхностях $p_i$, $p_e$, при условии $\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ при $z \to \infty$. Найдем напряженно-деформированное состояние слоя. В случае цилиндра, нагруженного по боковой поверхности $r = r_e$ давлением $p_e$, имеем решение

$$\boldsymbol{\tau}_1 = -p_e(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi), \quad \mathbf{u}_1 = u_e\frac{r}{r_e}\mathbf{e}_r + 2zp_e\frac{\nu}{E}, \quad u_e = -p_e r_e\frac{1-\nu}{E}.$$

В случае внутренней полости в безграничном пространстве имеем решение $\boldsymbol{\tau}_2 = p_i\frac{r_i^2}{r^2}(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r)$. Этот тензор напряжений соответствует чистому сдвигу, как и в случае сферической полости.

$$\nabla\mathbf{u}_2^S = \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\tau}_2 = \frac{p_i}{2\mu}\frac{r_i^2}{r^2}(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r),$$

$$\mathbf{u}_2 = u_i\frac{r_i}{r}\mathbf{e}_r, \quad \nabla\mathbf{u}_2^S = \frac{u_i r_i}{r^2}(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r), \quad u_i = \frac{p_i r_i}{2\mu}.$$

Будем искать решение для цилиндрического слоя в виде линейной комбинации этих решений:

$$\mathbf{u} = A_0 z\mathbf{e}_z + A_1 r\mathbf{e}_r - \frac{A_2}{r}\mathbf{e}_r, \quad \frac{A_0}{A_1} = -\frac{2\nu}{1-\nu}$$

$$\nabla\mathbf{u}^S = A_0\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z + A_1(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi) + \frac{A_2}{r^2}(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi),$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu A_1\frac{1+\nu}{1-\nu}(\mathbf{E} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) + 2\mu\frac{A_2}{r^2}(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi)$$

Так как отдельные слагаемые в $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяют уравнению равновесия и уравнению Бельтрами – Митчелла, их сумма — тоже. Осталось выполнить граничные условия:

$$-\mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\tau}|_{r=r_i} = p_i\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\tau}|_{r=r_e} = -p_e\mathbf{e}_r,$$

$$A_1\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{A_2}{r_i^2} = -\frac{p_i}{2\mu}, \quad A_1\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{A_2}{r_e^2} = -\frac{p_e}{2\mu},$$

$$A_1\frac{1+\nu}{1-\nu} = \frac{1}{2\mu}\frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad A_2 = \frac{p_e - p_i}{2\mu(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2})}$$

# Задача Сен-Венана

Длинный призматический стержень длиной $L$ нагружен на торцах поверхностными силами $\mathbf{t}_-(x, y)$ и $\mathbf{t}_+(x, y)$. Боковая поверхность свободна. Найти напряжения и деформации вдали от торцов.
Замечание: граничные условия будем выполнять лишь в интегральном смысле, чтобы получались те же главные векторы сил и моментов:

$$\mathbf{Q}_\pm = \int\limits_{S_\pm} \mathbf{t}_\pm \, dS = \pm \int\limits_{S_\pm} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau} dS,$$

$$\mathbf{M}_\pm = \int\limits_{S} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_\pm \, dS = \pm \int\limits_{S_\pm} \mathbf{r} \times (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) dS.$$

Здесь $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ — вектор в плоскости сечения.
Решение задачи при удалении от торцов на их диаметр будет близко к истинному по принципу Сен-Венана.

# Задача Сен-Венана

Гипотеза: $\boldsymbol{\tau} = \sigma_z \mathbf{kk} + \mathbf{Tk} + \mathbf{kT}, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{k} = 0,$

т.е. в плоскости сечения нет напряжений, так как граница сечения не нагружена.

При этом $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} + \sigma_z \mathbf{k}, \qquad \mathbf{r} \times (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{r} \times \mathbf{T} + \sigma_z \mathbf{r} \times \mathbf{k}.$

Обозначим знаком ˜ плоскую часть, т.е.

$$\tilde{\mathbf{Q}}_\pm = \mathbf{Q}_\pm \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{kk}) = \pm \int\limits_{S_\pm} \mathbf{T} dS \text{ — изгибающая сила,}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_\pm = \mathbf{M}_\pm \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{kk}) = \pm \int\limits_{S_\pm} \sigma_z \mathbf{r} dS \times \mathbf{k} \text{ — изгибающий момент,}$$

а проекции на ось стержня

$$Q^z_\pm = \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}_\pm = \pm \int\limits_{S_\pm} \sigma_z dS \text{ — продольная сила,}$$

$$M^z_\pm = \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_\pm = \pm \int\limits_{S_\pm} \mathbf{r} \times \mathbf{T} dS \text{ — крутящий момент.}$$

# Задача Сен-Венана

Введем плоские части операторов: $\tilde{\nabla} = \nabla - \mathbf{k}\partial_z = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$, $\tilde{\triangle} = \triangle - \partial_z^2$.
Равновесие $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ дает

$$\partial_z \sigma_z \mathbf{k} + \partial_z \mathbf{T} + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Отсюда

$$\partial_z \sigma_z + \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \partial_z \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r})) \Longrightarrow$$

$$\partial_z \sigma_z = -\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} = c(\mathbf{r}), \qquad \sigma_z = c(\mathbf{r})z + c_0(\mathbf{r}),$$

$$\partial_z^2 \sigma_z = 0, \qquad \partial_z^2 \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}.$$

Из уравнения Бельтрами – Митчелла $\triangle \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\triangle \sigma_z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\triangle} \sigma_z = 0,$$

$$\sigma_z = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + b)z + \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r} + b_0.$$

(Все векторные константы здесь и далее плоские.)

# Задача Сен-Венана

Стержень находится в равновесии $\Longrightarrow \quad \mathbf{Q}_- + \mathbf{Q}_+ = \mathbf{0} \xrightarrow{|\cdot\mathbf{k}}$

$$\int\limits_{S_-} \sigma_z \, dS = \int\limits_{S_+} \sigma_z \, dS = Q_+^z \quad \Longrightarrow$$

$$\int\limits_{S_-} (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r} + b_0) dS = \int\limits_{S_+} ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + b)L + \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r} + b_0) \, dS = Q_+^z \Longrightarrow$$

$$(\text{т.к.} \int\limits_{S_\pm} \mathbf{r} dS = \mathbf{0}) \qquad b_0 = S^{-1} Q_+^z, \quad b = 0,$$

$$\sigma_z = (z\mathbf{a} + \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{r} + b_0.$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_\pm = \pm \int\limits_{S_\pm} \sigma_z \mathbf{r} dS \times \mathbf{k} = \pm(z\mathbf{a} + \mathbf{a}_0) \cdot \int\limits_{S_\pm} \mathbf{r}\mathbf{r} dS \times \mathbf{k} = \pm(z\mathbf{a} + \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{k}$$

При $z = 0$ получаем $\mathbf{a}_0 = -(\mathbf{J}^{-1} \times \mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{M}}_-$ (обратный тензор в двумерном смысле). Для круглого сечения $\mathbf{a}_0 = -\frac{4}{SR^2} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{M}}_-$. Рассматривая $z = L$, получаем $\mathbf{a} = (\mathbf{J}^{-1} \times \mathbf{k}) \cdot (\tilde{\mathbf{M}}_+ + \tilde{\mathbf{M}}_-)/L$.

Мы нашли $\sigma_z$. Оно зависит от формы сечения только через $\mathbf{J}$.

# Задача Сен-Венана

Из уравнения равновесия

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$$

Граничные условия на боковой поверхности:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}\Big|_{\Gamma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\Big|_{\Gamma} \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Уравнение Бельтрами – Митчелла:

$$\triangle \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{1+\nu} \nabla\nabla \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$

$$\tilde{\triangle} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{1+\nu} (\tilde{\nabla}\tilde{\nabla} + (\tilde{\nabla}\mathbf{k} + \mathbf{k}\tilde{\nabla})\partial_z)\sigma_z = \mathbf{0}$$

$$\tilde{\triangle} \mathbf{T}\mathbf{k} + \mathbf{k}\tilde{\triangle}\mathbf{T} + \frac{1}{1+\nu}(\mathbf{a}\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow$$

$$\tilde{\triangle} \mathbf{T} = -\frac{1}{1+\nu} \mathbf{a}.$$

Надо искать решение, удовлетворяющее ГУ. Задача разрешима даже для многосвязного сечения (М.Ф. Грекова, В.В. Елисеев).

# Задача Сен-Венана. Круглое сечение. Изгиб и растяжение

Ограничимся цилиндром с круговым сечением. На границе сечения $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T} = 0$, внутри

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}, \qquad \tilde{\triangle}\mathbf{T} = -\frac{1}{1+\nu}\mathbf{a}$$

(равновесие), (ур. Бельтрами – Митчелла)

Пусть нет крутящего момента ($M^z_\pm = 0$).

Ищем решение в виде $\mathbf{T} = A_1 \mathbf{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + A_2 r^2 \mathbf{a} + \mathbf{T}_0$. Тогда

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} = (3A_1 + 2A_2)\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}, \qquad \tilde{\triangle}\mathbf{T} = (2A_1 + 4A_2)\mathbf{a} = -\frac{1}{1+\nu}\mathbf{a}$$

$$A_1 = \frac{1}{4(1+\nu)} - \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{8(1+\nu)}, \quad \mathbf{T}_0 = -R^2(A_1 + A_2)\mathbf{a}.$$

($\mathbf{T}_0$ находим из ГУ).

Проверим: крутящий момент на торцах

$$M^z_+ = -M^z_- = \int\limits_{S_+} \mathbf{r} \times \mathbf{T} dS \cdot \mathbf{k} = A_2 \int\limits_{S_+} r^2 \mathbf{r} dS \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{k}) = 0,$$

так как для кругового сечения $\int r^2 \mathbf{r} dS = \mathbf{0}$

# Задача Сен-Венана. Круглое сечение. Изгиб и растяжение

Удовлетворим интегральным граничным условиям на торцах:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\pm} = \pm \int\limits_{S_{\pm}} \mathbf{T}\, dS = \pm \int\limits_{S_{\pm}} (A_1 \mathbf{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + A_2 r^2 \mathbf{a} + \mathbf{T}_0) dS$$

$$= \pm(A_1 \mathbf{J}\cdot\mathbf{a} + A_2 \operatorname{tr} \mathbf{J}\mathbf{a} + \mathbf{T}_0 S) = \pm(\mathbf{a} A_1 S R^2/4 + \mathbf{a} A_2 S R^2/2 - S R^2 (A_1 + A_2)\mathbf{a})$$

$$= \mp S R^2 \mathbf{a}(3A_1/4 + A_2/2) = \pm S R^2 \mathbf{a}/4$$

Отсюда находим

$$\mathbf{a} = -\frac{4}{S R^2} \tilde{\mathbf{Q}}_{-}.$$

Заметим, что $\tilde{\mathbf{Q}}_{+} + \tilde{\mathbf{Q}}_{-} = \mathbf{0}$, то есть сумма внешних сил, действующих на стержень, равна 0 (равенство продольных сил требовали ранее).

# Задача Сен-Венана. Круглое сечение. Изгиб и растяжение

Сумма моментов, действующих на тело, равна 0, поэтому

$$\mathbf{M}_- + L\mathbf{k} \times \mathbf{Q}_+ + \mathbf{M}_+ = \mathbf{0}.$$

В проекции на $\mathbf{k}$ выполняется (см. выше). Суммарный внешний изгибающий момент равен 0:

$$\tilde{\mathbf{M}}_- + L\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{Q}}_+ + \tilde{\mathbf{M}}_+ = \mathbf{0}.$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_- = -\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{k}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_+ = (L\mathbf{a} + \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{k}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_+ = \tfrac{SR^2}{4}\mathbf{a}, \quad \mathbf{J} = \tfrac{SR^2}{4}\mathbf{E}.$$

$$L\mathbf{a}\frac{SR^2}{4} \times \mathbf{k} + L\mathbf{k} \times \frac{SR^2}{4}\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Нагрузки уравновешены.

# Задача Сен-Венана. Круглое сечение. Изгиб и растяжение

$$\mathbf{a} = \frac{4}{SR^2}\tilde{\mathbf{Q}}_+, \qquad \mathbf{a}_0 = \frac{4}{SR^2}\tilde{\mathbf{M}}_+ \times \mathbf{k}, \qquad b_0 = S^{-1}Q_+^z.$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{T} + \sigma_z \mathbf{k}\mathbf{k},$$

$$\sigma_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}z + \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r} + b_0,$$

$$\mathbf{T} = A_1(\mathbf{r}\mathbf{r} - R^2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{a} + A_2(r^2 - R^2)\mathbf{a},$$

Тензор линейных деформаций

$$\nabla \mathbf{u}^S = \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_z \mathbf{E})$$

имеет плоскую часть (при растяжении сечение сжимается).

# Задача Сен-Венана. Кручение

Пусть $\tilde{\mathbf{Q}}_\pm = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{M}}_\pm = \mathbf{0}$, $Q^z_\pm = 0$, но присутствует $M^z_\pm$. Имеем

$$\sigma_z = (z\mathbf{a} + \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{r} + b_0,$$

$$b_0 = S^{-1} Q^z_+ = 0,$$

$$\mathbf{a}_0 = (\mathbf{J}^{-1} \times \mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{M}}_- = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{M}}_+ = L\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{k} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a} = 0.$$

Таким образом, $\sigma_z = 0$,

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} = 0, \qquad \tilde{\triangle} \mathbf{T} = \mathbf{0}.$$

Решение можно искать в виде

$$\mathbf{T} = \tilde{\nabla} \times \mathbf{\Phi}, \quad \tilde{\triangle} \mathbf{\Phi} = \text{const}\,.$$

Тогда оба уравнения будут удовлетворяться тождественно. Граничное условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$ перейдет в $\mathbf{s} \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{\Phi} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{s}$ — касательный вектор к контуру сечения.

# Задача Сен-Венана. Круглое сечение. Кручение.

Для круглого сечения можем выбрать, учитывая, что $\mathbf{T}$ плоский,

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{k}cr^2, \quad \mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{\Phi} = 2c\mathbf{r} \times \mathbf{k}$$

Тогда $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Используем граничное условие

$$\int\limits_{S_+} \mathbf{r} \times \mathbf{T}\, dS = M_z^+ \mathbf{k} \quad \Longrightarrow$$

$$2c \int\limits_{S_+} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{k})\, dS = -2c \int\limits_{S_+} r^2\, dS\mathbf{k} = -cSR^2\mathbf{k} = M_z^+ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{T} = -2\frac{M_+^z}{SR^2}\mathbf{r} \times \mathbf{k}$$

$$\nabla \mathbf{u}^S = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{T}\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{T}) = -\frac{M_+^z}{\mu SR^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{k}\mathbf{k} - \mathbf{k}\mathbf{k} \times \mathbf{r})$$

Круглые сечения при кручении не депланируют:

$$\mathbf{u} = -\frac{2M_+^z}{\mu SR^2}\mathbf{r} \times z\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Некруглые — депланируют (доказал Сен-Венан)

# Итоги семестра

Нелинейная теория упругости

1. Получили нелинейные определяющие уравнения в терминах тензора формоизменения и объемной деформации (для изотропных сред, анизотропных, для случая аддитивной энергии деформации по Пальмову)
2. Девиатор тензора напряжений — реакция на формоизменение, давление — на $\det \mathbf{G} \neq 1$
3. Линеаризованный тензор формоизменения выражается через $\operatorname{dev} \nabla \mathbf{u}^S$
4. В несжимаемых материалах давление не задается определяющими уравнениями
5. Рассмотрели нелинейные материалы: потенциал Муни, полулинейный материал Джона, простейший материал Пальмова. Модель Пальмова наиболее практична.

# Итоги семестра

Термоупругость

1. Получили нелинейные определяющие уравнения с учетом тепловых процессов, используя второе начало термодинамики
2. Свободная энергия не может зависеть от градиента температуры
3. Вектор теплового потока задается так, чтобы выполнялось неравенство Фурье
4. Должны выполняться требования материальной объективности
5. Первый закон термодинамики — дополнительное уравнение (теплопроводности)
6. Линеаризованные уравнения термоупругости перевязаны даже в изотропном случае
7. В изотропном линейном материале нагревание вызывает дополнительные напряжения (только давление)
8. При отсутствии термоупругой перевязки упругие волны недисперсивны, а дисперсионная кривая температурных колебаний — парабола

# Итоги семестра

Линейная упругость. Определяющие уравнения и волны

1. Написали уравнения изотропной упругой линейной среды (определяющие, динамики в перемещениях)
2. На константы упругой среды налагаются ограничения. Одно ограничение — устойчивость среды. Другое (возможное, но необязательное) — положительная определенность энергии. Если второе не выполняется, нет единственности решения, среда ведет себя необычно
3. Волны в линейной упругой среде недисперсивны. Для положительно определенной энергии деформации продольная волна быстрее поперечной

# Итоги семестра

Линейная упругость. Статика. Оценки напряжений

1. Получили формулу Клапейрона
2. Доказали единственность решения задач линейной упругой статики (Кирхгоф)
3. Получили уравнения Бельтрами – Митчелла и выучили наизусть
4. Доказали теорему Бетти о взаимности
5. Получили тензор Кельвина–Сомильяны (решение от сосредоточенной силы в безграничном пространстве)
6. Сформулировали принцип Сен-Венана
7. Нарисовали круги Мора

# Итоги семестра

Задачи теории упругости

1. Получили решение задач для сферы и для сферической полости для произвольных граничных условий. Для кинематических оказалось проще
2. Решили задачи о сферически симметричной деформации шара и шаровой полости в безграничном пространстве (каковы характерные особенности?), для шарового слоя, для нагретого шара и нагретой полости
3. Решили задачу об осесимметричном нагружении боковой поверхности кругового цилиндра, цилиндрической полости в безграничном пространстве (каковы характерные особенности?), цилиндрического слоя
4. Приближенно решили задачу Сен-Венана, руководствуясь его принципом (изгиб, растяжение, кручение цилиндрического стержня)