Волны в линейных средах сложной структуры. (Е.Ф. Грекова, С.Н. Гаврилов)

Братья Коссера **(Cosserat)**: теория среды Коссера, начала

Эринген, Кафадар **(Eringen, Kafadar)**: полный континуум Коссера

Жилин: способ получения определяющих уравнений из баланса энергии

Работы по средам Коссера: Грин (Green), Нахди (Naghdi), Ривлин (Rivlin), Erbay, Suhubi, Новацкий (Nowacki), Пальмов, Аэро...

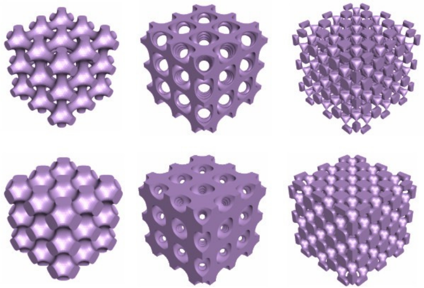
Читать книги: Жилин; Еремеев, Лебедев, Альтенбах (Eremeyev, Lebedev, Altenbach); Eringen; Можен (Maugin); Новацкий (Nowacki); Ерофеев;...

Волны в линейной упругой редуцированной среде Коссера: Херман, Кулеш, Грекова, Шардаков (Herman, Kulesh, Shardakov, Grekova)

Относитесь критически даже к лучшим работам. Везде могут быть ошибки!

Сложные среды

Классическая сплошная среда — это континуум материальных точек, которые могут совершать только трансляционные движения. Тем не менее, реальность



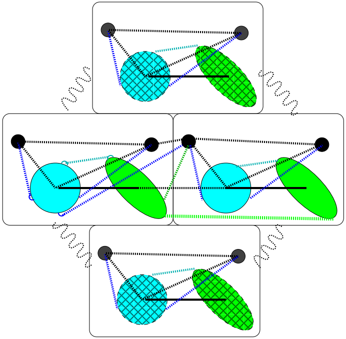
значительно богаче! Современная прикладная механика имеет дело с трехмерными акустическими метаматериалами с отрицательными эффективными упругими модулями и (или) плотностью для некоторых частот. Их используют для контроля волновых пучков, акустической маскировки, снижения шума...

Акустические метаматериалы

Акустические метаматериалы могут представлять собой среду из двух континуумов: “несущий континуум”, по которому могут распространяться волны, и “прикрепленный” к нему континуум “динамических гасителей”, чьи тела-точки не связаны непосредственно между собой, то есть среда не реагирует на градиент их кинематических характеристик. Подобные среды могут обладать странными волновыми свойствами. В некоторых областях частот континуум динамических гасителей может захватывать энергию движения. Кроме дисперсии, могут иметь место запрещенные зоны частот и падающие участки дисперсионных кривых, где фазовая скорость направлена противоположно групповой.
(Елена Грекова, ДАН, 2015)

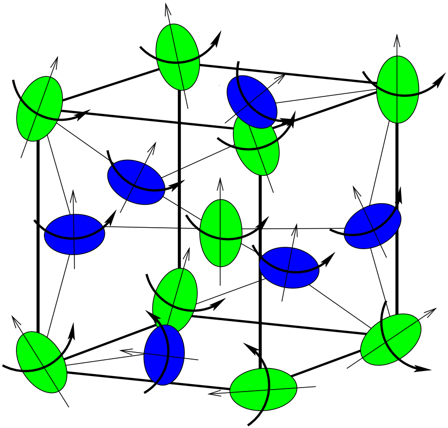
Механика сред Коссера

Среда Коссера — это континуум, чьи тела-точки имеют вращательные степени свободы.



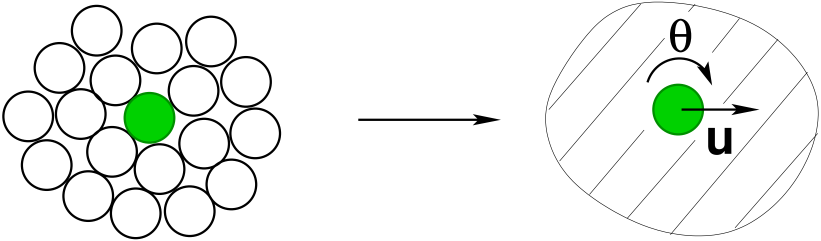
Умные материалы

Что такое механика среды Коссера?



Магнитные материалы (среда Кельвина — среда Коссера особого типа с частицами, обладающими большим спином)

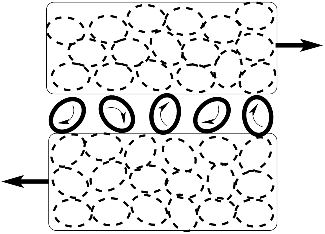
Что такое механика среды Коссера?



Сыпучие и зернистые материалы

Что такое механика среды Коссера?

Среды Коссера: неоднородные материалы с зернистой структурой, композиты под нагрузкой, вызывающей повороты (достаточно жестких) зерен (сверхпластичные среды, акустические метаматериалы)



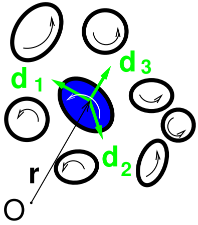
Сдвиг в сыпучей или зернистой среде

Что такое механика среды Коссера?

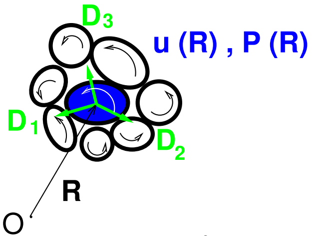
Ограничения: Среда Коссера — это частный случай среды со сложной структурой. Ее тело-точка — бесконечно малое твердое тело. Есть другие сложные среды, чьи тела-точки деформируемы (биоматериалы с протеиновыми цепочками, пористые среды и т.д.) Здесь мы рассмотрим лишь волны в линейных упругих изотропных средах Коссера без температурных эффектов.
Уравнения выводятся из фундаментальных законов механики (баланса сил и моментов, энергии, для неупругих сред — второго закона термодинамики), используются принцип материальной объективности, симметрия, линейность.
Другая ветвь исследований — микроструктурный подход.
Экспериментальные методы: развиваются. Нужны эксперименты для определения упругих модулей. Большинство их — эксперименты с волнами (механика магнитных материалов и пьезоэлектриков, сыпучих сред, ротационная сейсмология).

Модели сред

Среда Коссера: континуум, состоящий из инфинитезимальных твердых тел. В каждой точке два поля: перемещение $\mathbf{u}$ и тензор поворота $\mathbf{P}$ такой, что $\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_k = \mathbf{D}_k$.



reference configuration

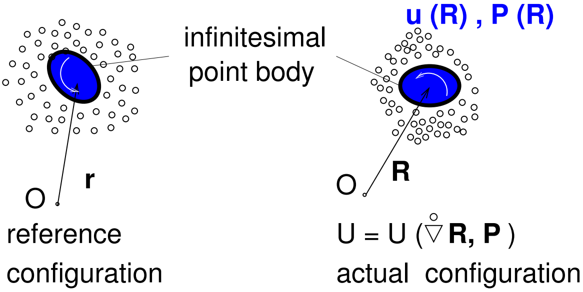


$U = U(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}, \mathbf{P}, \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{P})$

actual configuration

Инерционные характеристики каждой точки: плотность ρ и плотность тензора инерции $\rho\mathbf{I}$. На каждую точку действуют силы и моменты.

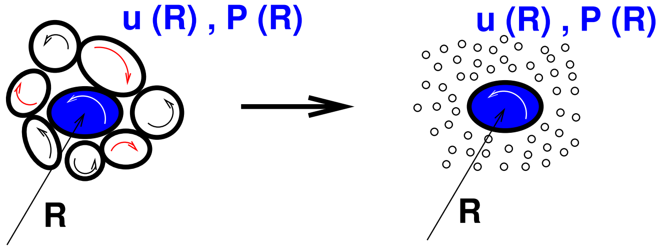
Редуцированная среда Коссера: среда Коссера, не реагирующая на градиент поворота.



Повороты и перемещения кинематически независимы, но энергия деформации не зависит от $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{P}$.
Инерционные характеристики каждой точки: плотность ρ, тензор инерции $\rho\mathbf{I}$. Каждая точка находится под действием сил и моментов.

Модели сплошных сред

Редуцированная среда Коссера: модель для сыпучей среды?



$$U = U(\mathring{\nabla}\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathring{\nabla}\mathbf{P}) \qquad U = U(\mathring{\nabla}\mathbf{R}, \mathbf{P})$$

Нет “часовой пружинки”, уменьшающей относительный поворот частиц $\Longrightarrow$ нет упорядоченной структуры поворотов. Это может вызвать неустойчивость материала.

Линейность

В линейном случае перемещение $\mathbf{u}$ мало, а тензор поворота $\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$.

Линейная изотропная среда Коссера. Упругая энергия.

Упругая энергия любой линейной среды Коссера такова:

$$U = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top \cdot\cdot \mathbf{X} \cdot\cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) + (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^\top \cdot\cdot \mathbf{Y} \cdot\cdot \nabla\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{\theta}^\top \cdot\cdot \mathbf{Z} \cdot\cdot \nabla\boldsymbol{\theta} \quad (1)$$

Принцип Кюри–Неймана влечет: для изотропного материала $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ изотропны.

Упражнение. Проверить, что $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ полярны, $\mathbf{Y}$ аксиален, и если они изотропны, то $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$, а $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ содержат по три независимых константы. Докажите, что они имеют вид

$$\mathbf{X} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^S + 2\alpha(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^A(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^A, \quad (2)$$

$$\mathbf{Z} = \beta \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\gamma(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^S(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^S + 2\varepsilon(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n)^A(\mathbf{i}^m\mathbf{i}^n)^A. \quad (3)$$

Изотропная линейная среда Коссера. Определяющие уравнения

Полная среда Коссера:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial U}{\partial(\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})} = \mathbf{X} \cdot\cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})$$
$$= \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S + 2\alpha (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^A,$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\partial U}{\partial \nabla \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z} \cdot\cdot \nabla \boldsymbol{\theta} = \beta \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}\, \mathbf{E} + 2\gamma \nabla \boldsymbol{\theta}^S + 2\varepsilon (\nabla \boldsymbol{\theta})^A.$$

Редуцированная среда Коссера:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial U}{\partial(\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})} = \mathbf{X} \cdot\cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})$$
$$= \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathbf{E} + 2\mu \nabla \mathbf{u}^S + 2\alpha (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^A,$$

$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Для анизотропных сред выражения для $\boldsymbol{\tau}$ могут отличаться для редуцированной и полной сред Коссера.

Изотропная линейная среда Коссера. Динамические уравнения

Упражнение. Проверить, что в линейном случае $(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{I}_0\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}$.
Решение. $(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{\cdot}} \approx ((\mathbf{E}+\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{I}_0\cdot(\mathbf{E}+\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E})^\top\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}})^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{I}_0\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}$
Подставляя выражения для $\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\mu}$ в законы динамики, получим их форму в перемещениях:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})+2\alpha\nabla\times\boldsymbol{\theta}+\rho\mathbf{F}=\rho\ddot{\mathbf{u}},$$

$$(\beta+2\gamma)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}-(\gamma+\varepsilon)\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\theta})+2\alpha(\nabla\times\mathbf{u}-2\boldsymbol{\theta})+\rho\mathbf{L}=\rho\mathbf{I}\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Проверьте, что если упругие поворотные константы $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ и тензор инерции $\mathbf{I}$ нули, мы получим уравнения классической изотропной линейной упругой среды.

Уравнения упругой изотропной редуцированной среды Коссера (свободные колебания)

Мы можем получить их из уравнений для полной линейной изотропной среды Коссера, полагая нулями $\beta, \gamma, \varepsilon$ и нагрузки.

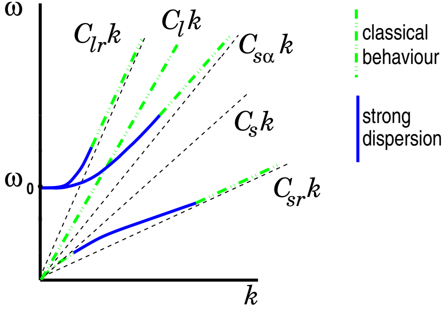
$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times \boldsymbol{\theta} = \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

$$2\alpha\nabla \times \mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\theta} = \rho\mathbf{I} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}$$

Если $\alpha = 0$, получаем классическую изотропную упругую среду.

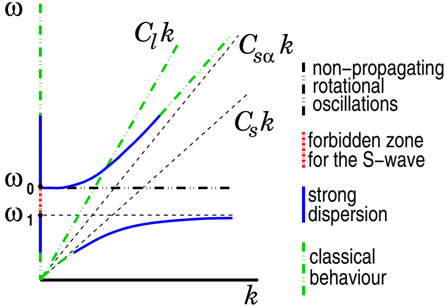
Линейная изотропная среда Коссера с шаровым тензором инерции. Дисперсионные кривые

Если $\mathbf{I} = I\mathbf{E}$, инерциальный член в балансе моментов равен $\rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}}$. Рассмотрим свободные колебания ($\mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{L} = \mathbf{0}$). Для трехмерных плоских волн получаем дисперсионные кривые:



$$C_l^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho,$$
$$C_{lr}^2 = (\beta + 2\gamma)/\rho I,$$
$$C_s^2 = \mu/\rho,$$
$$C_{s\alpha}^2 = (\mu + \alpha)/\rho,$$
$$C_{sr}^2 = (\gamma + \varepsilon)/\rho I,$$
$$\omega_0^2 = 4\alpha/(\rho_0 I).$$

Линейная изотропная редуцированная среда Коссера: дисперсионные соотношения



$$\omega_0^2 = 4\alpha/(\rho_0 I),$$
$$\omega_1^2 = \omega_0^2/(1+\alpha/\mu),$$
$$C_s^2 = \mu/\rho,$$
$$C_{s\alpha}^2 = (\mu+\alpha)/\rho,$$
$$C_l^2 = (\lambda+2\mu)/\rho.$$

Существует запрещенная зона, где волны сдвига–вращения не распространяются (единожды отрицательный акустический метаматериал).

$$k^2 = \frac{\omega^2}{C_s^2}\frac{(1-\omega^2/\omega_0^2)}{(1-\omega^2/\omega_1^2)}.$$

Это так из-за отсутствия одной упругой связи (среда не реагирует на $\nabla\boldsymbol{\theta}$.) В этой зоне волны локализуются.

Линейная изотропная редуцированная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений

Будем искать решения уравнений динамики редуцированной среды Коссера в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$, $\quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$. При этом оператор ∇ заменяется на $i\mathbf{k}$, дифференцирование по времени на $i\omega$. Имеем

$$-(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} + (\mu+\alpha)\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u}) + 2i\alpha\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta} = -\omega^2\rho\mathbf{u}$$
$$2i\alpha\mathbf{k}\times\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\theta} = -\omega^2\rho I\boldsymbol{\theta}$$

Из последнего уравнения выражаем $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathbf{u}$, вводя $\omega_0^2 = 4\alpha/(\rho I)$. При $\omega \neq \omega_0$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{i\omega_0^2}{2(\omega_0^2-\omega^2)}\mathbf{k}\times\mathbf{u}. \tag{4}$$

Случай $\omega = \omega_0$ рассматриваем отдельно. Получаем решение $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$.

Линейная изотропная редуцированная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений

Подставляем θ, выраженное через $\mathbf{u}$, в баланс сил:

$$-(\lambda+2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}+(\mu+\alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2})\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u})=-\omega^2\rho\mathbf{u}.$$

Заметим, что $\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u})=k^2(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}-\mathbf{E})\cdot\mathbf{u}$, где $\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}/k$, $k=|\mathbf{k}|$.
Можем записать $\rho\omega^2=\rho\omega^2\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}+\rho\omega^2(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})$.
Получаем

$$(\rho\omega^2-k^2(\lambda+2\mu))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u}+(\rho\omega^2-k^2(\mu+\alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}))(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}.$$

Видим, что волна растяжения – сжатия такая же, как и в классической среде, а дисперсионное соотношение для волны сдвига – вращения

$$\rho\omega^2=k^2(\mu+\alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2})\quad\Longleftrightarrow\quad k^2=\frac{\omega^2}{C_s^2}\frac{(1-\omega^2/\omega_0^2)}{(1-\omega^2/\omega_1^2)}.$$

Линейная изотропная полная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений

Для свободных колебаний

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times \boldsymbol{\theta} = \rho\ddot{\mathbf{u}},$$

$$(\beta + 2\gamma)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\theta} - (\gamma + \varepsilon)\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\theta}) + 2\alpha(\nabla \times \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\theta}) = \rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Будем искать решения уравнений динамики среды Коссера в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}$. При этом оператор ∇ заменяется на $i\mathbf{k}$, дифференцирование по времени на $i\omega$. Имеем

$$-(\lambda + 2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha)\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) + 2i\alpha\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = -\rho\omega^2\mathbf{u}, \quad (5)$$

$$-(\beta+2\gamma)\mathbf{k}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\theta}+(\gamma+\varepsilon)\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta})+2\alpha(i\mathbf{k} \times \mathbf{u}-2\boldsymbol{\theta}) = -\rho I\omega^2\boldsymbol{\theta}. \quad (6)$$

Постараемся действовать аналогично случаю с редуцированной средой Коссера: исключим $\boldsymbol{\theta}$ из первого закона динамики Эйлера, пользуясь вторым. Однако выражение будет куда более сложным. Как же быть?

Линейная изотропная полная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений

Заметим, что нам достаточно выразить $\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}$ через $\mathbf{u}$.
Умножая (6) векторно на $\mathbf{k}$, получим

$$(\gamma+\varepsilon)\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}))+2\alpha(i\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u})-2\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta})=-\rho l\omega^2\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}.$$

Заметим, что
$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}))=-k^2(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})\cdot(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta})=-k^2\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}$
Имеем

$$2i\alpha\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u})=(k^2(\gamma+\varepsilon)+4\alpha-\rho l\omega^2)\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}.$$

Разделив на ρl, получаем

$$i\omega_0^2\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{u})/2=(k^2C_{sr}^2+\omega_0^2-\omega^2)\mathbf{k}\times\boldsymbol{\theta}.$$

Линейная изотропная полная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений.

Покажем, что не может выполняться

$$\omega^2 = \omega_0^2 + C_{sr}^2 k^2. \tag{7}$$

В редуцированной среде Коссера это была прямая $\omega = \omega_0$.
Видим, что это влечет $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) = \mathbf{0}$. Подставляя в (6) эти выражения, получаем $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$.
Действительно, $\mathbf{k} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, разделив (6) на ρI, получаем

$$-C_{lr}^2 \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} - C_{sr}^2 k^2 (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \boldsymbol{\theta} - \omega_0^2 \boldsymbol{\theta} = -\omega^2 \boldsymbol{\theta}, \tag{8}$$

и с учетом (7) имеем $(C_{sr}^2 - C_{lr}^2)\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. Не будем рассматривать случай $C_{sr} = C_{lr}$. Тогда имеем $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$.
В то же время (5) в этом случае сводится к

$$(\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu))\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} + 2i\alpha \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0},$$

что в силу (7) при скалярном умножении на $\mathbf{k}$ дает $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$.
Отсюда и $\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, так что $\boldsymbol{\theta} = 0$. В отличие от редуцированной среды Коссера, свободных колебаний нет.

Линейная изотропная полная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений

Продолжаем исключать $\boldsymbol{\theta}$ из первого закона динамики Эйлера. Теперь можем разделить обе части

$$i\omega_0^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u})/2 = (k^2 C_{sr}^2 + \omega_0^2 - \omega^2)\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}.$$

на множитель при $\boldsymbol{\theta}$:

$$2i\alpha \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = -\frac{\alpha\omega_0^2}{(k^2 C_{sr}^2 + \omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}).$$

Подставляя в первый закон (5), получаем

$$-(\lambda + 2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha \frac{k^2 C_{sr}^2 - \omega^2}{k^2 C_{sr}^2 + \omega_0^2 - \omega^2})\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) = -\rho\omega^2 \mathbf{u}.$$

Линейная изотропная полная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений. Волна растяжения – сжатия

Получаем спектральную задачу для $\mathbf{u}$

$$(\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}$$

$$+ (\rho\omega^2 - k^2(\mu + \alpha \frac{k^2 C_{sr}^2 - \omega^2}{k^2 C_{sr}^2 + \omega_0^2 - \omega^2}))(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

1. Продольная акустическая ветка. Видим, что волна растяжения – сжатия в изотропной полной среде Коссера такая же, как в классической среде (дисперсионное соотношение $\omega = C_l k, \quad C_l^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0\hat{\mathbf{k}}$, из (6) следует $\boldsymbol{\theta} = 0$).

Линейная изотропная полная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений. Волна сдвига – вращения

2,3. Поперечная акустическая и поперечная оптическая ветки. Волна сдвига – вращения ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0$) соответствует ветвям уравнения

$$\rho\omega^2 = k^2(\mu + \alpha\frac{k^2C_{sr}^2 - \omega^2}{k^2C_{sr}^2 + \omega_0^2 - \omega^2}),$$

откуда имеем

$$\omega^4 - \omega^2(k^2(C_{sr}^2 + C_{s\alpha}^2) + \omega_0^2) + k^2C_s^2\omega_0^2 + k^4C_{s\alpha}^2C_{sr}^2 = 0.$$

Это биквадратное уравнение можно разрешить относительно ω или относительно k. Заметим, что при $k \to \infty$ оно дает $\omega \approx C_{sr}k$ или $\omega \approx C_{s\alpha}k$. Горизонтальных асимптот, в отличие от редуцированной среды Коссера, нет, так как упругая энергия положительно определена. При малых k либо $\omega \approx C_sk$, либо $\omega^2 \approx \omega_0^2 + k^2(C_{sr}^2 + C_{s\alpha}^2 - C_s^2) = \omega_0^2 + k^2(C_{sr}^2 + \alpha/\rho)$, то есть для верхней ветви имеется частота отсечки ω_0, а нижняя начинается так же, как волна сдвига в классической среде.

Линейная изотропная полная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений. Волна сдвига – вращения

Явное выражение для ω имеет вид

$$2\omega^2 = \omega_0^2 + k^2(C_{sr}^2 + C_{s\alpha}^2) \pm \sqrt{(\omega_0^2 + k^2(C_{sr}^2 - C_{s\alpha}^2))^2 + 4\omega_0^2 k^2 \alpha/\rho}$$

Легко получить из (6), что для волны сдвига – вращения
$\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k} = 0$.

Линейная изотропная полная среда Коссера: вывод дисперсионных соотношений. Продольная волна для поворотов

4. Продольная оптическая ветка. Продольная поворотная волна. Как мы уже заметили, $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k}$ не оказывает влияния на спектральную задачу для $\mathbf{u}$, однако возможны свободные плоские волны с вектором поворота, направленным вдоль волнового вектора. Умножая (6) скалярно на $\hat{\mathbf{k}}$, получаем

$$((\omega^2 - \omega_0^2) - k^2(\beta + 2\gamma)/(\rho I))\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + C_{lr}^2 k^2$$

При этом $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\theta}_0 = \theta_0 \hat{\mathbf{k}}$.
Другой способ вывода: Eringen, 1999, Microcontinuum field theories, pp. 147–150.