О структуре графа Маркова для узла

Определения.

Косы. Пусть B_n — группа кос Артина из n нитей:

$$B_n := \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ |i-j| \geq 2;\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \rangle.$$

Элементы группы B_n называются *косами*.

Мы называем *замкнутой косой* индекса n класс сопряженности в группе кос B_n. Обозначим через $\widehat{\beta}$ класс сопряженности косы β и через $\widehat{B}_n$ — множество классов сопряженности группы кос B_n (или, что то же самое, множество замкнутых кос индекса n).

Стабилизация и дестабилизация. Говорят, что замкнутая коса $\widehat{\alpha}$ индекса $n-1$ получается из замкнутой косы $\widehat{\beta}$ индекса n с помощью *дестабилизации* (и, соответственно, что $\widehat{\beta}$ получается из $\widehat{\alpha}$ с помощью *стабилизации*), если найдется коса $\gamma \in \widehat{\alpha}$ такая, что $\gamma\sigma_{n-1} \in \widehat{\beta}$ или $\gamma\sigma_{n-1}^{-1} \in \widehat{\beta}$:

$$\widehat{\beta} \ni \gamma\sigma_{n-1}^{\pm 1} \quad \longmapsto \quad \gamma \in \widehat{\alpha}.$$

Для замкнутой косы $\widehat{\beta}$ индекса n мы обозначаем через

$$\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$$

множество всех замкнутых кос индекса $(n-1)$, которые получаются из $\widehat{\beta}$ с помощью дестабилизации. Через

$$\mathfrak{S}(\widehat{\beta})$$

мы обозначаем множество всех замкнутых кос индекса $(n+1)$, которые получаются из $\widehat{\beta}$ с помощью стабилизации. Таким образом,

$$\widehat{\alpha} \in \mathfrak{D}(\widehat{\beta}) \iff \widehat{\beta} \in \mathfrak{S}(\widehat{\alpha}).$$

Граф Маркова. Определим *граф Маркова* $\mathcal{M}$ следующим образом: в качестве множества вершин возьмем множество всех всех замкнутых кос (т.е. множество всех классов сопряженности в группах кос); вершины $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ соединим ребром, если $\widehat{\alpha} \in \mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ или, что то же самое, если $\widehat{\beta} \in \mathfrak{S}(\widehat{\alpha})$. Для класса сопряженности $\widehat{\alpha} \in \widehat{B}_n$ число n назовем *индексом* вершины $\widehat{\alpha}$.

Теорема Маркова. *Косы α и β представляют одно и то же ориентированное зацепление если и только если классы $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ лежат в одной компоненте связности графа $\mathcal{M}$.*

Граф Маркова для зацепления. В силу теоремы Маркова, множество компонент связности графа Маркова находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством ориентированных зацеплений. Компоненту связности графа $\mathcal{M}$, вершины которой представляют некоторое зацепление L, назовем *графом Маркова зацепления* L и обозначим через $\mathcal{M}_L$.

Напомним, что минимальный индекс вершины в графе $\mathcal{M}_L$ называется *числом косы* зацепления L и обозначается через $b(L)$. Вершины из $\mathcal{M}_L$, имеющие индекс $b(L)$, называются *минимальными косами*.

Вдвойне дестабилизируемые косы. Будем говорить, что замкнутая коса $\widehat{\beta}$ *вдвойне дестабилизируема*, если индекс $\widehat{\beta}$ больше трех и $\widehat{\beta}$ содержит либо косу вида

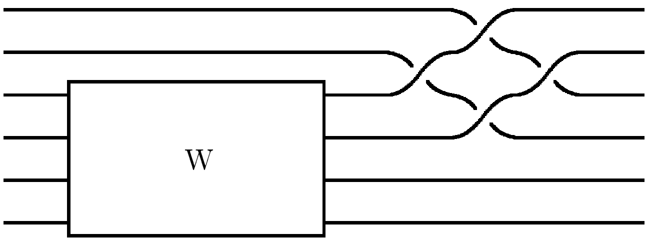
$$W\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\sigma_{n-3}\sigma_{n-2},$$

либо косу вида

$$W\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-3}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1},$$

где W — слово в образующих $\{\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-3}^{\pm 1}\}$.

Рис. 1: Вдвойне дестабилизируемая коса



Заметим, что если коса $\widehat{\beta}$ вдвойне дестабилизируема, то она может быть *дестабилизирована два раза*, то есть множество $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ непусто и содержит дестабилизируемую косу. Вместе с тем, не всякая коса, которая может быть дестабилизирована два раза, является вдвойне дестабилизируемой.

Результаты.

Теорема. *Пусть коса β индекса $n > 2$ не является крашеной. Тогда множество $\mathfrak{S}(\widehat{\beta})$ бесконечно.*

Следствие. *Пусть коса $\beta \in B_n$, где $n > 2$, представляет некоторый узел (то есть однокомпонентное зацепление). Тогда множество $\mathfrak{S}(\widehat{\beta})$ бесконечно.*

Гипотеза. *Множество $\mathfrak{S}(\widehat{\beta})$ конечно если и только если коса β лежит в центре группы кос.*

Теорема. *Если у замкнутой косы $\widehat{\beta}$ множество $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ бесконечно, то $\widehat{\beta}$ является вдвойне дестабилизируемой.*

Теорема. *Пусть $\widehat{\beta}$ — замкнутая коса нечетного индекса, представляющая некоторый узел. Тогда множество $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ бесконечно если и только если $\widehat{\beta}$ является вдвойне дестабилизируемой.*

Теорема. *Пусть коса α индекса $n > 2$ не является крашеной. Тогда в множестве $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\widehat{\alpha}))$ найдется такая коса $\widehat{\beta}$, что множество $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ бесконечно.*

Следствие. *Для любого зацепления L найдется представляющая его замкнутая коса $\widehat{\beta}$, такая что множество $\mathfrak{D}(\widehat{\beta})$ бесконечно.*