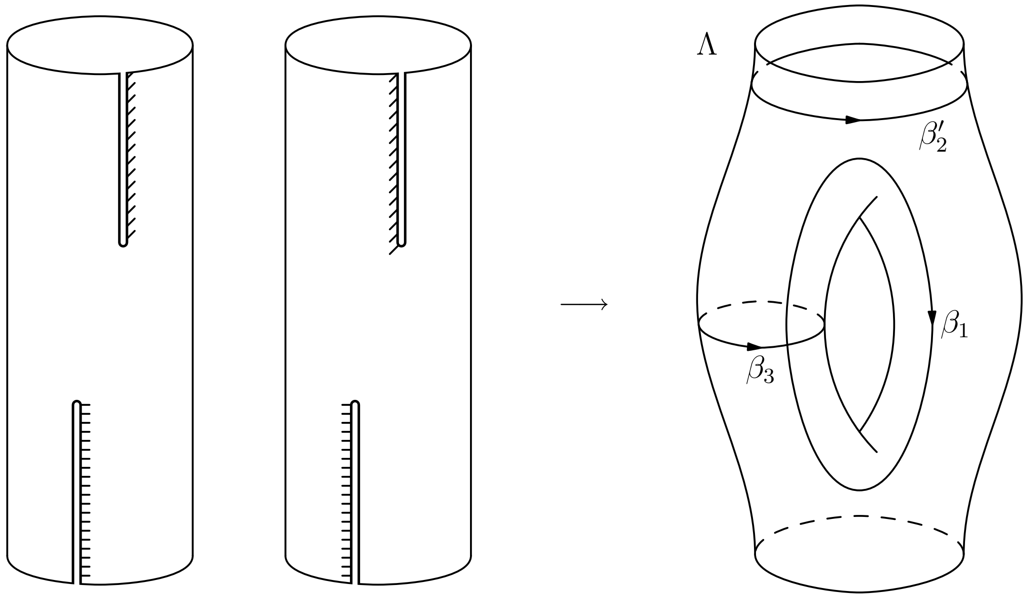
Комплексные лагранжевы многообразия и линии Стокса

В докладе рассматривается дифференциальный оператор $\mathfrak{D}$, заданный выражением $-h^2\frac{d^2}{dx^2} + i\cos(x)$ с малым параметром $h > 0$, и действующий на аналитические функции, определённые на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Этот оператор несамосопряжён. Ставится вопрос о нахождении асимптотики его спектра при $h \to 0+0$.

Оказывается, что асимптотика спектра оператора $\mathfrak{D}$ выражается через интегралы от голоморфных форм по циклам на римановой поверхности Λ, задаваемой в $\mathbb{C}^2/2\pi\mathbb{Z}$ уравнением $p^2 + i\cos(x) = E$ ($p \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$). Эта поверхность при $E \neq \pm i$ гомеоморфна тору с двумя дырками и получается склейкой двух экземпляров цилиндра $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$, разрезанного по лучам, соединяющим нули функции $i\cos(x) - E$ с бесконечностями $\pm i\infty$:



Обозначим β_1, $\beta_2 = \beta_1 + \beta_2'$ и β_3 — базисные циклы на Λ, как показано на рисунке.

Теорема. *Пусть E — таково, что на поверхности Λ существует цикл $\beta \in \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, для которого $\frac{1}{2\pi h}\int_\beta p\,dx \in \mathbb{Z} + \frac{\mu(\beta)}{2}$. Тогда существует собственное число λ оператора $\mathfrak{D}$, для которого $\lambda - E = O(h^2)$. Здесь $\mu(\beta_1) = \mu(\beta_2) = 1$, $\mu(\beta_3) = 0$.*

Асимптотика спектра оператора $\mathfrak{D}$ стягивается к графу, лежащему внутри числового образа $\operatorname{Img}\mathfrak{D} = [0, +\infty) + i(-1, 1)$: