СРАВНЕНИЕ ПО МОДУЛЮ 8 ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 9

О. Я. Виро, С. Ю. Оревков

1. Введение и формулировка результата. Пусть A – неособая вещественная алгебраическая кривая степени m в $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$. Ее компоненты связности — вложенные окружности. Те из них, дополнение которых в $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ несвязно, называются *овалами*. Говорят, что овал u лежит *внутри* овала v, если u содержится в ориентируемой компоненте дополнения овала v. Объединение d овалов $v_1,\dots,v_d$, таких что v_i лежит внутри v_{i+1}, $1\le i<d$, называется *гнездом глубины* d. Овал называется *внешним*, если он не лежит внутри никакого другого овала; овал называется *пустым*, если внутри него нет других овалов. Овал называется *четным*, если он содержится внутри четного числа других овалов, и *нечетным* в противном случае. Обозначим через p и n число четных и нечетных овалов, соответственно. КриваяA называется M*-кривой*, если она имеет максимально возможное число компонент связности, равное $M(m)=(m-1)(m-2)/2+1$. Если A имеет $M(m)-i$ компонент связности, то она называется $(M-i)$*-кривой*. Пусть $\mathbb{C}A$ — комплексификация кривой A. Если $\mathbb{C}A\smallsetminus A$ несвязно, то A — кривая *типа I*; если $\mathbb{C}A\smallsetminus A$ связно, то A — кривая *типа II*;

У кривых четной степени $m=2k$ в ряде случаев разность $p-n$ удовлетворяет сравнениям. Так например,

для M-кривых имеет место сравнение Гудкова-Рохлина	$p-n\equiv k^2 \mod 8$,
для $(M-1)$-кривых — сравнение Гудкова-Крахнова-Харламова	$p-n\equiv k^2\pm 1 \mod 8$,
для $(M-2)$-кривых типа II — сравнение Харламова-Марэна	$p-n\not\equiv k^2+4 \mod 8$
и для кривых типа I — сравнение Арнольда	$p-n\equiv k^2 \mod 4$.

Эти формулировки не переносятся на кривые *нечетных* степеней. Так, для M-кривой любой нечетной степени $2k+1$ с $k\ge 3$ вычет $p-n \bmod 8$ может принимать любые значения, сравнимые с $k \bmod 2$. Следующая теорема является, насколько нам известно, первым результатом такого рода для кривых нечетных степеней.

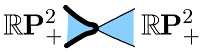
Теорема 1. *Пусть A — кривая степени $m=2k+1=4d+1$, имеющая 4 попарно непересекающихся гнезда глубины d. Тогда:*

если A — это M-кривая, то	$p-n\equiv k(k+1) \mod 8$;	(1)
если A — это $(M-1)$-кривая, то	$p-n\equiv k(k+1)\pm 1 \mod 8$;	
если A — это $(M-2)$-кривая типа II, то	$p-n\not\equiv k(k+1)+4 \mod 8$;	
если A — это кривая типа I, то	$p-n\equiv k(k+1) \mod 4$.	

Очевидно, что сравнение (1) при $d=2$ эквивалентно тому, что число внешних пустых овалов M-кривой степени 9 с 4 гнездами делится на 4. Этот факт был сформулирован в качестве гипотезы Корчагиным [2]. Теорема 1 получается ниже (см. п 4) как следствие сравнения Виро-Харламова [1], обобщающего классические сравнения на случай особых кривых кривых четной степени.

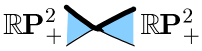
2. Инвариант Брауна - ван дер Блия. Под *квадратичным пространством* мы понимаем тройку $(V,\circ,q)$, составленную из векторного пространства V над полем $\mathbb{Z}_2$, билинейной формы $V\times V\to\mathbb{Z}_2$, $(x,y)\mapsto x\circ y$ и функции $q:V\to\mathbb{Z}_4$, квадратичной относительно $\circ$ в том смысле, что $q(x+y)=q(x)+q(y)+2x\circ y$. Квадратичное пространство определяется своей *матрицей Грама* относительно какого-либо базиса $e_1,\dots,e_n$ пространства V, т.е. матрицей $Q=(q_{ij})$, где $q_{ii}=q(e_i)$ и $q_{ij}=e_i\circ e_j$ при $i\ne j$ (диагональные элементы определены $\bmod 4$, остальные — $\bmod 2$; заметим, что $q(x)\equiv x\circ x \bmod 2$). Легко видеть, что элементарными заменами базиса матрицу Грама можно привести к блочно-диагональному виду $\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_t)\oplus Q_1\oplus\dots\oplus Q_s$, где каждый блок Q_i — это либо $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, либо $\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)$. Если все $d_i \neq 2$, будем говорить, что форма q, *информативна*, и в этом случае определим ее *инвариант Брауна - ван дер Блия* $B(q) = \sum B(d_i) + \sum B(Q_i) \mod 8$, где $B(1) = 1$, $B(3) = -1$, $B(0) = 0$, $B\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$ и $B\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 4$.

3. Сравнение Виро-Харламова для нодалных кривых. Пусть A — кривая в $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ степени $2k$, заданная уравнением $f = 0$, и пусть каждая её особая точка есть точка трансверсального пересечения двух гладких вещественных локальных ветвей. Говорят, что A является M*-кривой* (кривой *типа I*), если нормализация любой ее неприводимой компоненты является M-кривой (кривой типа I). Кривая, не имеющая тип I, относится к типу II. Пусть $x_1, \dots, x_s$ — особые точки и Γ_A — объединение проходящих через них компонент связности кривой A. Пусть $b = 0$, если множество $\mathbb{R}\mathbf{P}^2_+ = \{f \geq 0\}$ стягиваемо в $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, и $b = (-1)^k$ в противном случае. Если A не стягиваема в $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, то выберем в ней простую замкнутую кривую L, не стягиваемую в $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$. Пусть $C_1, \dots, C_r$ — компоненты внутренности множества $\mathbb{R}\mathbf{P}^2_+$, примыкающие к Γ_A.

Пусть $(V_0, \circ, q_0)$ — квадратичное пространство с базисом $e_0, \dots, e_s$, в котором $e_1, \dots, e_s$ попарно ортогональны, $e_0 \circ e_j = 0$, если и только если L проходит через x_j, реализуя нуль группы $H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2_+, \mathbb{R}\mathbf{P}^2_+ \setminus x_j)$, то есть так 

, а не так 

, и наконец $q_0(e_0) = (-1)^k$, $q_0(e_1) = \dots = q_0(e_s) = -1$. Пусть $V \subset V_0$ — подпространство, порожденное векторами $\sum_{j \in \alpha_i} e_j$, где $\{x_j\}_{j \in \alpha_i}$ — особые точки, через которые ∂C_i проходит ровно один раз, а также (в случае, если A не стягиваема) вектором $e_0 + \sum_{j \in \alpha_0} e_j$, где $\{x_j\}_{j \in \alpha_0}$ — особые точки, через которые L проходит, реализуя ненулевой элемент группы $H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2_-, \mathbb{R}\mathbf{P}^2_- \setminus x_j)$, где $\mathbb{R}\mathbf{P}^2_- = \{f \leq 0\}$, то есть так 

, а не так 

. Пусть $q = q_0|_V$.

Теорема 2. *Предположим, что каждая ветвь кривой A (т.е. гладко погруженная окружность), стягиваемая в $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, пересекает объединение всех прочих ветвей в $n \equiv 0 \bmod 4$ точках, а каждая ветвь, не стягиваемая в $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, — в $n \equiv (-1)^{k+1} \mod 4$ точках. Тогда если A есть M-кривая, то $\chi(\mathbb{R}\mathbf{P}^2_+) \equiv k^2 + B(q) + b \mod 8$, а также имеют место соответствующие аналоги сформулированных выше сравнений Гудкова-Крахнова-Харламова, Харламова-Марэна и Арнольда.*

Теорема 2 является следствием теоремы (3.B) о кривых с произвольными особенностями из статьи Харламова и Виро [1]. Теорема 2 приведена здесь, поскольку в обсуждении соотвествующего частного случая (4.I), (4.J) теоремы (3.B) в [1] форма q описана неправильно.

4. Доказательство теоремы 1. Выберем любые три попарно непересекающихся гнезда глубины d, и внутри самого внутреннего овала каждого из них выберем по точке. Теорема 1 вытекает из теоремы 2, примененной к объединению кривой A и трех прямых, проходящих через выбранные точки. Действительно, объединение трех выбранных прямых и нестягиваемий ветви кривой A делит $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ на 4 треугольника и 3 четырехугольника (криволинейных). Все овалы, не принадлежащие трем выбранным гнездам, лежат в четырехугольниках (иначе нашлась бы коника, имеющая слишком много пересечений с A). Поэтому при должном выборе знака $\chi(\mathbb{R}\mathbf{P}^2_+) = \chi(\bigcup \bar{C}_j) + p' - n'$, где p' и n' — число четных и нечетных овалов, не принадлежащих трем выбранным гнездам. $B(q)$ несложно вычислить согласно п. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] V.M. Kharlamov, O.Ya. Viro, Extension of the Gudkov-Rohlin congruence // Lect. Notes. Math., vol **1346** (1988) 357–406.

[2] A.B. Korchagin, Construction of new M-curves of 9th degree // Lect. Notes. Math., vol. **1524** (1991) 407–426.

ПОМИ РАН им. В.А. Стеклова, Санкт-Петербург
МИ РАН им. В.А. Стеклова, Москва

Уппсальский Университет, Уппсала, Швеция;
Университет им. Поля Сабатье, Тулуза, Франция