1992

6-й класс

1992.01. В турнире по крестикам-ноликам за победу дается 1 очко, за ничью — 0 очков, а за проигрыш одно очко вычитается. Несколько школьников сыграли турнир по крестикам-ноликам так, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Один из участников набрал 7 очков, а другой — 20 очков. Докажите, что в турнире была хоть одна ничья.

1992.02. Замок имеет вид семиугольника, в каждой вершине которого находится сторожевая башня. Каждую из семи стен замка охраняют стражники в башнях, находящихся в концах этой стены. Какое наименьшее количество стражников нужно разместить в башнях, чтобы каждая стена охранялась не менее, чем семью стражниками?

1992.03. Дано натуральное число n. Докажите, что у чисел $n(n-1)$ и $(n+1)^2$ разные суммы цифр.

1992.04. В коллекции у нумизмата Феди все монеты имеют диаметр не более 10 см. Федя хранит все свои монеты в плоской коробке размерами 30 см $\times$ 70 см. Докажите, что он может уложить их в другую плоскую коробку размерами 40 см $\times$ 60 см.

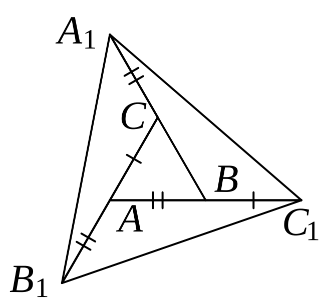
1992.05. 27 точек на окружности разбивают ее на равные дуги. Точки покрашены в белый и черный цвета, причём известно, что никакие две черные точки не находятся рядом или через одну. Докажите, что найдутся три белые точки, лежащие в вершинах равностороннего треугольника (т.е. делящие окружность на три равные дуги).

1992.06. Три фальшивомонетчика напечатали много разных купюр — на 100 рублей каждый. Известно, что каждый из них может уплатить любому другому любую сумму от 1 до 25 рублей (может быть, со сдачей). Докажите, что они вместе могут уплатить любую сумму от 100 до 200 рублей. (Купюры фальшивые и могут быть любого достоинства. Всюду в задаче речь идет о суммах, выражающихся целым числом рублей.)

7-й класс

1992.07. В универмаге города Гайдаровска продавалось (1 января) девять товаров по цене 1 рубль каждый. Начиная со второго января, ежедневно стоимость каждого товара увеличивалась в два или в три раза. Известно, что 1 февраля все товары имели различные цены. Докажите, что цены каких-то двух товаров различаются по крайней мере в 25 раз.

1992.08. Для каких натуральных чисел вида $111\ldots11$ существует делящееся на них число вида $1000\ldots001$?



1992.09. Стороны треугольника ABC продолжены за вершины треугольника так, что $BC_1 = AC$, $AB_1 = AB$, $CA_1 = AB$. Известно, что треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний. Докажите, что и исходный треугольник ABC — равносторонний.

1992.10. На клетчатой бумаге отмечено 100 узлов решетки. Докажите, что найдутся два из них — A и B — такие, что прямоугольник $AXBY$ со сторонами, параллельными линиям сетки, содержит не менее 20 отмеченных узлов (считая и узлы, лежащие на сторонах прямоугольника).

1992.11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 1 = (b + c)/2 \\ b^2 + 3b + 1 = (a + c)/2 \\ c^2 + 3c + 1 = (a + b)/2\,. \end{cases}$$

1992.12. Все монеты в коллекции нумизмата Феди имеют диаметр не больший 10 см. Он хранит их в плоской коробке размерами 30 см×70 см. Ему подарили монету диаметром 25 см. Докажите, что теперь он сможет разместить все свои монеты в плоской коробке размерами 55 см×55 см.

1992.13. Круг разделен на N секторов, в которых как-то рассажена $N+1$ лягушка. Каждую секунду какие-то две лягушки, сидящие в одном секторе, прыгают в соседние (разные) сектора. Докажите, что в какой-то момент времени лягушками будет занято не менее половины секторов.

8-й класс

1992.14. См. задачу 7.

1992.15. См. задачу 5.

1992.16. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция — равнобедренная.

1992.17. См. задачу 11.

1992.18. Даны натуральные числа k и n, разность которых больше 1. Известно, что $4kn+1$ делится на $k+n$. Докажите, что числа $2n-1$ и $2k+1$ имеют общий делитель, больший 1.

1992.19. Клетки квадрата 7×7 раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется по крайней мере 21 прямоугольник с вершинами в центрах клеток одного цвета и со сторонами, параллельными сторонам квадрата.

1992.20. См. задачу 13.

9-й класс

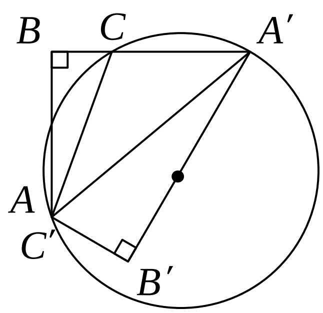
1992.21. Даны два различных квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что $f(19)+f(92) = g(19)+g(92)$. При каких x выполнено равенство $f(x) = g(x)$?

1992.22. С натуральным числом A разрешается выполнять следующую операцию: разбить его на два натуральных слагаемых, больших 1, и заменить A на их произведение. Докажите, что из любого числа, большего 4, такими операциями можно получить точную степень десяти.

1992.23. Все 120 граней двадцати одинаковых кубиков с длиной ребра 1 покрасили в черный и белый цвет, причём граней каждого цвета – по 60.

Докажите, что кубики можно поставить на стол так, что их нижние грани образуют граничную кайму квадрата 6×6, а среди тех граней, которые видны, количество черных равно количеству белых.

1992.24. Подобные прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$ (углы при вершинах B и B' — прямые; соответствующие вершины обозначены одинаковыми буквами; вершины перечислены по часовой стрелке) расположены на плоскости так, что $A = C'$, а точка A' лежит на луче $[BC)$ за точкой C.



Докажите, что центр окружности, описанной вокруг треугольника $A'AC$, лежит на прямой $A'B'$.

1992.25. В клетках таблицы $N \times N$ расставлены числа так, что на пересечении i-го столбца и j-ой строки стоит число $1/(i+j-1)$. Затем в клетках таблицы расположили N ладей так, что никакие две ладьи не бьют друг друга. Докажите, что сумма чисел под ладьями не меньше единицы.

1992.26. Внутри стороны AB некоторого треугольника ABC нашлась точка D такая, что $AD/DC = AB/BC$. Докажите, что угол ACB — тупой.

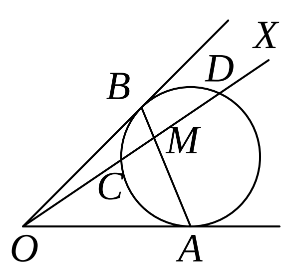
1992.27. Даны два десятизначных числа A и B, в записи которых участвуют только 1 и 2. Докажите, что двадцатизначных чисел, из которых вычеркиванием цифр можно получить число A, столько же, сколько и тех, из которых можно получить число B.

10-й класс

1992.28. См. задачу 21.

1992.29. Внутри единичного квадрата с отмеченными вершинами отмечена еще одна точка. Докажите, что найдутся три отмеченные точки, образующие треугольник с площадью не больше $1/8$.

1992.30. На каждой из $N \geqslant 3$ карточек написана цифра. Располагая эти карточки в ряд всеми возможными способами, мы получаем $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (N-1)N$ натуральных чисел. Может ли их произведение быть числом, десятичная запись которого состоит из одних единиц?



1992.31. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B. Луч OX пересекает эту окружность в двух точках C и D так, что $OC = CD = 1$. Если M — точка пересечения луча OX и отрезка AB, то чему равна длина отрезка OM?

1992.32. В куче лежат 1992 камня. Двое играют в следующую игру: за ход каждый из них может взять из кучи произвольное количество камней, являющееся делителем того количества камней, которое взял предыдущим своим ходом противник. Первый игрок первым своим ходом может взять любое число камней, но не все сразу. Выигрывает тот, кто берет последний камень. Кто побеждает при правильной игре?

1992.33. На плоскости дан правильный n-угольник с центром O. Через $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ обозначены вектора, ведущие из O в вершины многоугольника, причём занумерованы они по порядку, считая от какой-то вершины. Докажите, что если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — некоторые вещественные числа, то вектор $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n$ — ненулевой.

1992.34.* Во взводе национальной гвардии служат сержанты и рядовые, причём каждый рядовой подчинен одному или двум сержантам. Докажите, что можно уволить в запас не более половины взвода так, что каждым оставшимся рядовым будет командовать ровно один сержант.

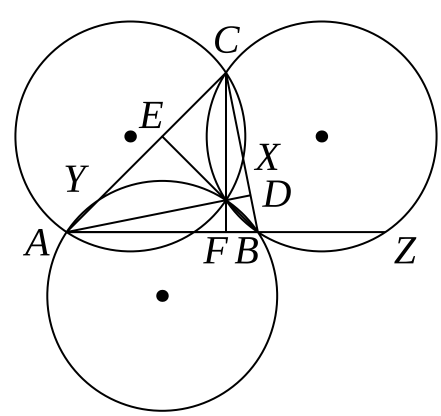
11-й класс

1992.35. См. задачу 29.

1992.36. Даны различные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что $f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$. При каких x выполнено равенство $f(x) = g(x)$?

1992.37. По окружности расставлено некоторое количество черных и такое же количество белых шашек. Пусть A — количество тех троек подряд стоящих шашек, в которых преобладает белый цвет, а B — количество троек подряд стоящих шашек, в которых преобладает черный цвет. Докажите, что $A \leqslant 3B$.

1992.38. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Точки X, Y и Z таковы, что D, E и F являются серединами отрезков BX, CY и AZ соответственно. Докажите, что центры окружностей, описанных вокруг треугольников ACX, ABY и BCZ, являются вершинами треугольника, равного треугольнику ABC.



1992.39. Последовательность (F_n) определяется следующим образом: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, и

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при любом $n > 1$. Докажите, что среди членов этой последовательности нет чисел вида 7^k.

1992.40. Докажите, что при любых положительных a, b, c выполнено неравенство

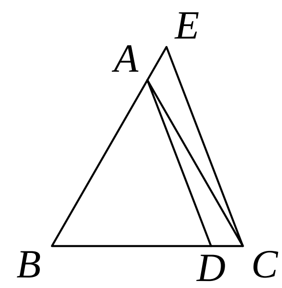
$$-1 \leqslant \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{11} + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^{11} + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^{11} \leqslant 1\,.$$

1992.41. Все клетки таблицы 10×10 окрашены в черный и белый цвет, причём имеются клетки и того, и другого цвета. Докажите, что в клетках можно расставить вещественные числа так, что число в любой белой клетке будет больше среднего арифметического чисел в соседних клетках, а число в любой черной клетке будет меньше среднего арифметического чисел в соседних клетках (клетки называются соседними, если у них есть общая сторона).

Отборочный тур

9–10-е классы

1992.42. Внутри стороны BC правильного треугольника ABC взята точка D. Прямая, проходящая через точку C и параллельная AD, пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что $CE/CD \geqslant 2\sqrt{3}$.

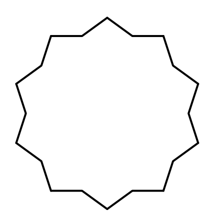


1992.43. К натуральному числу каждую секунду прибавляют 54 или 77. Докажите, что через некоторое время получится число, две последние цифры которого совпадают.

1992.44. Имеется nk камней, которые как-то разложены в n кучек. Разрешается удвоить любую кучку, переложив в нее произвольным образом камни из других кучек. При каких k такими операциями всегда (для любого n) можно добиться того, чтобы во всех оставшихся кучках было поровну камней?

1992.45. Докажите, что если натуральное число a не является точным квадратом, то найдется натуральное n такое, что $a = [n + \sqrt{n} + 1/2]$.

1992.46. Правильный n-угольник M повернули вокруг своего центра на угол π/n, и получили n-угольник M'.



На какое минимальное количество выпуклых многоугольников можно разрезать фигуру $M \cup M'$?

1992.47. Последовательность (F_n) определяется так: $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для любого $n > 0$. Докажите, что при любом натуральном n выполнено неравенство

$$\sqrt[n]{F_{n+1}} > 1 + 1/\sqrt[n]{F_n}\ .$$

1992.48.* Плоскость раскрашена в 1992 цвета, и на ней дан некий треугольник T. Докажите, что на плоскости найдется треугольник, равный T, такой, что на любой паре его сторон есть внутренние точки одного цвета.

1992.49.* На доске написано 128 единиц. За ход можно заменить пару чисел a и b на число $ab + 1$. Пусть A — максимальное число, которое может получиться на доске после 127 таких операций. Какова его последняя цифра?

11-й класс

1992.50. Даны n отрезков такие, что из любых $n-1$ из них можно сложить $(n-1)$-угольник. Докажите, что из каких-то трех из них можно сложить треугольник.

1992.51. Найдите все тройки натуральных чисел такие, что произведение любых двух чисел в тройке, увеличенное на 1,делится на удвоенное третье число.

1992.52. См. задачу 45.

1992.53. Даны натуральные числа n и k, такие что $n > k$. Докажите, что каждое натуральное число, меньшее $\binom{n}{k}$, можно ровно одним способом представить как сумму

$$\binom{a_1}{1} + \binom{a_2}{2} + \ldots + \binom{a_k}{k},$$

где $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k < n$; мы полагаем $\binom{n}{k} = 0$ при $n < k$.

1992.54. Известно, что для любых четырех прямых общего положения на плоскости (т. е. таких, из которых никакие две не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке), окружности, описанные вокруг четырех треугольников, получающихся при пересечении этих прямых, проходят через одну точку. Существует ли набор из 45 прямых общего положения, для которых все окружности, описанные вокруг треугольников, получающихся при их пересечении, проходят через одну точку?

1992.55. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на два суверенных государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно проехать в любой другой.

1992.56.* Пусть $L(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — число способов расставить в клетках таблицы $m \times n$ a_1 единиц, a_2 двоек, …, a_k чисел k так, чтобы в каждой строке числа возрастали слева направо нестрого монотонно, а в каждом столбце числа возрастали сверху вниз строго монотонно. Докажите, что значение функции L не зависит от порядка аргументов.

1992.57.* На плоскости расположено несколько единичных кругов. Верно ли, что всегда можно отметить несколько точек так, что внутри каждого круга будет находиться ровно одна отмеченная точка?