1993

6-й класс

1993.01. За круглым столом сидят 7 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит только правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из них говорит: “Мои соседи — лжец и рыцарь”. Докажите, что все они — лжецы.

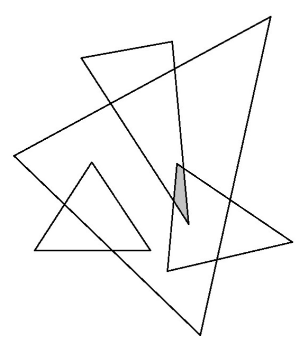
1993.02. В порядке возрастания выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 100$. Разрешается стереть несколько подряд стоящих чисел и записать вместо них число, равное их количеству (например, стереть числа $13, 14, 15$ и написать вместо них число 3). Можно ли добиться того, чтобы после нескольких таких операций на доске остались числа $50, 51$?

1993.03. За столом сидят несколько мальчиков и 5 девочек, а на столе на тарелке лежат 30 булочек. Каждая девочка дала по булочке (с тарелки) каждому знакомому ей мальчику, а затем каждый мальчик дал по булочке (с тарелки) каждой незнакомой ему девочке. После этого оказалось, что все булочки розданы. Сколько было мальчиков?

1993.04. Существуют ли пять различных натуральных чисел таких, что произведение двух наибольших из них равно сумме всех пяти чисел?

1993.05. У весов три чашки, и при взвешивании опускается та чашка, на которой расположен средний по весу предмет из взвешиваемых трех.

Дано 7 предметов, причём все они — разного веса. Как определить за 8 взвешиваний средний по весу из данных семи предметов? При каждом взвешивании на каждой чашке должно быть по одному предмету.



1993.06. На плоскости расположено 1993 треугольника, причём известно, что каждый из них содержит по крайней мере 4 вершины других треугольников. Докажите, что какие-то три треугольника имеют общую точку.

7-й класс

1993.07. Можно ли расставить числа от 1 до 16 в клетках квадрата 4×4 так, чтобы суммы по строкам и по столбцам давали бы 8 последовательных натуральных чисел?

1993.08. В Васюках прошло три шахматных круговых турнира с одним и тем же составом участников. Известно, что любые двое участников сыграли все свои три партии в этих турнирах по-разному: т.е. по одному выигрышу и ничья. Остап Бендер набрал меньше всех очков в каждом из первых двух турниров. Какое место он занял в последнем турнире?

1993.09. Четырехзначное число делится на сумму двух двузначных чисел, образованных первыми двумя и последними двумя его цифрами. Может ли эта сумма равняться 94?

1993.10. Внутри выпуклого пятиугольника $ABCDE$ взята точка O. Оказалось, что все 5 образовавшихся треугольников равны друг другу. Докажите, что либо они все равнобедренные, либо они все прямоугольные.

1993.11. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$aek - afh + bfg - bdk + cdh - ceg \ ,$$

если каждое из чисел $a, \ldots, k$ равно 1 или -1?

1993.12. Назовем человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

1993.13. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них нарисована звездочка. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в ее столбце совпадает с количеством звездочек в ее строке. Докажите, что число строк таблицы, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

8-й класс

1993.14. В турнире по настольному теннису (ничьих не бывает) участвовали шестиклассники и семиклассники, причём семиклассников было втрое больше. Известно, что количество побед, одержанных шестиклассниками, равно числу побед, одержанных семиклассниками. Докажите, что в турнире победил шестиклассник.

1993.15. См. задачу 3.

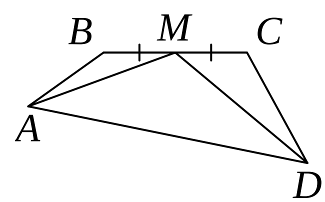
1993.16. Точка M взята на стороне AC равностороннего треугольника ABC, а на продолжении стороны BC за вершину C отмечена точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

1993.17. Натуральные числа x и y таковы, что сумма дробей

$$\frac{x^2-1}{y+1} + \frac{y^2-1}{x+1}$$

есть целое число. Докажите, что каждая из двух указанных дробей есть целое число.

1993.18. См. задачу 6.



1993.19. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что величина угла AMD — 120°. Докажите неравенство $AB + {}^{BC}\!/_{2} + CD \geqslant DA$.

1993.20. На одном из полей доски 7×7 стоит фишка. Разрешается последовательно ставить на пустые поля новые фишки, но так, чтобы каждое поле, на которое выставляется очередная фишка, имело общую сторону не более чем с одним уже занятым полем. Какое максимальное количество фишек может оказаться на доске после нескольких таких операций?

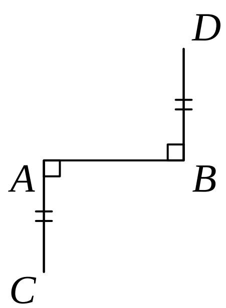
9-й класс

1993.21. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что из них можно получить другую степень двойки, приписав какую-то цифру спереди.

1993.22. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке N. Известно, что $BM = DN$. Докажите, что $CM = CN$.

1993.23. Несколько человек делят доставшееся им наследство. Будем называть наследника “бедным”, если он получил при разделе менее 99 рублей, и “богатым”, если он получил более 10 тысяч рублей. Известно, что при любом разделе наследства количество денег у “богатых” наследников не меньше, чем у “бедных”. Докажите, что при любом разделе наследства количество денег у “богатых” наследников по крайней мере в 100 раз больше, чем у “бедных” наследников.

1993.24. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\dfrac{ab}{a-b} = c$. Известно также, что числа a, b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a-b$ есть точный квадрат.



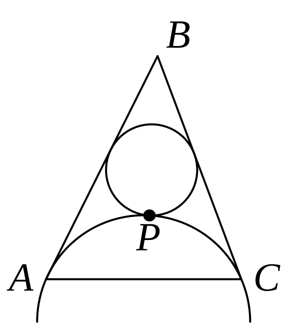
1993.25. На плоскости дано несколько точек. Разрешается заменить пару данных точек A, B на пару новых точек C, D, если отрезки AC и BD имеют одинаковую длину, перпендикулярны AB, и при этом точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что после серии таких операций мы не сможем вернуться к исходному набору точек.

1993.26. Докажите, что для любых положительных чисел x, y и z выполнено неравенство:

$$\sqrt[2]{x + \sqrt[3]{y + \sqrt[4]{z}}} \geqslant \sqrt[32]{xyz}\,.$$

1993.27.* Даны два правильных 10-угольника, в каждой вершине каждого из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что сумма чисел на каждом 10-угольнике равна 99. Докажите, что на обоих многоугольниках можно отметить несколько подряд стоящих вершин (но не все) так, что суммы отмеченных чисел будут одинаковы.

10-й класс



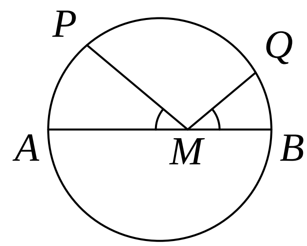
1993.28. Полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что для любого вещественного x выполняется равенство $P(x^2-x+1) = Q(x^2+x+1)$. Докажите, что оба полинома — константы.

1993.29. Внутри треугольника ABC расположена окружность, которая касается его сторон AB и BC, а также проходит через точку P — центр вписанной окружности треугольника ABC. Через точки A, P и C проведена другая окружность. Докажите, что эти окружности касаются друг друга.

1993.30. См. задачу 23.

1993.31. См. задачу 24.

1993.32. Точка M находится внутри диаметра AB окружности S, причём она не является центром окружности. По одну сторону от диаметра AB на окружности взяты произвольные различные точки P и Q такие, что отрезки PM и QM образуют равные углы с диаметром. Докажите, что все прямые PQ проходят через одну точку.

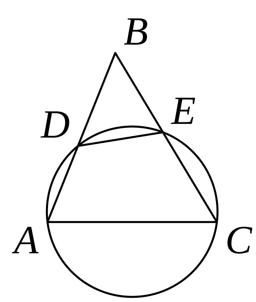


1993.33. В квадратной таблице 17×17 закрашено в черный цвет 80 клеток, остальные — белые. Разрешается закрасить строку или столбец в черный цвет, если большинство клеток на этой линии — черные. Докажите, что при помощи таких операций нельзя сделать всю таблицу черной.

1993.34.* На множестве M натуральных чисел от 1 до 1993 определена операция $*$, которая каждым двум числам a и b из множества M ставит в соответствие некоторое число $a * b$, также принадлежащее M. Известно, что для любых чисел a и b из M выполнено равенство $(a * b) * a = b$. Докажите, что найдется число a такое, что $a * a = a$.

11-й класс

1993.35. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно так, что $BD + DE = BC$, и $BE + ED = AB$. Известно также, что четырехугольник $ADEC$ — вписанный. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.



1993.36. Докажите, что никакое число вида $3000\ldots001$ не является точным квадратом.

1993.37. Функция $f(x) = x^3 - 3x$ задана на всей вещественной оси. Докажите, что функция $f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$ принимает некоторое значение не менее, чем 1993 раза.

1993.38. См. задачу 32.

1993.39. В стране n городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами, причём любые два города соединены не более, чем одной дорогой. Назовем “степенью города” количество дорог, которые из него выходят. Пусть $2 \leqslant k \leqslant n$ — некоторое натуральное число. Докажите, что в стране обязательно найдется k городов, степени которых отличаются друг от друга менее чем на $k-1$.

1993.40.* Дифференцируемые функции f и g, заданные на отрезке $[0;1]$ таковы, что $f(0) = f(1) = 1$ и функция $19f'g + 93fg'$ неотрицательна. Докажите, что $g(1) \geqslant g(0)$.

1993.41.* Пусть n — произвольное натуральное число, и на доске выписаны все натуральные числа от n до $3n-1$. Разрешается стереть с доски любые два числа a и b ($a \leqslant b$), и записать вместо них число $a/2$. Докажите, что когда после серии таких операций на доске останется одно число, оно будет меньше единицы.

Отборочный тур

9-й класс

1993.42. Последовательность (a_k) состоит из положительных чисел и такова, что $(a_{k+1}+k)a_k = 1$ для любого k. Докажите, что все ее члены — иррациональны.

1993.43. Точки D, E и F выбраны на сторонах AC, AB и BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) так, что $DE = DF$ и при этом $AE + FC = AC$. Докажите, что углы $\angle BAC$ и $\angle FDE$ равны.

1993.44. В клетках четвертого столбца прямоугольной таблицы размерами 6×7 записаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7. Можно ли заполнить и другие клетки цифрами так, чтобы образовавшиеся в строках семизначные числа составляли арифметическую прогрессию, и чтобы образовавшиеся в столбцах шестизначные числа также составляли арифметическую прогрессию?

1993.45. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равнобедренные треугольники с углом при вершине равным $10°$.

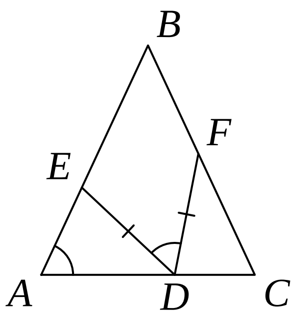
1993.46. На поле $h8$ шахматной доски — стопка из n различных шашек. Шашки разрешено снимать со стопки и двигать по доске на одно поле вниз или влево. При этом запрещается ставить одну шашку на другую на любом поле, кроме поля $a1$. При каком максимальном n из исходной стопки шашек на поле $h8$ можно получить любую стопку на поле $a1$ (имеется в виду порядок шашек в стопке)?

1993.47. В круговом турнире по волейболу участвовало 93 команды. Известно, что какие бы 19 из них мы ни взяли, среди них найдется команда, выигравшая у всех 18 остальных; а также среди них есть команда, проигравшая всем 18 остальным. Докажите, что все команды набрали по разному числу очков.

1993.48. На доске написано натуральное число. Каждую секунду к нему прибавляется сумма его цифр, стоящих на чётных местах его десятичной записи (цифра десятков, цифра тысяч и т.д.). Докажите, что рано или поздно число на доске перестанет изменяться.

1993.49.* Внутри выпуклого четырехугольника отмечено четыре точки. Докажите, что на периметре четырехугольника найдется точка, сумма расстояний от которой до вершин больше, чем сумма расстояний до отмеченных точек.

10-й класс



1993.50. Точки D, E и F выбраны на сторонах AC, AB и BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) так, что $DE = DF$ и при этом углы $\angle BAC$ и $\angle FDE$ равны. Докажите, что $AE + FC = AC$.

1993.51. Можно ли расставить в клетках таблицы 10×10 ненулевые цифры так, чтобы все 10-значные числа, образовавшиеся в строках, были бы больше 10-значного числа на главной диагонали, а оно в свою очередь было бы больше всех 10-значных чисел в столбцах таблицы?

1993.52. На плоскости дан квадрат $ABCD$. Найдите минимум частного $\dfrac{OA+OC}{OB+OD}$, где O — произвольная точка плоскости.

1993.53. Докажите, что существует функция $f(x)$, которая определена на $[0;+\infty]$ и такова, что $f(f(\ldots(x)\ldots)) = \frac{x}{x+1}$ (функция f применяется 239 раз).

1993.54. На бумаге отмечено 1993 точки, и некоторые из них соединены непересекающимися отрезками, причём так, что из этих отрезков нельзя выбрать несколько, образующих замкнутую ломаную. Двое по очереди ставят фишки на отмеченные точки, причём каждая следующая фишка должна накрывать точку, соседнюю с предыдущей (точки являются соседними, если они соединены отрезком). Тот, кто не может сделать хода, проигрывает. Докажите, что первый игрок может выиграть.

1993.55. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лежат в отрезке $(-1;1)$. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i a_{i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i^2} \qquad (a_{n+1} \equiv a_1)\,.$$

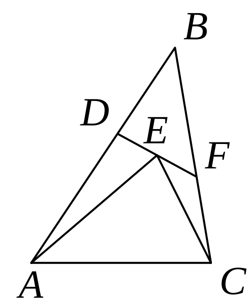
1993.56. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа: $n-1$ нулей и одна единица. Разрешается увеличить на 1 все числа в вершинах любого правильного k-угольника, вписанного в данный многоугольник. Можно ли такими операциями сделать все числа равными?

1993.57.* В двух урнах лежит $2p+1$ шар. Каждую секунду половина шаров из той урны, где лежит чётное количество шаров, перекладывается в другую урну. Пусть $k < 2p+1$ — некоторое натуральное число, и известно, что числа p и $2p+1$ — простые. Докажите, что рано или поздно в одной из урн будет ровно k шаров.

11-й класс

1993.58. См. задачу 42.

1993.59. Докажите, что существует функция $f(x)$, которая определена на $[0;+\infty]$ и такова, что $f(f(\ldots(x)\ldots)) = 1 + x + 2\sqrt{x}$ (функция f применяется 45 раз).



1993.60. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и F соответственно, E — середина отрезка DF. Докажите, что $AD + FC \leqslant AE + EC$.

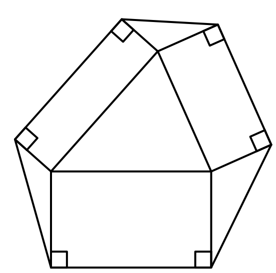
1993.61. В королевстве есть три вида дорог, соединяющих города: шоссе, проселок и железная дорога. Из каждого города выходит ровно по одной дороге каждого из трех типов. Известно, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно посетить все города, не проезжая ни по какой дороге в разных направлениях.

1993.62. Докажите, что для любых положительных чисел a_k, b_k, $(k = 1, 2, ..., n)$, выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leqslant \frac{AB}{A+B} ,$$

где $A = \sum a_k$ и $B = \sum b_k$.

1993.63.* Выпуклый шестиугольник таков, что на трех его “чётных” сторонах можно построить вовнутрь прямоугольники с вершинами, совпадающими так, как показано на рисунке. Докажите, что на трех других сторонах тоже можно построить аналогичную тройку прямоугольников.



1993.64.* По контуру каждой грани выпуклого многогранника ползает муха (таким образом, мух столько же, сколько граней), и все они двигаются, обходя свою грань по часовой стрелке. Известно, что их скорости в любой момент времени не меньше 1 мм/ч. Докажите, что рано или поздно какие-то две мухи столкнутся.

1993.65.* На краю доски 1993×1993 отмечено два поля A и B, разделенные нечётным числом полей. Докажите, что количество способов покрыть доминошками 1×2 всю доску без поля A равно количеству способов покрытия доминошками доски без поля B.