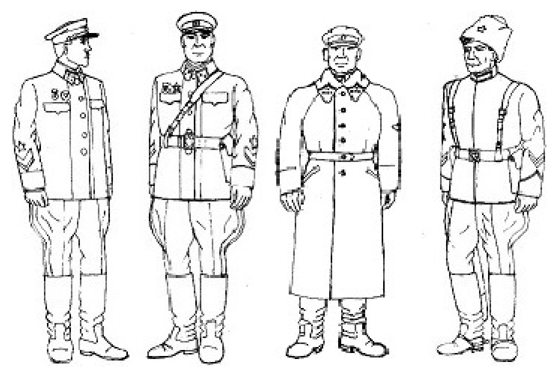
1996

6-й класс

1996.01. Сто пиратов переносили на берег сундуки с сокровищами. Каждый сундук несли семеро пиратов. Капитан Сильвер считает, что во время переноски все пираты заработали поровну, поскольку каждый участвовал в переноске 65 сундуков. Докажите, что капитан ошибся.

1996.02. В ряд стоят полковник, майор, лейтенант и рядовой Чонкин. Все они разного роста, причём у майора и Чонкина суммарный рост такой же как у полковника и лейтенанта. Если бы сначала полковник поменялся местами со вторым по росту человеком, а потом лейтенант — с четвертым, то они все оказались бы выстроенными по росту. Кто стоит левее: майор или лейтенант?



1996.03. В таблице 10×10 расставлены натуральные числа. В каждой строке подчеркнули наибольшее натуральное число (или одно из наибольших, если таковых несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчеркнутые числа подчеркнуты два раза. Докажите, что все числа в таблице равны.

1996.04. Найдите все четырехзначные числа, которые в 83 раза больше своей суммы цифр.

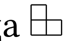
1996.05. Два преуспевающих бизнесмена купили 100 литров алкогольных напитков в бутылках по 0.5, 0.7 и 1 литру. После этого они поссорились и решили разделить поровну свои запасы алкоголя. Докажите, что им удастся это сделать, не вскрывая бутылок.

1996.06. На шахматной доске 9×9 расставлены 9 ладей, не бьющих друг друга. Каждую из этих ладей передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

7-й класс

1996.07. Можно ли провести в выпуклом шестиугольнике несколько диагоналей так, чтобы каждая из них пересекала во внутренних точках ровно три других?

1996.08. В государстве 17 городов. Западная улица каждого города называется в честь одного из оставшихся городов. Армия неприятеля начинает захват этого государства с одного из городов и действует по принципу, изложенному в известной песне: сегодня захватывается город, в честь которого названа западная улица города, взятого вчера. В некоторый момент командующему армией стало известно, что город, который они только что захватили, уже был захвачен ими 17 дней назад. Докажите, что к этому моменту все города уже захвачены.

1996.09. Из прямоугольника, нарисованного “по клеточкам”, удалили прямоугольную часть, содержащую правый нижний угол, но не содержащую других углов прямоугольника. Докажите, что количество способов поместить в полученной фигуре фигурку вида  нечётно.

1996.10. Решите уравнение в натуральных числах:

$$[x^2, y] + [x, y^2] = 1996\,.$$

($[a, b]$ обозначает наименьшее общее кратное чисел a и b.)

1996.11. На крайней правой клетке доски 1×40 стоит фишка. Два игрока по очереди двигают эту фишку (вправо или влево) на любое число клеток, которое еще не встречалось при выполнении предыдущих ходов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник?

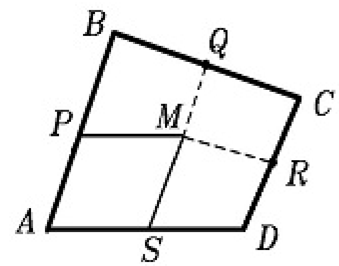
1996.12. Узлы бесконечного клетчатого листа бумаги раскрашены в три цвета (причём все три цвета присутствуют). Докажите, что найдется прямоугольный треугольник (с катетами, не обязательно идущими по линиям сетки), вершины которого расположены в узлах и раскрашены в разные цвета.

1996.13. Правительство приняло решение приватизировать гражданскую авиацию. Для каждых двух из 239 городов страны соединяющая их авиалиния должна быть продана частной авиакомпании. Народный хурал, заподозрив правительство в распродаже Родины, постановил, что из любых трех линий, соединяющих какие-либо три города, хотя бы две линии должны принадлежать одной компании. Каким может быть количество компаний, раскупивших авиалинии?

8-й класс

1996.14. См. задачу 7.

1996.15. См. задачу 10.



1996.16. Точки P, Q, R, S — середины соответственно сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$, M — точка внутри этого четырехугольника такая, что $APMS$ — параллелограмм. Докажите, что $CRMQ$ — тоже параллелограмм.

1996.17. Злоумышленник переставил кнопки в лифте 13-этажного дома. Теперь номер этажа, на который отправляется лифт при нажатии на кнопку, не всегда совпадает с числом, указанным на кнопке. Находясь на некотором этаже, пенсионер N нажимает кнопку с номером этого этажа и, возможно, перемещается на другой этаж. Он обнаружил, что с какого бы этажа ни начать, после 1313 таких нажатий лифт возвращается на исходный этаж. Докажите, что действуя указанным образом, можно с любого этажа попасть на любой.

1996.18. Обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей числа n. Докажите, что для любых натуральных a и b $\quad d(ab) \geqslant d(a) + d(b) - 1$.

1996.19. Два игрока по очереди ставят фишки на клетки доски 101×101. Первый может поставить очередную фишку на любую свободную клетку, для которой количество фишек, уже стоящих в столбце и строке, содержащих эту клетку, чётно. Второй может поставить очередную фишку на любую свободную клетку, для которой это количество нечётно. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выиграет при правильной игре?

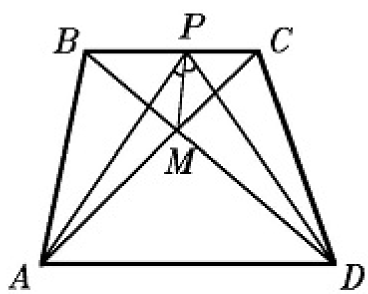
1996.20. В государстве некоторые пары городов соединены беспосадочными (двусторонними) авиарейсами. Новый министр авиации решил раз в месяц перестраивать маршрутную сеть по следующему принципу: в следующем месяце будут соединены рейсами те и только те пары городов, для которых сейчас существует маршрут ровно с одной пересадкой.

Через полгода выяснилось, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что если реорганизация маршрутной сети будет продолжаться, то и через год можно будет из любого города долететь до любого другого.

9-й класс

1996.21. На доске написано несколько однозначных чисел. Разрешается вычислить сумму всех чисел и последнюю цифру получившегося результата записать на доску вместо одного из чисел. Докажите, что применив несколько таких операций, можно будет снова получить исходный набор чисел.

1996.22. Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Докажите, что выбранные числа — это все числа от 50 до 99.



1996.23. M — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. На основании BC выбрана точка P такая, что $\angle APM = \angle DPM$. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AP равно расстоянию от точки B до прямой DP.

1996.24. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

1996.25. M — точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника, N — точка пересечения его средних линий, O — центр описанной окружности. Докажите, что $OM \geqslant ON$ (средней линией называется отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

1996.26. Докажите, что для любого многочлена $p(x)$ десятой степени с целыми коэффициентами найдется непостоянная целочисленная бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия, которая не содержит ни одного члена вида $p(k)$, где k — целое.

1996.27. Вдоль улицы с односторонним движением расположено n мест для парковки автомобиля. На улицу въезжают последовательно n автомобилей (с номерами от 1 до n в порядке возрастания). Каждый водитель едет к своему любимому месту парковки и, если оно не занято, припарковывается; в противном случае он едет дальше до первого свободного места и припарковывается там, если же все места дальше заняты, он уезжает (насовсем). Последовательностью предпочтений назовем список $a_1, a_2, \ldots, a_n$ любимых мест парковки первого, второго, $\ldots$, n-го водителя. Сколько существует последовательностей предпочтений, для которых все водители сумеют припарковаться?

10-й класс

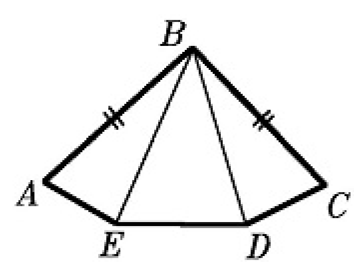
1996.28. Найдите все натуральные n, для которых $3^n + 5^n$ делится на $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

1996.29. M — середина стороны BC треугольника ABC, r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и ACM. Докажите, что $r_1 < 2r_2$.

1996.30. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два различных числа и написать вместо этого их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

1996.31. Никакие три диагонали выпуклого 1996-угольника не пересекаются в одной точке. Докажите, что количество треугольников, вершины которых расположены строго внутри этого 1996-угольника, а стороны лежат на его диагоналях делится на 11 (речь идет не обязательно о треугольниках разбиения, упомянутые треугольники могут быть разбиты диагоналями на более мелкие части).

1996.32. Докажите, что для любого многочлена x^2+px+q с целыми коэффициентами найдется такой многочлен $2x^2+rx+s$ с целыми коэффициентами, что множества значений этих многочленов в целых точках не пересекаются.



1996.33. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC$, $\angle ABE + \angle DBC = \angle EBD$ и $\angle AEB +$

$\angle BDC = 180°$. Докажите, что ортоцентр треугольника BDE лежит на диагонали AC.

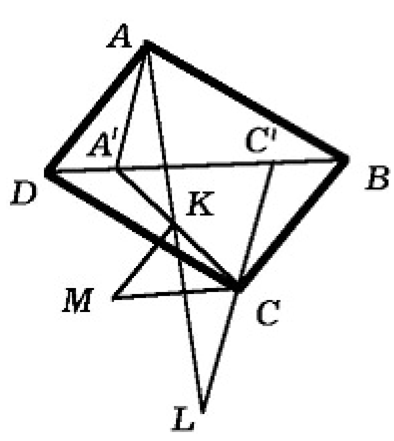
1996.34. В федеративном государстве, состоящем из двух республик, каждые два города соединены дорогой с односторонним движением; при этом, двигаясь по дорогам, можно из любого города попасть в любой другой. Туристическое агентство "Гамильтон" предлагает n различных туристических маршрутов по городам первой республики и m — по городам второй (любой из этих маршрутов предполагает посещение каждого города республики ровно по одному разу и возвращение в исходный город, причём все это — не выезжая за пределы республики). Докажите, что агентство "Гамильтон" могло бы предложить любознательным туристам не менее mn аналогичных туристических маршрутов по городам всей федерации.

11-й класс

1996.35. Сережа решал уравнение $f(19x - 96/x) = 0$ и нашел 11 различных корней. Докажите, что если он постарается, то сумеет найти еще хотя бы один корень.

1996.36. Числа от 1 до $2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Докажите, что множества остатков попарных сумм чисел каждой группы при делении на $2n$ совпадают (в множество попарных сумм входят выражения вида $a + a$).

1996.37. См. задачу 31.



1996.38. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взяты точки A' и C', так что $AA' \parallel CC'$. Точка K принадлежит отрезку $A'C$, прямая AK пересекает прямую $C'C$ в точке L. Через точку K проведена прямая, параллельная BC, через точку C проведена прямая, параллельная BD. Эти две прямые пересекаются в точке M. Докажите, что точки D, M, L лежат на одной прямой.

1996.39. Найдите все четверки непостоянных многочленов $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ с вещественными коэффициентами, которые обладают следующим замечательным свойством: для любых целых чисел x, y, z, t, связанных соотношением $xy - zt = 1$, выполняется равенство

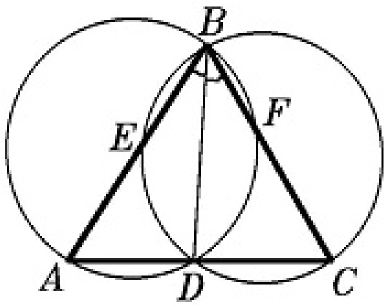
$$p_1(x)p_2(y) - p_3(z)p_4(t) = 1\,.$$

1996.40. См. задачу 23.

1996.41. Два человека играют на доске 100×100 в следующую игру: первый игрок отмечает какую-либо свободную клетку доски, после чего второй игрок кладет на доску доминошку (прямоугольник 1×2 клетки) так, чтобы она закрывала две свободные клетки, одна из которых отмечена. Первый выигрывает, если всю доску удалось покрыть доминошками, а второй — если не всю. Кто выиграет при правильной игре?

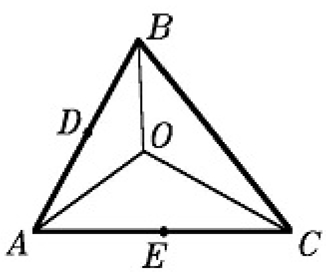
Отборочный тур

9-й класс



1996.42. BD — биссектриса угла B треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AB в точке E, описанная окружность треугольника ABD пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что $AE = CF$.

1996.43. В таблице 10×10 расставлены натуральные числа. Известно, что для любых пяти строк и любых пяти столбцов сумма 25 чисел, стоящих на их пересечении чётна. Докажите, что в таблице все числа чётны.



1996.44. Докажите, что не существует таких натуральных чисел a и b, что для любых различных простых чисел p и q, больших 1000, число $ap + bq$ тоже простое.

1996.45. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Внутри треугольника взята точка O такая, что $\angle AOB = \angle AOC = 120°$. Точки D и E — середины сторон AB и AC. Докажите, что четырехугольник $ADOE$ — вписанный.

1996.46. В стране 2000 городов, каждые два из которых соединены дорогой. Строительные организации представили все возможные проекты введения одностороннего движения на всех дорогах. Министерство транспорта отвергло все проекты, не обеспечивавшие возможности добраться из любого города в любой другой. Докажите, что все же осталось более половины проектов.

1996.47. На доске написано 4 натуральных числа: m, n, m, n. К этой упорядоченной четверке чисел применяют обобщенный алгоритм Евклида: если на доске написаны числа (x, y, u, v) и $x > y$, то их заменяют на $(x - y, y, u + v, v)$, если же $x < y$, то их заменяют на $(x, y - x, u, v + u)$. Выполнение алгоритма прекращается, когда числа в первой паре станут равными (в этот момент они будут равны наибольшему общему делителю чисел m и n). Докажите, что среднее арифметическое чисел второй пары в этот момент будет равно наименьшему общему кратному чисел m и n.

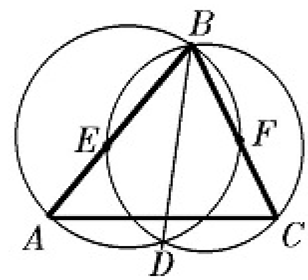
1996.48. Набор геометрических фигур состоит из красных правильных треугольников и синих четырехугольников, все углы которых больше $80°$, но меньше $100°$. Из фигур этого набора сложили выпуклый многоугольник, все углы которого больше $60°$. Докажите, что число (целиком) красных сторон этого многоугольника делится на 3.

1996.49. В клетках таблицы $n \times n$ расставляют натуральные числа от 1 до n^2. Поставив очередное число в свободную клетку, на доску выписывают сумму чисел, уже расставленных в строке и столбце, содержащих эту клетку. Когда вся таблица заполнена, вычисляют сумму чисел, записанных на доске. Приведите пример способа расстановки чисел, для которого эта сумма будет иметь наименьшее возможное значение.

10-й класс

1996.50. Докажите для любых положительных чисел a и b неравенство:

$$a^b b^a \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}.$$



1996.51. На сторонах AB и BC треугольника ABC отложены отрезки AE и CF равной длины. Окружность, проходящая через точки B, C, E, и окружность, проходящая через точки A, B, F, пересекаются в точках B и D. Докажите, что прямая BD — биссектриса угла ABC.

1996.52. Последовательность натуральных чисел задается соотношениями

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{[\frac{n+1}{2}]}$$

($[a]$ обозначает целую часть числа a). Докажите, что последние цифры десятичной записи чисел a_n образуют непериодическую последовательность.

1996.53. В здании Московского университета очень много лифтов, причём каждый лифт перевозит пассажиров лишь между какими-то двумя этажами (зато на каждом этаже можно пройти к любому лифту, который на нем останавливается). Известно, что с любого этажа можно проехать на любой другой, воспользовавшись чётным числом лифтов, и не проходя ни по какому этажу дважды. Докажите, что при желании то же самое можно сделать, воспользовавшись нечётным числом лифтов.

1996.54. Середины сторон выпуклого шестиугольника образуют шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны. Докажите, что большие диагонали исходного шестиугольника пересекаются в одной точке.

1996.55. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество наборов $\{a_n\}_{n=1}^{1996}$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям:

$$a_1 = 1, \qquad a_{k+1} \leqslant a_k + 1,\ (k = 1, 2, \ldots, 1995)\,;$$

$\mathfrak{B}$ — множество наборов $\{b_n\}_{n=1}^{1996}$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям:

$$b_1 = 1, \qquad b_k \leqslant b_{k+1} \leqslant k + 1,\ (k = 1, 2, \ldots, 1995)\,.$$

Докажите, что во множествах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ поровну элементов.

1996.56. Обозначим через $S(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n, отличных от n. Докажите, что уравнение $S(n) = 1\,000\,000$ имеет меньше $1\,500\,000$ решений.

1996.57. На клетках $a1$ и $b1$ шахматной доски лежит доминошка, и кроме того на клетке $a1$ стоит ладья. Два человека играют по следующим правилам: первый передвигает ладью на какую-либо свободную клетку, после чего второй кладет доминошку, накрывающую эту клетку и еще одну свободную соседнюю по стороне клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, за исключением случая, когда вся доска покрыта доминошками; в этом последнем случае выигрывает первый. Кто выиграет при правильной игре?

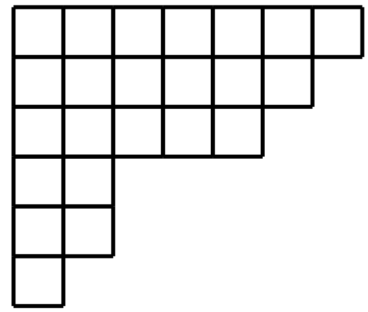
11-й класс

1996.58. Про вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}; b_1, b_2, \ldots, b_n$ известно, что

$$0 \leqslant b_k \leqslant 1\ (k = 1, \ldots,\ n) \quad \text{и} \quad a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n+1} = 0\,.$$

Докажите неравенство (квадратные скобки обозначают целую часть числа):

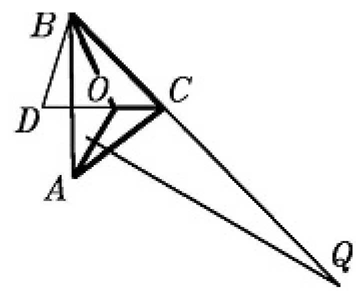
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sum_{k=1}^{[\sum_{m=1}^{n} b_m]+1} a_k\,.$$



1996.59. См. задачу 51.

1996.60. См. задачу 44.

1996.61. Диаграммой Юнга[1] называется фигура, полученная вырезанием из прямоугольника "по клеточкам" нескольких прямоугольных частей, правые нижние углы которых совпадают с правым нижним углом этого прямоугольника. Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо клетки и всех клеток, расположенных либо правее, либо ниже ее. Дана диаграмма Юнга из n клеток. Пусть s — количество крюков, состоящих ровно из k клеток. Докажите, что $s(k+s) \leqslant 2n$.



1996.62. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Внутри треугольника нашлась точка O, из которой все стороны видны под углом $120°$. На луче CO выбрана точка D такая, что треугольник AOD — равносторонний. Серединный перпендикуляр к отрезку AO пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямая OQ делит отрезок BD пополам.

1996.63. В городе N. 120 линий метро, причём с любой станции можно доехать до любой другой, сделав не более 15 пересадок. Будем говорить, что две станции находятся далеко друг от друга, если для того, чтобы добраться с одной на другую, требуется не менее 5 пересадок. Какое наибольшее количество попарно далеких друг от друга станций может быть в этом городе?

1996.64. a, b, c — целые числа, такие что многочлен x^3+ax^2+bx+c имеет три различных попарно взаимно простых натуральных корня и многочлен ax^2+bx+c имеет натуральный корень. Докажите, что число $|a|$ — составное.

1996.65. См. задачу 49.

[1] Юнг (Young) Альфред (1873–1940) — английский математик.