1997

6-й класс

1997.01. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрелил в одного из тонких; затем каждый уцелевший тонкий солдат выстрелил в одного из толстых. Докажите, что в живых осталось не менее 1000 солдат.

1997.02. Из 35 клетчатых прямоугольников, не являющихся квадратами, составили девять квадратов 10×10 клеток. Докажите, что из этих прямоугольников можно составить два прямоугольника, площади которых отличаются не более чем на 80 клеток.

1997.03. В четырехзначном числе каждую цифру увеличили на 1 или на 5, в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число?

1997.04. В Море Дождей живут осьминожки, у каждого один или два друга. Когда взошло солнце, те, у кого двое друзей, посинели, а те, у кого один друг — покраснели. Оказалось, что любые два друга — разноцветные. Тогда 10 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, а 12 красных — в синий; теперь любые два друга одного цвета. Сколько осьминожек в Море Дождей?

1997.05. Назовем набор из 60 гирь *крепким*, если его невозможно разбить на три группы по 20 гирь в каждой так, чтобы массы всех трех групп были разными. Найдите все крепкие наборы, в которых есть хоть одна гиря массой 1 килограмм и хоть одна гиря массой 2 килограмма.

1997.06. По кругу расставлены сто натуральных чисел. Для каждого числа подсчитывают сумму пятидесяти чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Затем числа стирают, а вместо них записывают вычисленные суммы. Докажите, что после многократного повторения этой операции все числа станут чётными.

7-й класс

1997.07. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрелил в одного из тонких; затем каждый уцелевший тонкий выстрелил в одного из толстых. После этого каждый уцелевший толстый еще раз выстрелил в одного из тонких. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

1997.08. Докажите, что найдутся натуральные числа $x, y, z > 19971997$ такие, что
$$(x^2+1)(y^2+1) = z^2+1.$$

1997.09. Старшина составил расписание нарядов для взвода из 50 курсантов на 30 дней, в котором каждый день заступают в наряд 4 курсанта, и у каждого курсанта перерыв между нарядами не менее 5 дней. Докажите, что можно добавить в каждый наряд по одному курсанту так, чтобы у каждого курсанта перерыв между нарядами по-прежнему был не менее 5 дней.

1997.10. По кругу расставлены 100 чисел $+1$ и -1. Для каждого числа подсчитывают произведение 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Затем исходные числа стирают, а вместо них записывают вычисленные произведения. Докажите, что после многократного повторения этой операции все числа станут единицами.

1997.11. Клетчатый прямоугольник со сторонами больше одной клетки разбит на доминошки (прямоугольники 1×2). Пусть A — количество квадратов 2×2, состоящих из двух доминошек, B — количество квадратов 2×2, состоящих из клеток четырех разных доминошек. Докажите, что $A > B$.

1997.12. Найдите все такие натуральные k, для которых k^2 можно представить в виде суммы k различных попарно взаимно простых натуральных чисел.

1997.13. В городе нет ни мостов, ни туннелей, ни тупиков. Все перекрестки имеют крестообразную форму и образованы пересечением ровно двух улиц. Совершая инспекционную поездку по городу, губернатор на каждом перекрестке поворачивал либо направо, либо налево. Через некоторое время шофер губернатора заметил, что они едут по дороге, по которой уже проезжали. Докажите, что они едут в ту же сторону, что и в первый раз.

8-й класс

1997.14. На острове Невезения живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причём каждый житель живет на своей собственной станции метро. Метро частично размыто дождями, но все равно каждый может на нем хоть до кого-нибудь доехать. После прохождения тайфуна "Элизабет" каждый житель заявил: "Теперь я могу доехать до ровно вдвое меньшего числа людей, чем до тайфуна". Докажите, что лжецы составляют не менее трети населения острова.

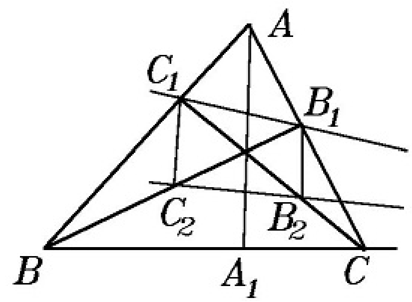
1997.15. Докажите, что уравнение

$$(x^2+1)(y^2+1)=z^2+1$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

1997.16. На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трех оскорбительных для его страны песен.

1997.17. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Прямая, проходящая через точку B_1, параллельно AA_1, пересекает отрезок CC_1 в точке B_2. Прямая, проходящая через точку C_1, параллельно AA_1, пересекает отрезок BB_1 в точке C_2. Докажите, что прямые BC, B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в одной точке, либо параллельны.



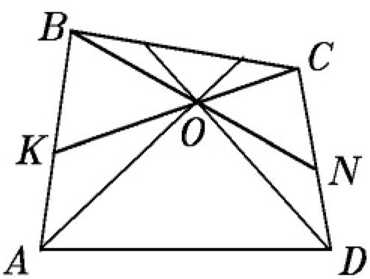
1997.18. Число $1/1997$ представили в виде периодической десятичной дроби. Докажите, что в (наименьшем) периоде этой дроби не более 200 семерок.

1997.19. См. задачу 13.

1997.20. Рассмотрим целочисленные точки (x,y) координатной плоскости, для которых $1 \leqslant x, y \leqslant 1997$. Отметим те из них, у которых координаты — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что отмеченных точек не менее половины.

9-й класс

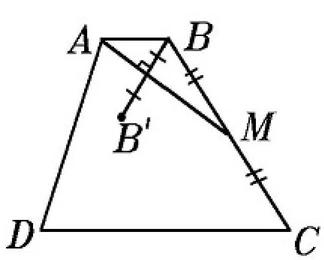
1997.21. Вдоль шестидесятой параллели растут деревья одинаковой высоты. Если все они упадут на запад, то общая длина участков шестидесятой параллели, заваленных более чем пятью деревьями, составит 100 км. Докажите, что если все деревья упадут на восток, то общая длина более чем пятикратно заваленных участков шестидесятой параллели тоже составит 100 км.



1997.22. Точки K и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Отрезки BN и KC пересекаются в точке O. Точки пересечения прямых AO и DO со стороной BC делят отрезок BC на три равные части. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

1997.23. Корень трехчлена ax^2+bx+b умножили на корень трехчлена ax^2+ax+b и получили произведение 1. Найдите эти корни.

1997.24. Клетки квадрата 100×100 покрашены в черный и белый цвет таким образом, что в любом прямоугольнике 1×2 есть хотя бы одна черная клетка, а в любом прямоугольнике 1×6 найдутся две черные клетки, расположенные подряд. Какое наименьшее число черных клеток может быть в этом квадрате?



1997.25. Последовательность натуральных чисел $\{x_n\}$ задана соотношениями

$$x_1=2,\qquad x_{n+1}=2x_n^2-1\,.$$

Докажите, что при всех n числа x_n и n взаимно просты.

1997.26. В трапеции $ABCD$, диагональ AC равна сумме оснований AB и CD. Точка M — середина стороны BC. Точка B' симметрична точке B относительно прямой AM. Докажите, что $\angle ABD=\angle CB'D$.

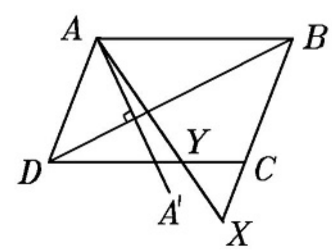
1997.27. В городе Незнакомске живут $3n$ человек, причём любые два жителя имеют общего знакомого. Докажите, что можно указать n человек таких, что каждый из остальных знаком хотя бы с одним человеком из этих n.

10-й класс

1997.28. На экваторе планеты Транай растут деревья одинаковой высоты. Если все они упадут на запад, то общая длина участков экватора, покрытых более чем пятью деревьями, составит 100 км. Докажите, что если все деревья упадут на восток, то общая длина более чем пятикратно покрытых участков экватора тоже составит 100 км. (Высота деревьев намного меньше размера планеты.)

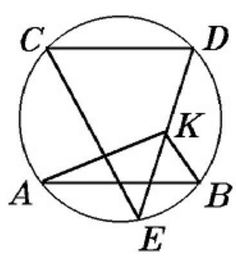
1997.29. Докажите, что не существует набора из 100 различных натуральных чисел, таких, что сумма любых 98 из них делится на сумму двух оставшихся.

1997.30. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и CD в точках X и Y. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BD. Докажите, что точки C, X, Y и A' лежат на одной окружности.



1997.31. На складе имеется n разных мешков и сторож ($n > 1$). Каждый мешок лежит либо на полу склада, либо в одном из других мешков. Время от времени сторож выбирает один из лежащих на полу мешков, вынимает из него и кладет на пол все лежащие в нем мешки (не трогая их содержимого), и, одновременно, кладет в него все остальные мешки, лежащие на полу (опять же, вместе с их содержимым). Докажите, что есть ровно $n+1$ различных расположений мешков, которые сторож может получить такими операциями.

Два расположения считаются одинаковыми, если любой мешок имеет в первом из них такое же содержимое, как во втором.



1997.32. См. задачу 25.

1997.33. В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через

C и середину AB, вторично пересекает S в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

1997.34. В городе Незнакомске миллион жителей, причём любые два из них имеют общего знакомого среди остальных. Докажите, что можно выбрать 5000 жителей города так, чтобы любой из оставшихся имел хотя бы одного знакомого среди выбранных.

11-й класс

1997.35. На экваторе планеты Транай растут деревья одинаковой высоты. Если все они упадут на запад, то общая длина участков экватора, заваленных деревьями, составит 100 км. Докажите, что если все деревья упадут на восток, то общая длина заваленных участков экватора тоже составит 100 км. (Высота деревьев намного меньше размера планеты.)

1997.36. Числа x и y удовлетворяют уравнениям:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0 \quad \text{и} \quad y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0\,.$$

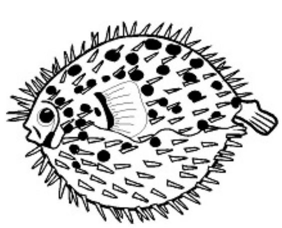
Найдите значение выражения $x + y$.

1997.37. См. задачу 30.

1997.38. См. задачу 25.

1997.39. Компьютер запрограммирован на выполнение операции: прибавление к натуральному числу произведения его цифр, увеличенного на два. Начальное число — десятизначное, выбирается случайно. Докажите, что после многократного выполнения такой операции не может получиться 1997-значное число, десятичная запись которого состоит из одних семерок.

1997.40. Можно ли клетки таблицы 123×456 раскрасить в два цвета таким образом, чтобы у каждой клетки было ровно две соседние по стороне клетки другого цвета?



1997.41. В пруду живут 1000 ершей. Каждый весит не менее четверти фунта. У любых двух ершей разное число колючек. Докажите, что можно выловить не менее 220 фунтов ершей таким образом, чтобы суммарный вес любых двух выловленных ершей в фунтах был не больше разности числа колючек у этих ершей.

Отборочный тур

9-й класс

1997.42. Вписанную окружность спроецировали на стороны треугольника. Докажите, что шесть концов проекций принадлежат одной окружности.

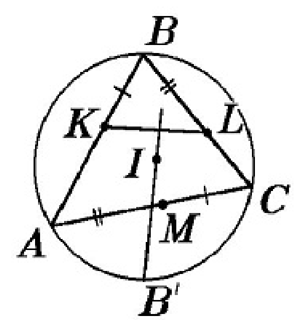
1997.43. a и b — целые числа. Докажите, что $\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|^{ab} \geqslant 1.$

1997.44. Докажите, что у всякого натурального числа количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 1 или 9, не меньше, чем количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 3 или 7.

1997.45. Докажите, что противоположные углы клетчатого прямоугольника 142×857 нельзя соединить пятизвенной ломаной с вершинами в узлах сетки, длины звеньев которой относятся как $2:3:4:5:6$.

1997.46. Существуют ли 100 таких натуральных чисел, что сумма четвертых степеней любых четырех из них делится на произведение этих четырех?

1997.47. B' — точка описанной окружности остроугольного треугольника ABC, диаметрально противоположная вершине B. I — центр вписанной окружности треугольника ABC, M — точка касания вписанной окружности со стороной AC. На сторонах AB и BC выбраны соответственно точки K и L такие, что $KB = MC$, $LB = AM$. Докажите, что прямые $B'I$ и KL перпендикулярны.



1997.48. Можно ли разрезать (по клеточкам) клетчатый квадрат 1997×1997 на квадраты со сторонами больше 30 клеток?

1997.49. В вершинах правильного 1997-угольника расставлены натуральные числа. Разрешается прибавить 2 к любому из чисел и одновременно вычесть по единице из чисел, отстоящих от этого числа ровно на k ($1 \leqslant k \leqslant 998$) по и против часовой стрелки; при этом число k выписывают на доску. После нескольких операций во всех вершинах оказались исходные числа. Докажите, что к этому времени сумма квадратов выписанных на доске чисел делится на 1997.

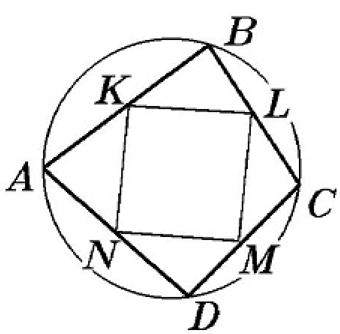
10-й класс

1997.50. Натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению

$$2x^x + y^y = 3z^z\,.$$

Докажите, что эти числа равны.

1997.51. Число N — произведение k различных простых чисел ($k \geqslant 3$). Двое играют в следующую игру: по очереди они выписывают на доску составные делители числа N. Само число N выписывать нельзя, кроме того, запрещено появление на доске двух взаимно простых чисел или двух чисел, одно из которых делится на другое. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник?



1997.52. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно вписанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что ортоцентры треугольников AKN, BKL, CLM, DMN лежат в вершинах параллелограмма.

1997.53. Клетчатый квадрат 100×100 сложили несколько раз по линиям сетки и сделали два прямолинейных разреза, также идущих по линиям сетки. На какое наибольшее число частей мог быть разрезан квадрат таким способом?

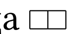
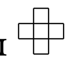
1997.54. Все грани выпуклого многогранника — треугольники, причём из каждой вершины выходит не менее 5 ребер, и никакие две вершины, из которых выходит ровно 5 ребер, не соединены ребром. Докажите, что в этом многограннике найдется грань, из вершин которой выходит соответственно 5, 6 и 6 ребер.

1997.55. На плоскости расположено $2n + 1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n + 1)(2n + 1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.

1997.56. Докажите, что всевозможные двенадцатизначные числа нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы в каждой группе числа совпадали в 11 разрядах, а в одном разряде содержали четыре последовательные цифры.

1997.57. 360 точек разбивают окружность на равные дуги. Проведено 180 непересекающихся хорд с вершинами в этих точках. Рассмотрим еще 180 хорд, получающиеся из данных поворотом окружности на угол 38°. Докажите, что объединение этих 360 хорд не может представлять собой замкнутую ломаную.

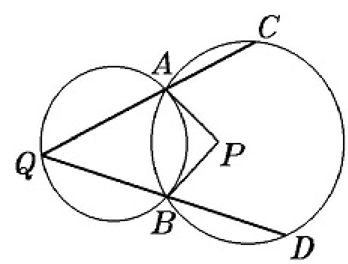
11-й класс

1997.58. Можно ли доску 75×75 разбить на фигурки вида  и  ?

1997.59. Докажите, что при $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$, $z \geqslant 2$

$$(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geqslant 125xyz\,.$$

1997.60. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. На окружности S_1 выбрана точка Q. Прямые QA и QB пересекают окружность S_2 в точках C и D, касательные к S_1 в точках A и B пересекаются в точке P. Точка Q расположена вне S_2, точки C и D — вне S_1. Докажите, что прямая QP проходит через середину отрезка CD.



1997.61. На листе клетчатой бумаги рисуют выпуклый 50-угольник с вершинами в узлах сетки. Какое наибольшее число диагоналей этого 50-угольника может идти по линиям сетки?

1997.62. На доске написано число $99\ldots99$ (1997 девяток). Раз в секунду одно из чисел, записанных на доске, раскладывают на два множителя, после чего само число стирают, а вместо него выписывают эти два множителя, увеличенные или уменьшенные на 2 (независимо друг от друга). Может ли так случиться, что в конце концов на доске будет выписано несколько раз число 9?

1997.63. Прибор состоит из $4n$ микросхем, любые две из которых соединены между собой напрямую либо красным, либо синим проводом, причём красных и синих проводов поровну. Прибор полностью выйдет из строя, если удалить какие-нибудь два одноцветных провода, протянутых между четырьмя микросхемами. Агент потенциального противника подсчитал количество способов вывести из строя упомянутый прибор выдергиванием двух синих проводов. Докажите, что существует ровно столько же способов подломить прибор, выдергивая два красных провода.

1997.64. См. задачу 56.

1997.65. Ацтекский диамант ранга n — это фигура, состоящая из клеток координатной клетчатой плоскости, целиком содержащихся в квадрате $\{(x, y) : |x| + |y| \leqslant n + 1\}$. Для произвольного покрытия диаманта прямоугольниками 1×2 (домино) разрешается выполнить следующую операцию (“переключение”): выбрать квадрат 2×2, покрытый ровно двумя домино, и повернуть его на 90°. Докажите, что не более чем за $n(n+1)(2n+1)/6$ операций из произвольного покрытия можно получить покрытие, состоящее только из горизонтально расположенных домино.