ЗАДАЧИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ГОРОДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Второй тур

6 класс

29. На кошачьей выставке в ряд сидит 10 котов и 19 кошек, причём рядом с любой кошкой сидит более толстый кот. Докажите, что рядом с любым котом сидит кошка, которая тоньше его.
(*С. Берлов*)

30. Докажите, что если цифры десятизначного числа выписать в обратном порядке, то полученное число не будет ровно в три раза больше исходного. (*А. Храбров*)

31. Есть 10 монет, среди них ровно две фальшивые. Детектор R7 за одну операцию исследует три монеты и указывает на одну из них. Известно, что детектор не может указать на настоящую монету, если среди тестируемых монет есть хотя бы одна фальшивая. Как за шесть тестов выявить обе фальшивые монеты?
(*Р. Исмаилов, В. Франк, О. Ванюшина*)

32. На доске написано пять двузначных натуральных чисел. Чебурашка может прибавить ко всем числам единицу или (тоже ко всем числам) двойку. После этого К. Гена может стереть какое-нибудь число, делящееся на 13, или число, сумма цифр которого делится на 7 (если, конечно, такое число на доске есть). Докажите, что Гена может помешать Чебурашке получить хотя бы одно шестизначное число. (*К. Кохась*)

33. На одной стороне улицы разбитых фонарей стояло 150 фонарей, причём среди любых трёх фонарей, стоявших подряд, хотя бы один был разбит. После того, как электрик Петров починил несколько фонарей, среди любых четырёх фонарей, стоявших подряд, осталось не более одного разбитого. Докажите, что электрик починил не менее 25 фонарей. (*К. Кохась*)

34. На Васиной чаше двухчашечных весов лежат гири весом 1 г, 3 г, ... , 2001 г, а на Петиной чаше — 2 г, 4 г, ... , 2000 г. Первым ходит Вася — он убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Петиной. Потом Петя убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Васиной. Затем опять ходит Вася, потом Петя, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет убрать все гири со своей чаши. Кто выигрывает при правильной игре? (*Ю. Лифшиц*)

7 класс

35. Пол в гостиной барона Мюнхгаузена вымощен одинаковыми квадратными каменными плитами. Барон утверждает, что его новый ковер (сделанный из одного куска ковролина) закрывает ровно 24 плиты и при этом каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд плит в гостиной содержит ровно 4 плиты, покрытых ковром. Не обманывает ли барон? (*И. Кацев*)

36. Саша выписал первый миллион натуральных чисел, не делящихся на 4. Рома подсчитал сумму 1000 подряд идущих чисел в Сашиной записи. Могло ли у него получиться в результате 20012002? (*А. Голованов*)

37. На доске написано пять двузначных натуральных чисел. Чебурашка каждую минуту прибавляет ко всем числам единицу или прибавляет ко всем числам двойку. К. Гена после этого может стереть любое число, делящееся на 13, или число, у которого сумма цифр делится на 7 (если, конечно, такое число на доске есть). Докажите, что при любых действиях Чебурашки Гена через некоторое время сумеет стереть с доски все числа. (*К. Кохась*)

38. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Установите, какой из отрезков BF или BE длиннее. (*Ф. Бахарев*)

39. Шестизначное число, делящееся на 9, умножили на 111111. Докажите, что десятичная запись произведения содержит хотя бы одну девятку. (*А. Храбров*)

40. См. задачу 34.

41. Клетки черно-белой доски 12×12 раскрашены в шахматном порядке. Разрешается взять любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: черные клетки — в зеленый цвет, зеленые — в белый, белые — в черный. Какое наименьшее число таких операций потребуется, чтобы получить "противоположную" бело-черную шахматную раскраску? (*К. Кохась*)

8 класс

42. Существует ли двадцатизначное натуральное число такое, что, если его цифры записать в обратном порядке, то полученное число будет ровно в три раза больше первоначального?

(*А. Храбров*)

43. См. задачу 38.

44. Натуральные числа u и v таковы, что для любого натурального k числа $ku + 2$ и $kv + 3$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение $\frac{u}{v}$?

(*А. Голованов, Д. Карпов, А. Пастор*)

45. См. задачу 34.

46. В треугольнике ABC выполняется равенство $BC = 2AC$. На стороне BC выбрана такая точка D, что $\angle CAD = \angle CBA$. Прямая AD пересекает биссектрису внешнего угла C в точке E. Докажите, что $AE = AB$. (*С. Берлов*)

47. В некотором государстве 2001 город, причем любые два города соединены прямым рейсом автобуса или поезда. Пользуясь только одним из этих двух видов транспорта, невозможно объехать 16 городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно. Докажите, что, пользуясь только одним видом транспорта невозможно объехать 17 городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно.

(*А. Голованов и Д.Карпов, неверный перевод с венгерского*)

48. Колоду карточек с числами от 1 до 78 дают зрителю. Тот ее перемешивает, отбирает 40 карточек, отдает их первому фокуснику, а остальные оставляет себе. Первый фокусник выбирает из полученных карточек две и возвращает их зрителю. Зритель добавляет к этим карточкам одну карточку из своих тридцати восьми, и, перемешав, отдает эти три карточки второму фокуснику. Второй фокусник показывает, какая из карточек была добавлена зрителем. Объясните, как может быть показан такой фокус. (*К. Кохась*)